

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

В. А. Ащеулов, А. В. Мареев

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве практикума для обучающихся по направлению подготовки
21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2021

УДК 528.2:528.029.69

A989

Рецензенты: кандидат технических наук, профессор кафедры инженерной геодезии НГАСУ (Сибстрин) *В. А. Середович*

кандидат технических наук, доцент, СГУГиТ *Е. Г. Гиенко*

Ащеулов, В. А.

A989 Основы теории движения космических аппаратов [Текст] : практикум / В. А. Ащеулов, А. В. Мареев. – Новосибирск : СГУГиТ, 2021. – 73 с.

ISBN 978-5-907513-20-4

Практикум подготовлен кандидатами технических наук, доцентами В. А. Ащеуловым и А. В. Мареевым на кафедре космической и физической геодезии СГУГиТ.

Приведены общие теоретические сведения, задания, технология выполнения работ, требования к отчету, контрольные вопросы для проверки знаний по темам практических работ и необходимая справочная информация.

Практикум по дисциплине «Основы теории движения космических аппаратов» предназначен для обучающихся по направлению подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование, профиль Геодезия (уровень бакалавриата) и может быть полезен для обучающихся по специальности 21.05.01 Прикладная геодезия.

Рекомендован к изданию кафедрой космической и физической геодезии, Ученым советом Института геодезии и менеджмента СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 528.2:528.029.69

ISBN 978-5-907513-20-4

© СГУГиТ, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Практическая работа № 1. Определение предварительной орбиты искусственного спутника Земли.....	6
Практическая работа № 2. Определение параметров невозмущен- ной орбиты искусственного спутника Земли и его положения на заданный момент времени	19
Практическая работа № 3. Расчет возмущений орбиты искусствен- ного спутника Земли под влиянием сжатия Земли.....	39
Практическая работа № 4. Расчет трассы и вычисление эфемериды искусственного спутника Земли.....	53
Библиографический список.....	67
Приложение 1. Исходные данные к практической работе № 1	68
Приложение 2. Исходные данные к практической работы № 2	70

ВВЕДЕНИЕ

Практикум по дисциплине «Основы теории движения космических аппаратов» (ОТДКА) предназначен для обучающихся по направлению подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата, профиль «Геодезия»). Он также может быть полезен для обучающихся по специальности 21.05.01 Прикладная геодезия. Практические работы составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины с целью закрепления теоретических знаний, полученных обучающимися в процессе лекционных занятий и самостоятельной работы, приобретения навыков вычислений, пространственного мышления и формирование у обучающихся профессиональных компетенций, определяющих готовность и способность будущих выпускников к эффективному применению усвоенных знаний о теории движения искусственных спутников Земли для применения космических технологий в геодезии.

В практикум включены четыре практические работы, содержание которых способствует формированию у обучающихся знаний, умений и навыков в рамках профессиональных компетенций ПК-1 и ПК-6. Авторы с благодарностью вспоминают доктора технических наук, профессора К. М. Антоновича и выражают признательность кандидату технических наук, доценту кафедры космической и физической геодезии Е. Г. Гиенко, предоставивших материалы по практическим работам с номерами 2, 3 и 4. Авторами были модернизированы эти работы под задачи курса ОТДКА в соответствии с рабочей программой дисциплины и добавлены общие теоретические сведения. Практическая работа № 1 разработана впервые.

Приложения к практикуму содержат варианты исходных данных и справочную информацию.

Требования к отчетам по практическим работам

1. Практические работы предоставляются преподавателю, как правило, в электронном виде. Отчет о работе должен быть набран в редакторе Word

и отправлен преподавателю через раздел ЭИОС СГУГиТ «Электронное портфолио обучающихся». В отдельных случаях работа может быть представлена на проверку в печатном варианте. Каждая практическая работа оформляется в текстовом редакторе Microsoft Office Word на листах формата А4; шрифт Times New Roman, размер 14; межстрочный интервал – одинарный; поля: левое, правое, нижнее и верхнее – по 20 мм; абзацный отступ – 10 мм. Отчет должен содержать изложение работы с формулами, расчетами и полученными результатами в соответствии с требованиями конкретного задания.

2. Не принимаются рукописные работы, фотографии рукописей, сканированные и архивированные работы.

3. Отчет должен направляться с титульным листом, на котором должно быть указано: название вуза, название практической работы, номер варианта, фамилия и инициалы обучающегося, номер группы, фамилия и инициалы преподавателя, год.

4. Результаты вычислений приводить в десятичных дробях с удержанием восьми значащих цифр.

5. Необходимо обращать внимание на правильное обозначение часовых и угловых величин. Итоговые значения временных величин приводить в часах, минутах, секундах (h, m, s). Итоговые значения угловых величин приводить в градусах, минутах, секундах ($^{\circ}$, $'$, $''$).

6. У результатов вычислений обязательно проставлять их размерность, что позволит избежать ошибок, вызванных рассогласованием размерностей величин в формулах.

7. Значение гравитационного параметра Земли принять равным $398\,600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$.

8. Для переоформления размерности угловых величин использовать следующие значения радиана: $\rho'' = 206\,264,806''$; $\rho' = 3\,437,746\,8'$; $\rho^{\circ} = 57,295\,779\,5^{\circ}$. При пересчете величин из часовой размерности в угловую и наоборот использовать следующие соотношения: $1^h = 15^{\circ}$, $1^m = 15'$, $1^s = 15''$. Если практическая работа не зачтена, то после исправлений ее необходимо выслать в адрес преподавателя повторно.

9. Защита практической работы заключается в собеседовании по контрольным вопросам.

Практическая работа № 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОРБИТЫ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

Время выполнения: 10 часов (8 часов аудиторной работы и 2 часа самостоятельной работы).

Цель работы: изучение способов контроля вывода космического аппарата на расчетную орбиту.

Задачи работы: освоить технологию определения предварительной орбиты ИСЗ методом Гаусса.

Перечень обеспечивающих средств: исходные данные для выполнения работы по вариантам; компьютерная техника с возможностью подключения к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную образовательную среду СГУГиТ; программное обеспечение Microsoft Windows, Zoom, Microsoft Teams; пакет математических программ для вычислений Mathcad; приложение для работы с электронными таблицами Excel.

Общие теоретические сведения

После доставки космического аппарата ракетой-носителем в заданную точку околоземного пространства с заданным вектором скорости он продолжает свое движение по орбите вокруг Земли, и сразу же с наземных пунктов наблюдения начинается слежение за ним с целью определения соответствия его траектории движения расчетной орбите. Эта задача решается в два этапа. Оперативно, по минимуму наблюдений, определяется предварительная орбита спутника. Затем, по максимально возможному числу наблюдений, охватывающих как можно большее число участков орбиты, выполняется ее уточнение, после чего следует заключение о выводе спутника на расчетную орбиту, о точности вывода, о необходимости корректировки орбиты или признание запуска неудачным.

Способов определения предварительной орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) существует несколько. Рассмотрим один из них – способ Гаусса [11]. Для этого способа необходимо наличие двух наблюдений спутника с одного наземного пункта (НП) при полном составе топоцентрических векторов наблюдения $\rho_1(\rho'_1, \alpha'_1, \delta'_1)$ и $\rho_2(\rho'_2, \alpha'_2, \delta'_2)$, полученных в моменты времени t_1 и t_2 соответственно в дату наблюдения d (рис. 1).

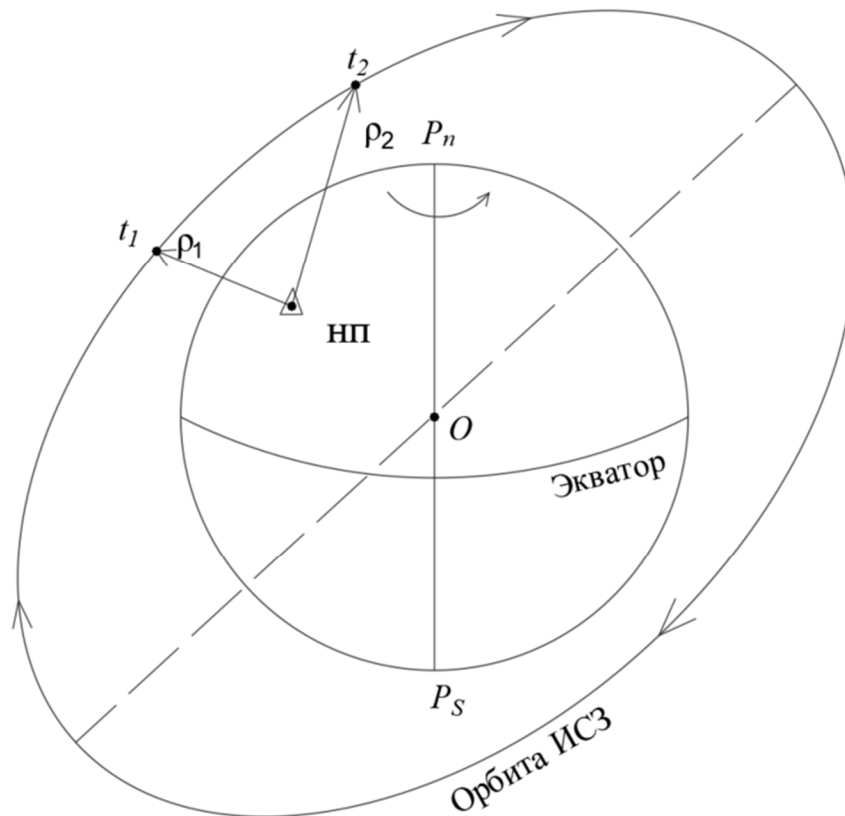


Рис. 1. Геометрия наблюдений ИСЗ с НП в методе Гаусса

Заметим, что направления векторов в методе Гаусса задаются во второй экваториальной системе координат, относящейся к группе инерциальных систем координат [2]. Направления векторов ρ_1 и ρ_2 могут быть заданы и в горизонтной системе координат (A, h) , основные линии и точки которой жестко связаны с Землей. В этом случае топоцентрические векторы наблюдений ИСЗ будут иметь вид $\rho_1(\rho'_1, A'_1, h'_1)$ и $\rho_2(\rho'_2, A'_2, h'_2)$.

Координаты наземного пункта наблюдения могут быть также заданы двояко – в виде геодезических координат B, L, H или в виде прямоугольных координат X, Y, Z . Перевычисление геодезических координат НП в прямоугольные выполняется по формулам высшей геодезии [3]:

$$\begin{aligned} X_G &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y_G &= (N + H) \cos B \sin L; \\ Z_G &= \left[N(1 - e^2) + H \right] \sin B, \end{aligned} \quad (1)$$

где N – радиус кривизны первого вертикала в точке НП;

e^2 – квадрат эксцентриситета эллипсоида вращения.

Радиус кривизны первого вертикала N вычисляется по формуле:

$$N = \frac{a_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (2)$$

где a_e – большая полуось эллипсоида вращения.

Исходной формулой определения предварительной орбиты ИСЗ в методе Гаусса является фундаментальное уравнение космической геодезии [6]

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{\rho}, \quad (3)$$

где $\mathbf{r}(x, y, z)$ – геоцентрический радиус-вектор спутника;

$\mathbf{R}(X, Y, Z)$ – геоцентрический радиус-вектор наземного пункта;

$\mathbf{\rho}(x', y', z')$ – топоцентрический радиус-вектор спутника должны быть заданы в инерциальной системе координат.

Приведенные в скобках при векторах $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{\rho}$ величины представляют собой проекции соответствующих векторов на оси инерциальной системы координат.

Прямоугольные составляющие топоцентрических радиус-векторов $\mathbf{\rho}_i$ на моменты наблюдений t_i в случае измерения направления векторов

в виде прямого восхождения α_i и склонения δ_i вычисляются в инерциальной системе координат по формулам:

$$\begin{aligned}x'_i &= \rho_i \cos \delta_i \cos \alpha_i; \\y'_i &= \rho_i \cos \delta_i \sin \alpha_i; \\z'_i &= \rho_i \sin \delta_i.\end{aligned}\tag{4}$$

Подстрочный индекс i обозначает номер наблюдения и принимает значения 1 или 2.

В случае измерения направления топоцентрических радиус-векторов ρ_i в виде горизонтных координат A_i и h_i прямоугольные составляющие векторов задаются в горизонтной системе координат и вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}hx'_i &= \rho_i \cos h_i \sin A_i; \\hy'_i &= \rho_i \cos h_i \cos A_i; \\hz'_i &= \rho_i \sin h_i.\end{aligned}\tag{5}$$

Затем они должны быть преобразованы сначала в земную систему координат по формуле

$$\begin{pmatrix} gx'_i \\ gy'_i \\ gz'_i \end{pmatrix} = R_1(90^\circ - B) R_3 \left[- (90^\circ + L) \right] \begin{pmatrix} hx'_i \\ hy'_i \\ hz'_i \end{pmatrix},\tag{6}$$

а затем преобразованы в инерциальную систему координат по формуле

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = R_3(-S_i) \begin{pmatrix} gx'_i \\ gy'_i \\ gz'_i \end{pmatrix}.\tag{7}$$

В формулах (7) и (8) символами $R_j(\alpha)$ обозначены матрицы вращения вокруг оси с номером j ($j = 1, 2, 3$) на угол α , применяемые при преобразовании прямоугольных координат. Под S_i понимается гринвичское звездное

время, соответствующее моменту наблюдения спутника t_i . Если моменты наблюдения ИСЗ фиксируются по времени часового пояса Москвы, то время S_i может быть вычислено по формуле

$$S_i = S_0 + (t_i - 3^h)(1 + \mu), \quad (8)$$

где S_0 – звездное время в гринвичскую полночь на дату d ;

μ – коэффициент перехода от шкалы солнечного времени к шкале звездного времени, имеющий значение 0,002 737 909 3 [2].

По аналогии с формулой (7) получается формула преобразования координат НП из земной системы координат в инерциальную:

$$\begin{pmatrix} X_\gamma \\ Y_\gamma \\ Z_\gamma \end{pmatrix} = R_3(-S_i) \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Таким образом, для t_i ($i = 1, 2$) момента наблюдения векторное равенство (3) можно раскрыть в координатной форме

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_\gamma \\ Y_\gamma \\ Z_\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Далее, по прямоугольным геоцентрическим координатам спутника x_i, y_i, z_i на моменты t_i ($i = 1, 2$) получим его геоцентрические координаты α_i, δ_i, r_i во второй экваториальной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \arctg \frac{y_i}{x_i} \\ \delta_i &= \arctg \frac{z_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \\ r_i &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Теперь можно приступать к получению формул вычисления кеплеровых элементов предварительной орбиты спутника. Начнем с элементов, характеризующих ориентировку орбиты в пространстве.

Для этого воспользуемся рис. 2, на котором:

γ – положение точки весеннего равноденствия;

Ω – восходящий узел орбиты, долгота восходящего узла орбиты;

i – наклонение орбиты;

m_1, m_2 – положение ИСЗ на орбите в моменты t_1, t_2 соответственно;

m'_1, m'_2 – проекции положений ИСЗ на орбите в моменты t_1, t_2 на экватор вдоль соответствующих кругов склонений;

δ_1, δ_2 – склонение ИСЗ в моменты t_1, t_2 соответственно;

α_1, α_2 – прямое восхождение ИСЗ в моменты t_1, t_2 соответственно.

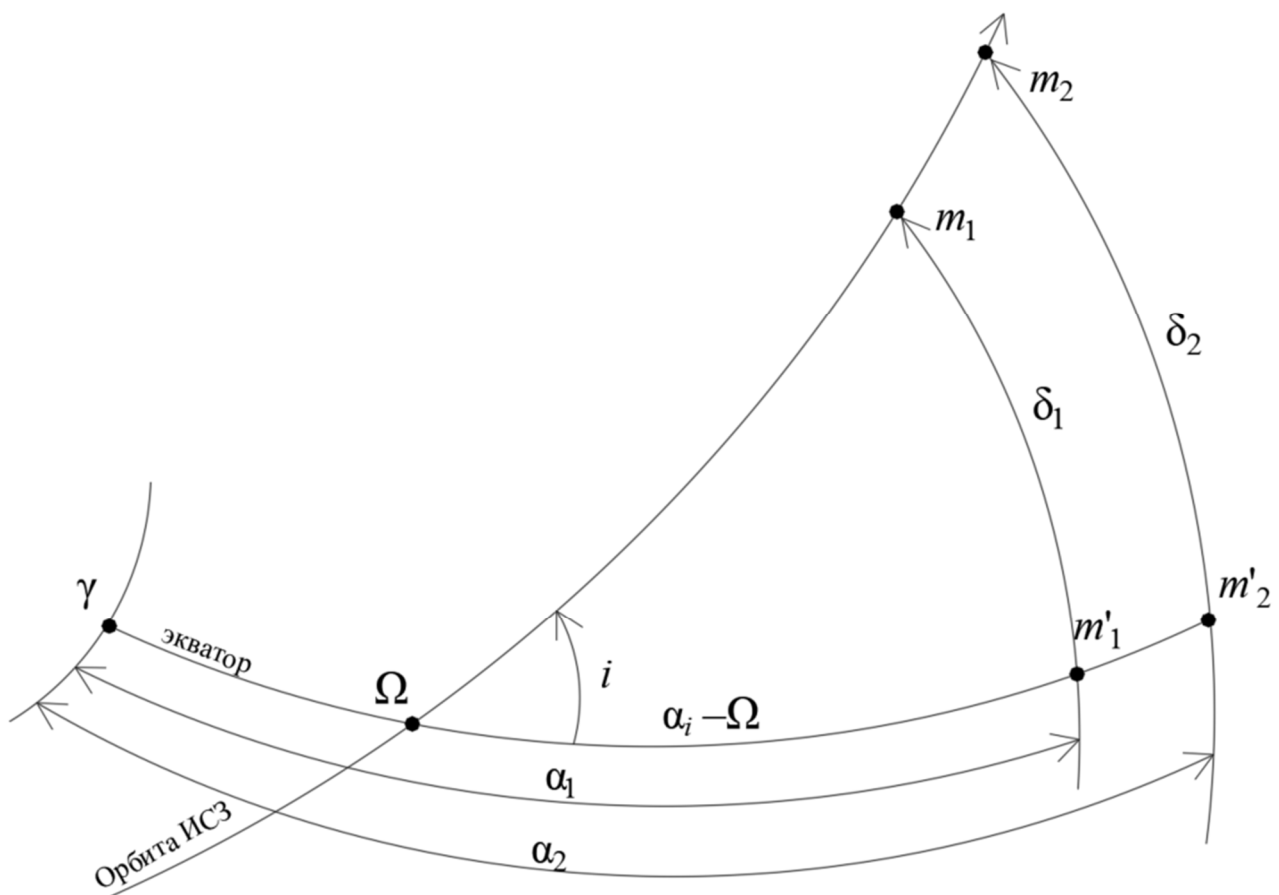


Рис. 2. Связь экваториальных координат ИСЗ и элементов ориентирования орбиты в пространстве на моменты наблюдений t_i

Из прямоугольных сферических треугольников $\Omega m_i m'_i$, изображенных на рис. 2, по формулам сферической тригонометрии получаем угловые параметры орбиты, характеризующие ее ориентировку в пространстве.

1. Формула для вычисления долготы восходящего узла орбита Ω :

$$\Omega = \alpha_1 - \arctg \frac{\operatorname{tg} \delta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\operatorname{tg} \delta_2 - \operatorname{tg} \delta_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (12)$$

2. Согласно правилу Непера из рис. 2 имеем

$$\operatorname{tgi} = \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{cosec}(\alpha_1 - \Omega), \quad (13)$$

откуда получаем рабочую формулу для вычисления наклонения орбиты i :

$$i = \arctg \left[\operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{cosec}(\alpha_1 - \Omega) \right]. \quad (14)$$

Контрольная формула для вычисления наклонения орбиты i имеет вид

$$i = \arctg \left[\frac{\operatorname{tg} \delta_2 - \operatorname{tg} \delta_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos(\alpha_2 - \Omega) \sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \right]. \quad (15)$$

3. Аргументы широты u_i на моменты наблюдений t_i ($i = 1, 2$) вычисляются по формуле

$$u_i = \arccos \left[\cos \delta_i \cos(\alpha_i - \Omega) \right]. \quad (16)$$

4. Определение фокального параметра орбиты p с учетом эллиптического характера орбиты выполняется в три этапа.

I этап. Вычисление вспомогательных величин:

а) вычисление вспомогательной величины l :

$$l = \frac{1}{2} \left[\frac{r_1 - r_2}{2\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right)} - 1 \right]; \quad (17)$$

б) вычисление вспомогательной величины m :

$$m = \frac{\mu(t_2 - t_1)}{8(r_1 r_2)^{3/2} \cos\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right)}, \quad (18)$$

где μ – гравитационный параметр Земли ($\mu = 398\,600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$);

в) вычисление вспомогательной величины X .

$$X = \frac{m}{\eta_0^2} - l, \quad (19)$$

где

$$\eta_0 \approx 1 + \frac{4}{3}m \left[1 - 1,1 \left(\frac{4}{3}m \right) - 1,2l \right]. \quad (20)$$

Формула (20) является приближенным отношением площади эллиптического треугольника, образованного радиус-векторами r_1, r_2 , и дугой орбиты m_1, m_2 к площади обычного плоского треугольника Om_1m_2 (рис. 3). На рис. 3 m_1 и m_2 обозначают положения спутника на орбите в моменты наблюдений t_1 и t_2 ;

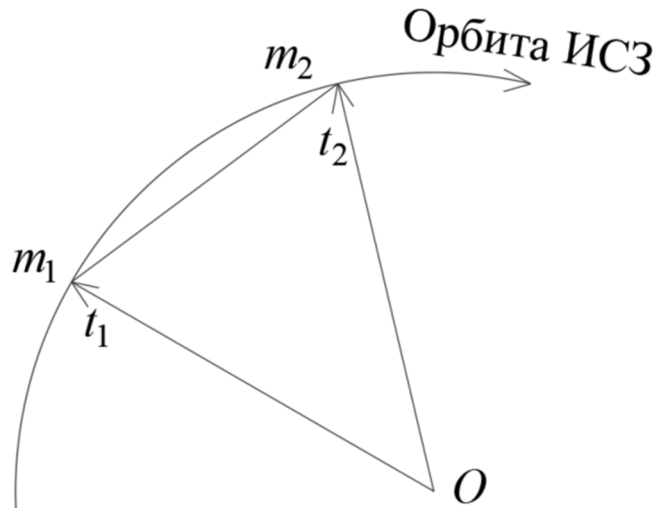


Рис. 3. Геометрическая интерпретация формулы (20)

г) вычисление вспомогательной разности $E_2 - E_1$:

$$E_2 - E_1 = \frac{1}{4} \arcsin \sqrt{X}; \quad (21)$$

д) вычисление вспомогательной величины $E(X)$:

$$E(X) = \frac{(E_2 - E_1) - \sin(E_2 - E_1)}{\sin^3\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)}. \quad (22)$$

II этап. Вычисление отношения площади эллиптического треугольника, образованного геоцентрическими расстояниями r_1, r_2 и дугой орбиты $m_1 m_2$, к площади обычного треугольника $Om_1 m_2$ по уточненной формуле

$$\eta^3(X) - \eta^2(X) = m E(X). \quad (23)$$

Уравнение (23) решается методом последовательных приближений относительно $\eta(X)$ по итерационной формуле

$$\eta_n(X) = \eta_{n-1}(X) - \frac{\eta_{n-1}^3(X) - \eta_{n-1}^2(X) - mE(X)}{3\eta_{n-1}^2(X) - 2\eta_{n-1}(X)}. \quad (24)$$

В качестве нулевого приближения берут значение η , вычисленное по формуле (20). Итерации по формуле (24) прекращают до достижения заданной точности вычислений ε .

III этап. С окончательным значением η , полученным по итерационной формуле (24), вычисляют значение фокального параметра орбиты p по формуле

$$p = \eta^2 \frac{[r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)]^2}{\mu(t_2 - t_1)^2}. \quad (25)$$

Затем переходим к вычислению остальных кеплеровых элементов орбиты.

5. Вычисление истинной аномалии v_i на моменты наблюдений.

$$\operatorname{tg} v_1 = \frac{\frac{p-r_1}{r_1} \cos(u_2 - u_1) - \frac{p-r_2}{r_2}}{\frac{p-r_1}{r_1} \sin(u_2 - u_1)}, \quad (26)$$

$$v_2 = v_1 - (u_2 - u_1). \quad (27)$$

6. Вычисление эксцентриситета орбиты e .

В качестве исходной для получения формулы вычисления эксцентриситета орбиты используется формула уравнения орбиты, записанная для t_i -го момента наблюдения ($i = 1, 2$)

$$r_i = \frac{p}{1 + e \cos v_i}. \quad (28)$$

Из формулы (28) для каждого из двух моментов наблюдения спутника получаем два значения эксцентриситета, вычисляемые по формулам:

$$e_1 = \frac{p - r_1}{r_1 \cos v_1}; \quad (29)$$

$$e_2 = \frac{p - r_2}{r_2 \cos v_2}. \quad (30)$$

Оба значения эксцентриситета, полученные по формулам (29) и (30), должны быть близки. Различие между этими значениями может быть обусловлено погрешностями при вычислении величин, стоящих в правых частях этих формул.

Для дальнейшего использования можно взять среднее из двух полученных значений эксцентриситета.

$$e = \frac{e_1 + e_2}{2}. \quad (31)$$

7. Вычисление аргумента перигея орбиты ω . Как и для эксцентриситета, аргумент перигея может быть получен по данным, относящимся к двум наблюдаемым положениям ИСЗ:

$$\omega_1 = u_1 - v_1; \quad (32)$$

$$\omega_2 = u_2 - v_2. \quad (33)$$

Для дальнейшего использования можно взять среднее из двух полученных значений аргумента перигея

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (34)$$

8. Вычисление большой полуоси орбиты и среднего движения.

$$a = \frac{p}{1 - e^2}; \quad (35)$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \quad (36)$$

9. Вычисление эксцентрической аномалии на моменты наблюдений t_i :

$$E_i = 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v_i}{2} \right), \quad (i = 1, 2). \quad (37)$$

По формуле (37) вычисляется главное значение обратной тригонометрической функции. Для получения действительного значения эксцентрической аномалии E_i следует принимать во внимание близкое к ней значение истинной аномалии v_i .

10. Вычисление момента прохождения спутника через перигей орбиты t_π по двум наблюдениям ($i = 1, 2$):

$$t_\pi^i = t_i - \frac{1}{n} (E_i - e \sin E_i), \quad (i = 1, 2). \quad (38)$$

В дальнейшем за момент прохождения спутником перигея орбиты принимают среднее из моментов, вычисленных по формуле (38):

$$t_{\pi} = \frac{t_{\pi}^1 + t_{\pi}^2}{2}. \quad (39)$$

11. Вычисление средней аномалии M_0 на средний момент времени t_0 :

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}; \quad (40)$$

$$M_0 = n(t_0 - t_{\pi}). \quad (41)$$

Таким образом, на средний момент наблюдения t_0 получены все шесть кеплеровых элементов $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$ предварительной орбиты спутника.

Задание

С наземного пункта, имеющего геодезические координаты B, L, H в общеземной системе координат ПЗ-90, выполнены наблюдения спутника в моменты времени t_1 и t_2 московского поясного времени в шкале UTC (SU) в дату d и получены его топоцентрические координаты в горизонтной системе координат $\rho_1(\rho'_1, A'_1, h'_1)$ и $\rho_2(\rho'_2, A'_2, h'_2)$. Определить предварительную орбиту спутника на средний момент времени наблюдений.

Рекомендации по выполнению работы

Для решения поставленной задачи применить метод Гаусса при определении предварительной орбиты ИСЗ в кеплеровых элементах по двум наблюдениям спутника с одной станции при полном составе наблюдений (формулы (1)–(41) из общих теоретических сведений к работе). Исходные данные к практической работе взять из прил. 1, в котором на дату d по вариантам приводится исходная информация по каждому наблюдению: A'_1, h'_1, ρ'_1, t_1 и A'_2, h'_2, ρ'_2, t_2 . Координаты пункта наблюдения приведены в геодезической системе B, L, H , отнесенной к общему земному эллипсоиду

ПЗ-90 с параметрами $a_e = 6\,378\,136$ м, $e^2 = 6,6\,943\,662 \cdot 10^{-3}$. Относительную точность вычислений ε принять равной 10^{-7} . Значение звездного времени S_0 в гринвичскую полночь на дату d найти с использованием сети Интернет или воспользоваться данными «Астрономического ежегодника» на год наблюдения.

Контрольные вопросы

1. В связи с чем возникает необходимость определения предварительной орбиты спутника? Приведите известные способы определения предварительной орбиты ИСЗ.
2. Перечислите виды наблюдений спутника с наземного пункта.
3. Дайте определение второй экваториальной системы координат.
4. Дайте определение горизонтной системы координат.
5. Объясните принципиальную разницу между геоцентрическим и топоцентрическим векторами положения спутника.
6. Объясните назначение кеплеровых элементов орбиты: a – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклонение орбиты, Ω – долгота восходящего узла, ω – аргумент перигея, $M(t)$ – средняя аномалия.
7. Поясните разницу между истинной, эксцентрической и средней аномалиями спутника.
8. Укажите направление осей земной системы координат.
9. Укажите направление осей инерциальной системы координат.
10. Поясните принципиальную разницу между инерциальной и земной системами координат.

Практическая работа № 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕВОЗМУЩЕННОЙ ОРБИТЫ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ И ЕГО ПОЛОЖЕНИЯ НА ЗАДАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Время выполнения: 12 часов (8 часов аудиторной работы и 4 часа самостоятельной работы).

Цель работы: закрепление теории прогнозирования невозмущенной орбиты ИСЗ.

Задачи работы: получить практические навыки расчета основных параметров невозмущенной орбиты спутника и вычислить положение и скорость спутника на заданный момент времени.

Перечень обеспечивающих средств: исходные данные для выполнения работы по вариантам; компьютерная техника с возможностью подключения к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную образовательную среду СГУГиТ; программное обеспечение Microsoft Windows, Zoom, Microsoft Teams; пакет математических программ для вычислений Mathcad; приложение для работы с электронными таблицами Excel.

Общие теоретические сведения

Движение ИСЗ происходит под влиянием различных сил, при этом определяющей среди них является сила притяжения спутника Землей [1, 6, 7, 9]. Распределение масс внутри Земли является неравномерным, и, вследствие этого, на разных участках траектории движения спутника гравитационное поле Земли действует на спутник также неравномерно. Но если для описания движения спутника использовать физическую модель Земли с равномерным распределением масс в виде сферических слоев, то в этом случае Земля будет влиять на спутник как материальная точка, имеющая массу, равную массе реальной Земли. Движение спутника под влиянием такой смоделированной Земли получило название *невозмущенного движе-*

ния. Невозмущенное движение является достаточно близким приближением к реальной траектории спутника.

Отличительными особенностями невозмущенного движения являются следующие его характеристики [1, 6, 7]:

- 1) ориентировка плоскости орбиты спутника в пространстве и расположение самой орбиты в плоскости движения не изменяются с течением времени;
- 2) спутник за время, равное периоду его обращения, прилетает в ту же точку пространства;
- 3) формулы, описывающие движение спутника по орбите, имеют конечный вид;
- 4) невозмущенное движение спутника подчиняется трем законам Кеплера, которые сформулируем применительно к искусственным спутникам Земли.

Первый закон Кеплера: орбита спутника есть эллипс, в главном фокусе которого находится центр масс Земли.

Второй закон Кеплера: геоцентрический радиус-вектор спутника за равные промежутки времени описывает равные площади.

Третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения двух ИСЗ относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Движение спутника в невозмущенном движении описывается шестью параметрами: a , e , i , Ω , ω , M , получившими название *кеплеровых элементов орбиты*.

Приведем назначение и особенности кеплеровых элементов:

a – *большая полуось* орбиты. Характеризует размер орбиты; ее значение ограничено только областью воздействия гравитационного поля Земли на космический аппарат;

e – *эксцентриситет* орбиты. Безразмерная величина, характеризует степень сжатия орбитального эллипса, изменяется в пределах от 0 до 1. Значение эксцентриситета, равное нулю, относится к круговой орбите. Чем больше значение эксцентриситета, тем сильнее ее сжатие;

i – *наклонение орбиты*. Характеризует угол наклона плоскости орбиты к плоскости земного экватора, изменяется в пределах от 0 до 180° ;

Ω – *долгота восходящего узла*. Характеризует разворот плоскости орбиты спутника относительно направления на точку весеннего равноденствия γ (направление оси x инерциальной системы координат), изменяется в пределах от 0 до 360° ;

ω – *аргумент перигея*. Характеризует поворот большой оси симметрии орбиты (линии апсид) относительно направления на восходящий узел орбиты Ω из центра масс Земли. Численно равен отстоянию точки перигея π от восходящего узла орбиты Ω . Изменяется в пределах от 0 до 360° ;

M – *средняя аномалия*. Характеризует положение спутника на орбите в заданный момент времени t , поэтому среднюю аномалию, как правило, приводят в виде $M(t)$ с указанием момента времени. Изменяется в пределах от 0 до 360° . Отсчитывается от точки перигея π . Средняя аномалия M характеризует среднюю скорость перемещения спутника по орбите.

На рис. 4 и 5, заимствованных авторами из работы [1], представлена геометрия орбиты ИСЗ и ее ориентировка в пространстве.

На рис. 4 обозначены:

a, b, p – большая полуось, малая полуось орбиты и фокальный параметр соответственно;

O, C – главный фокус орбиты (центр масс Земли) и геометрический центр эллипса соответственно;

π, α – перигей, апогей орбиты соответственно; линия $\pi\alpha$ – линия апсид;

r_π, r_α – перигейное, апогейное расстояния соответственно;

m – положение спутника на орбите в момент времени t ;

E, v, ω – эксцентрическая, истинная аномалии, аргумент перигея соответственно;

λ – вектор Лапласа;

$\Omega, \mathcal{U}$ – восходящий, нисходящий узлы орбиты соответственно; линия $\Omega\mathcal{U}$ – линия узлов орбиты;

m' – проекция положения спутника на окружность радиусом, равным большой полуоси орбиты;

m_0 – вспомогательная точка; проекция положения спутника на линию апсид.

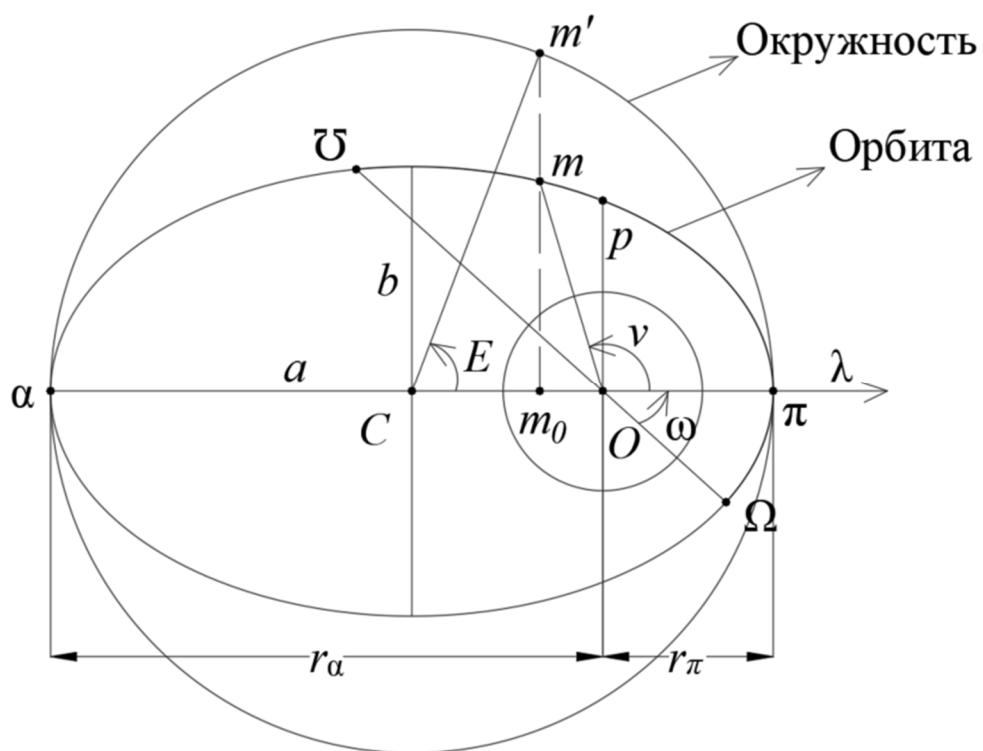


Рис. 4. Основные точки и линии орбитального эллипса

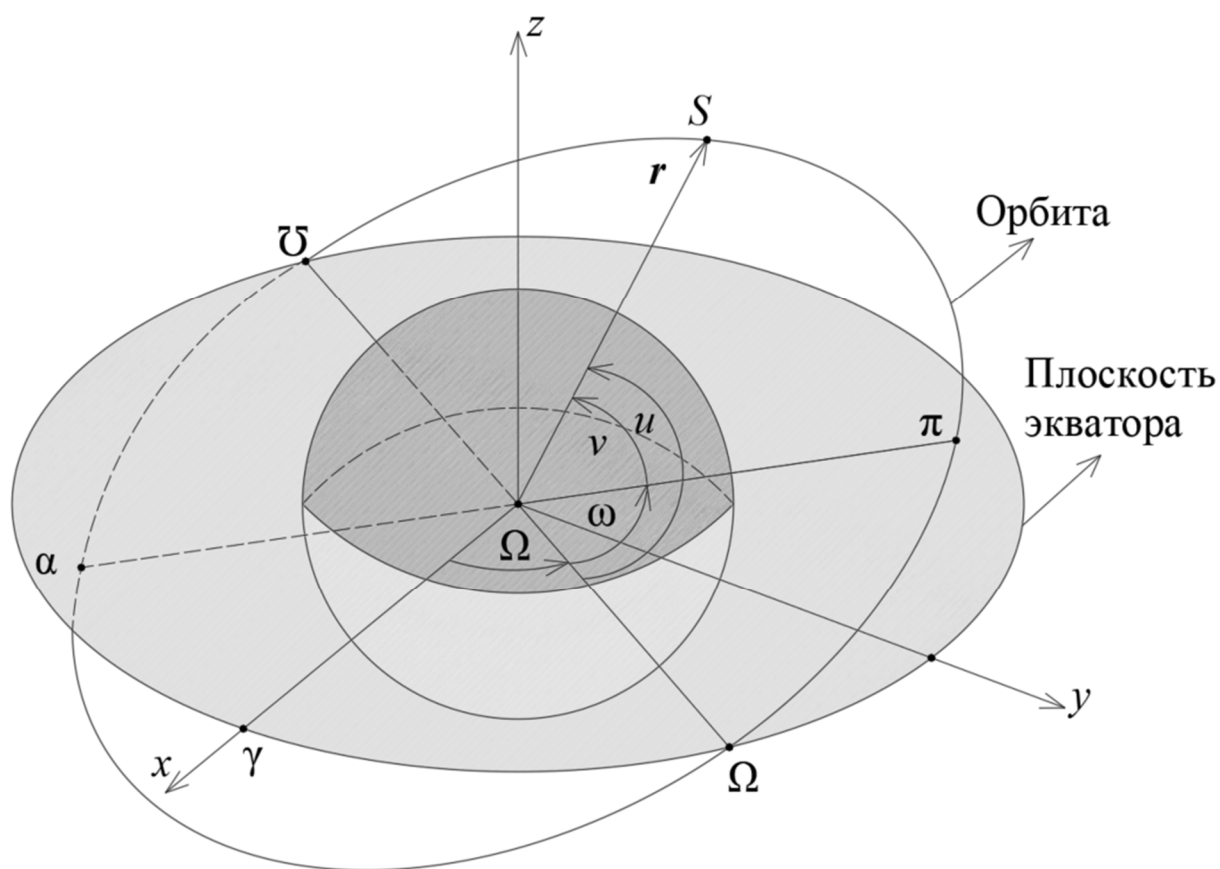


Рис. 5. Ориентировка орбиты в пространстве

Большинство обозначений, приведенных на рис. 5, уже описаны выше. Дополнительно обозначим:

S – положение спутника в момент времени t ;

r – геоцентрический радиус-вектор спутника;

u – аргумент широты.

Задача определения положения спутника и скорости его движения по орбите в заданный момент времени получила название *прогнозирование невозмущенного движения* спутника. Координаты спутника x, y, z и прямоугольные составляющие скорости его движения по орбите $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ в заданный момент времени t являются функциями кеплеровых элементов орбиты на этот момент.

Из отличительных особенностей невозмущенного движения вытекает постоянство по времени первых пяти кеплеровых элементов: a, e, i, Ω, ω . Во времени изменяется только средняя аномалия $M(t)$. Таким образом, задача прогнозирования невозмущенного движения в итоге сводится к задаче определения $M(t)$. В качестве исходной информации необходимо знание кеплеровых элементов на некоторый момент времени t_0 , который будем называть *начальным моментом*. Обозначим набор кеплеровых элементов на момент t_0 следующим образом: $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M(t_0)$. Возникает вопрос: каким образом получить этот набор начальных кеплеровых элементов на момент t_0 ?

Существует два пути решения этого вопроса. Первый: об орбите нет никаких сведений, кроме наземных измерений его положения в поле зрения наблюдателя. В этом случае применяют один из известных способов предварительного определения орбиты, например, способ Гаусса, изложенный в разд. 1. Полученные по методу Гаусса кеплеровы элементы принимаются за начальные при прогнозировании невозмущенного движения.

Второй путь предполагает, что положение спутника $r_0(x_0, y_0, z_0)$ и составляющие скорости его движения $\dot{r}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ на некоторый момент t_0 известны и они принимаются за начальную информацию. В этом случае необходимо по этой информации сначала получить кеплеровы элементы орбиты на момент t_0 и только затем решать задачу прогнозирования невоз-

мущенного движения. Этот путь предполагает решение дифференциальных уравнений (ДУ) невозмущенного движения спутника, получение постоянных интегрирования и затем вычисление кеплеровых элементов орбиты на начальный момент t_0 . Рассмотрим теоретические основы реализации второго пути решения этой задачи.

Спутники Земли при невозмущенном движении летят по криволинейной траектории – по эллипсу, поэтому движение ИСЗ описывается дифференциальными уравнениями. Для вывода спутника на орбиту необходимо преодолеть притяжение спутника Землей, для этого необходимо, чтобы проекция силы ракеты-носителя $F_{\text{нос}}$ на геоцентрический радиус-вектор r в точке вывода спутника на орбиту $F_{\text{выв}}$ была бы по крайней мере не меньше силы притяжения спутника Землей $F_{\text{прит}}$ (рис. 6).

В этом случае скорость движения спутника по орбите V в точке вывода будет не менее, чем 7,9 км/с, т. е. будет равна пороговому значению, называемому *первой космической скоростью*.

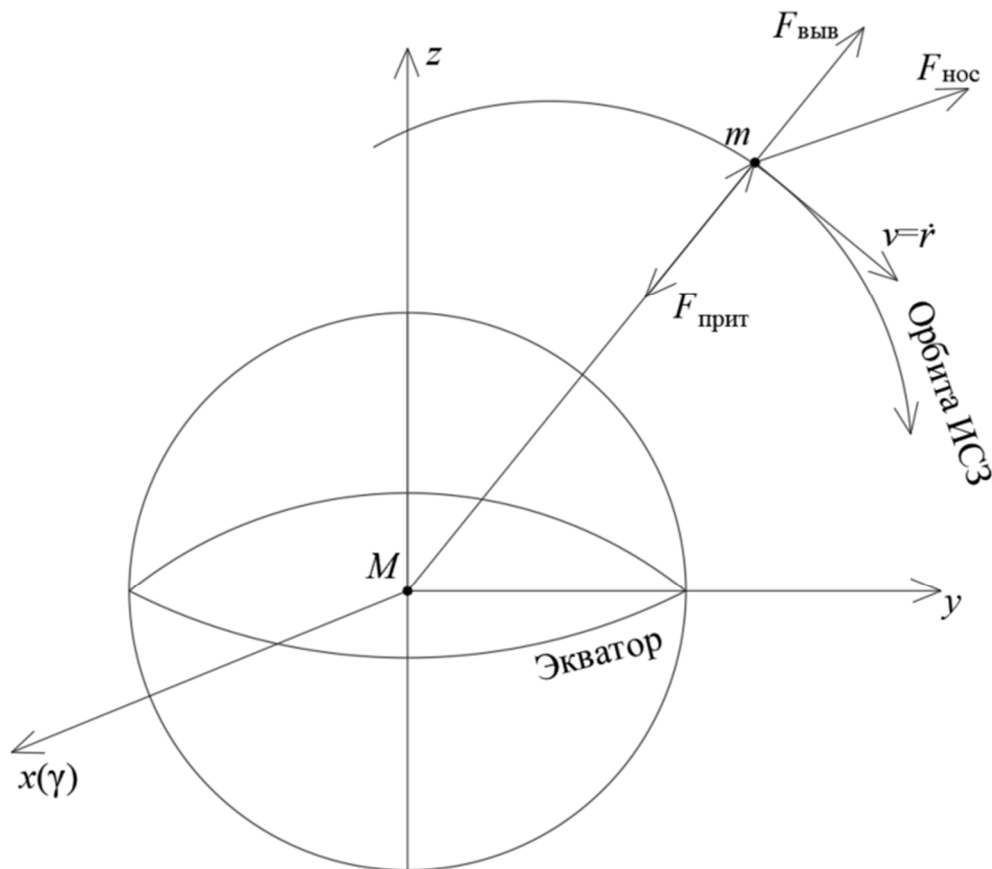


Рис. 6. Вывод спутника на орбиту

Для получения дифференциальных уравнений невозмущенного движения необходимо приравнять уравновешивающие друг друга силы $F_{\text{выб}}$ и $F_{\text{прит}}$:

$$F_{\text{прит}} = F_{\text{выб}}. \quad (42)$$

Силу взаимного притяжения Земли и спутника согласно закону всемирного тяготения запишем в виде

$$F_{\text{прит}} = f \frac{M_3 m}{r^2} \cdot \frac{r}{r}, \quad (43)$$

где f – постоянная всемирного тяготения, ее значение принимают равным $6,694\,379\,99 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$;

M_3 – масса Земли, равная $6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$;

m – масса искусственного спутника Земли;

r – геоцентрическое расстояние до спутника.

В настоящее время масса самого большого искусственного объекта, выведенного на орбиту вокруг Земли – Международной космической станции (МКС), – равна около $4 \cdot 10^5 \text{ кг}$, т. е. примерно в 10^{19} раз меньше массы Земли. Таким образом, силой притяжения спутником Земли можно пренебречь.

Силу вывода спутника на орбиту можно записать согласно второму закону Ньютона в виде

$$F_{\text{выб}} = ma, \quad (44)$$

где буквой a обозначено ускорение движения вдоль геоцентрического радиус-вектора спутника.

На основании формулы (42) приравняем правые части формул (43) и (44), при этом учтем разнонаправленность этих сил. Кроме того, в формуле (43) необходимо задать направление силы притяжения путем умножения на вектор, показывающий направление свободного падения тела. Ускорение a в формуле (44) заменим на его математическую трактовку как вторую производную от геоцентрического радиус-вектора по времени.

На основании вышеизложенного получим

$$-f \frac{M_3 m}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}. \quad (45)$$

Введем обозначения:

$\mu = f \cdot M_3$ – гравиметрический параметр Земли, равный значению $398\,600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$;

$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ – общепринятое в небесной механике обозначение ускорения,

две точки обозначают второй порядок производной по времени.

Кроме того, сокращаются между собой массы спутника m , стоящие в левой и правой частях формулы (45).

С учетом обозначений формула (45) преобразуется к виду

$$-\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (46)$$

Отсутствие массы спутника в формуле (46) является математическим доказательством невесомости на борту космического аппарата, находящегося на орбите искусственного спутника Земли.

Перенесем все члены формулы (46) по одну сторону равенства, окончательно получим:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0. \quad (47)$$

Равенство (47) представляет собой уравнение невозмущенного движения спутника Земли, записанное в векторной форме. После вывода спутника на орбиту вокруг Земли он становится, образно говоря, членом окружающего Землю космического сообщества, и его движение происходит в системе координат, связанной с этим сообществом и называемой *инерциальной системой координат*. Начало этой системы совпадает с центром масс Земли, ось x направлена в точку весеннего равноденствия γ , ось z направлена в северный полюс мира, ось y дополняет систему до правой (рис. 6). Земля вращается вокруг своей оси внутри орбиты своего спутника и относительно инерциальной

системы координат. Наличие нуля в правой части равенства (47) является характерным признаком невозмущенного движения.

Проекции геоцентрического радиус-вектора спутника $\mathbf{r}$ на оси инерциальной системы координат являются координатами спутника x, y, z . Поэтому вектор $\mathbf{r}$ иногда записывают в виде $\mathbf{r}(x, y, z)$. Вектор скорости спутника $\mathbf{V}$ по аналогии можно записать в виде $\dot{\mathbf{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, где $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – проекции вектора скорости на оси инерциальной системы координат, полученные после параллельного переноса начала вектора $\mathbf{V}$ в начало инерциальной системы координат. Аналогично вектор ускорения движения спутника по орбите можно представить в виде $\ddot{\mathbf{r}}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$.

Если спроектировать равенство (47) на оси инерциальной системы координат, то получим систему трех равенств:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} &= 0; \\ \ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} &= 0; \\ \ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Система (48) представляет собой систему дифференциальных уравнений второго порядка невозмущенного движения спутника, записанную в координатной форме. Характеристики невозмущенного движения получаются путем двойного интегрирования этой системы. В случае невозмущенного движения интегралы получаются из уравнений (48) путем их комбинирования из простых преобразований и имеют достаточно простой вид. Интегралы невозмущенного движения имеют специфические названия: *интегралы площадей, интегралы Лапласа, интеграл энергии, уравнение Кеплера*. Приведем формулы интегралов невозмущенного движения.

Интегралы площадей:

$$\begin{aligned} C_x &= y\dot{z} - z\dot{y}; \\ C_y &= z\dot{x} - x\dot{z}; \\ C_z &= x\dot{y} - y\dot{x}. \end{aligned} \quad (49)$$

Входящие в формулы (49) постоянные интегрирования C_x, C_y, C_z получили названия *постоянных площадей* и являются в инерциальной системе координат составляющими *вектора кинетического момента* $\mathbf{C}$. Начало вектора совпадает с центром масс Земли. Вектор $\mathbf{C}$ направлен перпендикулярно плоскости орбиты спутника, таким образом, постоянные площадей определяют положение этой плоскости в околоземном пространстве.

Интегралы Лапласа:

$$\begin{aligned}\lambda_x &= \dot{y}C_z - \dot{z}C_y - \mu \frac{x}{r}; \\ \lambda_y &= \dot{z}C_x - \dot{x}C_z - \mu \frac{y}{r}; \\ \lambda_z &= \dot{x}C_y - \dot{y}C_x - \mu \frac{z}{r}.\end{aligned}\tag{50}$$

Входящие в формулы (50) постоянные интегрирования $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ получили название *постоянных Лапласа* и являются в инерциальной системе координат составляющими *вектора Лапласа* $\boldsymbol{\lambda}$. Начало вектора Лапласа расположено в начале инерциальной системы координат, направлен он в точку орбиты, ближайшую к центру масс Земли и получившую название *перигея орбиты* π . Перигей орбиты π соединен с противоположной точкой орбиты, получившей название *апогея орбиты* α прямой линией, называемой *линией апсид*. Линия апсид является осью симметрии орбиты и, таким образом, постоянные Лапласа определяют ориентировку орбитального эллипса в плоскости орбиты. Так как вектор Лапласа $\boldsymbol{\lambda}$ лежит в плоскости орбиты, а вектор кинетического момента $\mathbf{C}$ перпендикулярен плоскости орбиты, между ними существует математическая зависимость – их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{C} = 0.\tag{51}$$

Формула (51) используется как контрольная для проверки правильности вычисления постоянных площадей и вектора Лапласа.

Интеграл энергии:

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \quad (52)$$

Входящая в интеграл энергии постоянная интегрирования h называется *постоянной энергии*. Интеграл энергии подтверждает закон *сохранения энергии* при невозмущенном движении спутника, т. е. алгебраическая сумма кинетической и потенциальной энергии спутника в каждой точке его орбиты есть величина постоянная. Знак постоянной энергии h указывает на форму орбиты. В частности, для искусственного спутника Земли, траектория движения которого есть эллипс, знак постоянной h должен быть отрицательным.

Между длиной вектора кинетического момента C , длиной вектора Лапласа λ и постоянной энергии h имеется математическая зависимость:

$$\lambda^2 = \mu^2 + hC^2. \quad (53)$$

Длины векторов кинетического момента и Лапласа вычисляются по формулам:

$$\lambda = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}; \quad (54)$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}. \quad (55)$$

Полученных постоянных интегрирования (площадей, Лапласа и энергии) вполне достаточно, чтобы вычислить неизменяемые во времени кеплеровы элементы орбиты. Приведем сводку формул для вычисления этих элементов.

1. Вычисление эксцентриситета орбиты e .

$$e = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (56)$$

2. Вычисление большой полуоси a .

Сначала получим вспомогательную величину p , называемую *фокальным параметром*, по формуле

$$p = \frac{C^2}{\mu}.$$

Затем вычислим значение большой полуоси по формуле

$$a = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (57)$$

3. Вычисление долготы восходящего узла Ω .

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{C_x}{-C_y}.$$

Окончательно имеем

$$\Omega = \operatorname{arctg} \left(\frac{C_x}{-C_y} \right). \quad (58)$$

Четверть угла Ω определяется по знаку числителя и знаменателя аргумента.

4. Вычисление наклона орбиты i .

$$\operatorname{tgi} = \frac{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}{C_z}.$$

Окончательно имеем

$$i = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}{C_z} \right). \quad (59)$$

Четверть угла i определяется по знаку числителя и знаменателя аргумента.

5. Вычисление аргумента перигея ω .

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\lambda_z C}{C_x \lambda_y - C_y \lambda_x}.$$

Окончательно имеем

$$\omega = \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda_z C}{C_x \lambda_y - C_y \lambda_x} \right). \quad (60)$$

Четверть угла ω определяется по знаку числителя и знаменателя аргумента.

К элементам, задающим положение спутника на орбите, относятся: *истинная аномалия v* , *эксцентрическая аномалия E* , *средняя аномалия M* и *аргумент широты u* . Слово «аномалия» используется здесь в значении «отклонение от чего-либо». В нашем случае аномалия понимается как угловое отклонение направления на спутник от направления на перигей орбиты. Принцип отсчитывания аномалий v и E показан на рис. 4. Значение средней аномалии M вычисляется исходя из средней скорости перемещения фиктивного спутника по окружности с радиусом, равным значению большой полуоси орбиты, опоясывающей орбиту и касающейся ее в двух точках – перигея и апогея. Все три аномалии v , E и M связаны между собой математическими зависимостями.

Приведем формулу вычисления истинной аномалии v :

$$v = \arctg \left(\frac{C r \dot{r}}{x \lambda_x + y \lambda_y + z \lambda_z} \right).$$

Формула вычисления эксцентрической аномалии имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{E}{2} &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}; \\ E &= 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right). \end{aligned}$$

Связь эксцентрической и средней аномалий определяется уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = M. \quad (61)$$

Перейдем к получению последней постоянной интегрирования, которая позволит определить место спутника на орбите в заданный момент времени. Она получается из приведенного выше уравнения Кеплера.

Физический и математический смыслы углового параметра M были пояснены ранее. Средняя аномалия M является функцией времени, протек-

шего от момента t_{π} пролета спутника через перигей орбиты до заданного момента времени t и определяется по формуле

$$M = n(t - t_{\pi}). \quad (62)$$

Момент пролета спутника через перигей орбиты t_{π} и является недостающей постоянной интегрирования. Входящая в формулу (62) величина n называется *средним движением* и представляет собой среднюю скорость перемещения фиктивного спутника по окружности, опоясывающей орбиту и касающейся ее в двух точках – перигея и апогея. Радиус этой окружности равен значению большой полуоси орбиты a . Таким образом, среднее движение n является функцией большой полуоси a и определяется по формуле

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \quad (63)$$

Для связи с начальными условиями движения формулу (62) преобразуют в

$$M(t) = n[(t - t_0) + (t_0 - t_{\pi})]. \quad (64)$$

Введем обозначения:

$$M(t_0) = n(t_0 - t_{\pi});$$

$$\Delta M = n(t - t_0).$$

С учетом этих обозначений формула (64) примет вид

$$M(t) = M(t_0) + \Delta M. \quad (65)$$

Смысл трансформации формулы (62) к виду (65) заключается в следующем. Момент времени t_{π} на каждом витке орбиты свой, т. е. он привязан к конкретному обороту спутника, в то время как момент t_0 не привязан к конкретному витку и может быть выбран произвольно.

Приведем формулу вычисления аргумента широты u , геометрический смысл которой показан на рис. 5:

$$u = \operatorname{arctg} \frac{C_z}{C_x y - C_y x}.$$

Для контроля вычисления u можно воспользоваться формулой

$$u = \omega + v.$$

Все кеплеровы элементы орбиты на начальный момент времени t_0 через постоянные интегрирования получены. Перейдем к изложению порядка вычисления координат спутника x, y, z и составляющих скорости его движения $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ на момент времени t .

Данная задача решается в несколько этапов.

1. Вычисление средней аномалии на момент t :

$$M = n(t - t_0), \quad (66)$$

где среднее движение n вычисляется по формуле (63).

2. Вычисление эксцентрической аномалии по итерационной формуле, полученной из уравнения Кеплера (61),

$$E_{i+1} = M + e \sin E_i, \quad (67)$$

где i – номер итерации.

Итерации выполняются до достижения заданной точности вычислений ε , вычисляемой по формуле

$$|E_{i+1} - E_i| \leq \varepsilon. \quad (68)$$

Для получения дециметровой точности вычисления координат спутника необходимо задавать значение ε , равное $0,01''$.

3. Вычисление геоцентрического расстояния до спутника:

$$r = a(1 - \cos E). \quad (69)$$

4. Вычисление истинной аномалии:

$$v = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right). \quad (70)$$

Геометрический смысл истинной аномалии v приведен на рис. 4. Свое название – *истинная* – этот угловой параметр получил оттого, что он действительно показывает положение спутника на орбитальном эллипсе, в отличие от эксцентрической и *средней* аномалий, которые имеют вспомогательный характер и показывают положение фиктивного спутника на круговой орбите, опоясывающей орбитальный эллипс.

5. Контроль вычисления геоцентрического расстояния:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v^2}, \quad (71)$$

где фокальный параметр p может быть вычислен по формуле

$$p = a(1 - e^2). \quad (72)$$

6. Вычисление аргумента широты:

$$u = \omega + v. \quad (73)$$

7. Контрольная формула для вычисления аргумента широты:

$$u = \operatorname{arctg} \frac{C_z}{C_x y - C_y x}. \quad (74)$$

8. Вспомогательные вычисления направляющих косинусов радиус-вектора спутника относительно осей инерциальной системы координат:

$$\alpha_x = \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i,$$

$$\alpha_y = \sin \Omega \cos u - \cos \Omega \sin u \cos i,$$

$$\alpha_z = \sin u \sin i.$$

9. Вычисление координат спутника на момент времени t :

$$\begin{aligned}x &= r\alpha_x; \\y &= r\alpha_y; \\z &= r\alpha_z.\end{aligned}\tag{75}$$

10. Вычисление вспомогательных величин – производных по времени от направляющих косинусов геоцентрического радиус-вектора спутника:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_x &= -\cos \Omega \sin u - \sin \Omega \cos u \cos i; \\ \dot{\alpha}_y &= -\sin \Omega \sin u + \sin \Omega \cos u \cos i; \\ \dot{\alpha}_z &= \cos u \sin i.\end{aligned}$$

11. Вычисление производной по времени от геоцентрического расстояния r :

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v.$$

12. Вычисление производной по времени от скорости спутника:

$$\dot{v} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}.$$

13. Вычисление составляющих скорости спутника на момент времени t :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r}\alpha_x + r\dot{\alpha}_x\dot{v}; \\ \dot{y} &= \dot{r}\alpha_y + r\dot{\alpha}_y\dot{v}; \\ \dot{z} &= \dot{r}\alpha_z + r\dot{\alpha}_z\dot{v}.\end{aligned}\tag{76}$$

14. Вычисление геоцентрического расстояния спутника и его скорости в момент времени t :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};\tag{77}$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.\tag{78}$$

Задание

Вычислить положение и скорость движения искусственного спутника Земли, движущегося по невозмущенной орбите, на момент времени t . Начальные параметры орбиты на момент времени t_0 по усмотрению преподавателя могут быть заданы двумя способами.

Способ 1. В качестве начальных условий движения берется набор кеплеровых элементов орбиты $E_0(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ на момент времени t_0 , полученных по итогам выполнения практической работы 1.

В этом случае последовательность выполнения задания будет выглядеть следующим образом:

$$E_0(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0) \rightarrow E_0(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M(t)) \rightarrow r(x, y, z), \dot{r}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Способ 2. В качестве начальных условий движения берутся координаты $r_0(x_0, y_0, z_0)$ и составляющие скорости спутника $\dot{r}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ на момент времени t_0 . В этом случае по начальным условиям движения сначала нужно будет вычислить постоянные интегрирования невозмущенного движения спутника, по ним вычислить кеплеровы элементы орбиты, а также другие параметры движения. После этого приступить к прогнозированию невозмущенного движения на момент времени t . Для второго случая последовательность выполнения задания будет следующей:

$$r_0(x_0, y_0, z_0), \dot{r}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \rightarrow (C_x, C_y, C_z, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, h, t_\pi) \rightarrow \\ \rightarrow E_0(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0) \rightarrow E(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M(t)) \rightarrow r(x, y, z), \dot{r}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Рекомендации по выполнению работы

Для решения поставленной задачи применить формулы невозмущенного движения спутника, приведенные в теоретической части практической работы № 2. Начальные условия движения для второго способа взять из прил. 2, в котором по вариантам приводятся значения координат x_0, y_0, z_0 и составляющих скорости спутника $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ на момент t_0 .

Контрольные вопросы

1. Постановка задачи интегрирования ДУ движения спутника. Интеграл площадей в векторной и координатной формах.
2. Полярная форма интеграла площадей. Второй закон Кеплера.
3. Определение векторной константы площадей по начальным условиям движения спутника. Физический смысл векторной константы площадей.
4. Интеграл энергии. Определение константы энергии спутника по начальным условиям.
5. Связь константы энергии с величиной большой полуоси орбиты спутника. Физический смысл константы энергии.
6. Интеграл Лапласа. Физический смысл вектора Лапласа.
7. Определение вектора Лапласа по начальным условиям движения спутника.
8. Физический смысл и связь трех констант интегрирования: Лапласа, энергии и площадей.
9. Уравнения кривой второго порядка в различных системах координат. Уравнение орбиты спутника в полярных координатах. Связь параметров уравнения с константами интегрирования.
10. Понятие конического сечения. Первый закон Кеплера. Точки и линии орбиты.
11. Эксцентрисическая аномалия спутника. Связь эксцентрисической и истинной аномалий.
12. Уравнение Кеплера. Итерационный метод решения уравнения Кеплера относительно эксцентрисической аномалии. Определение момента прохождения спутника через перицентр его орбиты по истинной аномалии, эксцентриситету и периоду обращения.
13. Период обращения спутника. Среднее движение спутника и его физический смысл. Третий закон Кеплера. Связь большой полуоси орбиты спутника с периодом обращения.
14. Три аномалии спутника и их связь. Определение момента прохождения спутника через восходящий узел орбиты.
15. Определение кеплеровых элементов орбиты по вектору положения и скорости спутника.

16. Постановка задачи, схема и основные этапы прогнозирования невозмущенного движения спутника в различных системах координат по начальным условиям движения, заданным в виде векторов положения и скорости спутника на начальный момент времени.

17. Объясните назначение кеплеровых элементов орбиты: a – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклонение орбиты, Ω – долгота восходящего узла, ω – аргумент перицентра, $M(t)$ – средняя аномалия.

Практическая работа № 3

РАСЧЕТ ВОЗМУЩЕНИЙ ОРБИТЫ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ ПОД ВЛИЯНИЕМ СЖАТИЯ ЗЕМЛИ

Время выполнения: 4 часа (2 часа аудиторной работы и 2 часа самостоятельной работы).

Цель работы: освоить методику расчета вековых и короткопериодических изменений в элементах орбиты спутника под действием сжатия фигуры Земли.

Задачи работы: на примере конкретной орбиты ИСЗ получить представление о величине вековых и короткопериодических возмущений в кеплеровых элементах орбиты на промежутках времени в один оборот спутника и в одни сутки.

Перечень обеспечивающих средств: исходные данные для выполнения работы по вариантам; компьютерная техника с возможностью подключения к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную образовательную среду СГУГиТ; программное обеспечение Microsoft Windows, Zoom, Microsoft Teams; пакет математических программ для вычислений Mathcad; приложение для работы с электронными таблицами Excel.

Общие теоретические сведения

В отличие от невозмущенного движения в реальном полете на ИСЗ помимо центральной силы тяготения Земли действуют также силы, обусловленные [1, 8]:

- нецентральным полем тяготения, вызванным несферичностью Земли и неправильным распределением масс внутри нее;
- влиянием гравитационных полей Солнца, Луны, планет и других небесных тел;
- лунно-солнечными приливами;

- сопротивлением атмосферы;
- давлением прямой и отраженной солнечной радиации;
- релятивистскими эффектами и др.

У спутников, имеющих на борту запасы топлива, ускорения могут возникать из-за утечки газов из топливных контейнеров.

Все эти силы называются *возмущающими силами*, движение спутника под действием этих сил – *возмущенным движением*, а вызываемые этими силами ускорения в движении спутника – *возмущающими ускорениями*. Конкретный набор возмущающих сил, их количество для данного спутника зависит от точности прогнозирования его движения. Отдельную i -ю возмущающую силу обозначим F_i . Каждая возмущающая сила имеет свою величину и направление.

Суммарное влияние на движение спутника учтенных возмущающих сил $F_{\text{возм}}$ определяется по формуле

$$F_{\text{возм}} = \sum_1^n F_i, \quad (79)$$

где n – число всех учтенных возмущающих сил.

В соответствии со вторым законом динамики

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{возм}} = \mathbf{F}_{\text{возм}} / m, \quad (80)$$

где m – масса спутника;

$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{возм}}$ – суммарное возмущающее ускорение, которое с учетом его проекций $\ddot{x}_{\text{возм}}, \ddot{y}_{\text{возм}}, \ddot{z}_{\text{возм}}$ на оси инерциальной системы координат можно записать в виде $\ddot{\mathbf{r}}_{\text{возм}} (\ddot{x}_{\text{возм}}, \ddot{y}_{\text{возм}}, \ddot{z}_{\text{возм}})$.

Тогда дифференциальные уравнения возмущенного движения спутника в векторной форме могут быть получены из формулы (47), а в координатной форме – из формулы (48), и будут иметь вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \ddot{\mathbf{r}}_{\text{возм}} \quad (81)$$

или

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} &= \ddot{x}_{\text{возм}}; \\ \ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} &= \ddot{y}_{\text{возм}}; \\ \ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} &= \ddot{z}_{\text{возм}}.\end{aligned}\tag{82}$$

При изучении возмущенного движения используется *принцип Лагранжа*, согласно которому возмущенное движение спутника происходит по орбите, элементы которой изменяются со временем. Это означает, что в каждый момент времени возмущенная орбита совпадает с некоторой орбитой, имеющей с ней общие радиус-вектор спутника $\mathbf{r}$ и вектор скорости $\mathbf{V}$. Такие орбиты называют *оскулирующими орбитами*, а элементы орбит – *оскулирующими элементами*.

Вектор возмущающего ускорения $\ddot{\mathbf{r}}_{\text{возм}}$ может быть представлен в виде суммы векторов ускорений от сил, имеющих потенциал U , и не имеющих его:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{возм}} = \ddot{\mathbf{r}}'_{\text{возм}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.\tag{83}$$

Функция U называется *возмущающим потенциалом*, или пертурбационной (возмущающей) функцией. К потенциальным силам относятся силы, имеющие гравитационную природу, например, притяжение спутника Землей, Луной, Солнцем, планетами; влияние лунно-солнечных приливов. Возмущающие потенциалы, как правило, аппроксимируются в виде разложения в ряды.

Вектор $\ddot{\mathbf{r}}'_{\text{возм}}$ является вектором возмущающего ускорения от непотенциальных (или поверхностных) сил. К таким силам относятся сила сопротивления атмосферы, давление прямой и отраженной солнечной радиации и т. д. Для таких сил вектор $\ddot{\mathbf{r}}'_{\text{возм}}$ представляется, как правило, в виде конечной формулы.

С учетом (83) уравнение (81) можно записать в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{\gamma^3} = \ddot{\mathbf{r}}_{\text{возм}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \quad (84)$$

Если известны элементы орбиты на некоторый начальный момент t_0 , которые называют *начальными условиями движения*, и имеется *модель возмущающих сил*, то после определения возмущающих ускорений и подстановки их в уравнение (84) последние можно решить *аналитическим или численным методом* [5, 8].

В *аналитических* методах решение получается в виде формул, позволяющих найти параметры движения в виде элементов орбиты или координат и скоростей космического аппарата (КА) на любой момент времени t . Эти методы применялись для расчета орбит ИСЗ на начальном этапе развития космической геодезии. Главным недостатком аналитических методов является их жесткая привязка к модели учитываемых возмущающих сил и типам орбит.

В *численных* методах решение отыскивается в виде таблицы значений параметров движения. Преимуществом этих методов является отсутствие каких-либо ограничений на типы орбит и возможность повышения точности расчета траектории движения спутника относительно простыми средствами. Основным же недостаток, связанный с большими временными затратами при вычислении, в настоящее время перестал быть таким актуальным в связи с развитием быстродействующей вычислительной техники. Из применяемых численных методов отметим методы Булирша – Штера, Эверхарта, Рунге – Кутты и Адамса – Коуэлла [5, 10].

Система дифференциальных уравнений (82) предполагает получение решения для шести неизвестных – координат спутника x, y, z и составляющих скорости его движения $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, которые являются так называемыми *быстрыми переменными*, что усложняет процесс интегрирования системы (82). Поэтому вместо такой системы на практике используют системы дифференциальных уравнений с другим набором переменных. Например, систему *уравнений Ньютона – Эйлера*, в которой в качестве переменных используются кеплеровы элементы орбиты и их простые функции:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= W \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cdot \frac{\sin u}{\sin i}; \\
\frac{dp}{dt} &= 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} r T; \\
\frac{di}{dt} &= \frac{r}{\sqrt{\mu p}} W \cos u; \\
\frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[S \sin v + \left(1 + \frac{r}{p}\right) T \cos v + e \frac{r}{p} T \right]; \\
\frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{1}{e} S \cos v + \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) T \cos v + \frac{r}{p} W \operatorname{ctg} i \sin u \right]; \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[\frac{S}{e} \cos v - \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{T}{e} \sin v \right],
\end{aligned} \right\} \quad (85)$$

где S, T, W – проекции вектора возмущающего ускорения $\ddot{\mathbf{r}} = \{S, T, W\}$ на оси орбитальной системы координат, в которой ось S направлена по радиус-вектору, ось T – по трансверсали и ось W – по бинормали к орбите;

μ – гравитационный параметр Земли.

Недостатком системы (85) является наличие особенностей для круговых ($e = 0$) и экваториальных ($i = 0^\circ; i = 180^\circ$) орбит.

Профессором Ю. В. Сурниным в 1973 г. было предложено использовать вместо кеплеровых элементов другие переменные, получившие название *регулярных элементов* [10]:

$$\mathbf{Y} = (p, g, h, f, q, l), \quad (86)$$

где составляющие вектора $\mathbf{Y}$ являются функциями кеплеровых элементов:

$$\left. \begin{aligned}
p &= a(1 - e^2); & f &= \left(\operatorname{tg} \frac{i}{2} \right)^\delta \sin \Omega; \\
g &= e \cdot \sin(\omega + \delta\Omega); & q &= \left(\operatorname{tg} \frac{i}{2} \right)^\delta \cos \Omega; \\
h &= e \cdot \cos(\omega + \delta\Omega); & l &= \omega + \delta\Omega + \vartheta,
\end{aligned} \right\} \quad (87)$$

$$\text{где } \delta = \begin{cases} +1, & \text{если } \cos i_0 \geq 0; \\ -1, & \text{если } \cos i_0 \leq 0. \end{cases}$$

Значение i_0 в формуле (87) соответствует заданным начальным условиям движения КА в начальный момент t_0 .

Система дифференциальных уравнений движения с начальными условиями, записанная в регулярных элементах, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 2r\tilde{T}; \\ \frac{dq}{dt} &= [(1+H)\sin l + gH]\tilde{T} - \tilde{S}\cos l + G\tilde{W}h; \\ \frac{dh}{dt} &= [(1+H)\cos l + hH]\tilde{T} + \tilde{S}\sin l - G\tilde{W}g; \\ \frac{df}{dt} &= H\chi\tilde{W}\sin l; \\ \frac{dq}{dt} &= H\chi\tilde{W}\delta\cos l; \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{\mu}{r^2}K + G\tilde{W}; \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

$$Y(t_0) = Y_0 = (p_0, g_0, h_0, f_0, q_0, l_0),$$

где

$$\tilde{S} = KS, \quad \tilde{T} = KT, \quad \tilde{W} = KW;$$

$$K = \sqrt{\frac{p}{\mu}}; \quad H = \frac{r}{P}; \quad G = H(\delta q \sin l - f \cos l); \quad (89)$$

$$\chi = \frac{1}{2}(1 + f^2 + q^2); \quad r = \frac{p}{1 + h \cos l + g \sin l};$$

угол l берется по модулю 2π .

Очевидно, что система (88) не содержит особенностей для круговых ($e = 0^\circ$) и экваториальных орбит с прямым ($i = 0^\circ$) и обратным ($i = 180^\circ$) движением, присущих системе обыкновенных дифференциальных уравнений (85) для кеплеровых элементов.

От модели возмущающих сил зависит характер возмущений по времени действия, в связи с чем они подразделяются на *вековые, долгопериодические, короткопериодические и резонансные*.

В зависимости от целевого назначения спутника и точности прогнозирования траектории его движения применяется тот или иной набор возмущающих сил. Например, для спутников глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) ГЛОНАСС, GPS, Galileo и Beidou, орбиты которых расположены на значительном расстоянии от Земли, в этот набор входит учет возмущений от аномалий гравитационного поля Земли, притяжение спутника Луной и Солнцем, давление солнечной радиации. Рассмотрим принципиальные подходы по используемым моделям этих возмущающих сил.

Возмущающий гравитационный потенциал Земли. Гравитационный потенциал Земли U на внешнюю точку можно представить в виде

$$U = \frac{\mu}{r} + R_{\oplus}, \quad (90)$$

где $\mu = GM_{\oplus}$ – гравитационная постоянная Земли;

r – геоцентрическое расстояние для внешней точки;

$R_{\oplus}$ – возмущающая часть геопотенциала Земли.

Первый член в (90) определяет невозмущенное движение (потенциал шара или точки), второй член определяет возмущения в движении спутника.

Возмущающий потенциал обычно задается в виде разложения в ряд по сферическим функциям [1, 8]:

$$R_{\oplus} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_E}{r} \right)^n [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\sin \varphi), \quad (91)$$

где a_E – большая полуось Земли; r – геоцентрическое расстояние спутника; φ, λ – его широта и долгота. Величины C_{nm}, S_{nm} – безразмерные коэффициенты, характеризующие внешнее гравитационное поле Земли. Наконец, $P_{nm}(\sin \varphi)$ – функции Лежандра (сферические функции), которые делятся на два типа: при $m = 0$ – полиномы Лежандра, а при $0 < m \leq n$ – присоединенные функции Лежандра. Целые числа n и m являются степенью и порядком

разложения. Разложение (91) по сути представляет собой распределение действия аномалий гравитационного поля Земли на поверхности сферы радиусом, равным значению большой полуоси эллипсоида вращения.

Полиномы Лежандра определяются на основании формулы Родрига

$$P_{n0}(\sin \varphi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\sin^2(\varphi) - 1)^n}{d(\sin \varphi)^n}, \quad (92)$$

для них справедливо рекуррентное соотношение

$$P_{n+1,0}(\sin \varphi) = \frac{2n+1}{n+1} \sin \varphi P_{n0}(\sin \varphi) - \frac{n}{n+1} P_{n-1,0}(\sin \varphi). \quad (93)$$

Приведем выражения для первых двух полиномов:

$$P_{10} = \sin \varphi; \quad P_{20} = \frac{1}{2} (3 \sin^2 \varphi - 1). \quad (94)$$

Выражение для присоединенных функций Лежандра имеет вид

$$P_{nm}(\sin \varphi) = (1 - \sin^2 \varphi)^{m/2} \frac{d^m P_{n0}(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^m}. \quad (95)$$

Сферические функции подразделяются на *зональные*, *секториальные* и *тессеральные* (мозаичные) в зависимости от линий на сфере, которыми разграничены области с различными знаками гармоник (рис. 7).

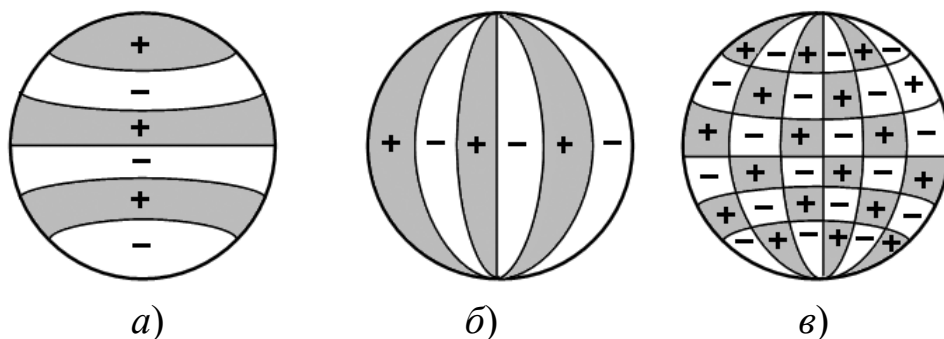


Рис. 7. Области положительных и отрицательных значений:
а) зональных; б) секториальных; в) тессеральных гармоник потенциала

Коэффициенты гармонического разложения C_{nm} , S_{nm} различаются в зависимости от модели геопотенциала. Наибольшее влияние на движение спутников оказывает связанный с экваториальным сжатием Земли коэффициент второй зональной гармоники $C_{20} \approx -0,00010827$. Максимальное значение возмущающего ускорения от сжатия равно $\ddot{r}_{C_{20}} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$. Остальные коэффициенты гармоник геопотенциала в тысячи раз меньше и, соответственно, меньше оказываемое ими влияние.

Возмущающая функция от сжатия Земли записывается в виде

$$U_{20} = \mu C_{20} \frac{a_E^2}{2r^3} (3 \sin^2 \varphi - 1). \quad (96)$$

Возмущающие ускорения S , T , W от сжатия Земли представляются выражениями:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{3 C_{20} \mu a_E^2}{2r^4} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1); \\ T &= \frac{3 C_{20} \mu a_E^2}{2r^4} \sin u \cos u \sin^2 i; \\ W &= \frac{3 C_{20} \mu a_E^2}{2r^4} \sin 2u \sin^2 i. \end{aligned} \quad (97)$$

После подстановки S , T , W в уравнения (85) и интегрирования в первом приближении при условии, что все элементы постоянны за исключением рассматриваемого, в трех элементах получаем возмущения, связанные со временем или аргументом широты u :

$$\delta\Omega = \frac{3}{2} C_{20} \cos i \left(\frac{a_E}{p} \right)^2 \left\{ u - \frac{1}{2} \sin 2u + e \left[\sin(u - \omega) - \frac{1}{2} \sin(u + \omega) - \frac{1}{6} \sin(3u - \omega) \right] \right\}; \quad (98)$$

$$\delta p = -\frac{3 C_{20} a_E^2 \sin^2 i}{2p} \left\{ \cos 2u + e \left[\cos(u + \omega) + \frac{1}{3} \cos(3u - \omega) \right] \right\}; \quad (99)$$

$$\delta i = -\frac{3C_{20} \sin 2i}{8} \left(\frac{a_E}{p} \right)^2 \left\{ \cos 2u + e \left[\cos(u + \omega) + \frac{1}{3} \cos(3u - \omega) \right] \right\}; \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \delta e = & -\frac{3C_{20}}{2} \left(\frac{a_E}{p} \right)^2 \left\{ -\left(1 + \frac{e^2}{4} \right) \left(\frac{3}{2} \sin^2 i - 1 \right) \cos(u - \omega) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{11}{4} e^2 \right) \sin^2 i \cos(u + \omega) + \frac{1}{12} \left(7 + \frac{17}{4} e^2 \right) \sin^2 i \cos(3u - \omega) + e[...] \right\}; \quad (101) \end{aligned}$$

$$\delta \omega = -\frac{3C_{20}}{2} \left(\frac{a_E}{p} \right)^2 \left[\left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) u + \dots \right]; \quad (102)$$

$$\delta M_0 = -\frac{3C_{20}}{4} \left(\frac{a_E}{p} \right)^2 \frac{(3 \cos^2 i - 1)u}{(1 - e^2)^{3/2}} + \dots \quad (103)$$

В формулах (98), (102) и (103) имеются возмущения, линейно связанные с аргументом широты u . Такие возмущения называют *вековыми*, а указанные три элемента (долготу Ω , аргумент перигея ω и начальное значение средней аномалии M_0) в теории возмущений называют *угловыми элементами*. Возмущения, вызванные сжатием Земли, приводят к вращению плоскости орбиты относительно оси вращения Земли (прецессия орбиты) и вращению орбитального эллипса в плоскости орбиты. В *позиционных элементах*, к которым относят наклонение i , эксцентриситет e и фокальный параметр p , имеются только короткопериодические возмущения от сжатия.

В первые годы работы GPS в модели Земли набор коэффициентов до 8-го порядка и степени считался достаточным для спутников GPS на дугах в несколько оборотов. Связанная с ревизией WGS-84 (G873) гравитационная модель Земли 2008 г. (EGM2008) была рекомендована для использования с набором коэффициентов до 70-го порядка и степени при определении точных орбит.

Притяжение Луны и Солнца [1, 8]. При учете возмущений от Луны и Солнца считают, что спутник не оказывает гравитационного воздействия на другие небесные тела, то есть имеет нулевую массу. Отдельно рассматривают две системы трех материальных точек: «спутник – Земля – Луна»

и «спутник – Земля – Солнце». В каждой системе движение спутника определяется из решения *ограниченной задачи трех тел*. Возмущающая функция R в такой задаче определяет возмущения нулевой массы (спутника) и имеет вид

$$R_i = \mu_i \left(\frac{1}{\Delta_i} - \frac{r}{r_i^2} \cos \Psi_i \right). \quad (104)$$

Здесь индекс i принимает значение 1 для Луны и 2 – для Солнца. Величина μ_i является гравитационным параметром соответствующего небесного тела; r – геоцентрическое расстояние спутника; r_i – геоцентрическое расстояние до Солнца или Луны; Δ_i – расстояние между спутником и небесным телом. Величина Ψ_i является углом между геоцентрическими направлениями на спутник и на небесное тело. Характер действия этих факторов аналогичен действию геопотенциала. Они вызывают вековые возмущения в угловых элементах и долгопериодические во всех элементах, кроме большой полуоси; короткопериодические возмущения имеются во всех элементах. Величины возмущающих ускорений для спутников ГНСС равны $2 \cdot 10^{-6} \text{ мс}^{-2}$ для Солнца и $5 \cdot 10^{-6} \text{ мс}^{-2}$ для Луны.

Давление солнечной радиации [1, 8]. Ускорение F , испытываемое спутником под влиянием давления прямой солнечной радиации, выражается формулой

$$F = \chi \frac{\bar{S}}{m} \frac{S_s (1+k)}{c} \cos \alpha \left(\frac{r_s}{\Delta} \right)^2, \quad (105)$$

где $\bar{S}$ – площадь поперечного сечения спутника в направлении на Солнце; m – масса спутника; S_s – среднее значение солнечной постоянной; c – скорость света; k – коэффициент отражения поверхности спутника; α – угол падения солнечных лучей на его поверхность. Величина χ называется *теневой функцией*: $\chi = 1$, если спутник освещен, $\chi = 0$, когда спутник в тени, $0 < \chi < 1$, когда спутник находится в полутени. Моделирование этих возмущений чрезвычайно трудное, поскольку солнечная радиация изменяется непредсказуемо в течение года, а коэффициент отражения неодинаков для

разных участков поверхности спутника. Хотя масса спутника на орбите обычно хорошо известна, неправильная форма спутника не позволяет точно определять отношение массы к площади. Другая проблема – это моделирование полутени Земли и назначение теневой функции, особенно в зоне перехода от освещенности к тени.

Задание

По кеплеровым элементам орбиты $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$ на момент времени t_0 , взятым из практической работы № 2 (прил. 2), вычислить вековые и короткопериодические возмущения в кеплеровых элементах орбиты под влиянием сжатия Земли на момент времени $t = t_0 + 24^h$, получить возмущенные значения кеплеровых элементов на момент t .

Дополнительная информация: гравитационный параметр Земли $\mu = 398\,600,441\,8 \text{ км}^3/\text{с}^2$, экваториальный радиус Земли $a_e = 6\,378,136 \text{ км}$, коэффициент $C_{20} = -0,001\,082\,63$.

Рекомендации по выполнению работы

Для решения поставленной задачи использовать следующие формулы возмущенного движения спутника.

1. Формулы вычисления вековых возмущений в угловых элементах орбиты за один оборот спутника под влиянием сжатия Земли:

$$\delta\Omega = -540^\circ C_{20} \cos i \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \text{ (град/оборот);}$$

$$\delta\omega = -270^\circ C_{20} \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \left(2 - \frac{5}{2} \right) \sin^2 i \text{ (град/оборот);}$$

$$\delta M = -270^\circ C_{20} \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \frac{3 \cos^2 i}{(1 - e^2)^{3/2}} \text{ (град/оборот).}$$

2. Формулы вычисления короткопериодических возмущений в элементах орбиты спутника за один оборот под влиянием сжатия Земли:

$$\delta p = -9,42477796 \frac{C_{20} a_e^2 \sin^2 i}{2p} \cos 2u \text{ (км/оборот);}$$

$$\delta i = -135^\circ C_{20} \sin 2i \left[\frac{a_e}{p} \right]^2 \cos 2u \text{ (град/оборот);}$$

$$\Delta e = -9,42477796 C_{20} \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \left[- \left(1 + \frac{e^2}{4} \right) \left(\frac{3}{2} \sin^2 i - 1 \right) \right] \cos(u - \omega) \text{ (за оборот).}$$

Возмущение в большой полуоси орбиты вычисляется по формуле

$$\delta a = \frac{\delta p}{1 - e^2} \text{ (км/оборот).}$$

3. Вычисление периода обращения спутника $P = \frac{2\pi}{n}$ (с), где среднее

движение спутника $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ рад / с . Период обращения спутника перевести

в часы и доли часа: $P^h = P(\text{с}) / 3600(\text{с})$.

4. Нахождение числа оборотов спутника за промежуток времени

$$t - t_0 = 24^h. \quad N = \frac{24^h}{P^h}.$$

5. Вычисление возмущенных угловых элементов орбиты на момент t :

$$a = a_0 + \delta a \cdot N;$$

$$e = e_0 + \delta e \cdot N;$$

$$i = i_0 + \delta i \cdot N;$$

$$\Omega = \Omega_0 + \delta \Omega \cdot N;$$

$$\omega = \omega_0 + \delta \omega \cdot N;$$

$$M = M_0 + \delta M \cdot N.$$

Контрольные вопросы

1. Виды возмущений в орбитах ИСЗ.
2. Дифференциальные уравнения возмущенного движения. Отличие от ДУ невозмущенного движения.
3. Возмущения от сжатия Земли: на какие элементы орбиты они влияют и каким образом?
4. Поясните смысл вековых, долгопериодических, короткопериодических и резонансных возмущений от аномалий гравитационного поля Земли.
5. Как можно определить сжатие Земли по возмущениям в орбитах ИСЗ?
6. От каких параметров зависят значения возмущений, разобранных в теоретической части работы? Проанализировать формулы.
7. Чем обусловлен выбор элементов орбиты спутников ГЛОНАСС и GPS?
8. В чем состоит суть метода Лагранжа?
9. Понятие оскулирующих элементов орбиты.

Практическая работа № 4

РАСЧЕТ ТРАССЫ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФЕМЕРИДЫ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

Время выполнения: 12 часов (8 часов аудиторной работы и 4 часа самостоятельной работы).

Цель работы: получить представление о трассе спутника, зоне видимости спутника с наземного пункта наблюдения и об эфемериде ИСЗ.

Задачи работы: научиться отображать на сетке географических координат в поперечной проекции Меркатора трассу движения спутника, зону видимости спутника и производить простейшие расчеты эфемериды ИСЗ.

Перечень обеспечивающих средств: исходные данные для выполнения работы по вариантам; компьютерная техника с возможностью подключения к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную образовательную среду СГУГиТ; программное обеспечение Microsoft Windows, Zoom, Microsoft Teams; пакет математических программ для вычислений Mathcad; приложение для работы с электронными таблицами Excel.

Общие теоретические сведения

Трассой спутника называется геометрическое место точек пересечения геоцентрических радиус-векторов ИСЗ с земной поверхностью [4] (рис. 8).

На рис. 8 обозначены:

r_1, r_2, r_3 – положения спутника соответственно в моменты времени t_1, t_2, t_3 ;

m_i – положение спутника на орбите в моменты времени t_i , в том числе в точке m_Ω пересечения восходящего узла орбиты;

Ω – подспутниковая точка, соответствующая восходящему узлу орбиты ИСЗ.

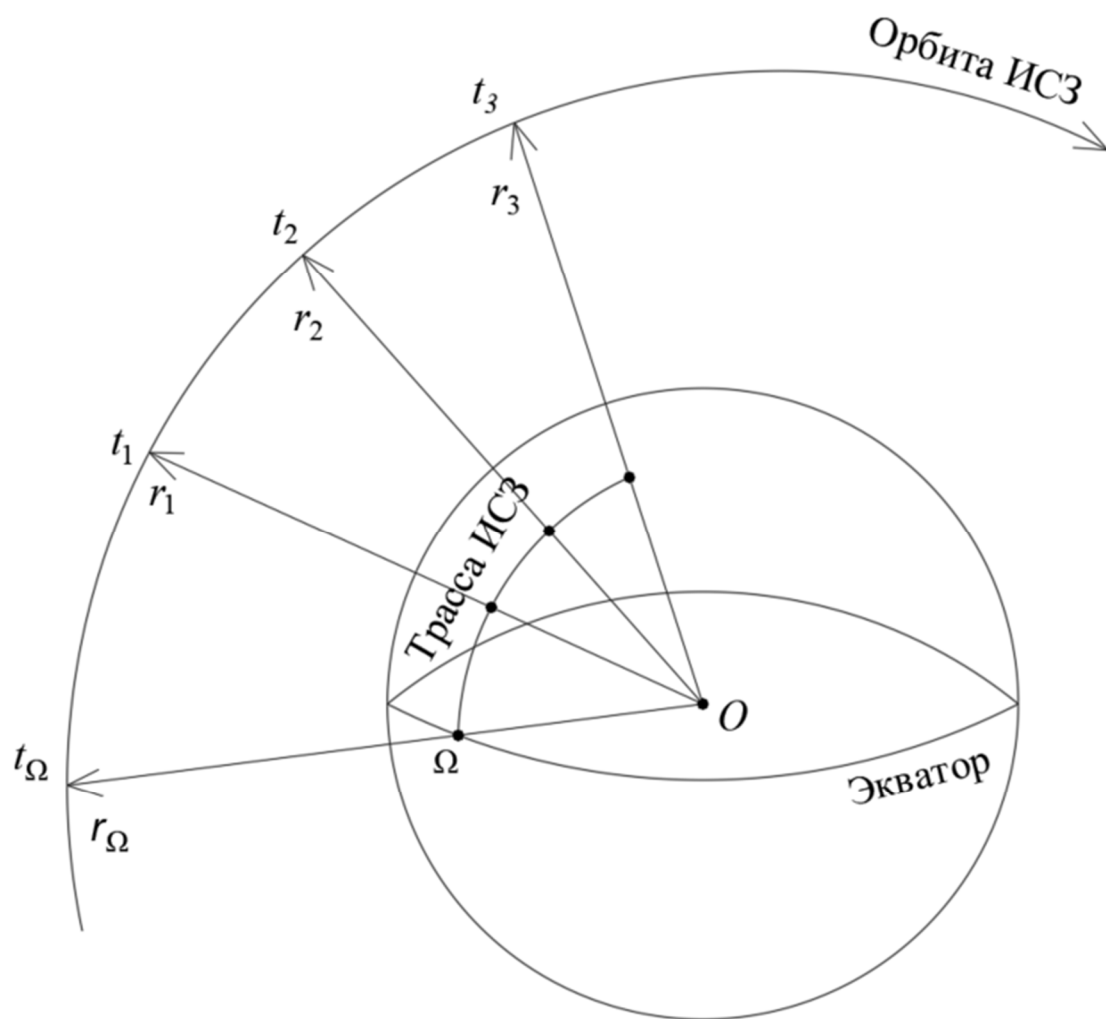


Рис. 8. Трасса спутника

Расположение трассы спутника на поверхности Земли позволяет определить границы зоны видимости ИСЗ с наземных пунктов наблюдения. При построении трассы ИСЗ используют форму Земли в виде шара. Координаты точек трассы в таком случае получают в виде геоцентрических широты φ и долготы λ .

Форма трассы определяется зависимостью $\varphi(\lambda)$ и определяется главным образом наклоном орбиты i и периодом обращения спутника T . Для спутников с прямым движением ($i < 90^\circ$) с низкими орбитами и небольшим эксцентриситетом трасса похожа на синусоиду, многократно опоясывающую земной шар [4] (рис. 9).

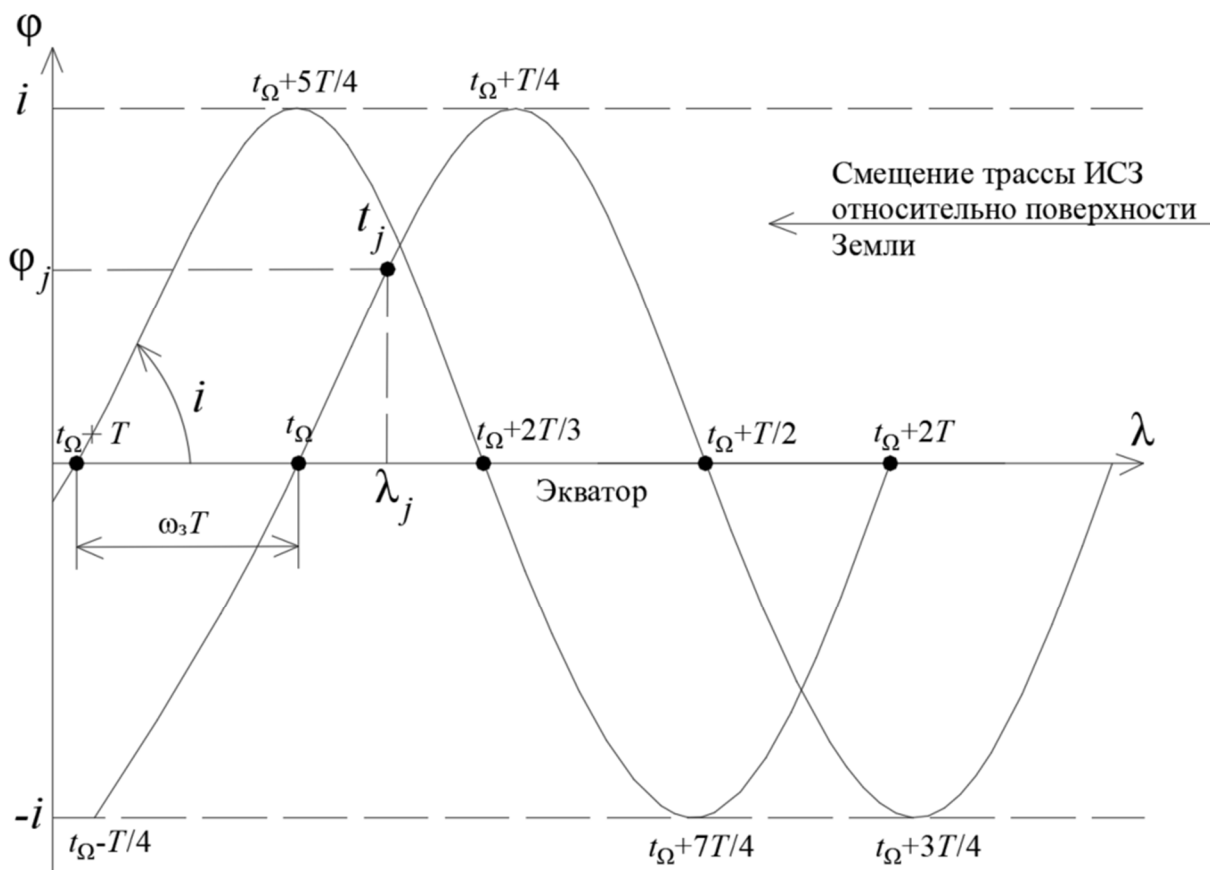


Рис. 9. Изображение трассы спутника на карте в проекции Меркатора

На рис. 9 показаны характерные точки трассы такого вида на двух соседних витках орбиты, при этом t_Ω обозначено время пролета спутника через восходящий узел орбиты первого витка. Точка трассы в момент времени t_j имеет географические координаты φ_j и λ_j . Угловая скорость вращения Земли на рис. 9 обозначена как ω_3 . В связи с вращением Земли вокруг своей оси с запада на восток относительно орбиты спутника трасса смещается в обратном направлении на величину $\omega_3 T$ за один виток.

Для орбит с большими периодами обращения и большими значениями эксцентриситета Земля в своем вращении на некоторых широтах (особенно вблизи экватора) будет обгонять спутник и на трассе могут появляться петли.

Для спутников с синхронными орбитами ($T = 23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 04^{\text{s}}$) с наклоном i , отличным от нуля, трасса имеет форму восьмерки, перекрестие ко-

торой расположено в некоторой точке экватора. Для стационарного спутника ($i = 0^\circ$, $T = 23^h 56^m 04^s$) трасса спутника вырождается в точку, так как угловые скорости геоцентрического радиус-вектора такого спутника и Земли совпадают.

Отметим, что возмущения в реальном движении спутника вносят свои коррективы в характер трассы спутника.

Построение трассы спутника сводится к определению геоцентрических сферических координат φ и λ подспутниковых точек и нанесению их на карту земной поверхности в какой-либо картографической проекции. Обычно в качестве такой проекции выбирают проекцию Меркатора, главным достоинством которой является изображение параллелей и меридианов в виде параллельных прямых. Но сразу отметим и недостаток этой проекции – искажение масштаба по оси φ по мере удаления от экватора.

Для расчета трассы спутника достаточно получить *географические координаты* подспутниковых точек, соответствующих точкам орбиты спутника, отстоящим друг от друга на угловом расстоянии порядка 30–40 градусов. При этом желательно зафиксировать верхнюю и нижнюю точки трассы, которые на рис. 9 соответствуют моментам $t_\Omega + \frac{1}{4}T$ и $t_\Omega + \frac{3}{4}T$ соответственно. Значения φ_j и λ_j для точки трассы с номером j можно получить по формулам сферической тригонометрии из решения сферического треугольника $\Omega m_i m'_j$ [4] (рис. 10).

1. Вычисление эксцентрической аномалии E_Ω для восходящего узла орбиты Ω :

$$E_\Omega = 2 \arctg \left(-\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \right). \quad (106)$$

Аргумент перигея ω в формуле (106) играет роль истинной аномалии v_Ω , отсчитываемой от перигея орбиты π в сторону восходящего узла Ω .

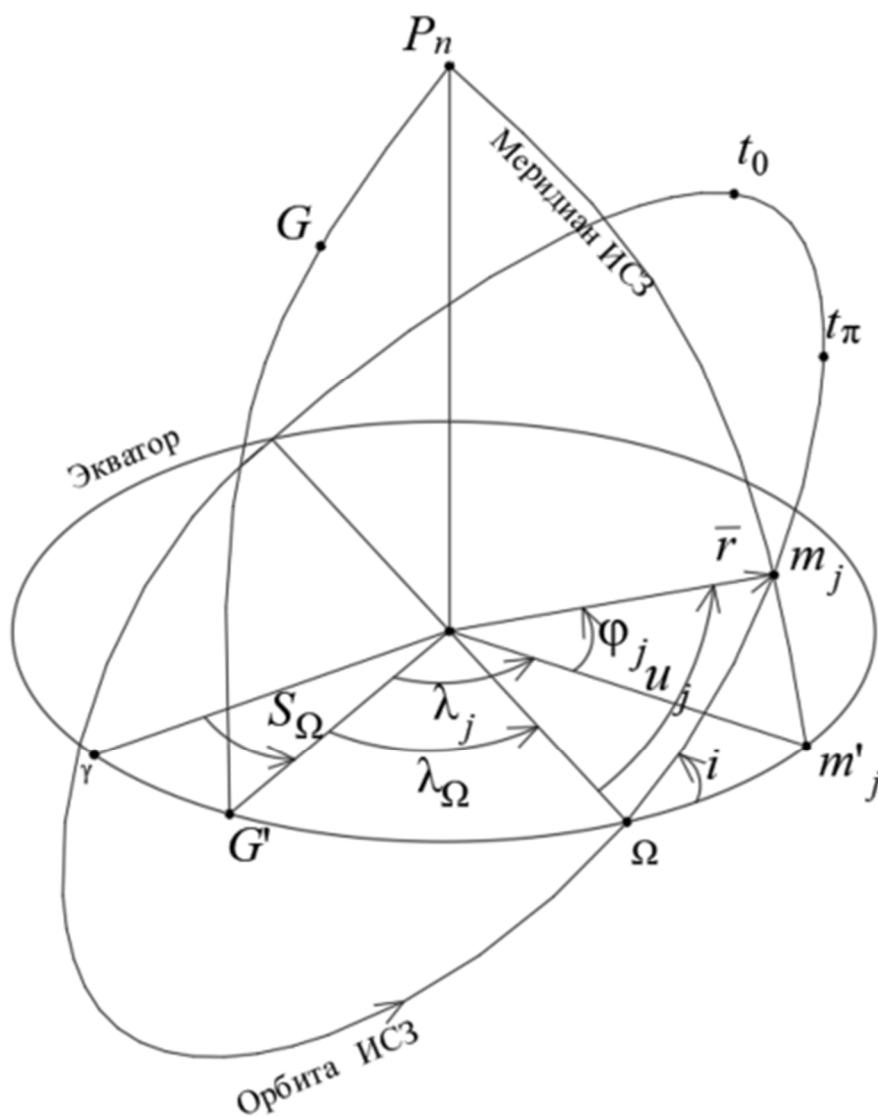


Рис. 10. Положение ИСЗ в географической системе координат

2. Вычисление средней аномалии M_{Ω} для точки Ω

$$M_{\Omega} = E_{\Omega} - e \sin E_{\Omega}. \quad (107)$$

3. Вычисление времени полета спутника от перигея орбиты до положения спутника в начальный момент времени t_0

$$\Delta t = \frac{M_0}{n}, \quad (108)$$

где n – среднее движение спутника.

4. Вычисление времени пролета спутника через перигей орбиты

$$t_{\pi} = t_0 - \Delta t. \quad (109)$$

5. Вычисление времени пролета спутника через восходящий узел орбиты

$$t_{\Omega} = t_{\pi} + \frac{M_{\Omega}}{n}. \quad (110)$$

6. Вычисление звездного времени S_{Ω} , пролета спутника через восходящий узел орбиты

$$S_{\Omega} = S_0 + t_{\Omega}(1 + \mu), \quad (111)$$

где S_0 – звездное время в гринвичскую полночь;

μ – коэффициент перехода от шкалы солнечного времени в звездную шкалу, равный 0,002 737 909 3 [2].

7. Вычисление географической широты φ_j подспутниковой точки, соответствующей положению спутника с аргументом широты u_j

$$\varphi_j = \arcsin(\sin i \sin u_j). \quad (112)$$

Значения аргумента широты u_j при построении трассы задаются. Обычно они представляют собой следующий ряд значений: $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ, 360^\circ$, т. е. охватывают полностью начальный виток орбиты спутника. При этом, значение аргумента широты, равное 0° , соответствует времени t_{Ω} пролета спутника через восходящий узел орбиты и имеет номер $j=1$. Для каждого последующего значения аргумента широты из приведенного выше ряда его номер j увеличивается на единицу. Для $u_j = 360^\circ$ номер j равен 9.

8. Для вычисления географической долготы λ_j для точки трассы с номером j необходимо использовать ряд формул:

$$\lambda_{\Omega} = \Omega - S_{\Omega};$$

$$\Delta\lambda_j = \omega_3 (t_j - t_\Omega);$$

$$\Delta\alpha_j = \begin{cases} \arcsin \frac{\operatorname{tg}\varphi_j}{\operatorname{tgi}}, & \text{если } 0 \leq u_j \leq \frac{\pi}{2}; \\ \pi - \arcsin \frac{\operatorname{tg}\varphi_j}{\operatorname{tgi}}, & \text{если } \frac{\pi}{2} < u_j \leq \frac{3}{2}\pi; \\ 2\pi - \arcsin \frac{\operatorname{tg}\varphi_j}{\operatorname{tgi}}, & \text{если } \frac{3}{2}\pi < u_j \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$\lambda_j = \lambda_\Omega + \Delta\alpha_j - \Delta\lambda_j. \quad (113)$$

В формуле (113) величина $\Delta\alpha_j$ представляет собой поправку за перемещение спутника по орбите, которая имеет положительный знак для спутников с прямым движением и отрицательный знак для спутников с обратным движением. Величина $\Delta\lambda_j$ представляет собой смещение трассы спутника по долготе в западном направлении вследствие вращения Земли.

9. Вычисление времени t_j , соответствующему положению спутника с аргументом широты u_j :

$$\Delta t_j = \frac{u_j}{n};$$

$$t_j = t_\Omega + \Delta t_j. \quad (114)$$

Для построения трассы спутника вычисленные значения φ_j и λ_j наносим на карту в проекции Меркатора и соединяем плавной кривой.

Радиус β зоны видимости спутника с наземного пункта с географическими координатами φ , λ может быть получен из решения треугольника ONm (рис. 11)

$$\beta = \arccos \left(\frac{R}{r} \cos h_{\min} \right) - h_{\min}, \quad (115)$$

где R – средний радиус Земли;

r – геоцентрическое расстояние до спутника;

$h_{\min}$ – минимально допустимый угол наблюдения спутника над горизонтом наблюдателя (*маска спутника*).

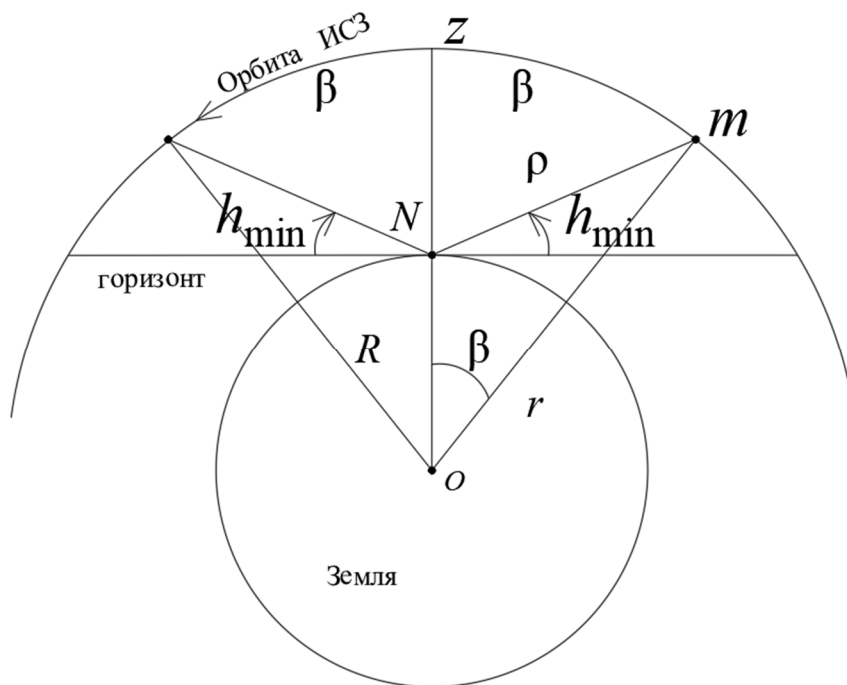


Рис. 11. Радиус зоны видимости ИСЗ

Зона видимости спутника с наземного пункта наносится на карту следующим образом. Сначала на карту наносят положение пункта наблюдения по его координатам φ_j и λ_j . Затем вычисляют координаты четырех точек, отстоящих от положения наблюдателя на угловом расстоянии, равном радиусу зоны видимости β , к северу, востоку, югу и западу: $\varphi + \beta, \lambda$; $\varphi, \lambda + \beta$; $\varphi - \beta, \lambda$; $\varphi, \lambda - \beta$. Наносят координаты этих точек на карту и соединяют их выпуклой кривой, получая тем самым границы зоны видимости (рис. 12).

Если трасса ИСЗ не пересекает зону видимости, то ее смещают по долготе на целое число витков столько раз, чтобы трасса пересекла зону видимости спутника. Затем методом интерполирования определяют моменты входа $t_{\text{вх}}$ и выхода $t_{\text{вых}}$ спутника из поля зрения наблюдателя, а также момент кульминации $t_{\text{кул}}$ положения ИСЗ, которое определяют путем опускания перпендикуляра из точки наблюдателя на трассу.

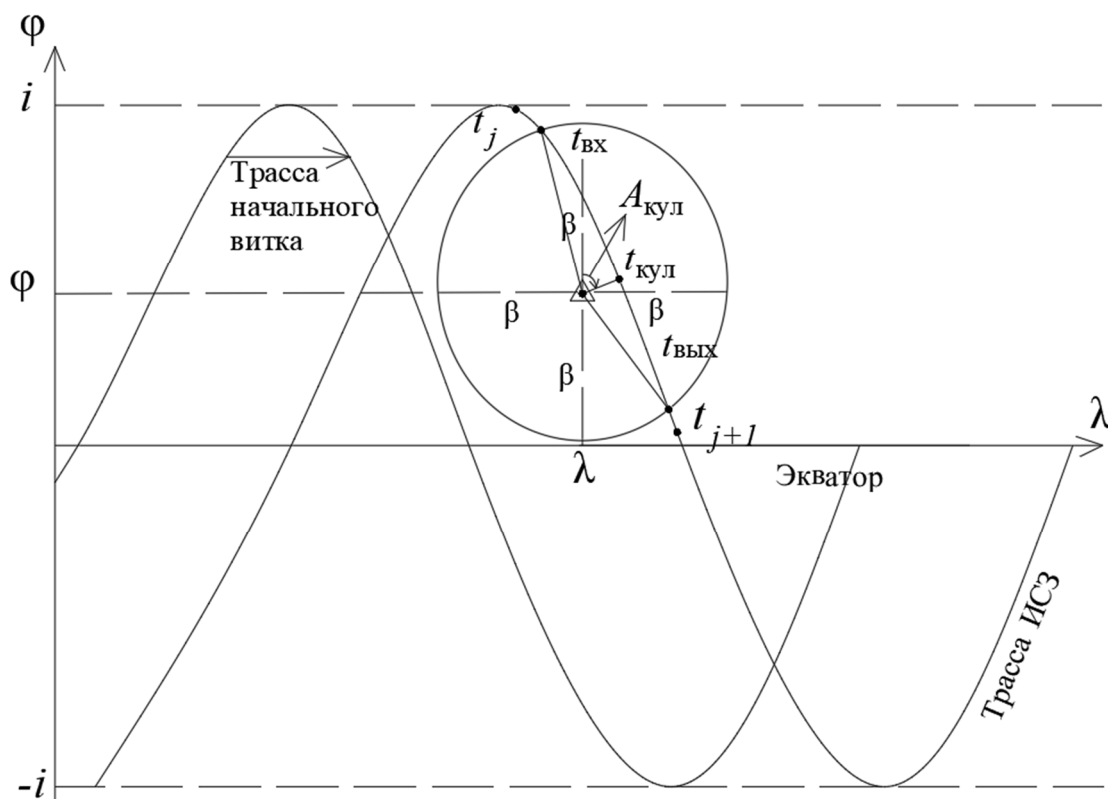


Рис. 12. Прохождение ИСЗ через зону видимости НП

Перейдем к составлению *эфемериды спутника*, под которой понимается совокупность положений спутника в пределах времени его пролета в зоне видимости наземного пункта. *Эфемериду спутника* оформляют в виде таблицы, в которой для моментов $t_{\text{вх}}$, $t_{\text{вых}}$ и $t_{\text{кул}}$ приводят соответствующие координаты спутника в горизонтной системе координат A, h . Азимуты точек измеряют относительно направления на север транспортом, поскольку проекция Меркатора является конформной, т. е. в ней не искажаются углы. Высоты точек над горизонтом наблюдателя вычисляются по формуле

$$h_i = \arctg \left[\left(\cos \zeta_i - \frac{R}{r_i} \right) / \sin \zeta_i \right], \quad (116)$$

где

$$\zeta_i = \sqrt{(\varphi_i - \varphi)^2 + (\lambda_i - \lambda)^2 \cos^2 \varphi_{\text{cp}}}; \quad (117)$$

$$r_i = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(u_i - \omega)}. \quad (118)$$

В формулах (116)–(118) подстрочным индексом i обозначены точки трассы спутника, для которых составляется эфемерида: $i = 1$ соответствует точке трассы для момента $t_{\text{вх}}$; $i = 2$ соответствует точке трассы для момента $t_{\text{кул}}$; $i = 3$ соответствует точке трассы для момента $t_{\text{вых}}$.

Значения широты и долготы точек трассы с номерами $i = 1, 2, 3$ снимаются с карты в проекции Меркатора. Значение аргумента широты u_i получают путем интерполирования между точками трассы с номерами j и $j + 1$.

Средняя широта $\varphi_{\text{ср}}$ в формуле (117) вычисляется следующим образом:

$$\varphi_{\text{ср}} = (\varphi_i - \varphi) / 2. \quad (119)$$

Топоцентрическое расстояние до спутника вычисляется по формуле

$$\rho_i = \sqrt{R^2 + r_i^2 - 2Rr_i \cos h_i}. \quad (120)$$

Вычисление эфемериды спутника удобно представить в виде таблицы.

Номер точки i	$t, \text{ h m s}$	$\varphi, ^\circ$	$\lambda, ^\circ$	$r, \text{ км}$	$A, ^\circ$	$h, ^\circ$
1 (вход)						
2 (кульм.)						
3 (выход)						

Входящие в таблицу величины φ , λ , r играют вспомогательную роль при вычислении высоты спутника над горизонтом наблюдателя h по формуле (116).

Отметим, что для спутников ГНСС 2-го поколения под *эфемеридой* подразумевается несколько другое понятие, включающее в себя набор параметров координатно-временного обеспечения ГНСС [1].

Задание

1. Построить трассу спутника на сетке географических координат в проекции Меркатора по его кеплеровым элементам орбиты: a – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклонение орбиты, Ω – долгота орбиты, ω – аргумент перигея, $M(t)$, t_π , n , P .

Исходные данные взять из практической работы № 2. Гравитационный параметр Земли принять равным $GM = 398\,600,5 \text{ км}^3\text{с}^{-2}$. При выполнении работы использовать формулы, приведенные в разделе «Общие теоретические сведения».

2. Построить зону видимости спутника с пункта Новосибирск ($\varphi = 55,0^\circ$; $\lambda = 82,9^\circ$ в. д.).

3. Определить горизонтные координаты ИСЗ для точек входа в зону видимости, точки кульминации и точки выхода из зоны видимости.

4. Составить эфемериду ИСЗ.

Рекомендации по выполнению работы

1. Подготовительные вычисления: формулы (106)–(111).

2. Вычислить координаты точек трассы φ_j , λ_j для аргументов широты

$$u_j = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ, 360^\circ.$$

$$\varphi_j = \arcsin(\sin i \sin u_j);$$

$$\lambda_\Omega = \Omega - S_\Omega;$$

$$\Delta t_j = \frac{u_j}{n};$$

$$t_j = t_\Omega + \Delta t_j;$$

$$\Delta \lambda_j = \omega_3 (t_j - t_\Omega);$$

$$\Delta\alpha_j = \begin{cases} \arcsin \frac{\operatorname{tg}\varphi_j}{\operatorname{tgi}}, & \text{если } 0 \leq u_j \leq \frac{\pi}{2}; \\ \pi - \arcsin \frac{\operatorname{tg}\varphi_j}{\operatorname{tgi}}, & \text{если } \frac{\pi}{2} < u_j \leq \frac{3}{2}\pi; \\ 2\pi - \arcsin \frac{\operatorname{tg}\varphi_j}{\operatorname{tgi}}, & \text{если } \frac{3}{2}\pi < u_j \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$\lambda_j = \lambda_\Omega + \Delta\alpha_j - \Delta\lambda_j.$$

3. Разбить на листе миллиметровой бумаги координатную сетку в поперечной проекции Меркатора. Масштаб по долготе (вдоль экватора): в 1 см – 10°, расстояния параллелей от экватора l выбираются из таблицы.

$\varphi, ^\circ$	$l, \text{см}$	$\varphi, ^\circ$	$l, \text{см}$	$\varphi, ^\circ$	$l, \text{см}$
10	1,00	50	5,76	70	9,91
20	2,02	55	6,59	75	11,60
30	3,13	60	7,51	80	13,92
40	4,35	65	8,61	—	—

Нанести на сетку координаты точек трассы и соединить их плавной кривой.

4. Нанести на координатную сетку положение пункта наблюдений. Если трасса проходит далее 20° от пункта по долготе, произвести построения трассы на более поздних витках, смещая их последовательно от построенной трассы к западу по долготе на величину периода обращения в градусной мере (т. е. $P(\text{ч}) \cdot 15^\circ$). Моменты прохождения спутника через точки новой трассы получаются добавлением периода обращения к предыдущим значениям моментов.

5. Найти на трассе точку сближения с пунктом (опустить перпендикуляр из пункта на трассу). Эта точка обозначается цифрой 2. Для нее найти по графику момент t_2 и аргумент широты u_2 . Вычислить геоцентрическое расстояние для точки сближения через уравнение орбиты

$$r_2 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(u_2-\omega)}$$

и высоту полета ИСЗ

$$H = r - R.$$

Вычислить β – сферический радиус зоны видимости

$$\beta = \arccos \frac{r_2 \cos h_{\min}}{a} - h_{\min},$$

где $h_{\min}$ – минимальная высота спутника над горизонтом, с которой начинаются наблюдения (маска высоты, равная 15°).

Нанести зону видимости на график по четырем точкам с координатами

$$\varphi - \beta, \quad \lambda; \quad \varphi + \beta, \quad \lambda; \quad \varphi, \quad \lambda + \beta \sec \varphi; \quad \varphi, \quad \lambda - \beta \sec \varphi.$$

Зона видимости очерчивается на координатной сетке.

6. Найти точки входа в зону видимости и выхода из нее (точки 1 и 3). Для трех точек (вход 1, кульминация 2, выход 3) представить эфемериды в виде таблицы из моментов прохождения

$$t_i = t_\pi + \frac{u_i \cdot P}{360},$$

азимутов A_i (измеряются транспортиром по сетке, поскольку проекция является конформной) и высот h_i ($i = 1, 2, 3$).

Высоты находятся по формуле

$$h_i = \arctg \left[\left(\cos \varsigma_i - \frac{R}{r_i} \right) / \sin \varsigma_i \right],$$

где $R = 6\,378$ км – радиус Земли;

ς_i – геоцентрическое зенитное расстояние спутника,

$$\varsigma_i = \sqrt{(\varphi_i - \varphi_n)^2 + (\lambda_i - \lambda_n)^2 \cos^2 \varphi_{\text{cp}}};$$

$$r_i = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(u_i - \omega)};$$

$$\rho_i = \sqrt{R^2 + r_i^2 - 2Rr_i \cos h_i},$$

где ρ_i – топоцентрическое расстояние спутника.

Оценить продолжительность нахождения спутника в зоне видимости.

Итог составления эфемериды спутника при пересечении зоны видимости представить в виде таблицы.

Точка	t , ч	A , °	h , °	ρ , км
1				
2				
3				

Эфемерида ИСЗ на дату $d = \dots$ в пункте с координатами $\varphi = 55,0^\circ$; $\lambda = 82,9^\circ$ в. д.

Обеспечить точность вычисления эфемерид в 1° по высоте и по азимуту и 0,1 минуты по времени.

Контрольные вопросы

1. Что такое эфемерида спутника? Методы вычисления эфемерид.
2. Зона радиовидимости спутника на небосводе наблюдателя. Основные понятия.
3. Дать определение трассы спутника.
4. Форма трассы спутника, ее изображение на карте поверхности Земли.
5. Что такое кульминация спутника на небосводе наблюдателя?
6. Как по построенному графику трассы спутника определить наклон орбиты?
7. На каких широтах возможно прохождение спутника через зенит?
8. Как по построенному графику можно определить период обращения спутника?
9. Основное содержание эфемериды спутников ГНСС ГЛОНАСС.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антонович К. М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии. В 2 т. Т. 1 : монография. – М. : ФГУП «Картгеоцентр», 2005. – 334 с.
2. Гиенко Е. Г., Ганагина И. Г. Астрономия : сб. описаний практ. работ. – Новосибирск : СГУГиТ, 2017. – 91 с.
3. Афонин К. Ф. Высшая геодезия. Системы координат и преобразования между ними : учеб.-метод. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2011. – 66 с.
4. Шалыгин А. С., Санников В. А., Петрова И. Л. Баллистика космических аппаратов : учеб. пособие. – СПб. : Балт. гос. техн. ун-т, 2006. – 131 с.
5. Бордовицина Т. В., Авдюшев В. А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы : учеб. пособие. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2007. – 178 с.
6. Дементьев Ю. В., Ганагина И. Г. Космическая геодезия : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2017. – 120 с.
7. Крылов В. И. Основы теории движения ИСЗ. В 2 частях. Часть первая : Невозмущенное движение : учеб. пособие. – М. : МИИГАиК, 2015. – 64 с.
8. Крылов В. И. Основы теории движения ИСЗ. В 2 частях. Часть вторая : Возмущенное движение : учеб. пособие. – М. : МИИГАиК, 2016. – 67 с.
9. Лукьянов Л. Г., Ширлин Г. И. Лекции по небесной механике : учеб. пособие для вузов. – Алматы : Издат., 2009. – 227 с.
10. Совершенствование и практическая реализация динамического метода космической геодезии : монография / Ю. В. Сурнин, В. А. Ащеулов, С. В. Кужелев, Е. В. Михайлович, Н. К. Шендрик; под общ. ред. Ю. В. Сурнина. – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. – 193 с.
11. Яшкин С. Н. Небесная механика : учеб. пособие. – М. : МИИГАиК, 2014. – 270 с.

Исходные данные к практической работе № 1

№ варианта	Первое наблюдение				Второе наблюдение				Дата наблюдения	Координаты точки наблюдения (WGS-84)		
	Азимут, градусы	Высота над горизонтом, градусы,	Дальность, км	Момент первого наблюдения, ч (UTC)	Азимут, градусы	Высота над горизонтом, градусы	Дальность, км	Момент второго наблюдения, ч (UTC)		Широта, градусы	Долгота, градусы	Высота над эллипсоидом, м
1	68,92323	28,69591	4508,946	17,10	39,09802	30,05685	5496,649	17,20	01.05.2010	128,00	51,00	0,2
2	224,94007	51,36675	3297,823	16,90	284,7783	47,29491	4268,918	17,00	02.05.2010	127,35	50,25	0
3	261,94397	15,02748	6299,535	17,40	278,0614	10,00226	7820,662	17,50	03.05.2010	127,33	50,04	−0,23
4	165,37455	38,14933	3254,014	17,40	287,1977	37,0992	6842,501	17,70	04.05.2010	126,61	49,79	−1,2
5	197,15269	29,51201	9148,122	10,00	221,396	13,69549	12241,261	10,30	05.05.2010	127,55	49,04	−1,57
6	319,72410	18,05116	4944,141	9,50	300,4478	13,36341	6649,744	9,60	06.05.2010	127,77	48,05	−1,23
7	171,38694	24,96748	5538,367	10,40	227,9972	16,09538	9016,365	10,70	07.05.2010	127,58	47,67	−0,61
8	192,64941	40,56344	7969,273	11,50	243,2468	10,50172	12288,904	12,00	08.05.2010	128,13	46,88	0,03
9	120,76333	11,65986	5038,128	11,50	188,2477	31,36746	5180,292	11,70	09.05.2010	128,91	47,03	−0,76
10	167,16711	17,06803	3420,053	11,40	250,0982	5,219395	7948,394	11,70	10.05.2010	129,10	46,67	−1,42
11	180,69247	4,42623	9848,360	7,90	228,6408	9,129844	13248,366	8,40	11.05.2010	128,66	47,18	−1,27
12	286,09033	3,67059	11969,725	8,00	306,9163	5,716365	14047,997	8,30	12.05.2010	128,76	46,89	−2,16
13	337,97605	17,62093	14103,004	8,10	347,897	12,67369	14434,597	8,30	13.05.2010	128,42	46,41	−1,68

№ ва- рианта	Первое наблюдение				Второе наблюдение				Дата наблюде- ния	Координаты точки наблюдения (WGS-84)		
	Азимут, градусы	Высота над гори- зонтом, градусы,	Даль- ность, км	Момент первого наблю- дения, ч (UTC)	Азимут, градусы	Высота над гори- зонтом, градусы	Даль- ность, км	Момент второго наблю- дения, ч (UTC)		Широта, градусы	Долгота, градусы	Высота над эллипсо- идом, м
14	308,02143	8,38754	12269,044	7,20	322,0049	7,549361	13528,432	7,40	14.05.2010	128,15	46,89	−2,44
15	262,74793	13,06176	10562,504	7,90	286,2925	36,7543	11134,868	8,30	15.05.2010	128,91	47,86	−2,36
16	152,54225	54,96238	5442,982	7,70	86,51298	55,92929	8411,112	8,00	16.05.2010	128,81	47,18	−2,75
17	87,85603	7,54883	7143,306	7,70	62,84857	3,200376	11138,344	8,00	17.05.2010	128,23	47,53	−3,09
18	108,42966	43,36620	9705,102	8,00	70,87018	32,86311	11473,439	8,50	18.05.2010	128,91	46,94	−3,87
19	334,49513	54,35908	10575,805	21,50	241,9803	87,34254	9205,819	22,00	19.05.2010	129,25	46,17	−4,06
20	323,12546	18,72111	8256,292	19,70	36,48996	19,47296	12674,154	20,50	20.05.2010	129,20	46,48	−3,47
21	52,54262	46,10411	6731,583	10,00	276,9899	54,98916	9136,133	10,50	21.05.2010	128,30	46,64	−3,49
22	301,81307	31,11845	6641,802	6,50	259,5699	21,57847	9354,748	6,80	22.05.2010	129,17	46,27	−4,25
23	198,93740	11,32678	7674,321	3,50	172,7506	3,636101	10888,321	3,80	23.05.2010	128,76	46,75	−3,25
24	162,87562	35,45012	7557,915	3,50	163,4553	13,26657	11236,601	3,80	24.05.2010	129,30	47,75	−3,12
25	190,08542	6,99433	13655,105	10,80	175,2019	3,927843	14674,091	11,20	25.05.2010	128,39	47,61	−2,81
26	163,25909	8,62585	6153,276	23,60	111,4206	0,857903	4929,287	23,80	26.05.2010	128,62	46,81	−3,19
27	144,02857	2,35286	11187,647	22,60	117,066	−4,40563	9241,107	22,90	27.05.2010	128,51	47,75	−2,68
28	142,35676	26,43748	10289,201	18,00	123,5131	7,234048	12948,373	18,50	28.05.2010	129,32	47,15	−1,69
29	219,05164	29,33279	11950,292	18,50	192,7762	24,5378	11847,607	19,00	29.05.2010	129,20	46,55	−1,51
30	250,71769	41,96624	11286,797	19,00	213,7742	35,91561	10216,008	19,50	30.05.2010	129,54	46,87	−1,66

Исходные данные к практической работе № 2

Номер варианта	Координаты спутника			Составляющие скорости		
	x_0 , км	y_0 , км	z_0 , км	$\dot{x}_0$, км/с	$\dot{y}_0$, км/с	$\dot{z}_0$, км/с
Вариант 1						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 10^{\text{h}} 29^{\text{m}} 32,94^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	770,42	4708,93	6699,08	6,7609253	-0,9665345	1,3605900
Вариант 2						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 17^{\text{h}} 37^{\text{m}} 51,31^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	4722,44	3678,27	3164,92	5,5698347	-2,2408276	-5,7975941
Вариант 3						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 20^{\text{h}} 36^{\text{m}} 14,56^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	2882,29	6174,61	-651,55	-1,0706415	-0,9199195	-8,1917582
Вариант 4						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 18^{\text{h}} 35^{\text{m}} 30,25^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	-3769,82	-3483,86	-6220,23	-0,8513218	-6,8413820	3,1045074
Вариант 5						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 5^{\text{h}} 01^{\text{m}} 03,14^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	-207,90	-7211,25	-2837,39	-3,5701399	-2,0318909	6,7147818
Вариант 6						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 1^{\text{h}} 10^{\text{m}} 45,39^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	1821,75	6763,13	-14465,41	2,3949375	3,1064234	2,8898010
Вариант 7						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 16^{\text{h}} 59^{\text{m}} 45,56^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	4592,44	-9506,59	-404,76	3,5525389	0,4235344	-5,0535879
Вариант 8						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 19^{\text{h}} 42^{\text{m}} 50,00^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	-10394,16	-2224,24	-14790,82	-3,8243418	-0,7797653	1,8631544

Номер варианта	Координаты спутника			Составляющие скорости		
	x_0 , км	y_0 , км	z_0 , км	$\dot{x}_0$, км/с	$\dot{y}_0$, км/с	$\dot{z}_0$, км/с
Вариант 9						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 22^{\text{h}} 37^{\text{m}} 32,56^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	7335,66	-9938,12	4268,39	-1,4963942	0,6764825	4,5519581
Вариант 10						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 6^{\text{h}} 01^{\text{m}} 46,24^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	-9427,46	2760,54	4414,39	0,9725056	-1,0511732	6,2742014
Вариант 11						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 10^{\text{h}} 37^{\text{m}} 34,19^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	-6054,75	1759,13	5808,55	5,4686527	-2,0223389	4,8427191
Вариант 12						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 20^{\text{h}} 17^{\text{m}} 06,31^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	-1495,85	-7131,49	11760,37	4,9522686	2,9237356	0,8745270
Вариант 13						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 21^{\text{h}} 16^{\text{m}} 40,44^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	2606,67	-5659,05	8805,05	4,0635405	4,8752155	-0,3482313
Вариант 14						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 07^{\text{h}} 49^{\text{m}} 28,88^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	-595,65	-594,38	25359,18	-3,0904064	-1,0821228	-0,3394241
Вариант 15						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 01^{\text{h}} 12^{\text{m}} 01,01^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	-8236,12	-3766,46	5079,59	-3,8134289	-3,0176678	-4,2853746
Вариант 16						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 08^{\text{h}} 19^{\text{m}} 59,56^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	531,18	-9694,46	-11585,39	3,2123089	1,7443085	-2,2443495

Номер варианта	Координаты спутника			Составляющие скорости		
	x_0 , км	y_0 , км	z_0 , км	$\dot{x}_0$, км/с	$\dot{y}_0$, км/с	$\dot{z}_0$, км/с
Вариант 17						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 23^{\text{h}} 50^{\text{m}} 38,50^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	-2774,01	12010,62	-3650,64	2,8247747	0,0088863	4,7392054
Вариант 18						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 07^{\text{h}} 44^{\text{m}} 23,63^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	-11500,77	-84,59	11890,47	3,5850000	-2,1754074	1,4029179
Вариант 19						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 19^{\text{h}} 34^{\text{m}} 49,13^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	298,68	2305,52	11771,83	-2,1419601	4,4484158	-3,1694422
Вариант 20						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 22^{\text{h}} 23^{\text{m}} 53,13^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	-3689,26	12786,37	6068,71	-1,4362698	-0,4409933	-5,3210239
Вариант 21						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 09^{\text{h}} 39^{\text{m}} 23,44^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	12103,88	5824,57	3438,28	2,6763363	2,7301607	-4,1524620
Вариант 22						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 08^{\text{h}} 03^{\text{m}} 25,69^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	1644,92	-6478,07	3157,41	-0,7727891	-2,0577402	-8,6890011
Вариант 23						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 05^{\text{h}} 42^{\text{m}} 23,29^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	7001,54	-714,57	-3319,33	-3,3477535	-0,5044904	-8,1771641
Вариант 24						
	$\mu = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$		$t_0 = 21^{\text{h}} 26^{\text{m}} 48,06^{\text{s}}$			
$r_0, \dot{r}_0$	1322,08	-5166,68	-10177,47	5,0551367	-2,3628798	4,4881124

Учебное издание

Ащеулов Владислав Андреевич

Мареев Артем Владимирович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Редактор *О. В. Георгиевская*

Компьютерная верстка *Н. Ю. Леоновой*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 29.12.2021. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 4,24. Тираж 65 экз. Заказ 192.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 8.