

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

А. Х. Бегматов

МАТЕМАТИКА:

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, РЯДЫ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия для обучающихся по направлению
подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии
(уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2021

УДК 517.937: 519.6

Б37

Рецензенты: кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общей информатики факультета информационных технологий НГУ *В. В. Богданов*

кандидат технических наук, доцент, СГУГиТ *С. Ю. Кацко*

Бегматов А. Х.

Б37 Математика: функции нескольких переменных, дифференциальные уравнения, ряды [Текст] : учеб. пособие / А. Х. Бегматов. – Новосибирск : СГУГиТ, 2021. – 146 с.

ISBN 978-5-907513-18-1

Учебное пособие подготовлено профессором кафедры, доктором физико-математических наук А. Х. Бегматовым на кафедре высшей математики СГУГиТ.

Содержит теоретические сведения, контрольные вопросы, примеры решения задач, задачи и упражнения по следующим разделам курса математики: «Функции нескольких переменных», «Дифференциальные уравнения», «Ряды».

Учебное пособие по дисциплине «Математика» предназначено для обучающихся по направлению подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии (уровень бакалавриата).

Рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики СГУГиТ, Ученым советом Института геодезии и менеджмента СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 517.937: 519.6

ISBN 978-5-907513-18-1

© СГУГиТ, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные обозначения	5
Введение	6
1. Функции нескольких переменных	8
1.1. Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность	8
1.2. Частные производные. Дифференцируемость функции	13
1.3. Производная сложной функции и функции, заданной неявно	18
1.4. Касательная плоскость и нормаль. Дифференциал функции.....	21
1.5. Производная по направлению и градиент	24
1.6. Локальный экстремум функции двух переменных	27
1.7. Глобальный экстремум функции двух переменных	29
2. Двойные интегралы.....	34
2.1. Плоские области и их меры	34
2.2. Определение двойного интеграла и его свойства	37
2.3. Повторные интегралы. Вычисление двойных интегралов сведением к повторным.....	40
2.4. Замена переменных в двойном интеграле	44
3. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.....	52
3.1. Основные понятия	52
3.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и однородные	55
3.3. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка и уравнение Бернулли	59
3.4. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	63
4. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков.....	68
4.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков	68
4.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью	74

4.3. Метод вариации произвольных постоянных	79
4.4. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	82
5. Числовые ряды	87
5.1. Основные понятия	87
5.2. Знакоположительные ряды	90
5.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость	96
6. Степенные ряды	100
6.1. Функциональные ряды	100
6.2. Степенные ряды	103
6.3. Ряды Тейлора – Маклорена	107
6.4. Разложение в ряд Тейлора (Маклорена). Стандартные разложения	109
6.5. Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям	113
7. Комплексные числа	117
7.1. Комплексные числа и операции над ними	117
7.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел	120
7.3. Множества на комплексной плоскости	124
7.4. Сфера Римана. Топология и сходимость на комплексной плоскости	127
8. Ряды Фурье	134
8.1. Тригонометрические ряды. Ряд Фурье 2π -периодической функции	134
8.2. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций	136
8.3. Ряд Фурье функции общего вида	138
8.4. Некоторые приложения рядов Фурье. Сигналы и Фурье-анализ	141
Заключение	143
Библиографический список	144

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\forall$ – квантор всеобщности

$\exists$ – квантор существования

$\Rightarrow$ – знак логического следования

$\Leftrightarrow$ – знак логической эквивалентности

$\wedge$ – знак конъюнкции (логическое «и»)

$\vee$ – знак дизъюнкции (логическое «или»)

$a \in A$ – a принадлежит множеству A

$A \subseteq B$ – множество A является подмножеством множества B

$A \subset B$ – множество A является собственным подмножеством множества B

$A \cup B$ – объединение множеств A и B

$A \cap B$ – пересечение множеств A и B

$A \setminus B$ – разность множеств A и B

$\{a : A(a)\}$ – множество всех элементов a таких, что выполняется условие $A(a)$

N – множество натуральных чисел

Z – множество целых чисел

R – множество действительных чисел (числовая прямая)

C – множество действительных чисел

R^n – арифметическое n -мерное пространство

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем учебном пособии рассматриваются следующие разделы курса математики: «Функции нескольких переменных», «Дифференциальные уравнения», «Ряды». Пособие адресовано обучающимся СГУГиТ направления 09.03.02 «Информационные системы и технологии» и может быть использовано обучающимися других факультетов СГУГиТ и технических вузов, а также преподавателями при подготовке и проведении семинаров, практических занятий, контрольных работ и коллоквиумов, подготовке к текущему и итоговому контролю.

Каждый подраздел посвящен отдельной теме и содержит, как правило, теоретические сведения, примеры решения основных типовых задач, контрольные вопросы и задания теоретического характера, задачи для самостоятельного решения при подготовке к аудиторным занятиям и во время их проведения, при выполнении домашнего задания, а также при подготовке к текущей и промежуточной аттестации.

В первом разделе рассматриваются функции нескольких переменных, их частные производные и дифференциалы, геометрические приложения, нахождение локального и глобального экстремума функции двух переменных. Во втором разделе вводится понятие кратных (двойных) интегралов, исследуются их свойства и основные методы вычисления.

Третий и четвертый разделы посвящены изучению дифференциальных уравнений. Рассмотрены основные типы дифференциальных уравнений первого порядка, методы их решения, а также дифференциальные уравнения более высокого порядка, допускающие понижение порядка и сводящиеся к решению уравнений первого порядка. Изучаются однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, в основном второго порядка.

В пятом разделе вводятся основные понятия числовых рядов, признаки их сходимости и методы решения типовых задач. В шестом разделе рассматриваются функциональные ряды, методы нахождения области их схо-

димости. Особое внимание уделяется степенным рядам и их приложениям к разложению функций (ряды Тейлора – Маклорена) и приближенным вычислениям с помощью рядов.

В разделе «Комплексные числа» вводятся основные понятия о комплексных числах, различных видах их записи, операциях над ними, геометрической интерпретации и множествах на комплексной плоскости. Изложение основано на материале параграфов 1–3 пособия автора [1].

В разделе «Ряды Фурье» излагаются понятия о тригонометрических рядах, рядах Фурье и некоторые их приложения.

Отметим, что *курсивом* выделены *определяемые понятия*.

Теоретические и практические аспекты рассматриваемых в настоящем учебном пособии разделов курса математики изложены в учебниках и учебных пособиях [8–11], сборниках задач и руководствах к решению задач [5–7]. Основные разделы математического анализа функций одной переменной, линейной алгебры и аналитической геометрии на плоскости и в трехмерном пространстве рассмотрены в пособиях [2–4, 11]. Большая часть задач для самостоятельного решения взяты из сборников [5, 7, 12]. Даны ответы ко всем задачам с нечетными номерами.

Нумерация теорем, примеров и задач для самостоятельного решения пораздельная. Формулы, рисунки и таблицы имеют двойную нумерацию, где первая цифра обозначает номер раздела, а вторая, через точку, – номер формулы, рисунка или таблицы в данном разделе. Так, например, рисунок 1.2 и формула (3.5) – это второй рисунок из раздела 1 и пятая пронумерованная формулы в разделе 3 соответственно.

Контрольные вопросы, задания, задачи для самостоятельного решения и разделы повышенной трудности обозначены звездочкой (*). При первом чтении этот материал можно пропустить.

1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1. Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n -мерный вектор (точка) пространства R^n .

Отображение f из $X \subseteq R^n$ в $Y \subseteq R$ называется *числовой функцией n переменных* (далее просто *функцией*) с *областью определения* $D(f) = X$ и *областью значений* $E(f) = Y$, если каждому $x \in X$ соответствует единственное $y \in Y$ и каждому $y \in Y$ соответствует хотя бы один $x \in X$. Мы будем рассматривать преимущественно функции двух переменных.

Пример 1. Имеется конус с радиусом основания r , длина образующей конуса равна l (рис. 1.1). Найти объем конуса и область определения соответствующей функции.

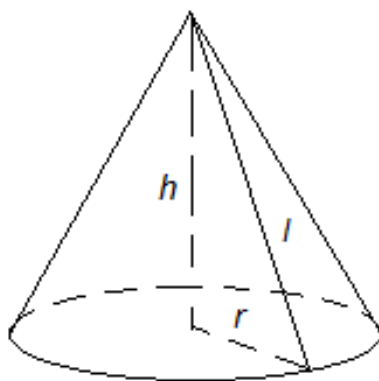


Рис. 1.1

Решение. Объем конуса находится по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \sqrt{l^2 - r^2}.$$

Легко увидеть, что V является функцией переменных r и l . Область ее определения есть часть плоскости $D(V) = \{(l, r) : l^2 - r^2 > 0, l > 0, r > 0\}$.

Это угол, заключенный между вертикальной осью l и биссектрисой первого координатного угла $l = r$.

На практике l и r не могут быть слишком большими.

Пример 2. Найти область определения функции из предыдущего примера при $r \leq 10, l \leq 20$.

Решение. Искомая область определения есть решение системы

$$\begin{cases} l \leq 20, r > 0, l > 0; \\ r \leq 10, l^2 - r^2 > 0. \end{cases}$$

Она представляет собой пересечение угла из примера 1, полуплоскостей $r \leq 10$ и $l \leq 20$.

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух переменных с областью определения D . Множество $\Gamma(f) = \{(x, y, z) : (x, y) \in D; z = f(x, y)\}$ называется *графиком* функции z и является подмножеством трехмерного пространства. *Линия уровня* L_C функции $z = f(x, y)$ есть множество всех точек $(x, y) \in D : f(x, y) = C$.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – точки n -мерного пространства R^n . *Расстояние* между точками x и x^0 определяется по формуле

$$d(x, x^0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}. \quad (1.1)$$

Открытый шар с центром в точке x^0 и радиуса ε (соответственно открытый шар без центра) называется ε -окрестностью (проколотой ε -окрестностью) точки x^0 в пространстве R^n :

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^n : d(x, x^0) < \varepsilon\}; \quad \dot{U}_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^n : 0 < d(x, x^0) < \varepsilon\}.$$

Рассмотрим множество $G \subset R^n$.

Точка x_0 называется *внутренней точкой* множества G , если найдется некоторая окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ этой точки, лежащая в G ($U_\varepsilon(x_0) \subset G$).

x_0 — *предельная точка* множества G , если в любой окрестности этой точки содержится хотя бы одна точка из G .

x_0 — *граничная точка* множества G , если в каждой окрестности этой точки содержатся точки, как принадлежащие G , так и не принадлежащие G .

Границей ∂G множества G называется множество всех граничных точек этого множества.

Открытое множество состоит только из внутренних точек. *Замкнутое множество* состоит из всех своих предельных точек.

Предел функции нескольких переменных. Число A называется *пределом* функции n переменных $f(x)$ в точке x^0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $d(x, x^0) < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначается: $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$.

Геометрический смысл предела. Число A является пределом функции n переменных $f(x)$ в точке x^0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что значения $f(x)$ лежат в ε -окрестности числа A при всех x из δ -окрестности точки x^0 .

Для функции двух переменных $f(x, y)$ число A является *пределом функции в точке* (x_0, y_0) , если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x) - A| < \varepsilon$ при условии, что точка (x, y) лежит в δ -окрестности точки (x_0, y_0) .

Обозначается $A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$.

Рассмотрим фиксированную точку $(x_0, y_0) \in R^2$ и последовательность точек $\{(x_k, y_k)\}$ также из R^2 . Будем говорить, что *последовательность* $\{(x_k, y_k)\}$ *стремится к точке* (x_0, y_0) , если $\forall \varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ та-

кое, что $d((x_k, y_k); (x_0, y_0)) < \varepsilon$ для всех $k > N$. Обозначается $(x_k, y_k) \rightarrow (x_0, y_0)$ при $k \rightarrow \infty$. Формальная запись этого определения выглядит так: $(x_k, y_k) \rightarrow (x_0, y_0) \Leftrightarrow d((x_k, y_k); (x_0, y_0)) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Теорема 1. $A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ тогда и только тогда, когда

$A = \lim_{\substack{x_k \rightarrow x_0 \\ y_k \rightarrow y_0}} f(x, y)$ для любой последовательности точек $(x_k, y_k) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Повторными пределами функции двух переменных называют $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y))$ и $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y))$

Замечание. Повторные пределы не обязательно равны друг другу.

Пример 3. Найти повторные пределы функции $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ в на-

чале координат.

Решение.

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1;$$

$$l_2 = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{y^2}{y^2} \right) = -1.$$

Функция нескольких переменных $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если она:

- 1) определена в некоторой окрестности x_0 ;
- 2) имеет предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ в этой точке;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ – предел равен значению функции в этой точке.

Говоря иначе, $f(x)$ непрерывна в точке x^0 ($x, x^0 \in R^n$), если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Функция n переменных $f(x)$ принимает в точке $x_0 \in G$ наибольшее (наименьшее) на множестве G значение, если для всех x из G выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).

Основные свойства функций, непрерывных на замкнутом ограниченном множестве

Свойство 1. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на замкнутом, ограниченном множестве G , принимает на этом множестве наибольшее значение M и наименьшее значение m , т. е. найдутся такие точки x_1 и x_2 из G , что для всех $x \in G$ выполняется двойное неравенство $m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$.

Свойство 2. Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве G , $m = f(x_1)$ и $M = f(x_2)$ соответственно наименьшее и наибольшее значения функции на G , тогда для любого числа $\mu \in (m; M)$ найдется хотя бы одна точка $x_0 \in G$: $f(x_0) = \mu$.

Следствие из свойства 2. Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве; функция принимает на нем как положительные, так и отрицательные значения. Тогда эта функция обращается в нуль хотя бы в одной точке данного множества G .

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определение функции нескольких переменных.
2. Привести пример нахождения области определения функции двух переменных.
3. Сформулировать определения внутренней, предельной и граничной точек.
4. Пояснить, обязательно ли повторные пределы функции двух переменных в точке равны.
5. Дать определение непрерывности функции нескольких переменных.
6. Перечислить свойства функций нескольких переменных, непрерывных на замкнутом ограниченном множестве.

Задачи для самостоятельного решения

Найти область определения функции двух переменных.

1. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. 2. $z = \frac{x + 5y + 1}{y - x}$. 3. $z = \ln(-x - y)$.

4. $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$. 5. $z = \arccos(x + y)$. 6. $z = \arcsin \frac{y - 1}{x}$.

7. $z = \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$. 8. $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

Найти повторные пределы.

9. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - y}{x^3 + y} \right)$; б) $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - y}{x^3 + y} \right)$.

10. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{x} \operatorname{tg} \frac{x}{x + y} \right)$; б) $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{y}{x} \operatorname{tg} \frac{x}{x + y} \right)$.

Найти предел.

11. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$. 12. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$.

Найти точки разрыва функции двух переменных.

13. $f(x, y) = \frac{1}{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}$. 14. $f(x, y) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$.

15*. Исследовать функцию $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$ на непрерыв-

ность в точке $(0, 0)$.

1.2. Частные производные. Дифференцируемость функции

Пусть $U = f(x; y)$ – функция двух переменных. При изменении аргумента от точки $M_0(x_0; y_0)$ до точки $M(x; y)$ *частное приращение по x* есть $\Delta_x U = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, где $\Delta x = x - x_0$. *Частное приращение по y* есть $\Delta_y U = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, где $\Delta y = y - y_0$. *Полное приращение* – это $\Delta U = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Частная производная (ЧП) первого порядка по переменной x (соответственно y) функции $U = f(x, y)$ есть предел отношения частного приращения функции к приращению аргумента x (y)

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \right), \quad (1.1)$$

если этот предел существует и конечен.

Замечание. При вычислении частной производной по одному аргументу с другими аргументами в (1.1) надо обращаться как с постоянными.

Пример 4. Найти ЧП по x и по y функции $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

Решение.

$$U'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + y^3 - 3axy)'_x = 3x^2 + 0 - 3ay = 3x^2 - 3ay;$$

$$U'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3ax.$$

Пусть производные функции $U = f(x, y)$, т. е. U'_x и U'_y , сами являются дифференцируемыми функциями, тогда их производные называются *частными производными второго порядка* от $U = f(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U''_{xx} \text{ — вторая производная по } x;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = U''_{xy} \text{ — смешанная частная производная второго по-}$$

рядка по x, y ;

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = U''_{yy} \text{ — вторая производная по } y.$$

Пусть все производные до $(k-1)$ -го порядка включительно от функции n переменных $U = f(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x \in R^n$. Тогда можно определить *ЧП k -го порядка* от U как ЧП по соответствующему аргументу от производной $(k-1)$ -го порядка.

Пример 5. Найти все ЧП второго порядка $U = \ln(x^2 + y^2)$.

Решение.

$$U'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad U'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2};$$

$$U''_{xx} = 2 \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \quad U''_{yy} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$U''_{xy} = (U'_x)'_y = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad U''_{yx} = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Видим равенство смешанных производных.

Теорема 2 (о равенстве смешанных производных). Пусть в некоторой окрестности точки $p_0 (x_0, y_0)$ определена и непрерывна функция двух переменных $U(x, y)$ и ее частные производные $U'_x, U'_y, U''_{xy}, U''_{yx}$; тогда

в точке p_0 выполняется равенство
$$\frac{\partial^2 U(p_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U(p_0)}{\partial y \partial x}.$$

Напомним, что функция одной переменной $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке x_0* , если в некоторой окрестности этой точки $f(x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$; $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = y - y_0$; $A = f'(x_0)$; $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$.

Функция $y = f(x)$ имеет (конечную) производную в точке $x_0 \Leftrightarrow$ функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 .

Для функции двух переменных

$$d = d((x_0, y_0), (x, y)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0.$$

Функция $U = U(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке (x_0, y_0)* , если в некоторой окрестности этой точки

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) + A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y,$$

где A и B – постоянные, $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, или если в некоторой окрестности этой точки $U(x, y) = U(x_0, y_0) + A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \delta(d)$, $\delta(d)$ – бесконечно малая при $d \rightarrow 0$ более высокого порядка малости, чем d .

Условия дифференцируемости функции в точке

Теорема 3. Если функция $U(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то она непрерывна в этой точке.

Теорема 4. Пусть $U(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , тогда существуют U'_x и U'_y в этой точке, причем $U'_x = A$; $U'_y = B$.

Пример 6 (функция непрерывна в точке, но не имеет частных производных в этой точке). Функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ непрерывна в $(0; 0)$. Однако $f(x, y)$ не имеет частных производных в этой точке:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(0 + \Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

откуда следует, что предел не существует. Аналогично для $f'_y(0, 0)$.

Пример 7 (функция имеет частные производные в точке, но не является непрерывной в этой точке). Дана функция $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \wedge y \neq 0, \\ 0, & x = 0 \vee y = 0. \end{cases}$

$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, так как $f(x, 0) = f(0, y) \equiv 0$. Непрерывности в начале координат нет, так как пределы по разным путям различны.

Пример 8 (функция непрерывна и имеет частные производные, но не является дифференцируемой в точке). Функция $f(x, y) = \sqrt{|x| \cdot |y|}$ непрерывна в точке $(0; 0)$, так как $f(0; 0) = 0$ и по определению $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

$f'_x(0; 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x| \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0$, аналогично для $f'_y(0; 0)$. Пусть $x = y$, тогда $f(x, x) = \sqrt{|x| \cdot |x|} = |x|$ не дифференцируема в точке $(0; 0)$.

Теорема 5 (достаточное условие дифференцируемости в точке).

Пусть $U(x, y)$ имеет непрерывные ЧП первого порядка U'_x и U'_y в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , тогда она дифференцируема в этой точке.

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определения частных приращений и полного приращения функции двух переменных.
2. Привести определения частной производной первого и высших порядков.
3. Сформулировать теорему о равенстве смешанных производных.
4. Дать определение дифференцируемости функции двух переменных в точке.
5. Записать необходимые условия дифференцируемости функции двух переменных в точке и достаточные условия.

Задачи для самостоятельного решения

Найти частные производные функции.

16. $z = x^3 + y^3 - 2x^2y + 3xy^2$. 17. $z = \ln(x^2 + y^2)$. 18. $z = \frac{\cos y^2}{x}$.
19. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. 20. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. 21. $z = y^x$.

Вычислить частные производные первого и второго порядков функции $f(x, y)$ и их значения в заданной точке (x_0, y_0) .

22. $f(x, y) = x \cdot e^{-xy}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

23. $f(x, y) = xy + \frac{y}{x}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

24. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right)$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

25. $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

26. $f(x, y) = y \cdot \sin \left(\frac{y}{x} \right)$, $(x_0, y_0) = (2, \pi)$.

Найти все частные производные второго порядка функции.

$$27. z = \sin(xy) + \cos(xy).$$

$$28. z = \ln \operatorname{tg}(x+y).$$

1.3. Производная сложной функции и функции, заданной неявно

Пусть дана функция

$$z = F(u, v), \quad (1.2)$$

где

$$u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y). \quad (1.3)$$

Ясно, что $z = F(u, v) = F(\varphi(x, y); \psi(x, y))$.

Теорема 6. Пусть функции z, u, v заданы уравнениями (1.2) и (1.3), функции u и v непрерывно дифференцируемы в окрестности точки (x_0, y_0) , а функция z – в окрестности точки $(u_0 = u(x_0, y_0); v_0 = v(x_0, y_0))$.

Тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0); \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases} \quad (1.4)$$

При помощи более компактных обозначений (1.4) можно записать в виде

$$\begin{cases} F'_x = F'_u \cdot u'_x + F'_v \cdot v'_x; \\ F'_y = F'_u \cdot u'_y + F'_v \cdot v'_y. \end{cases}$$

Когда исходная (независимая) переменная одна, частные производные по этой переменной превращаются в обычные. Например, рассмотрим сложную функцию $f(x, y)$, где $x = x(t), y = y(t)$. Тогда производная находится по формуле

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (1.5)$$

Пример 9. Пусть $z = x \cdot \sin \frac{x}{y}$, $x = 1 + 3t$, $y = \sqrt{1+t^2}$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

Решение. По формуле (1.4) получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \left(\sin \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y} \right) \cdot 3 - \frac{x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Пусть дифференцируемая в точке x_0 функция $y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$; $y = y(x)$ – решение этого уравнения. Если F дифференцируема и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то производная от $y = y(x)$ определяется по

формуле
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = - \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Пусть дифференцируемая в точке $M^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана неявно уравнением $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$; $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – решение этого уравнения. Если F дифференцируема и $F'_{y_k}(M^0, u^0) \neq 0$, то частные производные функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке M^0 определяются по формуле

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|_{M=M^0} = - \frac{F'_{x_k}(M^0, u^0)}{F'_u(M^0, u^0)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.6)$$

Пример 10. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

Решение. По формуле (1.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= - \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = - \frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= - \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = - \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(z^2 - xy)}. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Записать формулы для нахождения частных производных сложной функции от двух независимых переменных.
2. Привести формулу для нахождения частных производных сложной функции от одной независимой переменной.
3. Описать процедуру нахождения производной функции одной переменной, заданной неявно.
4. Привести выражения для нахождения частных производных неявно заданной функции нескольких переменных.

Задачи для самостоятельного решения

29. Пусть $z = \operatorname{arctg}(xy)$, $y = e^x$. Найти $\frac{dz}{dx}$.
30. Пусть $u = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$. Найти $\frac{du}{dt}$.
31. Пусть $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$. Найти $\frac{dz}{dt}$.
32. Пусть $u = \ln(e^x + e^y)$. Найти: а) $\frac{\partial u}{\partial x}$; б) $\frac{du}{dx}$, если $y = x^3$.

В задачах 33–36 функция z задана неявно. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

33. $z = u^2 \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$. 34. $z = e^{\frac{x^2 + y^2}{xy}}$.

35. $z = u^3 + v^3$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

36. $z = u^2 v - uv^2$, $u = x \cos y$, $v = x \sin y$.

В задачах 37–40 функция $y = y(x)$ задана неявно. Найти $\frac{dy}{dx}$.

37. $x + y = e^{x-y}$. 38. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

39. $y \sin x - \cos(x - y) = 0$. 40. $x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0$.

В задачах 41–45 функция $z = z(x, y)$ задана неявно. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

41. $e^z - xyz = 0$. 42. $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$.

43. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$. 44. $x^3 + 3xyz^2 = a^3$, $a - \text{const}$.

45. $z \ln(x + z) - \frac{xy}{z} = 0$.

46. Найти z'_x и z'_y в точке $(1; -2; 2)$, если $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

1.4. Касательная плоскость и нормаль. Дифференциал функции

Касательная плоскость к поверхности в ее точке (x_0, y_0) (точке касания) есть плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Уравнение касательной плоскости к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Пример 11. Найти уравнение касательной плоскости к графику функции $z = xy$ в точке $A(3, 4)$.

Решение. $z'_x = y$; $z'_y = x$; $z'_x(A) = 4$; $z'_y(A) = 3$; $z(A) = 12$;

$$xy - 12 = 4(x - 3) + 3(y - 4); \quad 4x + 3y - z - 12 = 0.$$

Нормаль к поверхности $z = f(x, y)$ в точке касания (x_0, y_0) есть вектор, перпендикулярный касательной плоскости к поверхности в точке (x_0, y_0) .

Параметрическое уравнение нормали к графику функции в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$\text{а) } F(x, y, z) = 0, \text{ тогда } \begin{cases} x = x_0 + F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot t, \\ y = y_0 + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot t, \\ z = z_0 + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot t; \end{cases}$$

$$\text{б) } z = f(x, y), \text{ тогда } \begin{cases} x = x_0 + f'_x(x_0, y_0) \cdot t, \\ y = y_0 + f'_y(x_0, y_0) \cdot t, \\ z = z_0 - t. \end{cases}$$

Полное приращение $\Delta U = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y$.

Полный дифференциал дифференцируемой в точке (x, y) функции $U(x, y)$ есть главная, линейная относительно частных приращений $\Delta x, \Delta y$ часть полного приращения этой функции в точке (x, y)

$$dU = U'_x \Delta x + U'_y \Delta y = U'_x dx + U'_y dy. \quad (1.7)$$

Пример 12. Найти полный дифференциал функции $U(x, y) = x^2 y - xy^2$ и его выражение в точке $(2, -1)$.

Решение. Найдем частные производные данной функции и их значения в данной точке:

$$U'_x = 2xy - y^2; \quad U'_x(2, -1) = -5; \quad U'_y = x^2 - 2xy; \quad U'_y(2, -1) = 8.$$

Из формулы (1.7) имеем

$$dU = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy, \quad dU(2, -1) = -5dx + 8dy.$$

Приложения дифференциала к приближенным вычислениям

При $d \rightarrow 0$ имеем приближенные равенства

$$\Delta U \approx dU = U'_x \Delta x + U'_y \Delta y;$$

$$U(x, y) \approx U(x_0, y_0) + U'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + U'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y. \quad (1.8)$$

Также справедлива оценка $\Delta U \leq \max |U'_x| |\Delta x| + \max |U'_y| |\Delta y|$.

Пример 13. Вычислить $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$.

Решение. Из условия задачи вытекает, что

$$U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (x_0, y_0) = (4, 3); \quad U(x_0, y_0) = 5; \quad (x, y) = (4, 05; 2, 93).$$

Найдем частные приращения $\Delta x = 0, 05$; $\Delta y = -0, 07$. По формуле (1.8)

$$U'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad U'_x(4, 3) = 0, 8; \quad U'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad U'_y(4, 3) = 0, 6;$$

$$dU = 0, 8 \cdot 0, 05 + 0, 6 \cdot (-0, 07) = 0, 04 - 0, 042 = -0, 002.$$

$$\text{Отсюда } U(4, 05; 2, 93) = \sqrt{4, 05^2 + 2, 93^2} \approx 5 + (-0, 002) = 4, 998.$$

Рассмотрим дифференцируемую функцию $U(x, y)$ и дифференциал

$$dU = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \text{ — линейную часть ее приращения } \Delta U \text{ в некоторой}$$

окрестности точки $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$, принадлежащей графику функции.

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал функции двух переменных равен приращению аппликаты касательной плоскости.

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определения касательной плоскости и нормали к поверхности.
2. Привести уравнение касательной плоскости к поверхности в заданной ее точке.
3. Записать выражения для нахождения нормали к поверхности в заданной ее точке.
4. Дать определение полного дифференциала функции двух переменных.
5. Записать формулу нахождения приближенного значения функции двух переменных, указать границы ее применимости.
6. Сформулировать геометрический смысл дифференциала функции двух переменных.

Задачи для самостоятельного решения

Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке.

47. $z = 2x^2 - 4y^2$ в точке $(2, 1, 4)$.

48. $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ в точке $M(1, 1, 1)$.

49. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точке $(1, 2, -1)$.

50. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в точке $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

51. $3x^4 - 4y^3z + 4xyz^2 - 4xz^3 + 1 = 0$ в точке $(1, 1, 1)$.

52. Найти полное приращение и дифференциал функции $z = \lg(x^2 + y^2)$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y – от 1 до 0,9.

53. Найти полное приращение и дифференциал функции $z = x^2 - xy + y^2$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y – от 1 до 1,2.

Найти дифференциал функции.

54. $z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. 55. $z = \sin(xy)$. 56. $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.

57. $z = \operatorname{tg}\left(\frac{y^2}{x}\right)$. 58. $z = \ln \cos\left(\frac{x}{y}\right)$.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

59. $2,01^{3,03}$. 60. $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$. 61. $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$.

62. $\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ$. 63. $\ln(0,09^3 + 0,99^3)$.

64. $\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$.

1.5. Производная по направлению и градиент

Производная по направлению. Вектор $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ в n -мерном пространстве *единичный*, если его длина $|l| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2} = 1$.

Пусть вектор $\bar{l} = (l_x, l_y)$ единичный. *Производная функции* $z = f(x, y)$

в точке (x_0, y_0) *по направлению вектора* $\bar{l}$ *определяется по формуле*

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + t \cdot l_x, y_0 + t \cdot l_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Пример 14. Найти производную функции $z = |x - y|$ в точке $(0, 0)$ по направлению вектора $\bar{l} = (l_x, l_y)$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(t \cdot l_x - t \cdot l_y) - |0 - 0|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} |l_x - l_y| = |l_x - l_y|.$

Замечание. $z = |l_x - l_y|$ – нет ЧП в начале координат, но есть производная по любому направлению.

Градиент. Градиент функции нескольких переменных $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть вектор, состоящий из частных производных первого порядка функции u : $\overline{\text{grad } u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$

Пример 15. Найти градиент функции нескольких переменных $u = x^2 + y^2$ в точке $M(1, 2)$.

Решение. $u'_x = 2x; u'_y = 2y; u'_x(1, 2) = 2; u'_y(1, 2) = 4;$

$$\overline{\text{grad } u} = (2x; 2y); \overline{\text{grad } u} \Big|_{M(1,2)} = (2, 4).$$

Геометрический смысл частных производных и градиента. Рассмотрим график Γ функции $z = f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) , а также сечение графика Γ плоскостью $\alpha = \{ (x, y, z) : y = y_0 - \text{const} \}$. Задача сводится к одномерному случаю, из которого видно, что ЧП первого порядка имеет тот же геометрический смысл, что и для функции одной переменной.

Градиент функции в точке показывает направление наискорейшего роста функции, а его модуль равен абсолютной величине прироста функции в этой точке и в этом направлении.

Связь между производной по направлению и градиентом (для случая двух переменных). Рассмотрим производную функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по направлению вектора $\bar{b} = (b_x, b_y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{b}} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + t \cdot b_x, y_0 + t \cdot b_y) - f(x_0, y_0)}{t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + t \cdot b_x, y_0 + t \cdot b_y) - f(x_0, y_0 + t \cdot b_y) + f(x_0, y_0 + t \cdot b_y) - f(x_0, y_0)}{t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + t \cdot b_x, y_0 + t \cdot b_y) - f(x_0, y_0 + t \cdot b_y)}{t \cdot b_x} \cdot b_x + \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0, y_0 + t \cdot b_y) - f(x_0, y_0)}{t \cdot b_y} \cdot b_y.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + t \cdot b_x, y_0 + t \cdot b_y) - f(x_0, y_0 + t \cdot b_y)}{t \cdot b_x} = \\
&= \lim_{t \cdot b_x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + t \cdot b_x, y_0 + t \cdot b_y) - f(x_0, y_0 + t \cdot b_y)}{t \cdot b_x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \\
&\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0, y_0 + t \cdot b_y) - f(x_0, y_0)}{t \cdot b_y} = \lim_{t \cdot b_y \rightarrow 0+} \frac{f(x_0, y_0 + t \cdot b_y) - f(x_0, y_0)}{t \cdot b_y} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),
\end{aligned}$$

запишем $\frac{\partial f}{\partial \vec{b}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot b_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot b_y$, откуда имеем $\frac{\partial f}{\partial \vec{b}} = \overline{\text{grad } f} \cdot \vec{b}$ – скалярное произведение этих векторов.

Замечание. Производную функции можно рассматривать по направлению неединичного вектора $a = (a_x, a_y)$, тогда его нужно предварительно нормировать: $l = \left(\frac{a_x}{|a|}, \frac{a_y}{|a|} \right)$.

Контрольные вопросы и задания

1. Пояснить геометрический смысл частной производной.
2. Дать определение производной функции двух переменных в данной точке по данному направлению.

3. Привести определение градиента функции нескольких переменных, для случая двух переменных пояснить его геометрический смысл.

1.6. Локальный экстремум функции двух переменных

Пусть для всех x из некоторой окрестности $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) выполняется неравенство $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$), тогда точка (x_0, y_0) называется *точкой локального экстремума* (max или min), значение $f(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ в этой точке называется *локальным максимумом (минимумом)*.

Теорема 7 (необходимое условие экстремума). Пусть функция $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет экстремум в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Тогда в этой точке каждая ЧП первого порядка равна нулю или не существует.

Следствие. Пусть функция $u = u(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (n -мерный вектор) имеет экстремумы в точке x^0 и дифференцируема в этой точке. Тогда градиент функции $\overline{\text{grad } u}(x^0) = 0$.

Точка называется *стационарной* для функции $u = f(x^0)$, если в этой точке все ЧП первого порядка функции $f(x)$ равны нулю.

Точка называется *критической* для функции $u = f(x)$, если в этой точке каждая ЧП первого порядка функции $f(x)$ равна нулю или не существует.

Теорема 8 (достаточное условие экстремума). Пусть функция $z = u(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и пусть в этой точке определены непрерывные ЧП второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) = C$.

Тогда (обозначим $\Delta = AC - B^2$):

- 1) если $\Delta > 0$, в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум существует и при $A > 0$ – min, при $A < 0$ – max;
- 2) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $u(x, y)$ не имеет экстрмума;
- 3) при $\Delta = 0$ требуется дополнительное исследование.

Схема исследования функции двух переменных на локальный экстремум

1. Найти ЧП U'_x, U'_y и критические точки функции $u(x, y)$.

2. Найти ЧП второго порядка $U''_{xx}, U''_{xy}, U''_{yy}$.

3. Найти их значения в стационарных точках и Δ в каждой точке.

По найденным Δ и A в каждой стационарной точке определить наличие экстремума, а также какая это точка – максимума или минимума.

4. Вычислить значение функции в каждой точке экстремума.

Пример 16. Исследовать функцию $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x + 1$ на экстремум.

Решение. 1) $z'_x = -2x - y + 6$; $z'_y = -x - 2y$. Найдем критические точки, решив систему $\begin{cases} -2x - y + 6 = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 6 = 0 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow M_0(4; -2)$ – стационарная точка;

2) $z''_{xx} = -2 = A$; $z''_{xy} = -1 = B$; $z''_{yy} = -2 = C$;

3) Имеем $\Delta = AC - B^2 = 3$, $A = -2$ в каждой точке области определения функции z , в том числе и в стационарной точке M_0 . Поскольку $\Delta > 0$, то в точке $M_0(4; -2)$ экстремум достигается, а так как $A < 0$, то это точка максимума;

4) $z_{\max}(4; -2) = 13$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определения локального экстремума, стационарной точки, критической точки функции двух переменных.

2. Указать, в каких точках может достигаться экстремум функции.

3. Сформулировать необходимое условие экстремума функции.

4. Указать достаточное условие экстремума дифференцируемой функции двух переменных.

5. Привести схему исследования на экстремум функции двух переменных.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на экстремум функцию.

$$65. z = xy^2(1 - x - y), \quad x > 0, y > 0. \quad 66. z = 4(x - y) - x^2 - 4y^2.$$

$$67. z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10. \quad 68. z = x^2 + y^2 - xy + x + y.$$

$$69. z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y. \quad 70. z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad x > 0, y > 0.$$

$$71. z = e^{2x}(x^2 + y^2 + 2y).$$

1.7. Глобальный экстремум функции двух переменных

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции в данной области называется *исследованием функции на глобальный экстремум* в этой области.

Непрерывная функция в замкнутой области всегда достигает своего наименьшего и наибольшего значений (возможно, и неоднократно).

Точки локального и глобального экстремума могут не совпадать.

Пример 17. Исследовать функцию $u(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ в области $D = \{|x| \leq 5; |y| \leq 3\}$ на локальный экстремум и проверить точки экстремума на достижение в них глобального экстремума.

Решение. Исследуем функцию на локальный экстремум, затем найдем точки из области, значение функции в которой больше локального $\max$ или меньше локального $\min$.

$$1. \quad u'_x = 3x^2 - 8x + 2y; \quad u'_y = 2x - 2y;$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 8x + 2y = 0; \\ 2x - 2y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x(x - 2) = 0; \\ x = y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \\ x = 2; \\ y = x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \\ x = 2; \\ y = 0; \\ y = 2. \end{cases}$$

Найдены стационарные точки функции $(0, 0)$ и $(2, 2)$, обе эти точки лежат в заданной области D .

2. Найдем частные производные второго порядка и выражение для Δ :

$$u''_{xx} = 6x - 8 = A; \quad u''_{xy} = 2 = B; \quad u''_{yy} = -2 = C,$$

$$\Delta = AC - B^2 = -12x + 16 - 4 = -12(x - 1).$$

В точке $(0, 0)$ имеем $\Delta = 12 > 0$, $A = -8 < 0$; по теореме 8 это точка максимума и локальный максимум в этой точке $u_{\max}(0, 0) = 0$.

В точке $(2, 2)$ имеем $\Delta = -12 < 0$ – экстремума в этой точке нет.

Однако легко найти точки области, значения функции в которых больше локального экстремума. Примерами таких точек являются внутренняя точка области $\left(4, \frac{1}{2}\right)$ или граничная точка $(5, 3)$.

Схема исследования функции на глобальный экстремум

1. Найти ЧП z'_x , z'_y и стационарные (критические) точки. Вычислить значение функции $z = f(x, y)$ во всех этих точках.

2. На границе области, используя уравнение связи между переменными, записать z как функцию одной переменной и найти ее область определения. Исследовать эту функцию на глобальный экстремум и найти ее наибольшее и наименьшее значения.

3. Сравнить значения функции из п. 1 и п. 2 и выбрать наибольшее и наименьшее из них.

Пример 18. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + 3y^2$ в области $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Решение.

$$1. \begin{cases} z'_x = 2x; \\ z'_y = 6y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0; \\ 6y = 0; \end{cases} \text{ Значит, } M_0(0, 0) \text{ – критическая точка, лежит}$$

в области D . Значение функции в этой точке $z_1(0, 0) = 0$.

2. На границе $x^2 + y^2 = 4$ функция принимает вид

$$z = x^2 + 3y^2 = 4 + 2y^2 = 2(y^2 + 2).$$

Исследуем функцию $z^*(y) = 2y^2 + 4$, которая дважды проходит отрезок $[-2; 2]$, на экстремум на этом отрезке. Найдя производную $(z^*(y))' = 4y$, $z^*(y) = 2y^2 + 4$ и приравняв ее к нулю, получим критическую точку $y = 0 \in [-2; 2]$ и значение $z^*(0) = 4$. Далее, на концах отрезка $[-2; 2]$ функция $z^*(y)$ принимает значения $z^*(-2) = z^*(2) = 12$.

Осталось заметить, что значению $y = 0$ на границе области D отвечают две точки $(-2; 0)$ и $(2; 0)$, а значениям $y = -2$, $y = 2$ — соответственно точки $(0; -2)$ и $(0; 2)$. Запишем значения исходной функции $z = x^2 + 3y^2$ в указанных точках $z_2(-2; 0) = z_3(2; 0) = 4$, $z_4(0; -2) = z_5(0; 2) = 12$.

3. Сравнивая полученные значения, окончательно имеем $z_{\text{наим}}(0; 0) = 0$; $z_{\text{наиб}} = z(0; -2) = z(0; 2) = 12$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определение глобального экстремума функции нескольких переменных.
2. Привести достаточное условие существования глобального экстремума функции нескольких переменных в замкнутой области.
3. Пояснить, всегда ли совпадают точки локального и глобального экстремумов.
4. Изложить схему нахождения наибольших и наименьших значений функции двух переменных в замкнутой области на плоскости.

Задачи для самостоятельного решения

Найти наибольшее и наименьшее значение функции z в указанной области.

72. $z = 1 - x^2 - y^2$ в круге $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

73. $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

74. $z = 2x^2 - 4y^2$ в области $x^2 + y^2 \leq 4$.

75. $z = xy$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

76. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в треугольнике $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$.

77. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.

78. $z = x^2 y (4 - x - y)$ в треугольнике $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6$.

79. $z = e^{-x^2 - y^2} (2x^2 + 3y^2)$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

80. $z = xy + x + y$ в квадрате $1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3$.

Ответы к задачам 1-го раздела

1. $x^2 + y^2 \leq R^2$. 3. $x + y < 0$.

5. Полоса между прямыми $y = -x - 1$ и $y = -x + 1$.

7. Две полуполосы $|x| \leq 1, |y| \geq 1$. 9. а) 1; б) -1. 11. 0. 13. (1; -1).

15. Разрывна; непрерывна по x и по y в отдельности.

17. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$. 19. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$.

21. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y; \frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$.

23. $f'_x(x, y) = y - \frac{y}{x^2}; f'_y(x, y) = x + \frac{1}{x}; f'_x(1, 1) = 0; f'_y(1, 1) = 2;$

$f''_{xx}(x, y) = \frac{2y}{x^3}; f''_{xy}(x, y) = 1 - \frac{1}{x^2}; f''_{yy}(x, y) = 0;$

$f''_{xx}(1, 1) = 2; f''_{xy}(1, 1) = 0; f''_{yy}(1, 1) = 0.$

25. $f''_{xx}(0, 1) = 2; f''_{xy}(0, 1) = 0; f''_{yy}(0, 1) = -1.$

27. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 (\sin(xy) + \cos(xy)); \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 (\sin(xy) + \cos(xy));$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 - xy) \cos(xy) - (1 + xy) \sin(xy).$

29. $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x(x+1)}{1+x^2 e^{2x}}.$ 31. $\frac{dz}{dt} = \frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.$

$$33. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} \ln(3x-2y) + \frac{3x^3}{y^2(3x-2y)}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2}{y^3} \ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}.$$

$$35. \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \left(y^3 + \frac{1}{y^3} \right), \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \left(y^2 - \frac{1}{y^4} \right). \quad 37. y' = \frac{x+y-1}{x+y+1}.$$

$$39. y' = \frac{y \cos x + \sin(x-y)}{-\sin x + \sin(x-y)}. \quad 41. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x(z-1)}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y(z-1)}.$$

$$43. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2-x}{z+1}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z+1}.$$

$$45. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz(x+z)-z^3}{2xy(x+z)+z^3}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz(x+z)}{2xy(x+z)+z^3}.$$

$$47. 8x-8y-z-4=0; \frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-1}.$$

$$49. x+11y+5z-18=0; \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}.$$

$$51. 3x-2y-2z+1=0; \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-2}.$$

$$53. \Delta = 0, 33; dz = 0, 3. \quad 55. dz = \cos(xy) \cdot (ydx + xdy).$$

$$57. dz = \frac{y}{x^2 \cos^2(y^2/x)} \cdot (2xdy - ydx). \quad 59. 8, 29. \quad 61. 2, 95. \quad 63. -0, 03.$$

$$65. z_{\max} = z\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}. \quad 67. z_{\max} = z(0, 0) = 10.$$

$$69. z_{\min} = z(0, 3) = -9. \quad 71. z_{\min} = z\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}.$$

$$73. z_{\text{наиб}} = z(\pm 2, 0) = 4; z_{\text{наим}} = z(0, \pm 2) = -4.$$

$$75. z_{\text{наиб}} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2};$$

$$z_{\text{наим}} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$77. z_{\text{наиб}} = z(1, 2) = 17; z_{\text{наим}} = z(1, 0) = -3.$$

$$79. z_{\text{наиб}} = z(0, \pm 1) = \frac{3}{e}; z_{\text{наим}} = z(0, 0) = 0.$$

2. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Плоские области и их меры

Множество точек на плоскости называется *связным* (*односвязным*), если любые две его точки можно соединить кривой, целиком лежащей в этом множестве (рис. 2.1).

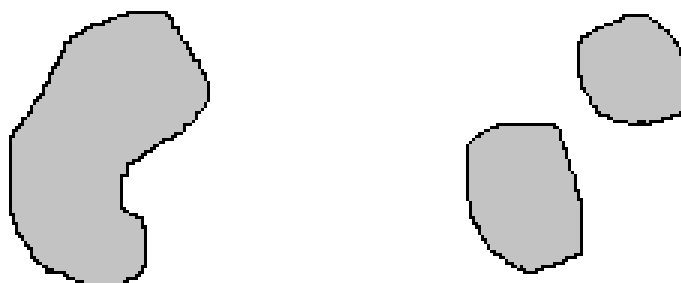


Рис. 2.1

Областью называется связное открытое множество. Пусть G – область, ∂G – ее граница. Множество (замкнутая область) $\overline{G} = G + \partial G$ называется *замыканием* области G .

Кривая на плоскости называется *спрямляемой*, если существует конечный предел сумм длин ломаных, вписанных в данную кривую, при условии, что максимальная длина отрезка ломаной $\rightarrow 0$. Этот предел называется *длиной* кривой. Фигура, границей которой является замкнутая простая (несамопересекающаяся) непрерывная спрямляемая кривая, называется *квадрируемой*.

Мера на плоскости. Измеримые множества. Для всех квадрируемых фигур на плоскости определена их *мера*, которая равна площади этой фигуры и может быть найдена с помощью интеграла Римана.

Примеры измеримых множеств.

1) *прямоугольник* $P_{a,b}^{c,d} = \{ (x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$.

Мера $\mu = \left(P_{a,b}^{c,d} \right) = S_{P_{a,b}^{c,d}} = (b-a)(d-c)$;

2) *правильная по оси OY (y-трапецевидная) область*, то есть такая область, что любая прямая, параллельная оси OY, *пересекает границу этой области не более чем в двух точках*. Пусть область ограничена слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$ соответственно, а снизу и сверху – графиками функций $y = \psi(x)$, $y = \varphi(x)$ соответственно. Тогда мера (площадь) области находится по формуле

$$\mu = \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx;$$

3) *правильная по оси OX (x-трапецевидная) область*, то есть такая область, что любая прямая, параллельная оси OY, *пересекает границу этой области не более чем в двух точках*. Пусть область ограничена снизу и сверху прямыми $y = c$ и $y = d$ соответственно, а слева и справа – графиками функций $x = g(y)$, $x = f(y)$ соответственно. Тогда мера (площадь) области находится по формуле

$$\mu = \int_c^d (f(y) - g(y)) dy;$$

4) *правильная область (по обеим осям)*, рис. 2.2;

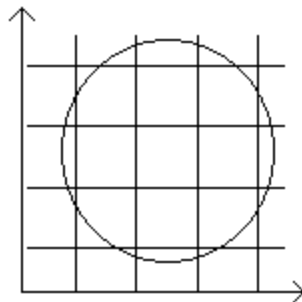


Рис. 2.2

5) область с кусочно-гладкой границей – объединение конечного числа правильных по OX и OY областей, пересекающихся только по прямолинейным участкам границы, параллельным осям.

Основные свойства меры

Пусть G, G_k – измеримые множества на плоскости. Тогда:

- 1) $\mu(G) \geq 0$ – мера плоского множества неотрицательна;
- 2) $\mu(\partial G) = 0$ – мера границы плоского множества равна нулю;
- 3) $G = G_1 \cup G_2 : G_1 \cap G_2 \subset \partial G_1 \cap \partial G_2, \mu(G) = \mu(G_1) + \mu(G_2)$;
- 4) если плоские множества пересекаются только по участкам границ, то мера их объединения равна сумме мер этих множеств (*аддитивность меры*).

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определения спрямляемой кривой и ее длины.
2. Привести определение квадратуемой плоской фигуры.
3. Дать определение меры плоского множества и привести примеры ее нахождения.
4. Перечислить свойства меры.

Задачи для самостоятельного решения

Найти площадь фигуры с помощью определенного интеграла.

1. Прямоугольника $P_{a,b}^{c,d}$.
2. Части прямоугольника $P_{a,b}^{c,d}$, ограниченной треугольником с вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; a)$, $(a; d)$.
3. Единичного круга, то есть круга на плоскости OXY с центром в начале координат и радиусом, равным 1;
4. Части единичного круга, лежащего в первом квадранте координатной плоскости.
5. Части единичного круга, ограниченного осью OX и биссектрисой первого квадранта.

6. Части единичного круга, ограниченного осью OY и биссектрисой второго квадранта.

2.2. Определение двойного интеграла и его свойства

Пусть имеется квадратируемая (измеримая) область G на OXY и функция $f(x, y): G \rightarrow R$.

Пусть G – прямоугольник, $f(x) = C_1 - \text{const}$ (рис. 2.3). Тогда определим

$$\iint_G f(x, y) dx dy = C_1 \cdot S_G = V.$$

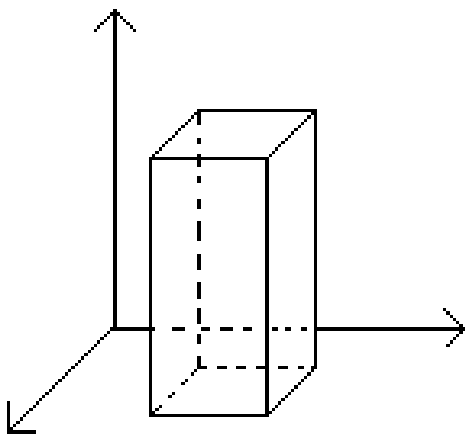


Рис. 2.3

Пусть $\tau = \{1, 2, \dots, n\} \subset N$. Разбиение $\delta(\tau)$ области G (рис. 2.4) есть набор $\{G_k\}$, $k \in \tau$:

$$a) (G_i \cap G_j) \subset \partial G_i \cup \partial G_j ;$$

$$б) G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n.$$

Для каждого G_k выбираем точку $M_k = (x_k, y_k)$.

Интегральная сумма функции $f(x, y)$ (для разбиения $\delta(\tau)$) определяется по формуле

$$I(f, G, \delta) = \sum_{k=1}^n f(M_k) \cdot S(G_k),$$

где $S(G_k)$ – площадь G_k , $d(G_k)$ – диаметр G_k .

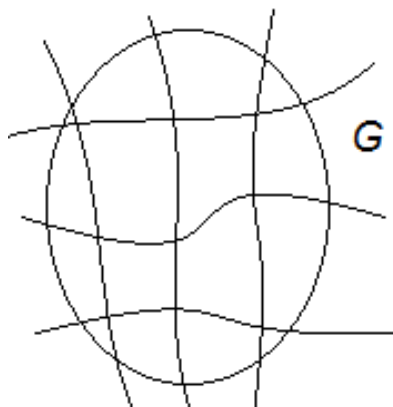


Рис. 2.4

Интеграл Римана (двойной интеграл) от функции $f(x, y)$ по области G определяется по формуле

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{\max d(G_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(x, y) \cdot S(G_k), \quad S(G_k) = \mu(G_k),$$

если предел существует и конечен.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости функции). Если интеграл Римана функции $f(x, y)$ по области G существует, то $f(x, y)$ ограничена на G .

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости функции). Пусть G – замкнутая ограниченная область, $f(x, y)$ – кусочно-непрерывная на G , тогда $f(x, y)$ интегрируема по области G .

Свойства двойного интеграла

Свойство 1 (линейность). Пусть $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы на G ; $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, тогда

$$\iint_G (\lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y)) dx dy = \lambda_1 \iint_G f_1(x, y) dx dy + \lambda_2 \iint_G f_2(x, y) dx dy.$$

Свойство 2. Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема на G и $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in G$. Тогда $\iint_G f(x, y) dx dy \geq 0$. Если в некоторой точке $P(x, y)$ функция $f(x, y)$ непрерывна и $f(P) > 0$, то $\iint_G f(x, y) dx dy > 0$.

Свойство 3. Если $f(x, y)$ непрерывна на G ,

$$m = \min_G f(x, y), \quad M = \max_G f(x, y),$$

то выполняется двойное неравенство

$$m \cdot \mu(G) \leq \iint_G f(x, y) dx dy \leq M \cdot \mu(G).$$

Свойство 4 (теорема о среднем). Пусть $f(x, y)$ непрерывна на G , тогда найдется точка $c \in \overline{G}$: $\iint_G f(x, y) dx dy = f(c) \cdot \mu(G)$.

Свойство 5 (свойство аддитивности интеграла по множествам). Пусть E_1 и E_2 – два измеримых множества, не пересекающихся или пересекающихся по частям границы, тогда

$$\iint_{E_1 \cup E_2} f(x, y) dx dy = \iint_{E_1} f(x, y) dx dy + \iint_{E_2} f(x, y) dx dy.$$

Свойство 6. $\left| \iint_G f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_G |f(x, y)| dx dy.$

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определения разбиения плоской квадрируемой области и интегральной суммы, соответствующей этому разбиению.
2. Дать определение двойного интеграла от данной функции по данной области как предела интегральной суммы.
3. Пояснить основные обозначения в записи $\iint_G f(x, y) dx dy$.
4. Сформулировать необходимое условие интегрируемости функции.
5. Привести достаточное условие интегрируемости функции.
6. Перечислить основные свойства двойного интеграла.

2.3. Повторные интегралы.

Вычисление двойных интегралов сведением к повторным

Пусть $f(x, y)$ – (кусочно-) непрерывная функция на прямоугольнике $P_{a,b}^{c,d}$, тогда определены (имеют смысл) *повторные интегралы*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \text{ и } \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Теорема 3. Если $f(x, y)$ непрерывна (кусочно-непрерывна) на $P_{a,b}^{c,d}$, то существуют как двойной интеграл от $f(x, y)$ по $P_{a,b}^{c,d}$, так и повторные интегралы, и имеют место равенства:

$$\iint_{P_{a,b}^{c,d}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Пример 1. Вычислить с помощью повторного интеграла $\iint_{P_{0,1}^{0,1}} xy dx dy$.

Решение.
$$\begin{aligned} \iint_{P_{0,1}^{0,1}} xy dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 xy dx \right) dy = \int_0^1 y \left(\int_0^1 x dx \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Теорема 4 (сведение двойного интеграла к повторному для правильной по оси области). Пусть G – правильная по OX :

$$G^{c,d} = \{ (x, y) : c \leq y \leq d; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$

или по OY :

$$G_{a,b} = \{ (x, y) : a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

область и $f(x, y)$ кусочно-непрерывная на G функция; функции $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ – непрерывны.

Тогда двойной интеграл по области G от функции $f(x, y)$ существует и находится по формулам

$$\iint_{G_{c,d}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy; \quad (2.1)$$

$$\iint_{G_{a,b}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (2.2)$$

Замечания.

1. Вычисление двойного интеграла путем сведения к повторному приводит к последовательному вычислению двух одномерных интегралов.

2. Если область правильная, то сводить к повторному можно в любом порядке, т. е. можно заменять порядок интегрирования, используя любую из формул (2.1), (2.2). Во многих случаях правильный выбор порядка интегрирования позволяет существенно упростить вычисления.

3. Сложные области сводят к объединению правильных по той или иной оси областей (пересекающихся только по общей границе).

Приведем обозначения повторных интегралов:

$$\int_a^b dx \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) dy \right) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) dy.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint_G \sqrt{x+y} dx dy$, G – область,

ограниченная прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Решение. Используя формулу (2.1), запишем

$$I = \iint_G \sqrt{x+y} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \sqrt{x+y} dx = \left[\int (x+y)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}, \right. \\ \left. \int_0^{1-y} \sqrt{x+y} dx = \frac{2}{3} (x+y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{1-y} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right] =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - y^{3/2}) dy = \frac{2}{3} \left(y - \frac{y^{5/2}}{5/2} \right) \bigg|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

Пример 3. Вычислить $\iint_G (3x^2 - 2xy + y) dx dy$, где G ограничена линиями

$x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } I &= \int_0^2 dy \int_0^{y^2} (3x^2 - 2xy + y) dx = \int_0^2 \left(x^3 - x^2 y + yx \right) \bigg|_0^{y^2} dy = \\ &= \int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3) dy = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4} \right) \bigg|_0^2 = \frac{128}{7} - \frac{64}{6} + \frac{16}{4} = \frac{244}{21}. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определения повторных интегралов, указав достаточные условия их существования.
2. Привести формулу, выражающую двойной интеграл по прямоугольной области через повторные.
3. Записать теорему о сведении двойного интеграла к повторному для правильной по оси области.
4. Привести и пояснить основные обозначения в записи двойных и повторных интегралов.

Задачи для самостоятельного решения

Сделать эскиз области D и записать ее как правильную по оси OY , по оси OX .

7. Область D ограничена прямыми $x=2$, $y=\frac{x}{2}$, $y=x$.

8. $D: y \geq 0$, $y \leq 4 - x^2$.

Вычислить повторный интеграл.

$$9. \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy. \quad 10. \int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy.$$

Построить область интегрирования, изменить порядок интегрирования в повторном интеграле.

$$11. \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x; y) dx.$$

$$12. \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x; y) dy.$$

$$13. \int_1^2 dx \int_y^{y+3} f(x; y) dy.$$

$$14. \int_0^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x; y) dy.$$

Перейти от двойного интеграла $\iint_D f(x; y) dx dy$ по области D к повторному и расставить пределы интегрирования.

$$15. D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$16. D = \{(x; y): (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 4\}.$$

$$17. D = \{(x; y): y-2x \leq 0, 2y-x \geq 0, xy \leq 2\}.$$

$$18. D - \text{сегмент, ограниченный линиями } y = x^2, y = 1.$$

$$\text{Вычислить двойной интеграл } \iint_D f(x; y) dx dy.$$

$$19. f(x; y) = e^{x+y}, D = \{(x; y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}.$$

$$20. f(x; y) = x^2 y, D - \text{треугольник с вершинами } O(0; 0), A(1; 1), B(2; 0).$$

$$21. f(x; y) = x + y^2, D \text{ ограничена линиями } y = x^2, y^2 = x.$$

$$22. f(x; y) = \cos(x+y), D \text{ ограничена линиями } x = 0, y = \pi, y = x.$$

$$23. f(x; y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, D - \text{четверть круга } x^2 + y^2 \leq 1, \text{ лежащая в первом квадранте.}$$

$$24. f(x; y) = \frac{x^2}{y^2}, D \text{ ограничена линиями } x = 2, y = x, xy = 1.$$

2.4. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть $G_{u,v}$ и $G_{x,y}$ – области в плоскостях Ouv и Oxy соответственно. Тогда отображение $f: G_{u,v} \rightarrow G_{x,y}$ называется *взаимно-однозначным*, если каждому элементу (u, v) соответствует единственная точка (x, y) , и наоборот.

Отображение f называется *отображением на область* $G_{x,y}$, если для каждой точки $(x, y) \in G_{x,y}$ найдется (единственная) точка $(u, v) \in G_{u,v} : f(u, v) = (x, y)$.

Точки (u, v) и (x, y) – соответственно прообраз и образ при отображении f . Аналогично, $G_{u,v}$ и $G_{x,y}$ – прообраз, образ.

Взаимно-однозначное отображение называется *биекцией* (*биективным отображением*).

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, непрерывную (кусочно-непрерывную) на $G_{x,y}$, границы областей $G_{x,y}$ и $G_{u,v}$ кусочно-гладкие. Напомним, что функция называется гладкой, если ее ЧП первого порядка непрерывны.

Заменой переменных называется гладкое отображение $r: (u, v) \rightarrow (x, y)$ области $G_{u,v}$ на $G_{x,y}$: внутренние точки $G_{u,v}$ переходят во внутренние точки $G_{x,y}$, а кусочно-гладкая граница $G_{u,v}$ – в кусочно-гладкую границу $G_{x,y}$. Это отображение задается в виде вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ или
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}.$$

Теорема 5 (замена переменных в двойном интеграле).

$$\iint_{G_{x,y}} F(x, y) dx dy = \iint_{G_{u,v}} F(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| du dv,$$

$$\text{где якобиан } J_{u,v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = x'_u \cdot y'_v - x'_v \cdot y'_u, \quad J_{u,v} = J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Пример 4. Найти $\iint_{G_{x,y}} \frac{dx dy}{x^2 y^2}$, где $G_{x,y}$ ограничено линиями

$xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$, а также удовлетворяет неравенствам $x>0$, $y>0$.

Решение. Для 3-й и 4-й линии: $\frac{y}{x}=1$, $\frac{y}{x}=4$. Обозначим $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$.

Рассмотрим область $G_{u,v}=\{(u,v): u \in [1; 2], v \in [1; 4]\}$. Сделаем замену

$x=\sqrt{\frac{u}{v}}$, $y=\sqrt{uv}$, $x^2 y^2 = u^2$. Найдем якобиан перехода:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \left(\sqrt{\frac{u}{v}} \right)'_u \cdot (\sqrt{uv})'_v - \left(\sqrt{\frac{u}{v}} \right)'_v \cdot (\sqrt{uv})'_u = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}.$$

$$\begin{aligned} \iint_{G_{x,y}} \frac{dx dy}{x^2 y^2} &= \iint_{\substack{1 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 4}} \frac{1}{2v} \cdot \frac{1}{u^2} du dv = \int_1^2 du \int_1^4 \frac{1}{u^2 \cdot 2v} dv = \frac{1}{2} \int_1^4 dv \left(\int_1^2 \frac{1}{u^2} du \right) \cdot \frac{1}{v} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln v \Big|_1^4 \cdot \left(-\frac{1}{u} \Big|_1^2 \right) = \frac{1}{4} \cdot \ln 4 = \frac{1}{2} \cdot \ln 2. \end{aligned}$$

Полярная (обобщенная полярная) замена координат. Если граница области является окружностью или дугой окружности, целесообразно сделать замену: $\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$ $\left(\begin{cases} x = ar \cdot \cos \varphi \\ y = br \cdot \sin \varphi \end{cases} \right)$.

Якобиан полярной замены координат $J(r, \varphi) = r$. Действительно,

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cdot \cos^2 \varphi + r \cdot \sin^2 \varphi = r.$$

Пример 5. Найти $\iint_{G_{x,y}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, область

$$G_{x,y} = \{(x, y): \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}.$$

Решение. Сделаем замену $\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases}$. Тогда

$$G_{x,y} \rightarrow G_{r,\varphi} = \{(r, \varphi) : \pi \leq r \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

$$\iint_{G_{x,y}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{\substack{\pi \leq r \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \sin r \cdot r \cdot dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi}^{2\pi} \sin r \cdot r dr = 2\pi \left(-r \cdot \cos r \Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos r dr \right) =$$

$$= 2\pi \left(-2\pi \cdot \cos 2\pi + \pi \cdot \cos \pi + \sin r \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = -6\pi^2.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулировать определения взаимно-однозначного отображения плоских множеств, отображения на область и биекции.
2. Привести определение замены переменных.
3. Сформулировать теорему о замене переменных в двойном интеграле по прямоугольной области.
4. Записать теорему о замене переменных в двойном интеграле для случая правильной по оси области.
5. Дать определение полярной замены координат и вывести выражение для ее якобиана.

Задачи для самостоятельного решения

Перейти в двойном интеграле $\iint_D f(x; y) dx dy$ к полярным координатам ρ, φ и расставить пределы интегрирования в следующем порядке:

внешнее по φ , внутреннее – по ρ .

25. $D = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}.$

26. Область D ограничена окружностями $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ и прямыми $y = x$, $y = 2x$.

27. D – меньший из двух сегментов, на которые прямая $x + y = 2$ рассекает круг $x^2 + y^2 \leq 4$.

Перейдя к полярным координатам, вычислить интеграл.

$$28. \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy. \quad 29. \iint_{D: x^2+y^2 \leq Rx} \sqrt{R^2-x^2-y^2} dx dy.$$

$$30. \iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy,$$

$$D = \left\{ (x; y) : x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq \sqrt{3}x \right\}.$$

Перейдя к обобщенным полярным координатам, вычислить интеграл.

$$31. \iint_D xy dx dy, D = \left\{ (x; y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

2.5. Приложения двойного интеграла

Площадь плоской фигуры. Пусть D – плоская область, правильная по OX или OY (рис. 2.5). Тогда площадь этой области находится по формуле (для правильной по OY области следует поменять порядок интегрирования)

$$S(D) = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy. \quad (2.3)$$

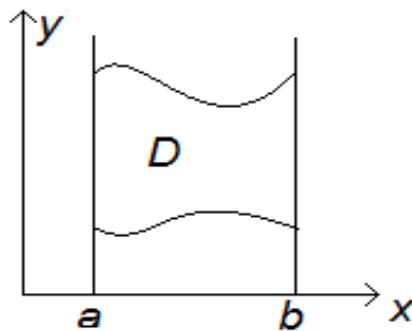


Рис. 2.5

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$, $x + y - 2 = 0$.

Решение. Найдем координаты точек пересечения заданных линий. Для этого решим систему $\begin{cases} y^2 = 4x + 4, \\ y = -x + 2, \end{cases}$ получим точки $(0;2)$, $(8;-6)$.

Запишем область с помощью системы неравенств:

$$\begin{cases} y: -6 \leq y \leq 2, \\ x: \frac{y^2 - 4}{4} \leq x \leq 2 - y. \end{cases}$$

Применяя формулу (2.3) для случая области, правильной по OX , получим

$$\begin{aligned} S &= \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dx = \int_{-6}^2 \left(2 - y - \frac{y^2-4}{4} \right) dy = \int_{-6}^2 \left(-\frac{1}{4} y^2 - y + 3 \right) dy = \\ &= \left(-\frac{1}{12} y^3 - \frac{y^2}{2} + 3y \right) \Big|_{-6}^2 = 21 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Вычисление объемов тел (цилиндров) с помощью двойных интегралов. Пусть тело является *цилиндром*, то есть ограничено снизу плоскостью OXY , сверху – поверхностью $f(x, y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью. Объем такого тела находится по формуле

$$V = \iint_D f(x, y) ds. \quad (2.4)$$

Здесь D – проекция тела на плоскость OXY , ds – элемент площади D . К этому случаю можно свести задачу вычисления объема тела, ограниченного снизу поверхностью $z = g(x, y)$.

В общем случае, когда тело ограничено сверху поверхностью $f_1(x, y)$, а снизу – $f_2(x, y)$, D – их общая проекция на OXY , получим формулу

$$V = \iint_D (f_1(x, y) - f_2(x, y)) ds \quad (2.5)$$

Пример 7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2 + 1, \quad x = 4, \quad y = 4, \quad z = 0.$$

Решение. Объем тела находится по формуле (2.5). Для вычисления соответствующего двойного интеграла сделаем чертеж и найдем область интегрирования D (из условия ясно, что $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$). Область $D = \{0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ правильная.

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2 + 1) \, ds = \int_0^4 dx \int_0^4 (x^2 + y^2 + 1) \, dy = \\ &= \int_0^4 dx \left(4x^2 + \frac{y^3}{3} \Big|_0^4 + 4 \right) = 4 \int_0^4 x^2 dx + \frac{64}{3} \int_0^4 dx + 4 \int_0^4 dx = \\ &= 4 \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 + 4 \frac{64}{3} + 16 = 4 \frac{64}{3} + 4 \frac{64}{3} + 16 = \frac{560}{3}. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Привести формулу для нахождения площади криволинейной трапеции.
2. Записать формулу для нахождения площади криволинейной трапеции для случая области, правильной по Oy .
3. Дать определение цилиндрида и привести формулу для нахождения его объема для случая, когда тело ограничено снизу плоскостью OXY , а сверху заданной поверхностью.
4. Записать формулу для нахождения объема цилиндрида, ограниченного сверху и снизу двумя заданными поверхностями.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями.

32. $z = x^2 + y^2, \quad z = 0, \quad y = 1, \quad y = 2x, \quad y = 6 - x.$

33. $z = 9 - y^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 3x + 4y = 12 \quad (y \geq 0).$

$$34. \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \quad z = 12 - 3x - 4y, \quad z = 1.$$

$$35. \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad z = 0, \quad x + z = 6.$$

$$36. \quad 2y^2 = x, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1.$$

Ответы к задачам 2-го раздела

$$1. (b-a) \cdot (d-c). \quad 3. \pi. \quad 5. \frac{\pi}{8}.$$

$$7. \quad D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 2, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq x \right\};$$

$$D = \{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq 2y \} \cup \{ (x, y) : 1 \leq y \leq 2, \quad y \leq x \leq 2 \}.$$

$$9. \quad 1.$$

$$11. \quad \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy.$$

$$13. \quad \int_1^2 dy \int_1^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_1^2 f(x, y) dx + \int_4^5 dy \int_{y-3}^2 f(x, y) dx.$$

$$15. \quad \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$17. \quad \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}} f(x, y) dx.$$

$$19. \quad (e-1)^2.$$

$$21. \quad \frac{33}{140}.$$

$$23. \quad \frac{\pi}{6}.$$

$$25. \quad \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr.$$

$$27. \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\sqrt{2} \sec\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}^2 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

$$29. \left(\pi - \frac{4}{3} \right) \frac{R^3}{3}.$$

$$31. \frac{a^2 b^2}{8}.$$

$$33. 45.$$

$$35. \frac{48\sqrt{6}}{5}.$$

3. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

3.1. Основные понятия

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ или ДУ) называется выражение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.1)$$

связывающее независимую переменную x , искомую функцию y и ее производные $y', \dots, y^{(n)}$. Порядком дифференциального уравнения (3.1) называется порядок его старшей производной.

Пример 1. $3xy'' - x^2 y^{(4)} + xy = 0$ – ДУ 4-го порядка.

Функция $y = f(x)$ называется *решением (интегралом)* дифференциального уравнения вида (3.1), если оно обращает его в верное тождество в некоторой области $D \subset R^2$. *Общее решение уравнения n -го порядка* имеет вид $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные. *Частное решение* получается из общего, когда параметры $C_1, C_2, \dots, C_n$ принимают конкретные числовые значения. График решения дифференциального уравнения называется его *интегральной кривой*. Процедура решения дифференциального уравнения называется его *интегрированием*.

Дифференциальным уравнением первого порядка (ДУ-1) называется выражение вида

$$F(x, y, y') = 0. \quad (3.2)$$

Нормальная форма ДУ-1 (разрешенная относительно y'):

$$y' = f(x, y). \quad (3.3)$$

Дифференциальная форма ДУ первого порядка:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. \quad (3.4)$$

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка имеет вид $y = \varphi(x, C)$. *Частное решение* дифференциального уравнения первого порядка имеет вид $y = \varphi(x, C_0)$, где C_0 – конкретное числовое значение.

Пример 2. Найти решение уравнения $y' = 3x^2$ и его интегральные кривые.

Решение. $y = x^3 + C$. Интегральные кривые имеют вид, показанный на рис. 3.1.

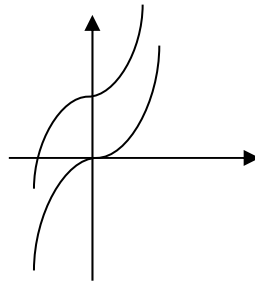


Рис. 3.1

Начальным условием (условием Коши) называется условие вида

$$y(x_0) = y_0. \quad (3.5)$$

Задача нахождения решения дифференциального уравнения (3.3), удовлетворяющего начальному условию (3.5), называется *задачей Коши*.

Теорема 1 (о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ-1). Пусть функция $f(x)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в области $D \subset R^2$; $(x_0, y_0) \in D$.

Тогда существует и единственное решение задачи Коши (3.3), (3.5) на некотором интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Геометрический смысл теоремы Коши. При выполнении условия теоремы 1 всегда найдется, и притом единственная, интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0) .

Довольно часто дифференциальное уравнение не удастся разрешить в элементарных функциях. Тогда решение записывают в виде неявного выражения $F(x, y, C) = 0$ и называют его *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка. Рассмотрим ДУ-1 в нормальной форме (3.3) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. В фиксированной точке (x_0, y_0) имеем $\frac{dy}{dx} = f(x_0, y_0) = k$.

Фактически задан угловой коэффициент касательной к интегральной прямой или задано *поле направлений*. Таким образом, с геометрической точки зрения решение дифференциального уравнения первого порядка представляет собой нахождение интегральных кривых, касательные к которым совпадают с направлением поля в данных точках.

Геометрическое место точек, в которых выполняется $\frac{dy}{dx} = k$, называется *изоклиной* данного дифференциального уравнения вида (3.3).

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определения обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка, его решения, а также общего и частного решений.
2. Пояснить смысл термина «интегрирование дифференциального уравнения».
3. Дать определение интегральной кривой дифференциального уравнения.
4. Сформулировать определения начального условия (условия Коши) и задачи Коши.
5. Привести формулировку теоремы Коши о существовании и единственности решения задачи Коши.
6. Пояснить геометрический смысл теоремы Коши.

7. Разъяснить геометрический смысл дифференциального уравнения 1-го порядка.
8. Дать определение изоклины дифференциального уравнения.

3.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и однородные

Нормальной формой дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = h(x) \cdot g(y). \quad (3.6)$$

Иначе говоря, (3.6) является частным случаем уравнения (3.3), где правая часть имеет вид $f(x, y) = h(x) \cdot g(y)$. Приведем схему его решения. Преобразуем обе части уравнения (3.6), собирая функции и дифференциалы переменных x и y в разных частях:

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y) \Big| \cdot \frac{dx}{g(y)} \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = h(x) dx.$$

Интегрируя обе части и приравнявая их друг к другу, получим

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx \Rightarrow G(y) + C_1 = H(x) + C_2,$$

где $H(x)$ – первообразная функции $h(x)$, а $G(y)$ – первообразная от функции $\frac{1}{g(y)}$.

Общий интеграл уравнения (3.6) имеет вид $G(y) = H(x) + C$.

Дифференциальная форма ДУ-1 с разделяющимися переменными есть

$$M_1(x) \cdot M_2(y) dx + N_1(x) \cdot N_2(y) dy = 0. \quad (3.7)$$

Таким образом, уравнение (3.4) является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными, если входящие в уравнение функции имеют вид

$$M(x, y) = M_1(x) \cdot M_2(y); \quad N(x, y) = N_1(x) \cdot N_2(y).$$

Приведем схему решения (3.7).

$$M_1(x) \cdot M_2(y) dx + N_1(x) \cdot N_2(y) dy = 0;$$

$$M_1(x) \cdot M_2(y) dx = -N_1(x) \cdot N_2(y) dy \mid : M_2(y) \cdot N_1(x);$$

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy, \text{ откуда } \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = C.$$

Функция $h(x, y)$ называется *однородной* (относительно своих аргументов) k -го измерения, если $h(ax, ay) = a^k \cdot h(x, y)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если оно в нормальной форме имеет вид $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ в дифференциальной форме записи этого дифференциального уравнения являются однородными функциями одного и того же измерения. Такие уравнения приводятся к ДУ-1 с разделяющимися переменными.

Пусть $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Сделаем замену $\frac{y}{x} = t$, $y = tx$, тогда $y' = \frac{dt}{dx} x + t$.

Получим уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dt}{dx} x + t = f(t)$.

Разделяя переменные, запишем

$$\frac{dt}{dx} x = f(t) - t \Leftrightarrow \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dt}{f(t) - t} = \ln |x| + C \Rightarrow |x| = C \cdot e^{\int \frac{dt}{f(t) - t}}.$$

Аналогично решается однородное ДУ, записанное в дифференциальной форме.

Пример 3. Решить уравнение $y^2 + x^2 y' = xy y'$.

Решение. Преобразуем уравнение к нормальной форме:

$$y' (x^2 - xy) = -y^2,$$

отсюда $y' = \frac{y^2}{xy - x^2} \Rightarrow y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1} \quad \left(= f\left(\frac{y}{x}\right) \right).$

Сделав замену $y = xt$, запишем $\frac{dt}{dx} x + t = \frac{t^2}{t-1}, \quad \frac{dt}{dx} x = \frac{t^2 - t^2 + t}{t-1}.$

Разделим переменные и проинтегрируем обе части получившегося выражения: $\frac{(t-1)dt}{t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{(t-1)dt}{t} = \int \frac{dx}{x}$. После несложных преобразований имеем

$$\int dt - \int \frac{dt}{t} = \ln|x| + C_1 \Rightarrow t - \ln|t| + C_2 = \ln|x| + C_1,$$

$$e^{t - \ln|t| + C_2} = e^{\ln|x| + C_1} \Rightarrow C_3 \frac{e^t}{t} = C_4 x \Rightarrow C_5 xt = e^t.$$

Перейдя обратно к переменной y , запишем общий интеграл $Cy = e^{\frac{y}{x}}$.

К однородным ДУ можно также преобразовать ДУ вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$
 Преобразование происходит с помощью за-

мены $u = x - x_1, v = y - y_1$, где u и v находят из системы $\begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 \end{cases}.$

Контрольные вопросы и задания

1. Записать дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными в нормальной форме.
2. Привести схему его решения.
3. Записать дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными в дифференциальной форме.
4. Привести схему его решения.
5. Записать определение однородной функции двух переменных.

6. Сформулировать определения однородного дифференциального уравнения первого порядка в различных формах.

7. Записать схему приведения однородного ДУ-1 к ДУ-1 с разделяющимися переменными.

8. Привести вид дифференциального уравнения первого порядка, сводящегося к однородному. Изложить схему такого сведения.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнение с разделяющимися переменными. Построить несколько интегральных кривых.

1. $(xy^2 + x) dx + (y - x^2 y) dy = 0$. 2. $e^y (y' + 1) = 1$.

3. $y' \sqrt{1 - x^2} = 1 + y^2$. 4. $(1 + y^2) x dx + (1 + x^2) dy = 0$.

Найти общее решение уравнения с разделяющимися переменными. Если задано начальное условие, найти также соответствующее частное решение.

5. $ye^{2x} dx - (1 + e^{2x}) dy = 0$. 6. $y' = e^{x+y}$.

7. $xy' + y = y^2$; $y(1) = 0,5$. 8. $2e^x \operatorname{tg} y dx + \frac{1 + e^x}{\cos^2 y} dy = 0$.

9. $(xy^2 + x) dy + (x^2 y - y) dx = 0$; $y(1) = 1$. 10. $y' = y \cos x$; $y(0) = 1$.

11*. $y' = \sin(x - y)$. 12*. $y + xy' = a(1 + xy)$, $y\left(\frac{1}{a}\right) = -a$.

Проинтегрировать однородное уравнение.

13. $(x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0$. 14. $xy' = y \ln \frac{y}{x}$; $y(1) = 1$.

15. $y' = \frac{x + 2y}{-x}$. 16. $x(x + 2y) dx + (x^2 - y^2) dy = 0$.

17. $(x^2 + xy) y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

18. $\left(x - y \cdot \sin \frac{y}{x}\right) dx + x \cdot \sin \frac{y}{x} dy = 0$.

3.3. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка и уравнение Бернулли

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛДУ-1) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x). \quad (3.8)$$

Изложим основные методы решения таких уравнений.

Метод Бернулли (подстановки). Будем искать решение в виде функции $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, откуда $y' = u'v + uv'$.

Подставляя в (3.8) и группируя, запишем

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x), [u' + p(x)u] \cdot v + uv' = f(x). \quad (3.9)$$

Найдем $u(x)$, приравняв к нулю выражение в квадратных скобках:

$$u'(x) + p(x)u(x) = 0.$$

Отсюда $\frac{du}{dx} = -p(x)u \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int p(x)dx, u = e^{-\int p(x)dx}.$

Подставим полученное уравнение для $u(x)$ в (3.9). Оно примет вид

$$uv' = f(x) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{f(x)}{u(x)} \Rightarrow v = \int \frac{f(x)}{u(x)} dx.$$

Таким образом, идея метода Бернулли заключается в сведении задачи к последовательному решению двух ДУ-1 с разделяющимися переменными.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y' = 2x \cdot (x^2 + y)$.

Решение. $y' = 2x \cdot (x^2 + y) \Rightarrow y' - 2xy = 2x^3$ – линейное ДУ первого порядка. Решим его методом Бернулли: $y = v(x)u(x) \Rightarrow y' = u'v + uv'$. Подставив полученные выражения для искомой функции и ее производной в исходное уравнение, запишем $u'v + uv' - 2xuv = 2x^3$.

Сгруппируем первое и третье слагаемые в правой части, вынеся общий множитель:

$$(u' - 2xu)v + uv' = 2x^3. \quad (3.10)$$

Приравняв выражение в скобках к нулю, запишем первое ДУ-1 с разделяющимися переменными и решим его:

$$u' - 2xu = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2xu \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int 2x dx, \ln |u| = x^2 \Rightarrow u = e^{x^2}.$$

Подставив выражение для $u(x)$ в левую часть уравнения (3.10), получим второе ДУ-1 с разделяющимися переменными $e^{x^2} \frac{dv}{dx} = 2x^3$. Отсюда $dv = e^{-x^2} \cdot 2x^3 dx$, значит, $v = \int e^{-x^2} \cdot x^2 \cdot 2x dx$. Теперь сделаем замену $t = x^2$ и проинтегрируем по частям:

$$v = \int e^{-t} t dt = -te^{-t} + \int e^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t} + C = -e^{-t}(t+1) + C.$$

Перейдя обратно к переменной x , запишем $v = -e^{-x^2} (x^2 + 1) + C$.

Общее решение имеет вид

$$y = uv = e^{x^2} \left(-e^{-x^2} (x^2 + 1) + C \right) = Ce^{x^2} - x^2 - 1.$$

Метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной). В уравнении $y' + p(x)y = f(x)$ примем правую часть равной нулю и найдем решение.

1) пусть $f(x) = 0$, тогда

$$y' + p(x)y = 0. \quad (3.11)$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y; \frac{dy}{y} = -p(x)dx; \ln |y| = -\int p(x)dx.$$

Отсюда запишем общее решение однородного уравнения (3.11):

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}; \quad (3.12)$$

2) теперь рассмотрим исходное неоднородное уравнение ($f(x) \neq 0$).

Пусть в (3.12) $C = C(x)$. Тогда из (3.12):

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x).$$

Подставим y' в (3.11):

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} &= f(x) \\ \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} &= e^{\int p(x)dx} f(x), \quad C(x) = \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx + C. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } y = C(x)e^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx.$$

Замечание. Целесообразно при решении линейных ДУ первого порядка использовать схему метода вариации произвольной постоянной, а не полученную формулу.

Уравнением Бернулли называется дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x)y^n \quad (n \neq 1). \quad (3.13)$$

Уравнение Бернулли сводится к ЛДУ-1 с помощью замены $z = y^{1-n}$.

Действительно, разделив обе части (3.13) на y^n , получим

$$\frac{1}{y^n} y' + p(x)y^{1-n} = f(x), \quad \frac{1}{1-n} z' + p(x)z = f(x) \text{ – ЛДУ первого порядка.}$$

Его можно решить одним из двух описанных выше методов.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y' = y^4 \cdot \cos x + y \cdot \operatorname{tg} x$.

Решение. $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x \cdot y^4$.

1) решим однородное уравнение $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0$. Сделав замену $z = y^{-3}$,

$$\text{получим } z' = -3y^{-4} \cdot y' \Rightarrow y' = -\frac{z'}{3y^{-4}} = -\frac{z'}{3}y^4;$$

2) подставим в исходное неоднородное ЛДУ:

$$-\frac{y^4}{3} z' - \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x \cdot y^4.$$

Имеем $-\frac{1}{3} z' - \operatorname{tg} x \cdot z = \cos x$ – ЛДУ первого порядка. Решим это уравнение методом вариации произвольной постоянной.

Сначала найдем решение однородного уравнения $-\frac{1}{3} z' - \operatorname{tg} x \cdot z = 0$.

$$\frac{dz}{3dx} = -z \cdot \operatorname{tg} x \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -\int \frac{\sin x dx}{\cos x} \Rightarrow \frac{1}{3} \ln |z| = \ln |\cos x| + C_1 \Rightarrow z = C \cos^3 x.$$

Теперь решим неоднородное уравнение:

$$z = C(x) \cos^3 x, \quad z' = C'(x) \cos^3 x - 3 \cos^2 x \sin x \cdot C(x).$$

Подставим в неоднородное уравнение

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} C'(x) \cos^3 x + C(x) \cos^2 x \sin x - C(x) \cos^3 x \frac{\sin x}{\cos x} &= \cos x, \\ -\frac{1}{3} C'(x) \cos^3 x &= \cos x; \quad C'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x} \Rightarrow C(x) = -3 \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

Получили $y^{-3} = -3 \sin x \cos^2 x + C \cos^3 x$ – общее решение. Прибавим частное решение $y = 0$.

Замечание. Существование и единственность решения, удовлетворяющего начальным условиям и найденного методом Лагранжа, вытекает из теоремы о существовании и единственности решения соответствующей задачи Коши для ДУ первого порядка.

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определение линейного дифференциального уравнения первого порядка.
2. Изложить схему решения ЛДУ-1 методом подстановки и пояснить суть этого метода.

3. Изложить схему решения ЛДУ-1 методом вариации произвольной постоянной и пояснить суть этого метода.

5. Дать определение уравнения Бернулли.

6. Изложить методы решения уравнения Бернулли.

Задачи для самостоятельного решения

Решить линейное уравнение; если задано начальное условие, также найти соответствующее частное решение.

$$19. y' + 2y = e^{-x}. \quad 20. y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0.$$

$$21. y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1. \quad 22. y' \cos x - y \sin x = 2x; \quad y(0) = 0.$$

$$23. y' = \frac{2y}{x+1} + e^x (x+1)^2. \quad 24. xy' + x^2 + xy = y.$$

Проинтегрировать уравнение Бернулли; если задано начальное условие, также найти соответствующее частное решение.

$$25. y' + 2xy = 2x^3 y^3. \quad 26. xy' + y = y^2 \ln x; \quad y(1) = 1.$$

$$27. y' = y (y^3 \cos x + \operatorname{tg} x). \quad 28. y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0.$$

$$29. ydx + \left(x - \frac{1}{2}\right) x^3 y dy = 0; \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \quad 30. y' - y \cdot \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0.$$

3.4. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Напомним, что обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка называется выражение вида (3.1): $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Если F непрерывна по всем переменным, то (3.1) можно представить в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (3.14)$$

Условие Коши имеет вид

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}. \quad (3.15)$$

Теорема 1 (существования и единственности решения задачи Коши (3.14)-(3.15)). Пусть функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ определена в окрестности $(x_0, y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)})$ и непрерывны по всем переменным $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ частные производные первого порядка, тогда задача Коши (3.14)-(3.15) имеет, и притом единственное, решение.

Замечания.

1. Из этой теоремы геометрически следует (при заданных условиях) существование интегральной кривой уравнения (3.14), проходящей через указанную точку.

2. Из этого результата вытекает существование общего решения уравнения (3.14), имеющего вид $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, а в неявной форме $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$.

Рассмотрим основные типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$. Такие уравнения решаются путем последовательного n -кратного интегрирования обеих частей.

Уравнения, не содержащие функцию и ее производные до $(k - 1)$ -го порядка включительно. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)}).$$

Обозначив $y^{(k)} = p$, получим уравнение меньшего порядка относительно переменной $p(x)$

$$p^{(n-k)} = f(x, p, p', \dots, p^{(n-k-1)}).$$

Решив последнее уравнение, получим $p(x)$, затем интегрируя $p(x)$ k раз, получим y .

Пример 6. Решить уравнение $y''' = (y'')^2$.

Решение. $p = y'', p' = \frac{dp}{dx} = y''' \Rightarrow \frac{dp}{dx} = p^2 \Rightarrow \frac{dp}{p^2} = dx \Rightarrow$

$$-\frac{1}{p} = x + C_1 \Rightarrow p = -\frac{1}{x + C_1} \quad y' = -\int \frac{1}{x + C_1} dx = -\ln |x + C_1| + C_2,$$

$$y = -\int \ln |x + C_1| dx + C_2 x = -(x + C_1) \ln(x + C_1) + \overline{C_2} x + C_3.$$

Уравнения, не содержащие независимую переменную. Рассмотрим уравнение $y^{(n)} = f(y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Сделаем замену $p(y) = y'$, откуда

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = p p'. \text{ Аналогично при необходимости можно получить выражения для производных искомой функции более высокого порядка.}$$

Пример 7. Решить уравнение $y'' = 2yy'$.

Решение. Сделаем замену $p = y'$, $y'' = p \cdot p'$ и подставим в исходное уравнение: $pp' = 2yp$. При $p = 0$ получим частное решение $y = C$.

Если $p \neq 0$, запишем $p' = 2y$ или $p = y^2 + C_1$.

$$p = y' = \frac{dy}{dx} = y^2 + C_1 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + C_1} = dx.$$

Получим общее решение:

$$\frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{C_1} \right) = C_1 x + C_2 \Rightarrow y = C_2 \operatorname{tg} (C_1 x + C_2).$$

Общее решение включает в себя также частное решение $y = C$.

Замечание. Для уравнений, которые одновременно относятся и ко второму, и к третьему типу, следует выбирать более простой метод решения.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулировать теорему о существовании и решении задачи Коши для дифференциального уравнения n -го порядка.
2. Перечислить основные типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.
3. Пояснить схему решения дифференциального уравнения, в котором производная искомой функции n -го порядка равна заданной функции независимой переменной.

4. Изложить схему решения дифференциального уравнения, не содержащего искомую функцию и ее производные до некоторого фиксированного порядка включительно.

5. Привести схему решения дифференциального уравнения, не содержащего независимую переменную.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнение.

$$31. y'' = x + \sin x. \quad 32. y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x. \quad 33. 2yy'' = 1 + (y')^2.$$

$$34. y'' = xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$35. (1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

$$36. yy'' - 2yy' \ln y = (y')^2. \quad 37*. y''' \cdot (y')^2 = (y'')^3.$$

38*. Найти область существования и единственности решения уравнения $y'' = x + \sqrt{x^2 - y'}$ (указание: использовать теорему Коши).

Решить уравнение.

$$39. y'' = \operatorname{arctg} x. \quad 40. 2x \cdot y' \cdot y'' = (y')^2. \quad 41. x^2 y'' = (y')^2.$$

$$42. yy'' + y = (y')^2. \quad 43. y \cdot y''' - y' \cdot y'' = 0.$$

Ответы к задачам 3-го раздела

$$1. 1 + y^2 = C(1 - x^2). \quad 3. \operatorname{arctg} y - \arcsin x = C. \quad 5. y = C\sqrt{1 + e^{2x}}.$$

$$7. y(1 - Cx) = 1; \quad y = 0; \quad y(1 + x) = 1. \quad 9. \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \ln \left| \frac{y}{x} \right| = 1.$$

$$11*. x + C = \operatorname{ctg} \left(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad 13. y = \sqrt{x(x+C)}.$$

$$15. y = \frac{C}{x^2} - \frac{1}{3}x, \quad x \neq 0.$$

$$17. \arcsin \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x} - \ln |x| = C. \quad 19. y = Ce^{-2x} + e^{-x}.$$

$$21. y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1. \quad 23. y = (x+1)^2 (e^x + C).$$

$$25. y^2 \left(Ce^{2x^2} + 2x^2 + 1 \right) = 2. \quad 27. y = \frac{1}{\sqrt[3]{C \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x}}.$$

$$29. x^2 (3y^2 + y) = 1. \quad 31. y = \frac{1}{6} x^3 - \sin x + C_1 x + C_2.$$

$$33. 4C_1 y = 4 + (C_1 x + C_2)^2. \quad 35. y = 2 \ln |x+1| - x + 1.$$

$$37*. x = \ln |t| + 2C_1 t - C_2; \quad y = t + C_1 t^2 + C_3; \quad y = C_1 x + C_2.$$

$$39. y = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x \ln (1 + x^2) + C_1 x + C_2.$$

$$41. C_1 x - C_1^2 y = \ln |C_1 x + 1| + C_2; \quad y = \frac{1}{2} x^2 + C; \quad y = C.$$

$$43. y = C_1 \sin (C_2 x + C_3).$$

4. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

4.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = \varphi(x) \quad (4.1)$$

называется *линейным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) n -ого порядка*.

Если правая часть (4.1) тождественно равна нулю ($\varphi(x) \equiv 0$), то имеем *линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) n -ого порядка*.

Пусть $a_0(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$, тогда на $[a, b]$ ЛОДУ n -ого порядка имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad (4.2)$$

откуда

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - p_2(x)y^{(n-2)} - \dots - p_n(x)y,$$

$$y^{(n)} = -\sum_{k=1}^n p_k(x)y^{(n-k)}.$$

Выражение $L(y) = \sum_{k=1}^n p_k(x)y^{(n-k)}$ называется *линейным дифференциальным оператором $(n-1)$ -ого порядка*.

Замечания.

1. Если все коэффициенты $a_k(x)$ в (4.1) являются непрерывными функциями на $[a, b]$, то для всех начальных значений при $x_0 \in [a, b]$ соответствующая задача Коши имеет, и притом единственное, решение.

2. Линейность и однородность (4.2) сохраняется при любой гладкой замене $y = \varphi(u)$ (φ достаточное количество раз дифференцируема).

3. Линейность и однородность (4.2) также сохраняется при линейной однородной замене $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Свойства линейного дифференциального оператора

Свойство 1. $L(Cy) = C \cdot L(y)$, где C – постоянный множитель.

Это равенство сразу следует из определения оператора и линейности операций суммирования и умножения на константу:

$$L(Cy) = \sum_{k=1}^n p_k(x)(Cy)^{(n-k)} = C \cdot \sum_{k=1}^n p_k(x)y^{(n-k)} = C \cdot L(y).$$

Свойство 2. $L(y_1) + L(y_2) = L(y_1 + y_2)$. Аналогично

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= \sum_{k=1}^n p_k(x)(y_1 + y_2)^{(n-k)} = \\ &= \sum_{k=1}^n p_k(x)(y_1^{(n-k)} + y_2^{(n-k)}) = \sum_{k=1}^n p_k(x)y_1^{(n-k)} + \sum_{k=1}^n p_k(x)y_2^{(n-k)} = L(y_1) + L(y_2). \end{aligned}$$

Следствие.

$$\begin{aligned} L\left(\sum_{g=1}^n C_g y_g\right) &= \sum_{k=1}^n \left(p_k(x) \left(\sum_{g=1}^n C_g y_g \right)^{(n-k)} \right) = \sum_{k=1}^n \left(p_k(x) \sum_{g=1}^n C_g y_g^{(n-k)} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{g=1}^n p_k(x) C_g y_g^{(n-k)} = \sum_{g=1}^n \sum_{k=1}^n p_k(x) C_g y_g^{(n-k)} = \sum_{g=1}^n L(C_g y_g) = \sum_{g=1}^n C_g \cdot L(y_g). \end{aligned}$$

Свойства ЛОДУ

Теорема 1. Пусть $y(x)$ является решением ЛОДУ (4.2). Тогда $Cy(x)$ также является решением (4.2).

Действительно, утверждение теоремы 1 сразу следует из первого свойства линейного дифференциального оператора.

Теорема 2. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решением ЛОДУ (4.2). Тогда $y_1(x) + y_2(x)$ также является решением.

Утверждение теоремы 2 вытекает из второго свойства линейного дифференциального оператора.

Следствие. Пусть $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ – решение ЛОДУ (4.2). Тогда их линейная комбинация $\sum_{j=1}^n C_j y_j(x)$ также является решением ЛОДУ (4.2).

ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (4.3)$$

Найдем вид общего решения в различных случаях $a_k, k = 0, 1, \dots, n$.

Покажем, что функция вида $y = e^{kx} (k - \text{const})$ является частным решением уравнения (4.3). Действительно, подставляя выражения для этой функции и ее производных до n -го порядка включительно в (4.3), а затем разделив обе части на e^{kx} , получим

$$a_0 k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \dots + a_n e^{kx} = 0 \mid \div e^{kx},$$

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (4.4)$$

что является характеристическим уравнением для (4.3).

Решения k характеристического уравнения при подстановке в $y = e^{kx}$ дают частные решение уравнения (4.3), причем все. *Общее решение* (4.3) является линейной комбинацией этих частных решений.

Таким образом, мы свели задачу решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами к задаче нахождения корней алгебраического уравнения степени n .

Рассмотрим возможные случаи в зависимости от характера корней характеристического уравнения.

1. Все корни различны и действительны.

Имеем n различных корней характеристического уравнения (4.4), им соответствует n корней уравнения (4.3) $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$. Эти функции линейно независимы, следовательно, общее решение (4.3) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

Пример 1. $y^{(4)} - 2y''' - y'' + 2y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^4 - 2k^3 - k^2 + 2k = 0$.

$$k(k^3 - 2k^2 - k + 2) = k(k - 2)(k^2 - 1) \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = 2.$$

$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x + C_4 e^{2x}$ – общее решение уравнения.

2. Все корни различны, среди них есть комплексные.

Комплексные корни уравнения (4.4) являются сопряженными вида $\alpha \pm \beta i$, им соответствуют корни (4.3) вида $e^{(\alpha \pm \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) \pm \sin(\beta x))$. Подставим такие решения в уравнение (4.3). Выделяя действительные и мнимые части и приравнявая их к нулю, находим, что указанной паре комплексных корней соответствует решение (4.3) вида $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ и $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$.

Пример 2. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 4k + 5 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 2 \pm i$. Тогда общее решение имеет вид $y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

3. Имеются кратные корни.

В двух предыдущих случаях найденное число линейно независимых решений равнялось n – порядку уравнения (4.4).

В настоящем случае число различных корней характеристического уравнения меньше n . Для получения общего решения найдем дополнительные решения другого вида.

Пусть k_i – корень характеристического уравнения (4.4) кратности α_i . Тогда дополнительные решения имеют вид: $x e^{k_i x}, \dots, x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x}$. Покажем это. Рассмотрим 2 случая:

1) $k_i = 0$ (корень кратности α_i). Тогда характеристическое уравнение принимает вид $a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-\alpha_i} k^{\alpha_i} = 0$.

Запишем соответствующее дифференциальное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-\alpha_i} y^{(\alpha_i)} = 0.$$

Решения этого уравнения следующие: $1, x, x^2, \dots, x^{\alpha_i-1}$.

Тогда дополнительное решение действительно имеет вид $x e^{k_i x}, x^2 e^{k_i x}, \dots, x^{\alpha_i-1} e^{k_i x}$;

2) $k_i \neq 0$ (корень кратности α_i). Сделаем замену $y = e^{k_i x} z$. Такая замена не нарушает линейности и однородности уравнения (4.3). После подстановки получившихся выражений имеем

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_n z = 0, \quad (4.5)$$

коэффициенты b_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) по-прежнему постоянные. Выпишем характеристическое уравнение для (4.5)

$$b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n = 0. \quad (4.6)$$

Корни уравнения (4.6) отличаются от корней (4.4) на $-k_i$, так как при $z = e^{px}$ имеем $y = z e^{k_i x} = e^{(k_i+p)x}$, откуда $k = k_i + p$, $p = k - k_i$. Тогда этот случай сводится к предыдущему, так как корень характеристического уравнения $p = 0$ (корень кратности α_i). Соответствующие решения имеют вид $1, z, \dots, z^{\alpha_i-1}$. Делая обратную замену, получаем (4.3). Таким образом, каждому кратному корню соответствует столько дополнительных корней, какова его кратность, итоговое число линейно независимых решений (4.3) равно числу корней характеристического уравнения (4.4) с учетом их кратности.

Заметим, что кратные комплексные сопряженные корни дают решения вида $x^i e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $x^i e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Пример 3. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -1$ – корень кратности 2.

Общее решение имеет вид $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$.

Пример 4. Решить уравнение $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^4 + 4k^3 + 8k^2 + 8k + 4 = 0, \quad (k^2 + 2k + 2)^2 = 0, \quad k_{1,2} = -1 - i, \quad k_{3,4} = -1 + i.$$

Тогда по схеме третьего случая 3.2 общее решение имеет вид

$$y = e^{-x} \left((C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x \right).$$

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определение линейного дифференциального уравнения n -го порядка.
2. Дать определение линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.
3. Сформулировать определение линейного дифференциального оператора и перечислить его основные свойства.
4. Указать основные свойства линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.
5. Дать определение характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.
6. Изложить схему решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка для случаев, когда среди корней его характеристического уравнения:
 - а) все действительные и различные;
 - б) все различные, среди них есть комплексные; э
 - в) имеются кратные.

Задачи для самостоятельного решения

Решить однородное уравнение.

1. $y'' + 6y' + 8y = 0$.
2. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.
3. $y'' + 2y' + 2y = 0$.
4. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$.
5. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$.
6. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.

$$7. y''' - 2y' = 0. \quad 8. y''' + y'' = 0. \quad 9. y^{(4)} + y = 0. \\ 10. y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 0.$$

4.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Структура решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений (ЛНДУ). При $a_0 \neq 0$ запишем ЛНДУ в виде

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x). \quad (4.7)$$

Используя определение линейного дифференциального оператора, уравнение (4.7) можно записать также в виде $L(y) = f(x)$. Оно имеет единственное решение, если функции $f(x)$ и $p_k(x)$, $k = \overline{1, n}$ непрерывны и заданы начальные условия.

Из рассмотренных свойств линейных операторов следуют

Свойства решений ЛНДУ

1. Пусть $\bar{y}(x)$ и $y_1(x)$ – решения ЛНДУ (4.7) и соответствующего ЛОДУ. Тогда $y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x)$ является общим решением (4.7).

2. Пусть y_k – решения уравнений $L(y) = f_k(x)$. Тогда $y = \sum_{k=1}^m y_k$ является решением уравнения $L(y) = \sum_{k=1}^m f_k(x) \cdot \lambda_k$, λ_k – постоянные (*принцип суперпозиции*).

Теорема 3. Общее решение $y(x)$ ЛНДУ (4.7) представляет собой сумму общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного дифференциального уравнения и какого-либо частного решения $\bar{y}(x)$ уравнения (4.7). Это решение $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$ определено на $[a, b]$, если все $f_k(x)$ и $p_k(x)$ непрерывны на $[a, b]$.

Замечание. Таким образом, задача решения ЛНДУ сводится к решению двух более простых задач:

- 1) нахождение общего решения соответствующего ЛОДУ;
- 2) нахождение (подбор) какого-либо частного решения ЛНДУ.

ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. В некоторых случаях, когда правая часть уравнения имеет специальный вид, решение ЛНДУ получается довольно просто. Заметим, что при этом частное решение подбирается методом неопределенных коэффициентов, которые находятся стандартным для этого метода способом. Коэффициенты ищутся как решения системы алгебраических уравнений. Эта система получается путем подстановки решения в уравнения и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x .

Итак, рассмотрим ЛНДУ

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (4.8)$$

и соответствующее характеристическое уравнение

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n k = 0. \quad (4.9)$$

Разберем основные случаи.

1. Правая часть есть многочлен степени m .

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m, \quad a_n \neq 0:$$

а) пусть нуль не является корнем характеристического уравнения заданного ЛНДУ.

Тогда (4.8) имеет решение вида $y = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m$. Действительно, подставив это выражение в (4.8) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим

$$\begin{cases} a_n B_0 = b_0 \\ a_n B_1 + m a_{n-1} B_0 = b_1 \\ a_n B_2 + (m-1) a_{n-1} B_1 + m(m-1) a_{n-2} B_0 = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_n B_m + \dots = b_m \end{cases}$$

Эта система совместна и определена;

б) пусть $k=0$ – корень кратности α характеристического уравнения (4.9), то есть $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-\alpha+1} = 0$. Тогда при правой части вида

$f(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^{m-k}$ решение (4.8) имеет вид $y = x^\alpha \sum_{k=0}^m B_k x^{m-k}$. В этом можно

убедиться непосредственной подстановкой в уравнение (4.8).

Пример 5. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = 3x - 5$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 3k + 2 = 0$, его решения $k_1 = -1, k_2 = 2$. Запишем соответствующие частные решения ЛОДУ $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{-2x}$ и его общее решение $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.

Теперь будем искать частное решение ЛНДУ $\bar{y}$ вида $y = ax + b$, откуда $y' = a, y'' = 0$. Подставляя в данное уравнение, запишем

$$3a + 2(ax + b) = 3x - 5, \quad 2ax + 3a + 2b = 3x - 5,$$

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{19}{4}, \quad \bar{y} = \frac{3}{2}x - \frac{19}{4}.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{19}{4}.$$

Пример 6. Решить уравнение $y''' - 3y'' = 2x^2 + 5$.

Решение. Действуя по изложенной выше схеме, запишем характеристическое уравнение $k^3 - 3k^2 = 0$ и найдем его корни $k_{1,2} = 0, k_3 = 3$.

Общее решение однородного уравнения таково: $y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 e^{3x}$.

Частное решение данного уравнения будем искать в виде

$$y = x^2 (Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,$$

откуда $y' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C, y''' = 24Ax + 6B$.

Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$24Ax + 6B - 3(12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 2x^2 + 5,$$

$$-36Ax^2 + (24A - 18B)x + 6(B - C) = 2x^2 + 5.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x , запишем систему уравнений для нахождения коэффициентов A, B, C :

$$\begin{cases} -36A = 2, \\ 24A - 18B = 0, \\ 6(B - C) = 5. \end{cases}$$

Решение системы имеет вид $A = -\frac{1}{18}$, $B = -\frac{2}{27}$, $C = -\frac{49}{54}$.

С учетом общего решения однородного уравнения получим

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{3x} - \frac{1}{18}x^4 - \frac{2}{27}x^3 - \frac{49}{54}x^2.$$

2. Правая часть имеет вид $e^{px}p_m(x)$:

а) пусть p не является корнем характеристического уравнения ЛОДУ.

Тогда решение имеет вид $y = e^{px}Q_m(x)$, здесь коэффициенты находятся методом неопределенных коэффициентов;

б) пусть p является корнем характеристического уравнения кратности α . Тогда решение имеет вид $y = e^{px}x^\alpha Q_m$.

Пример 7. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = xe^{-x}$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = 1$. Заметим, что $p = -1$ не является корнем характеристического уравнения. Таким образом, имеем случай 2 а):

$$\bar{y} = e^{-x}(Ax + B), \quad y' = e^{-x}(-Ax - B + A), \quad y'' = e^{-x}(Ax + B - 2A).$$

Подставляя y, y', y'' в исходное уравнение и сокращая на e^{-x} , получим $Ax + B - 2A - Ax - B + A - 2Ax - 2B = x$, $-2Ax - 2B - A = x$, откуда

$$A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{4}; \quad \bar{y} = e^{-x} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right).$$

Общее решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + e^{-x} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right).$

Пример 8. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k + 1 = 0$, $k_{1,2} = 1$. Заметим, что $p = 1$ – корень характеристического уравнения кратности 2, имеем случай 2 б). Ищем частное решение ЛНДУ в виде $\bar{y} = Ax^2 e^x$. Тогда

$$y' = Ae^x (x^2 + 2x), \quad y'' = Ae^x (x^2 + 4x + 2),$$

$$A(x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x + x^2) = 2; \quad A = 1, \quad \bar{y} = x^2 e^x.$$

Общее решение $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x^2 e^x$.

3. Правая часть имеет вид $f(x) = e^{px}(p_{m_1}(x) \cos(qx) + Q_{m_2}(x) \sin(qx))$.

а) $p \pm iq$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение имеет вид $\bar{y} = e^{px}(R_m(x) \cos(qx) + S_m(x) \sin(qx))$, где $m = \max\{m_1, m_2\}$, $R_m(x), S_m(x)$ – многочлены степени m с неопределенными коэффициентами.

б) $p \pm iq$ является корнем характеристического уравнения кратности α . Тогда частное решение имеет вид $\bar{y} = x^\alpha e^{px}(T_m(x) \cos(qx) + V_m(x) \sin(qx))$.

4. Пусть правая часть является суммой функций, описанных в пунктах 1–3. Тогда частное решение находится как сумма соответствующих частных решений (принцип суперпозиции).

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислить основные типы и подтипы рассмотренных ЛНДУ.
2. Пояснить суть метода неопределенных коэффициентов в применении к решению ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

3. Изложить схемы решения ЛНДУ каждого из шести рассмотренных подтипов.

Задачи для самостоятельного решения

Найти вид (с неопределенными коэффициентами) частного решения ЛНДУ, если известны корни его характеристического уравнения и правая часть.

11. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, f(x) = x^2 - 3$.

12. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, f(x) = x^3 - 3$.

13. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, f(x) = 10x^2 + x - 4$.

14. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2; f(x) = e^{-x}(x - 10)$.

15. $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i; \lambda_3 = \lambda_4 = 0; f(x) = e^{-x}(x \cos x - \sin x)$.

Решить ЛНДУ, найдя частные решения методом неопределенных коэффициентов.

16. $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$. 17. $y'' + y = 4e^x$.

Решить уравнение.

18. $y'' - y = 2 \sin x - 4 \cos x$. 19. $y'' - y = x^2 - x + 1$. 20. $y'' - 2y' + y = 4e^x$.

21. $y''' - y'' = -3x + 1$. 22. $y^{(4)} - y = 4e^x$. 23. $y'' - y = 4e^x$.

4.3. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим ЛНДУ

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x). \quad (4.10)$$

Обозначим через $y_0 = \sum_{k=1}^n C_k y_k$ общее решение соответствующего ЛОДУ,

$\bar{y}$ – частное решение ЛНДУ (3.10), $y = \sum_{k=1}^n C_k y_k + \bar{y}$ – общее решение (4.10).

Будем искать общее решение ЛНДУ в виде

$$y = \sum_{k=1}^n C_k(x) y_k(x). \quad (4.11)$$

Получим n условий на коэффициенты $C_k(x)$, добиваясь при этом, чтобы решения выглядели максимально просто.

Продифференцируем (4.11): $y' = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k'(x) + \sum_{k=1}^n C_k'(x)y_k(x)$.

Пусть второе слагаемое равно нулю, тогда $y' = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k'(x)$. Опять

продифференцируем: $y'' = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k''(x) + \sum_{k=1}^n C_k'(x)y_k'(x)$. Пусть второе

слагаемое опять равно нулю, получим $y'' = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k''(x)$. Продолжая эту

процедуру до порядка $(n-1)$ включительно, запишем:

$$\sum_{k=1}^n C_k'(x)y_k(x) = 0, \sum_{k=1}^n C_k'(x)y_k'(x) = 0, \dots, \sum_{k=1}^n C_k'(x)y_k^{(n-2)}(x) = 0 \quad (4.12)$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k(x); \\ y' = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k'(x); \\ y'' = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k''(x); \\ \dots \\ y^{(n-1)} = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k^{(n-1)}(x); \\ y^{(n)} = \sum_{k=1}^n C_k(x)y_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n C_k'(x)y_k^{(n-1)}(x). \end{array} \right. \quad (4.13)$$

В правой части последнего уравнения системы (4.13) нельзя второе слагаемое приравнять к нулю, так как в (4.12) уже получены $(n-1)$ условий на коэффициенты $C_k(x)$ и есть еще одно обязательное условие: решение, полученное по формуле (2), должно удовлетворять уравнению (4.10):

$$\sum_{k=1}^n C_k'(x) y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^n C_k(x) \left(y_k^{(n)} + p(x) y_k^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y \right) = f(x).$$

Во втором слагаемом выражение в скобках равно нулю, так как каждое $y_k(x)$ есть решение ЛОДУ. Получили последнее условие на коэффициенты $C_k(x)$, которое и запишем как последнее уравнение системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n C_k'(x) y_k(x) = 0; \\ \sum_{k=1}^n C_k'(x) y_k'(x) = 0; \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n C_k'(x) y_k^{(n-2)}(x) = 0; \\ \sum_{k=1}^n C_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) = f(x). \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Действительно, определитель системы (4.14) является определителем Вронского для функций $y_1, y_2, \dots, y_n$, и поэтому он не равен нулю.

Таким образом, алгоритм решения следующий:

- 1) составляем систему вида (4.14);
- 2) решив (4.14), найдем $C_k'(x)$, а сами коэффициенты найдем путем интегрирования.

Пример 9. Найти общее решение ЛНДУ $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Решение. 1. Найдем общее решение ЛОДУ.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, его корни: $\lambda_{1,2} = 1$.

Отсюда $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, общее решение ЛОДУ $y_o = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

2. Найдем общее решение ЛНДУ. Составим систему вида (4.12):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x = 0; \\ C_1'(x) e^x + C_2'(x) (1+x) e^x = \frac{e^x}{x}. \end{array} \right.$$

Сократим обе части каждого уравнения системы на e^x :

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0; \\ C_1'(x) + C_2'(x)(1+x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, получим $C_2'(x) = \frac{1}{x}$,

$C_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C_2$. Подставляя $C_2'(x) = \frac{1}{x}$ в первое уравнение, имеем $C_1'(x) = -1$, $C_1(x) = -x + C_1$.

Получили общее решение ЛНДУ: $y = e^x(-x + C_1) + (\ln |x| + C_2)xe^x$.

Контрольные вопросы и задания

1. Пояснить суть метода вариации произвольных постоянных.
2. Привести алгоритм решения ЛНДУ методом вариации произвольных постоянных.
3. Составить систему вида (4.14) для ЛНДУ второго порядка.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнение методом вариации произвольных постоянных.

$$24. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}. \quad 25. y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0. \quad 26. y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}.$$

$$27. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}. \quad 28. y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}.$$

4.4. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Система дифференциальных уравнений называется *линейной*, если она линейна относительно всех неизвестных функций и их производных.

Линейная система дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j(t) + f_k(t). \quad (4.15)$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots\dots\dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$.

Тогда (4.15) можно записать в матричной форме $\frac{dx}{dt} = Ax + F$.

Обозначим линейный оператор $L(x) = \frac{dx}{dt} - Ax = x \left(\frac{d}{dt} - A \right)$.

Используя свойства линейного оператора, получаем:

- 1) $L(Cx) = CL(x)$;
- 2) $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$.

Напомним, что векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$, где $x_k = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \dots\dots\dots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2, \dots, n$),

называются *линейно зависимыми* на $[a; b]$, если найдутся $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не обращающиеся одновременно в нуль, такие, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad (4.16)$$

при всех $t \in [a; b]$.

Если из того, что равенство (4.16) выполняется на всем отрезке $[a; b]$, следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то эти векторы называются *линейно независимыми*.

Из свойств линейного оператора следует, что решения однородной линейной системы имеют те же свойства, то есть их линейная комбинация является также решением однородной системы. Отсюда вытекает (с учетом определения линейной независимости) следующая теорема.

Теорема 4. Общим решением линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = AX \quad (4.17)$$

Запишем систему при $k_1 = 1$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1.$$

Возьмем $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$, тогда $x_1(t) = e^t, y_1(t) = -e^t$.

Аналогично запишем систему при $k_2 = 5$: $\begin{cases} -3\beta_1 + \beta_2 = 0 \\ 3\beta_1 - \beta_2 = 0 \end{cases}$.

Возьмем $\beta_1 = 1, \beta_2 = 3$, тогда $x_2 = e^{5t}, y_2 = 3e^{5t}$.

Общее решение имеет вид $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases}$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить систему дифференциальных уравнений.

29. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}$.

30. $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x$.

31. $y' = 1 - \frac{1}{z}, z' = \frac{1}{y - x}$.

Ответы к задачам 4-го раздела

1. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$. 3. $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

5. $y = e^x (C_1 + C_2 x) C_3 \cos x + C_4 \sin x$. 7. $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

9. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$.

11. $\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$. 13. $\bar{y} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$.

15. $\bar{y} = e^{-x} \left((Ax^2 + Bx) \cos x + (Cx^2 + Dx) \sin x \right)$.

17. $y = 2e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$. 19. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x^2 + x - 3$.

$$21. y = C_1 e^x + C_2 + C_3 x + \frac{1}{2} x^3 + x^2. \quad 23. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 2x e^x.$$

$$25. y = 2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$27. y = (C_1 + C_2 x) e^x - e^x \left(\ln \sqrt{1+x^2} - x \cdot \operatorname{arctg} x \right).$$

$$29. C_1 x^2 = 2t + C_2, \quad y^2 = C_1 (2t + C_2). \quad 31. y = x - e^x, \quad z = e^{-x}.$$

5. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

5.1. Основные понятия

Пусть $a_1, \dots, a_n, \dots$ – бесконечная последовательность действительных чисел. *Числовой ряд* есть бесконечная сумма вида

$$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (5.1)$$

где a_n – *общий член* ряда (5.1). Выражение $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$ называется *k-й частичной суммой ряда* (5.1).

Ряд (5.1) *сходящийся*, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\{S_k\}$; $S = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n$ называется *суммой ряда*.

Таким образом, ряд сходится к своей сумме S . Пусть $m \in \mathbb{N}$, тогда

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \text{ есть } m\text{-й остаток ряда.}$$

Если последовательность $\{S_k\}$ имеет своим пределом ∞ ($-\infty$, $+\infty$) или не имеет предела, то говорят, что ряд (5.1) *расходится (осциллирует)*.

Пример 1. Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$, исходя из определения.

Решение. Преобразуем общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$.

Найдем сумму первых n элементов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+3)} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n-4} - \frac{1}{n-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} = \\
& = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right).
\end{aligned}$$

Найдем сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$, исходя из определения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{11}{6}.$$

Подставим получившееся значение в выражение для исходного ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{6} = \frac{11}{18}.$$

Пример 2. При каких q сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ (геометрический ряд)?

Решение. Сумма геометрической прогрессии, как известно, находится

по формуле $\sum_{n=1}^k q^n = q \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$ ($q \neq 1$). Возможны следующие случаи:

а) $|q| < 1$, тогда $S \rightarrow \frac{1}{1-q}$ при $k \rightarrow \infty$ – ряд сходится;

б) $q = 1$, тогда $S = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + \dots + 1 + \dots$ – ряд расходится;

в) $q = -1$, тогда $S_k = \frac{1}{2} \left((-1)^k - 1 \right)$ – ряд расходится (осциллирует);

г) $|q| > 1$, тогда ряд расходится.

Таким образом, ряд сходится при $|q| < 1$.

Теорема 1 (критерий сходимости Коши для ряда). Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 = N_0(\varepsilon): (n \geq m \geq N_0) \Rightarrow$

$$|a_{m+1} + \dots + a_n| < \varepsilon.$$

Следствие 1 (необходимое условие сходимости ряда). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

сходится, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Следствие 2 (достаточный признак расходимости ряда). Пусть

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Замечание. Приведенное в следствии 1 условие сходимости ряда необходимо, но, как показывает следующий пример, отнюдь не достаточное.

Пример 3 (расходящийся ряд с общим членом, стремящимся к нулю).

Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический ряд) расходится.

Решение. $S_{2^{k+1}} - S_{2^k} = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} \cdot 2^k = \frac{1}{2}.$

Из критерия Коши при $n = 2^{k+1}$ и $m = 2^k$ следует, что ряд расходится.

Гармонический ряд – один из важнейших эталонных рядов при исследовании сходимости рядов с помощью признаков сравнения, см. подразд. 5.2.

Пример 4. Доказать расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+2}$.

Решение. Вычислим предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1 \neq 0$, по следствию 2 ряд расходится.

Свойства рядов

1. Если ряд (5.1) сходится, то его сумма определяется единственным образом.

2. Если ряд (5.1) сходится, то при любом $C \in \mathbb{R}$ сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n = C \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.

4. Если ряд (5.1) сходится (расходится), то соответственно сходится (расходится) и ряд $\sum_{n=N_1}^{\infty} a_n (\forall N_1 \in N)$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определения числового ряда, его общего члена и частичной суммы.
2. Привести необходимое условие сходимости ряда и достаточный признак расходимости ряда, основанный на невыполнении необходимого признака.
3. Сформулировать достаточный признак расходимости ряда.
4. Привести выражение для гармонического ряда и показать его расходимость.
5. Перечислить основные свойства рядов.

Задачи для самостоятельного решения

Найти сумму ряда по определению.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}. \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}. \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

Исследовать сходимость ряда с помощью необходимого условия сходимости.

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}. \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{100n+500}.$$

5.2. Знакоположительные ряды

Пусть $a_n > 0$ ($a_n \geq 0$) $\forall n$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ есть ряд с положительными членами.

Теорема 2 (критерий сходимости числового ряда с положительными членами). Для сходимости числового ряда с положительными членами необходима и достаточна ограниченность последовательности частичных сумм.

Теорема 3 (прямой признак сравнения). Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с положительными членами удовлетворяют условию $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$.

Тогда:

- 1) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- 2) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 4 (предельный признак сравнения). Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с положительными членами удовлетворяют условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$.

Если $\lambda > 0$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Если $\lambda = 0$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 5 (признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда:

- а) при $q < 1$ ряд сходится;
- б) при $q > 1$ ряд расходится;
- в) при $q = 1$ признак не дает информации о сходимости.

Теорема 6 (радикальный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

- а) при $q < 1$ ряд сходится;

б) при $q > 1$ ряд расходится;

в) при $q = 1$ признак не дает информации о сходимости.

Замечание. Если $q = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{3^n \cdot n!}$.

Решение. По признаку Даламбера, если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то

при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ ряд расходится. Дано

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{3^n \cdot n!}, u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot (2n+1)}{3^n \cdot 3 \cdot n! \cdot (n+1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Найдем } q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot (2n+1)}{3^n \cdot 3 \cdot n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3(n+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+3} = \frac{2}{3} < 1. \end{aligned}$$

Получили $q < 1$, следовательно, ряд сходится.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1} \right)^{\frac{n}{2}}$.

Решение. Ряд знакоположительный. По радикальному признаку Коши, если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ ряд расходится.

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{2n+1} \right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3n+1}{2n+1} \right)^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1} \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Имеем $q > 1$, следовательно, ряд расходится.

Пример 7 (обобщенный гармонический ряд). Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ в зависимости от p .

Исследование. Используя признак Даламбера, запишем

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^p = 1. \end{aligned}$$

По радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^p} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\ln n} \right)^{-\frac{p}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-p \frac{\ln n}{n}} = e^{-p \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)} = e^0 = 1.$$

Оба признака ответа не дают.

Теорема 7 (интегральный признак Коши). Пусть $c_n = f(n)$, $n \geq k \in \mathbb{N}$, где $f(x) > 0$ определена и монотонно убывает на $L = [k; \infty)$, а также интегрируема на каждом конечном промежутке из L . Тогда для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ необходима и достаточна сходимость интеграла $\int_k^{\infty} f(x) dx$.

Теперь закончим решение примера 7.

Решение. Пусть $p \leq 0$. Не выполняется необходимый признак сходимости, значит, ряд расходится (интегральным признаком Коши воспользоваться невозможно).

Пусть $p > 0$, $p \neq 1$, поскольку при $p = 1$ ряд расходится как гармонический. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \left(n^{1-p} - 1 \right).$$

Легко видеть, что несобственный интеграл $\int_1^{\infty} x^{-p} dx$, а вместе с ним

и исходный ряд, расходится при $0 < p < 1$ и сходится при $p > 1$.

В итоге приходим к следующему заключению:

а) при $p \leq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ расходится;

б) при $p > 1$ ряд сходится.

Эталонные ряды

1. Геометрический ряд.

2. Обобщенный гармонический ряд.

3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log_a n)^p}$ ($a > 1$): сходится при $p > 1$ и расходится при

$p \leq 1$.

Пример 8. Решить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$.

Решение. Используем прямой признак сравнения, рассматривая $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Имеем $\frac{1+n}{1+n^2} \geq \frac{1}{n}$, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$.

Пример 9. Решить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2+1}{n^2} \right)$.

Решение. Используем предельный признак сравнения, рассматривая $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2+1}{n^2} \right)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ с учетом того, что второй ряд сходится как обобщенный гармонический при $p = 2 > 1$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{n^2+1}{n^2} \right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}{\frac{1}{n^2}} = \left[\ln(1+\alpha) \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

следовательно, ряд сходится.

Ряд *знакоопределенный*, если, начиная с некоторого n , его общий член не меняет знака. Поскольку начальный отрезок ряда не влияет на его сходимость, знакоопределенные ряды можно изучать так же, как и знакоположительные.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулировать определение ряда с положительными членами и критерий сходимости такого ряда.
2. Привести формулировки прямого и предельного признаков сравнения.
3. Сформулировать признак Даламбера и радикальный признак Коши.
4. Дать формулировку интегрального признака Коши.
5. Перечислить наиболее употребительные для сравнения эталонные ряды.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать сходимость ряда с помощью признаков сравнения.

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}. \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}. \quad 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}. \quad 11. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2+1}{n^2} \right). \quad 12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right).$$

Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера или радикального признака Коши.

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}. \quad 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}}{3^n}. \quad 15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad 17. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n. \quad 18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Исследовать сходимость ряда с помощью интегрального признака Коши.

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}. \quad 20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}. \quad 21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n \cdot \ln n}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n \cdot \ln^2 n} \cdot \quad 23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2 (n+1)} \cdot \quad 24. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2.$$

5.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Ряд называется *знакопеременным*, если каждые два соседние его слагаемые имеют разный знак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, \quad b_n > 0. \quad (5.2)$$

Теорема 8 (признак Лейбница). Пусть дан знакопеременный ряд (5.2), последовательность $\{b_n\}$ монотонно убывает и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Тогда ряд (5.2) сходится и его сумма S удовлетворяет неравенству

$$0 < S < b_1.$$

Обозначим

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n - \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} b_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n.$$

Следствие. $|R_N| < b_{N+1}$, то есть погрешность приближенного вычисления знакопеременного ряда по частичной сумме не превосходит абсолютной величины первого отброшенного члена.

Пример 10. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

Решение. Ряд знакопеременный, исследуем его сходимость с помощью признака Лейбница.

По условию $b_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$, $b_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+2)}$. Выполняются соотноше-

$$\text{ния } b_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+2)} < b_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0,$$

ряд сходится по признаку Лейбница.

Пример 11. Сколько слагаемых нужно взять, чтобы вычислить

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \text{ с точностью до } 0,001?$$

Решение. Возьмем n слагаемых, то есть n -ю частичную сумму ряда. По условию остаток $|R_n| \leq 0,001$, по следствию из признаку Лейбница $|R_n| < a_{n+1}$. Найдем наименьшее $n \in \mathbb{N} : b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < 0,001$. Тогда

$(n+1)^2 > 1000$, откуда $n = 31$. Значит, нужно взять 31 слагаемое.

Ряды с произвольными членами, абсолютная и условная сходимость. Ряд *знакопеременный*, если его общий член может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Сходящийся ряд, который не сходится абсолютно, называется *условно сходящимся*.

Теорема 9. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Замечание. Из абсолютной сходимости ряда следует его условная сходимость, но не наоборот (из сходимости не следует абсолютная сходимость).

Пример 12. Исследовать на абсолютную сходимость ряд примера 10.

Решение. Проверим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ на абсолютную сходимость, сравнивая составленный из модулей ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Имеем $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходится, следовательно,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ также расходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ сходится условно.

Пример 13. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}$.

Решение. Ряд знакочередующийся, исследуем сходимость с помощью признака Лейбница. Легко проверить, что

$$b_n = \frac{1}{(2n-1)^3} > b_{n+1} = \frac{1}{(2 \cdot (n+1) - 1)^3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = 0,$$

следовательно, по признаку Лейбница ряд сходится (условно).

Проверим на абсолютную сходимость, то есть проверим сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$. Очевидно, что $\frac{1}{(2n-1)^3} \leq \frac{1}{n^3}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится как обобщенный гармонический ряд при $p = 3$, значит, по прямому признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$ также сходится. Таким образом, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}$ сходится абсолютно.

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определения знакочередующегося ряда, знакопеременного ряда.
2. Записать признак Лейбница и следствие из него.
3. Привести определения абсолютной и условной сходимости ряда.

Задачи для самостоятельного решения

25. Сколько нужно взять членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

26. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ оценить ошибку, допускаемую при замене его суммы суммой первых четырех членов.

Исследовать сходимость ряда, в случае сходимости определить, как сходится ряд, абсолютно или условно.

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad 28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}. \quad 30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^n.$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}. \quad 32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}.$$

Исследовать сходимость ряда.

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \cos \pi n}{\sqrt[3]{3n^4 + 5}}. \quad 34. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}.$$

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2. \quad 36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

37*. Показать: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$

абсолютно сходится.

Ответы к задачам 5-го раздела

1. 1. 3. $\frac{3}{2}$. 5. Расходится. 7. Расходится. 9. Сходится.

11. Сходится. 13. Сходится. 15. Сходится. 17. Сходится.

19. Расходится. 21. Расходится. 23. Сходится. 25. 999.

27. Сходится условно. 29. Расходится. 31. Расходится.

33. Сходится. 35. Сходится.

6. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

6.1. Функциональные ряды

Основные понятия. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – функции, заданные на $D \subset R$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ есть *функциональный ряд*. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется *сходящимся* на множестве D , если в каждой точке D ряд сходится как числовой.

Пример 1. Найти множество сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Решение. Зафиксируем некоторое $x \in R$ и проверим на сходимость получившийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Запишем $a_n = \frac{x^n}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ и применим признак Даламбера:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{x^n}{n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x \cdot x^n}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{x^n} \right| = |x| < 1,$$

При любом фиксированном $x : |x| < 1$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится, значит, при $x \in (-1; 1)$ исходный функциональный ряд сходится. Теперь рассмотрим сходимость ряда на концах указанного интервала. При $x = 1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится как обобщенный гармонический при $p = 2$, при

$x = -1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, который абсолютно сходится. В результате имеем множество сходимости ряда $x \in [-1; 1]$.

Равномерная сходимость функционального ряда. Функциональный ряд $\sum f_n(x)$ равномерно сходится на множестве D , если $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 = N_0(\varepsilon) : \forall n \geq N_0$ и $\forall x \in D \rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Здесь

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится на D , если и только если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N_0 = N_0(\varepsilon)$ такое, что при любых $m > n \geq N_0$ и всех $x \in D$ имеет место неравенство

$$|S_m(x) - S_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_m(x)| < \varepsilon.$$

Пример 2. Геометрический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, если $|q| < 1$, расходится при $|q| \geq 1$.

Рассмотрим функциональный ряд $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Этот ряд сходится при $|x| < 1$ (расходится при $|x| \geq 1$), его сумма

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ при } |x| < 1.$$

Обозначим $\Delta_n(x) = F(x) - \sum_{k=1}^n x^k$. При $x \rightarrow 1$ имеем $F(x) \rightarrow +\infty$, откуда следует, что $\Delta_n(x) \rightarrow +\infty$ при любом фиксированном n и $x \rightarrow 1$.

Как следует из критерия Коши, ряд $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ не является равномерно сходящимся на отрезке $[-1; 1]$.

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ мажорируется на множестве D сходящимся числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (\alpha_k > 0)$, если $\forall x \in D \quad |f_k(x)| \leq \alpha_k$.

Теорема 2 (достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда). Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ мажорируется на D

сходящимся числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится на D .

Пример 3. Найти область равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

Решение. Данный ряд равномерно сходится на всей числовой оси R , так как он мажорируется для всех $x \in R$ сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определения функционального ряда и его сходимости.
2. Сформулировать определение равномерной сходимости функционального ряда и критерий Коши равномерной сходимости.
3. Записать теорему Вейерштрасса о достаточном признаке равномерной сходимости функционального ряда.

Задачи для самостоятельного решения

Найти область сходимости функционального ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^n x^n$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n$.

Найти область равномерной сходимости функционального ряда

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot n^3}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$.

6.2. Степенные ряды

Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad (6.1)$$

называется *степенным*. Здесь $c_n \in R$ – коэффициенты, $x=a$ – центр ряда. Множество D_{cx} точек числовой оси, где сходится ряд (6.1), называется его *областью сходимости*.

Теорема 6 (Абеля).

1. Если степенной ряд (6.1) сходится в точке $x = x_0$, то он сходится, причем абсолютно, $\forall x: |x-a| < |x_0-a|$.

2. Если ряд расходится в точке $x = x_1$, то он расходится $\forall x: |x-a| > |x_1-a|$.

Как следует из теоремы Абеля, область сходимости степенного ряда всегда представляет собой промежуток с центром в точке a , причем этот промежуток может являться интервалом, полуинтервалом или отрезком.

Радиус сходимости степенного ряда (6.1) есть число R : при $x \in (a-R; a+R)$ ряд сходится, а вне этого интервала – расходится. *Интервал сходимости* степенного ряда есть $(a-R; a+R)$. Если $R=0$, то интервал вырождается в точку $x=a$ (в своем центре сходится любой степенной ряд); при $R=\infty$ интервал сходимости представляет собой всю числовую ось.

Теорема 7 (Коши – Адамара). Пусть существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l = \frac{1}{R}$.

Тогда ряд сходится при $x \in (a-R; a+R)$ и расходится вне этого интервала. Если $l=0$, то $R=\infty$, если $l=\infty$, то $R=0$.

Теорема 8 (Даламбера). Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = l = \frac{1}{R}$.

Тогда степенной ряд (6.1) сходится внутри интервала $(a-R; a+R)$ и расходится вне его.

Замечания.

1. При $x: |x - a| = R$, то есть на концах интервала, теоремы 2 и 3 ответа на вопрос о сходимости не дают. В этих точках требуется отдельное исследование.

2. В каждой из этих точек, как показывают примеры ниже, ряд может как сходиться, так и расходиться.

3. Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (6.1) теоремы 2 и 3 удобнее использовать в следующем виде:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \text{ если предел справа существует (формула Коши – Адамара);}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \text{ если предел справа существует (формула Даламбера).}$$

Пример 4. Найти область сходимости D_{cx} степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение. Коэффициенты ряда имеют вид $c_n = \frac{1}{n}$, центр в точке $x = 0$.

Найдем радиус сходимости по формуле Даламбера:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} = 1.$$

При $x = 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится как гармонический, при $x = -1$ сходится по признаку Лейбница (проверьте!). Таким образом, $D_{cx} = [-1, 1)$.

Основные свойства степенных рядов

Свойство 1. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией на всем интервале его сходимости.

Замечание. На отрезке $[a - R; a + R]$ сумма степенного ряда может быть разрывной.

Свойство 2. Степенной ряд (6.1) можно почленно дифференцировать в интервале сходимости, при этом ряд, составленный из производных:

- а) также является степенным;
- б) имеет тот же радиус сходимости;
- в) имеет сумму, равную производной суммы исходного ряда.

Свойство 3. Степенной ряд можно почленно интегрировать на отрезке $[a; x]$ из области сходимости D_{cx} ряда; полученный ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1} \text{ и тот же радиус сходимости.}$$

Пример 5. Рассмотрим геометрический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Радиус сходимости ряда равен 1 (легко находится по формуле Коши – Адамара или формуле Даламбера), центр находится в точке $x = 0$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ сходится на интер-

вале $(-1; 1)$ и его сумма $\frac{1}{1-x}$ непрерывна на этом интервале, а также в точке $x = -1$, но имеет разрыв на правом конце $x = 1$.

Пример 6. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение. Интервал сходимости ряда $(-1; 1)$ найден в примере 4. Рассмотрим функцию $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Как следует из свойства 2, ее можно почленно дифференцировать в каждой точке интервала $(-1; 1)$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Последнее равенство вытекает из того, что на указанном интервале ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $x: |x| < 1$.

Используя $S'(x) = \frac{1}{1-x}$, найдем

$$S(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln |1-x| + C.$$

При $x = 0$ запишем $S(0) = -\ln |1-0| + C = 0$, откуда получим $C = 0$.

В результате имеем $S(x) = -\ln |1-x|$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определения степенного ряда и его области сходимости.
2. Записать теорему Абеля.
3. Сформулировать теоремы Коши – Адамара и Даламбера.
4. Указать основные свойства степенных рядов.

Задачи для самостоятельной работы

Найти радиус и определить область сходимости степенного ряда.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)}$. 11. $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot 3^{n-1} x^{n-1}$. 12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}}$. 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^n x \right)^n$. 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

Найти интервал сходимости и сумму ряда.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$. 17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. 18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)x^n}{3^n}$.

19. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - 2n + 1) x^n$.

20*. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$, используя равенство

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \text{ и свойства степенных рядов.}$$

6.3. Ряды Тейлора – Маклорена

Пусть степенной ряд (6.1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ имеет радиус сходимости R .

Тогда на $(a-R; a+R)$ ряд сходится к сумме ряда $f(x)$, $f(x)$, имеет производные любого порядка на этом интервале. Очевидно, что $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(x-a)^{n-1}$. Последовательно вычисляя производные, получим

$\forall x \in (a-R; a+R)$ и $\forall k \in N$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(x-a)^{n-k}. \quad (6.2)$$

В точке $x=a$ имеем $f^{(k)}(a) = c_k k(k-1) \cdot \dots \cdot 1$, откуда

$$f^{(k)}(a) = C_k \cdot k!. \quad (6.3)$$

Таким образом, из (6.2) и (6.3) получаем

$$C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}. \quad (6.4)$$

Рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке a называется выражение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad (6.5)$$

то есть ряд (6.1), коэффициенты которого определяются по формуле (6.4).

При $a=0$ ряд (6.5) называется *рядом Маклорена*.

Степенной ряд является рядом Тейлора для своей суммы $f(x)$ на интервале сходимости.

Замечание. Оказывается, что ряд Тейлора в функции $f(x)$ не всегда сходится к $f(x)$. Ряд Тейлора функции может иметь своей суммой функцию, отличную от исходной.

Пример 7. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ в ряд Тейлора

в окрестности точки $x = 0$.

Решение. Функция $f(x)$ имеет производные любого порядка в окрестности точки $x = 0$, которые можно непрерывно доопределить нулем в этой точке. Действительно,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \left[t = \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2t^3}{e^{t^2}} = 0.$$

Значит, $f'(x)$ можно непрерывно доопределить нулем в точке $x = 0$.

Аналогично, $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_k^{(k)}(t)}{e^{t^2}} = 0$. Таким образом, ряд Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$ (то есть ее ряд Маклорена) состоит из нулей.

Функция $f(x)$ называется *разложимой в ряд Тейлора* в окрестности точки $x = a$, если ее ряд Тейлора сходится к $f(x) \quad \forall x \in (a - R; a + R)$, где R – радиус сходимости ряда Тейлора.

Теорема 9 (необходимое и достаточное условие разложимости в ряд Тейлора). Функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора на множестве $(a - R; a + R)$, если и только если $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(f) = 0$ для всех $x \in (a - R; a + R)$.

Теорема 10 (достаточное условие разложимости). Пусть $f(x)$ бесконечное количество раз дифференцируема на интервале $(a - R; a + R)$, $(0 < R \leq +\infty)$ и $\exists M : |f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall n = 0, 1, \dots$ и $\forall x \in (a - R; a + R)$.

Тогда $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора $\forall x \in (a - R; a + R)$.

Контрольные вопросы и задания

1. Записать выражения для ряда Тейлора и ряда Маклорена функции $f(x)$, а также выражения для коэффициентов этих рядов.
2. Привести выражения для ряда Тейлора и ряда Маклорена функции $g(t)$, а также выражения для коэффициентов этих рядов.

3. Дать определение разложимости функции в ряд Тейлора.
4. Сформулировать необходимое и достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.
5. Привести достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

6.4. Разложение в ряд Тейлора (Маклорена). Стандартные разложения

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty.$$

$$2. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad |x| < \infty.$$

$$3. \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \quad |x| < \infty.$$

$$4. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1; 1].$$

5.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + \dots; \quad x \in (-1; 1).$$

$$6. \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty.$$

$$7. \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < \infty.$$

Обоснуем некоторые разложения.

1. В окрестности точки $a=0$ запишем

$$(e^x)^{(n)}|_{x=0} = 1 \Rightarrow c_n = \frac{(e^x)^n|_{x=0}}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Производные $(e^x)^{(n)}$ существуют $\forall n$ и ограничены на всем интервале $(-M; M)$, следовательно, на всей числовой оси. Таким образом, достаточные условия разложимости в ряд Тейлора выполняются на всей числовой оси.

2. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left|(\cos x)^{(n)}\right| = \left|\cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)\right| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(\cos x)^{(n)} \Big|_{x=0} = \cos \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ (-1)^k, & n = 2k \end{cases} \Rightarrow c_n = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ \frac{(-1)^k}{n!}, & n = 2k \end{cases}.$$

3. $\sin x = -(\cos x)'$, $\forall x \in \mathbb{R}$, откуда следует стандартное разложение 3 из этого раздела.

4. Рассмотрим геометрический ряд $1+x+x^2+\dots+x^n+\dots=\frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$.

Заменим x на $-x$: $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n+\dots$

Учитывая, что $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, проинтегрируем от 0 до $x \in (-1; 1)$:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n) dx = \int_0^x dx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

6. По определению $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Подставим $-x$ в разложение 1.

Тогда слагаемые в разложении функции $\operatorname{ch} x$ в ряд Тейлора, соответствующие нечетным степеням x , взаимно уничтожаются, а четные складываются. С учетом деления пополам получим стандартное разложение 6, также верное на всей числовой оси.

7. $\operatorname{sh} x = (\operatorname{ch} x)'$. Тогда из 2-го свойства степенных рядов и стандартного разложения 6 следует стандартное разложение 7.

Примеры на разложение функции в ряд Тейлора. Сначала найдем коэффициенты разложения по определению. А именно, последовательно

вычисляя производные, найдем формулу для n -й (произвольной) производной заданной функции; подставляя в полученные выражения вместо переменной x ее заданное значение, вычислим коэффициенты c_n .

Пример 8. Разложить функцию $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$.

Решение. $f(x)$ имеет производные любого порядка в точке $x = 2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{2} \right), \\ f''(x) &= \left(\frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right)' = \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \cos \left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi x}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad \dots \\ f^{(n)}(x) &= \left(\frac{\pi}{4} \right)^n \sin \left(\frac{\pi x}{4} + n \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Найдем значения производных в точке $x = 2$:

$$\begin{aligned} f(2) &= 1; \quad f'(2) = 0; \quad f''(2) = -\left(\frac{\pi}{4} \right)^2; \quad f'''(2) = 0; \quad \dots; \\ f^{(n)}(2) &= \left(\frac{\pi}{4} \right)^n \sin \left(\frac{\pi}{2} (n+1) \right). \end{aligned}$$

Ряд Тейлора имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{4^{2n} (2n)!} (x-2)^{2n}$. Область сходимости (находится, например, по признаку Даламбера) $|x| < \infty$.

Пример 9. Разложить функцию $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$, используя стандартные разложения.

Решение.

$$\sin \frac{\pi x}{4} = \sin \frac{\pi \left((x-2) + 2 \right)}{4} = \sin \left(\frac{\pi (x-2)}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \text{ или } \sin \frac{\pi x}{4} = \cos \frac{\pi (x-2)}{4}.$$

Используем стандартное разложение

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}, \quad |t| < \infty,$$

приняв $t = \frac{\pi(x-2)}{4}$. В окрестности точки $x = 2$ имеем

$$\sin \frac{\pi x}{4} = \cos \frac{\pi(x-2)}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} (x-2)^{2n}, \quad |x| < \infty.$$

Область такая, так как $-\infty < t = \frac{\pi(x-2)}{4} < \infty$.

Пример 10. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Используя стандартное разложение

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1,$$

а также взяв $t = -x^2$, предварительно получим ряд Маклорена

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Как известно, степенной ряд можно почленно дифференцировать или интегрировать внутри области его сходимости, при этом радиус сходимости не изменится:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| \leq 1. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Записать стандартные разложения.
2. Изложить схему разложения функции в ряд Тейлора с помощью определения ряда.
3. Записать схему разложения функции в ряд Тейлора с помощью стандартных разложений.

Задачи для самостоятельной работы

В задачах 21–28 разложить функции в ряд Маклорена.

21. $\frac{1}{2+x}$. 22. $\arcsin x$. 23. $\frac{1}{\sqrt{e^x}}$.

24. $\sin^2 2x$. 25. 2^{-x^2} . 26. $(x^3 + 2\operatorname{ctgx}) \sin x$.

27. $\frac{2}{1-3x^2}$. 28. $\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+3x^2}}$.

В задачах 29–35 разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a . Указать область сходимости найденного ряда к своей сумме.

29. $f(x) = \ln x$, $a = 1$. 30. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}}$, $a = -3$.

31. $f(x) = \frac{1}{3+x}$, $a = -2$. 32. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$, $a = -2$.

33. $f(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$, $a = 1$. 34. $f(x) = \ln \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, $a = 1$.

35. $f(x) = \cos^2 x$, $a = \frac{\pi}{3}$.

6.5. Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям

Пример 11. Вычислить приближенное значение $\sqrt[3]{e}$, взяв 3 члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x) = e^x$.

Решение. Запишем стандартное разложение для $f(x) = e^x$ в ряд Маклорена:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

При $x = \frac{1}{3}$ разложение, включающее 3 слагаемых, имеет вид:

$$e^{\frac{1}{3}} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} \approx 1,39.$$

Пример 12. Вычислить $\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложим e^{-x^2} в ряд Маклорена:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \dots$$

Проинтегрируем полученное разложение:

$$\int_0^{1/4} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \dots \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \dots \right) \Big|_0^{1/4}.$$

Ряд знакочередующийся, поэтому для достижения необходимой точности достаточно взять столько слагаемых, чтобы первый отброшенный член ряда был меньше этой точности.

Поскольку $\frac{x^5}{10} \Big|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{1}{10 \cdot 4^5} = \frac{1}{10240}$, используем первые два слагаемых.

Округляя до 3-ей цифры после запятой, получим

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 3} \approx 0,245.$$

Пример 13. Найти 6 первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' - (1 + x^2)y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0) = -2$; $y'(0) = 2$.

Решение.

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2!} + \frac{y'''(0)x^3}{3!} + \\ + \frac{y^{(4)}(0)x^4}{4!} + \frac{y^{(5)}(0)x^5}{5!} + \Delta_5(0).$$

$y(0) = -2$; $y'(0) = 2$ – дано по условию.

Для нахождения производных более высокого порядка используем выражение для второй производной $y'' = (1 + x^2)y$ и уже найденные значения младших производных.

$$y''(0) = -2(1 + 0) = -2; y'''(0) = 2xy + y'(0)(1 + x^2) \Big|_{x=0, y=-2} = 2;$$

$$y^{(4)}(0) = -6; y^{(5)}(0) = 6.$$

Таким образом, $y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7}{60}x^5 + \dots$

Задачи для самостоятельной работы

36. Вычислить приближенное значение e , взяв 5 членов разложения в ряд Маклорена функции e^x , оценить погрешность.

37. Вычислить приближенное значение $\sin 18^\circ$, взяв 3 члена разложения в ряд Маклорена функции $\sin x$, оценить погрешность.

Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$38. \int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx. \quad 39. \int_0^{1/2} \sqrt{1+x^3} dx. \quad 40. \int_2^4 e^{1/x} dx.$$

41. Записать первые 6 членов разложения в степенной ряд общего решения дифференциального уравнения $y'' + xy' - x^2y = 0$.

42. Найти 3 первых члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения $y' = xy + \ln(x + y)$; $y(1) = 0$.

Ответы к задачам 6-го раздела

1. $(-1, 1)$. 3. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. 5. $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$. 7. $(-\infty, +\infty)$. 9. $(-\infty, 0]$.
11. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. 13. $[-10, 10)$. 15. $[-1, 1]$. 17. $(x+1) \ln(x+1) - x$.
19. $\frac{5x^2 - 2x + 1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$. 21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$, $|x| < 2$.
23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^n$, $|x| < \infty$. 25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n 2}{n!} x^{2n}$, $|x| < \infty$.
27. $2 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. 29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$, $0 < x \leq 2$.
31. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+2)^n$, $-3 < x < -1$. 33. $\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (x-1)^n$, $-1 < x < 3$.
35. $\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} \sin\left(\frac{2}{3}\pi + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n$, $|x| < \infty$. 37. 0,309 0.
39. 0,508. 41. $C_1 \left(1 + \frac{x^4}{12} + \dots\right) + C_2 \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots\right)$.

7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

7.1. Комплексные числа и операции над ними

Комплексным числом z называется упорядоченная пара $(x; y)$ действительных чисел; $x = \operatorname{Re} z$ — действительная часть, $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть числа z .

Два комплексных числа *равны* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$

Суммой комплексных чисел $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ называется комплексное число

$$z = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) \quad (7.1)$$

то есть $\operatorname{Re} (z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} (z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. *Разностью комплексных чисел* $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ называется комплексное число $z = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.

Произведением комплексных чисел $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ называется комплексное число

$$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (7.2)$$

Комплексное число $z = (x; 0)$ с мнимой частью, равной нулю, можно отождествить с действительным числом x . Легко проверить, что множество действительных чисел *замкнуто* относительно определенных выше операций сложения и умножения комплексных чисел, то есть определенные формулами (7.1) и (7.2) операции над действительными числами опять приводят к действительным числам. Отсюда следует, что действительные числа образуют подмножество множества комплексных чисел $\mathbb{C}$. Комплексные числа с нулевой действительной частью $z = (0; y)$ называются *мнимыми числами*.

Мнимая единица есть комплексное число $i = (0; 1)$. Покажем, что $i^2 = -1$.

Действительно, $i^2 = (0; 1) \cdot (0; 1) \stackrel{(2)}{=} (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1; 0)$.

Из (7.1) и (7.2) получаем

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; y) = (x; 0) + (0; 1) \cdot (y; 0) = x + iy.$$

Эта алгебраическая форма $z = x + iy$ записи комплексного числа лучше всего подходит для сложения и вычитания комплексных чисел.

Упражнение 1*. Доказать, что множество комплексных чисел с определенными выше операциями сложения и умножения образует поле.

Роли нуля и единицы играют соответственно числа $(0; 0)$ и $(1; 0)$.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным с комплексным числом $z = x + iy$.

Пример 1. Доказать свойства операции сопряжения:

а) $\overline{(\bar{z})} = z$; б) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$; в) $z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im} z$; г) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Решение.*

$$\begin{aligned} \text{г) } \overline{z_1 + z_2} &= \overline{x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2} = \overline{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)} = \\ &= x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

Частное $\frac{z_1}{z_2}$ двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$

($z_2 \neq 0$) есть комплексное число z такое, что $z_1 = z \cdot z_2$.

Формула для нахождения частного получается путем умножения числителя и знаменателя дроби z_1/z_2 на число, сопряженное со знаменателем z_2 ,

$$z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_1^2 + x_2^2}$$

или

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + x_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (7.3)$$

* Доказательства свойств а), б), в) элементарны и выполняются обучающимися самостоятельно.

Заметим, что домножение числителя и знаменателя на сопряженное со знаменателем число является стандартным приемом для получения записи дроби в алгебраической форме.

Упражнение 2. Доказать: а) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$; б) $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$.

Пример 2. Пусть $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 5 - 4i$. Вычислить:

а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение:

а) $z_1 + z_2 = 3 + 2i + 5 - 4i = 3 + 5 + i \cdot (2 - 4) = 8 - 2i$;

б) $z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (5 - 4i) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-4) + i \cdot (3 \cdot (-4) + 5 \cdot 2) =$
 $= 15 + 8 + i(-12 + 10) = 23 - 2i$;

в) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{5 - 4i} = \frac{(3 + 2i)(5 + 4i)}{(5 - 4i)(5 + 4i)} = \frac{3 \cdot 5 + 2i \cdot 5 + 3 \cdot 4i + 2i \cdot 4i}{5^2 - (4i)^2} =$
 $= \frac{15 + 8i^2 + 10i + 12i}{25 - (-16)} = \frac{7}{41} + i \cdot \frac{22}{41}$.

По формуле (7.3) получим это же число.

Определим *модуль* комплексного числа $z = x + iy$ по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Упражнение 3. Доказать свойства модуля:

а) $|z| \geq 0$;

б) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; в) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; г) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ($z_2 \neq 0$);

д) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; е) $|z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2||$.

Пример 3. Доказать: а) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$; б) $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$.

Решение:

а) $z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) =$
 $= x \cdot x + iy \cdot x + x \cdot (-iy) + iy \cdot (-iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$;

$$б) \frac{1}{z} = \frac{z}{z \cdot z} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{y}{x^2+y^2}.$$

7.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Возведение в степень и извлечение корня. Комплексное число $z = x + iy$ можно рассматривать как точку с координатами $(x; y)$ на плоскости OXY или вектор $\vec{z}$ с началом в точке $(0; 0)$ и концом в точке $(x; y)$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* C . Нуль на комплексной плоскости есть число $0 = (0; 0)$.

Рассмотрим точку $z = (x; y)$. Величина $|z|$ равна длине вектора $\vec{z}$; модуль разности чисел $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ равен расстоянию между этими точками: $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Геометрически сложение и вычитание двух комплексных чисел можно представить как операцию сложения или вычитания двух векторов.

Главное значение аргумента комплексного числа z есть угол φ ($\varphi \in (-\pi; \pi]$ или $\varphi \in [0; 2\pi)$) между положительным направлением вещественной оси и вектором $\vec{z}$, обозначается также $\arg z$, определен для любого комплексного числа, не равного нулю. Находится по формулам:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg(y/x), & x > 0; \\ \arctg(y/x) + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctg(y/x) - \pi, & x < 0, y < 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

Упражнение 4. Доказать равенства (4).

Аргумент комплексного числа z : $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, k \in Z$.

Пример 4. Найти модули и аргументы комплексных чисел:

а) -3 ; б) $4i$; в) $2 + 3i$; г) $-2 + 3i$.

Решение:

а) $|-3| = 3$, $\arg(-3) = \pi$, так как -3 лежит на отрицательной части вещественной оси;

б) $|4i| = 4$, $\arg(4i) = \frac{\pi}{2}$, поскольку $4i$ лежит на положительной части OY ;

в) $|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, $\arg(2 + 3i) = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$, так как $x = 2 > 0$ (7.4);

г) аналогично $|-2 + 3i| = \sqrt{13}$, $\arg(-2 + 3i) = \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{2}\right) + \pi = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi$,

поскольку $x = -2 < 0$, $y = 3 > 0$ (см. (7.4)).

Представим запись комплексного числа в *тригонометрической форме*

$$z = |z| \cdot (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)). \quad (7.5)$$

Далее по умолчанию будем использовать обозначения $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Соответственно (7.5) можно представить в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (7.6)$$

Используя формулу Эйлера, запишем (пока формально) комплексное число в *показательной (экспоненциальной) форме*: $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

Упражнение 5. Доказать: $|e^{i\alpha}| = 1$ для любого $\alpha \in R$.

Сопряженное с z комплексное число есть $\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = e^{-i\varphi}$.

Представление комплексных чисел в тригонометрической или показательной форме удобно для их умножения, деления и возведения в степень.

Упражнение 6.

Пусть $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Доказать:

$$\text{а) } z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\text{б) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, аргументы складываются; при делении комплексных чисел их модули делятся друг на друга, аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.

Формула Муавра (степень комплексного числа):

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}. \quad (7.7)$$

Упражнение 7*. Используя индукцию по показателю степени n , доказать формулу (7.7).

Пример 5. Записать в алгебраической и тригонометрической форме:

а) $(1+i\sqrt{3})^4$; б) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } |1+i\sqrt{3}|=2 \Rightarrow (1+i\sqrt{3})^4 &= \left(2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^4 = \\ &= \left(2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right)^4 = 16 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right) = \\ &= 16 \left(-\frac{1}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -8 - i \cdot 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^5 = \left(\frac{2i}{2}\right)^5 = i = 0 + i \sin \frac{\pi}{2}.$$

Пусть $\omega^n = z$. Тогда ω есть корень n -ой степени из комплексного числа z , который находится по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \frac{\arg z + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (7.8)$$

При этом получаются n различных значений корня n -ой степени из числа z .

Пример 6. Найти все значения корней: а) $\sqrt{3+4i}$; б) $\sqrt[4]{-1}$.

Решение:

$$\text{а) } |3+4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \arg(3+4i) = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

По формуле (7.8) получаем два значения корня:

$$\sqrt{3+4i} = 5 \cdot \left(\cos \left(\frac{\operatorname{arctg} 4/3}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\operatorname{arctg} 4/3}{2} \right) \right) = 2 + i$$

и

$$\begin{aligned}\sqrt{3+4i} &= 5 \cdot \left(\cos \left(\frac{\operatorname{arctg} 4/3}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\operatorname{arctg} 4/3}{2} + \pi \right) \right) = \\ &= -5 \cdot \left(\cos \left(\frac{\operatorname{arctg} 4/3}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\operatorname{arctg} 4/3}{2} \right) \right) = -(2+i);\end{aligned}$$

б) $|-1|=1$, $\arg(-1)=\pi$. По формуле (7.8) получаем

$$\sqrt[4]{-1} = |-1| \cdot e^{\frac{i \arg(-1) + 2\pi k}{4}} = e^{\frac{i \pi + 2\pi k}{4}} \quad (k=0, 1, 2, 3).$$

Значит, $\sqrt[4]{-1}$ принимает четыре различных значения:

$$\begin{aligned}z_0 &= e^{i \frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i), \\ z_1 &= e^{i \frac{3\pi}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i), \\ z_2 &= e^{i \frac{5\pi}{4}} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (1+i), \\ z_3 &= e^{i \frac{7\pi}{4}} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i).\end{aligned}$$

Пример 7. Даны три вершины параллелограмма z_1 , z_2 и z_3 . Найти четвертую вершину z_4 , противоположную вершине z_2 .

Решение. Отрезки с концами в точках z_1 и z_2 , z_3 и z_4 являются противоположными сторонами параллелограмма. Тогда $\overline{z_4} - \overline{z_3} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$. Отсюда $z_4 = z_1 - z_2 + z_3$.

Пример 8. Решить уравнение $\bar{z} = z^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$).

Решение. Запишем в показательной форме числа $z = re^{i\varphi}$ и $\bar{z} = re^{-i\varphi}$.

Уравнение примет вид $re^{-i\varphi} z = r^{n-1} e^{i(n-1)\varphi}$, откуда следует, что $r^{n-2} e^{in\varphi} = 1$ или $r = 0$. Из первого равенства с учетом $|e^{in\varphi}| = 1$ получим выражения $r = 1$ и $n\varphi = 2\pi k$ соответственно для модуля и аргументов первых

n корней уравнения: $z_k = e^{i \frac{2\pi k}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Из второго равенства получаем последнее значение корня $z = 0$.

Геометрически множество решений уравнения есть центр и вершины правильного n -угольника, вписанного в единичную окружность с центром в начале координат и одной из вершин в точке $z = 1$.

Пример 9. Доказать тождество $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ и выяснить его геометрический смысл.

Решение. В левой части выражения используем упражнения 2(а) и 3(д), раскроем скобки и приведем подобные. В результате получим

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} = \\ &= |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим параллелограмм с вершинами в начале координат $(0, 0)$ и в точках z_1 , z_2 и $z_1 + z_2$. Векторы $\overline{z_1}$ и $\overline{z_2}$ образуют смежные стороны параллелограмма, а векторы $\overline{z_1 + z_2}$ и $\overline{z_1 - z_2}$ — его диагонали. Таким образом, исходное равенство является алгебраическим выражением известной из школьного курса геометрии теоремы: сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

7.3. Множества на комплексной плоскости

1. Множества $\{z : \operatorname{Re} z = a, a \in R\}$ и $\{z : \operatorname{Im} z = b, b \in R\}$ есть соответственно прямая $x = a$, параллельная оси OY , и прямая $y = b$, параллельная оси OX .

2. Множество $\{z : |z - a| = R\}$ есть окружность с центром в точке a радиуса R .

3. Множество $\{z : \arg z = \alpha\}$ есть луч с выколотым началом, исходящий из точки $(0; 0)$ под углом α с положительным направлением оси OX .

Пример 10. Определить семейства линий на плоскости, удовлетворяющие соотношениям: а) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = C$; б) $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = C, -\infty < C < \infty$.

Решение. Запишем в алгебраической форме:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

а) рассмотрим уравнение $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} = C$.

Пусть $C = 0$. Тогда $x = 0$ и $x^2 + y^2 \neq 0$. Решением уравнения является множество

$$\{z : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)\},$$

то есть мнимая ось с выколотым началом координат.

Пусть $C \neq 0$. Тогда $x^2 + y^2 - \frac{1}{C}x = 0$. Выделив полный квадрат по x , получим $\left(x - \frac{1}{2C}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4C^2}$. Это параметрическое уравнение семейства окружностей с центром в точке $\left(\frac{1}{2C}; 0\right)$ и радиусом $R = \frac{1}{2|C|}$, с выколотым началом координат;

б) перейдем к уравнению $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = \frac{-y}{x^2+y^2} = C$.

Аналогично п. а) при $C = 0$ получим $y = 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$. Решением уравнения является множество $\{z : \operatorname{Re} z \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty), \operatorname{Im} z = 0\}$ – действительная ось с выколотым началом координат.

Пусть $C \neq 0$, тогда $x^2 + y^2 + \frac{1}{C}y = 0$.

Получим $x^2 + \left(y + \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}$ – семейство окружностей с центром в точке $\left(0; -\frac{1}{2C}\right)$ и радиусом $R = \frac{1}{2|C|}$, с выколотым началом координат.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дано: $z_1 = -5 + i$, $z_2 = 2 + 3i$. Вычислить:

а) $z_1 - z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Найти модули и аргументы комплексных чисел:

а) $-2, 5i$; б) $1 + i$; в) $-2 - 5i$; г) $a + bi$ ($a \neq 0$).

3. Записать в алгебраической форме числа: а) $(\sqrt{3} - i)^5$; б) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

4. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[3]{4i}$; в) $\sqrt{1-i}$.

5. Исходя из геометрических соображений, доказать неравенство

$$\left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq |\arg z|.$$

6. Найти вершины правильного n -угольника, если его центр находится в точке $z = 0$, а одна из вершин z_1 известна.

7. При каком условии три попарно не совпадающие точки лежат на одной прямой?

8. При каком условии три попарно не совпадающие точки лежат на одной окружности?

Выяснить геометрический смысл соотношений:

9. а) $\operatorname{Im} z \geq a$; б) $\operatorname{Re} z \leq b$; в) $a < \operatorname{Re} z < b$ ($a < b$).

10. а) $|z - a| \leq R$; б) $|z - a| > R$.

11. $\alpha < \arg z < \beta$, где $0 < \alpha < \beta < \pi$.

12. $|z - a| = |z - b|$ ($a \neq b$).

Найти множества точек z на комплексной плоскости, удовлетворяющих соотношениям:

13. $\{ \operatorname{Im} z \geq a, \operatorname{Re} z \leq b \}$. 14. $\{ \alpha < \arg z < \beta, |z| < R \}$.

15. $\left| \frac{z+1+i}{z-1-i} \right| = 1$. 16. $|z-2| - |z+2| > 3$.

$$17. \operatorname{Re} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \alpha \operatorname{Re} z \quad (\alpha > 1).$$

$$18. \text{ а) } \operatorname{Im} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0; \quad \text{ б) } \operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0.$$

$$19. |z + 1| < 2 |z - 1|. \quad 20. \arg \frac{z - z_1}{z - z_2} = \alpha \quad (-\pi < \alpha < \pi).$$

7.4. Сфера Римана. Топология и сходимость на комплексной плоскости

Сфера Римана. В трехмерном пространстве R^3 с прямоугольными декартовыми координатами $(\xi; \eta; \zeta)$ рассмотрим *сферу Римана*

$$S = \left\{ (\xi; \eta; \zeta) \in R^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

с центром в точке $\left(0, 0, \frac{1}{2} \right)$ и радиусом $\frac{1}{2}$. Точка $N = (0, 0, 1)$ называется *северным полюсом* сферы Римана.

Теперь в R^3 отождествим комплексную плоскость C с плоскостью $O\xi\eta$, при этом оси ξ и η совпадают соответственно с осями OX и OY .

Рассмотрим отображение $\sigma : C \rightarrow S \setminus N$, заданное по следующему закону: каждой точке $z = x + iy$ комплексной плоскости сопоставим точку $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ – пересечение сферы Римана с лучом, соединяющим точку z с северным полюсом сферы N . Это отображение называется *стереографической проекцией*.

Упражнение 8. Вывести формулы стереографической проекции:

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}; \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}; \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}.$$

Упражнение 9. Доказать, что стереографическая проекция σ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками комплексной плоскости C и сферы Римана с выколотым северным полюсом $S \setminus N$.

Упражнение 10. Вывести формулы обратного к стереографической проекции отображения $\sigma^{-1} : S \setminus N \rightarrow C$, при котором $x = \frac{\xi}{1-\zeta}$; $y = \frac{\eta}{1-\zeta}$.

Упражнение 11. Доказать, что стереографическая проекция σ является гомеоморфизмом C на $S \setminus N$.

Введем новый объект – *бесконечно удаленную точку* $z = \infty$, которую будем считать прообразом северного полюса N при стереографической проекции. Такую пополненную плоскость $C \cup \infty$ будем называть *замкнутой комплексной плоскостью* и обозначать $\bar{C}$. Продолжая стереографическую проекцию на расширенную комплексную плоскость, получим взаимно однозначное отображение $\bar{\sigma} : \bar{C} \rightarrow S$.

Упражнение 12*. Доказать, что стереографическая проекция $\bar{\sigma}$ является гомеоморфизмом $\bar{C}$ на S .

Упражнение 13. Показать, что образ на сфере Римана любой прямой из комплексной плоскости проходит через северный полюс N .

Упражнение 14. Показать, что отображение σ^{-1} переводит окружность на сфере Римана, не проходящую через северный полюс N , в окружность на комплексной плоскости.

Упражнение 15. На сколько частей две различные точки делят прямую:

а) в C ; б) в $\bar{C}$?

Топология и сходимость на комплексной плоскости. Введем обозначения:

$C(z_0; r) = \{z \in C : |z - z_0| = r, r > 0\}$ – *окружность* с центром в точке z_0 и радиусом r ;

$D(z_0; r) = \{z \in C : |z - z_0| < r, r > 0\}$ – *открытый круг* с центром в точке z_0 и радиусом r ;

$\bar{D}(z_0; r) = \{z \in C : |z - z_0| \leq r, r > 0\}$ – *замкнутый круг* с центром в точке z_0 и радиусом r .

На комплексной плоскости можно ввести *метрику*, в которой расстояние между точками $z_1 = (x_1; y_1)$, $z_2 = (x_2; y_2)$ определяется по формуле

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Заданная таким образом метрика (она называется *евклидовой*) определяет естественную *топологию* на C , в которой база окрестностей произвольной точки $z_0 \in C$ задается открытыми кругами с центром в точке z_0 :

$$U_\varepsilon(z_0) = D(z_0; \varepsilon) = \{z \in C : |z - z_0| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}.$$

Проколотой окрестностью точки $z_0 \in C$ называется множество

$$\dot{U}_\varepsilon(z_0) = U_\varepsilon(z_0) / \{z_0\} = \{z \in C : 0 < |z - z_0| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}.$$

Точка z_0 называется *внутренней* точкой множества D , если она содержится в D вместе с некоторой своей окрестностью.

Точка z_0 называется *предельной точкой* множества D , если в любой окрестности точки z_0 имеются точки из D , отличные от z_0 . Заметим, что предельная точка множества может не принадлежать этому множеству.

Точка z_0 называется *граничной точкой* множества D , если в любой окрестности точки z_0 имеются как точки, принадлежащие D , так и точки, не принадлежащие D . Совокупность всех граничных точек множества D называется *границей* этого множества и обозначается ∂D .

Множество называется *открытым*, если оно содержит все свои внутренние точки.

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. *Замыканием* $\bar{D}$ называется объединение множества D с множеством его предельных точек.

Упражнение 16. Доказать, что граница множества всегда является замкнутым множеством.

Открытое (замкнутое) множество называется *связным*, если его нельзя разбить на два открытых (соответственно замкнутых) множества, не имеющих общих точек. Связное открытое множество называется *областью*.

Область $G \in \bar{C}$ называется *n -связной областью*, если ее граница состоит из n связных замкнутых множеств.

Ориентация границы области всегда выбирается таким образом, чтобы область оставалась слева при ее обходе вдоль границы (*положительное направление обхода* – против часовой стрелки).

Покажем, что $\bar{C}$ является метрическим пространством.

Сферической метрикой в $\bar{C}$ называется метрика, в которой расстояние определяется по формуле $s(z_1, z_2) = |\sigma(z_2) - \sigma(z_1)|$, $z_1 \in C, z_2 \in C$. Здесь $|\sigma(z_2) - \sigma(z_1)|$ находится как расстояние в R^3 между точками сферы Римана $\sigma(z_1)$ и $\sigma(z_2)$.

Упражнение 17. Пусть $z_1 \in C$ и $z_2 \in C$. Показать, что

$$s(z_1, z_2) = \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

Упражнение 18*. Проверить, что функция $s(z_1, z_2)$ удовлетворяет аксиомам метрики.

Упражнение 19*. Найти расстояние $s(z; \infty)$ в сферической метрике от точки $z \in C$ до ∞ и доказать: $s(z; \infty) \leq 1$.

Расстояние от точки z_0 до множества G на комплексной плоскости определяется по формуле $\text{dist}(z_0; G) = \inf_{g \in G} |z_0 - g|$.

Расстояние между множествами B и G находится по формуле

$$\text{dist}(B; G) = \inf_{b \in B; g \in G} |b - g|.$$

Пример 11. Найти на сфере Римана образы действительной и мнимой осей.

Решение. Пусть $z = x + i0$ лежит на действительной оси. Используя формулы стереографической проекции, получим выражения для координат образа точки z $\xi = \frac{x}{1+x^2}$; $\eta = 0$; $\zeta = \frac{x^2}{1+x^2}$, из которых следует, что образом действительной оси на сфере Римана является множество

$$P = \left\{ (\xi; \eta; \zeta) \in R^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}, \eta = 0 \right\}$$

– большая окружность на сфере Римана, лежащая в плоскости $\eta = 0$. (Аналогично образом мнимой оси является большая окружность на сфере Римана, лежащая в плоскости $\{\xi = 0\}$, – показать самостоятельно.)

Пример 12. Найти на S образ окружности

$$O = S \cap P, P = \{ (\xi; \eta; \zeta) : \zeta = a, 0 < a < 1 \}.$$

Решение. Пусть точка $S(\xi, \eta, \zeta) \in S \cap P$. Тогда координаты этой точки

удовлетворяют системе уравнений
$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}; \\ \zeta = a \end{cases}$$
 или

$$\xi^2 + \eta^2 + a^2 - a = 0. \quad (7.9)$$

Пусть $z = (x, y)$ – образ точки $S(\xi, \eta, \zeta)$ на комплексной плоскости.

Используя формулы из упражнения 10, где $\zeta = a$, запишем $x = \frac{\xi}{1-a}$

и $y = \frac{\eta}{1-a}$. С учетом равенства (7.9) получим

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-a)^2} = \frac{a - a^2}{(1-a)^2} = \frac{a}{1-a}.$$

Образом окружности O на комплексной плоскости является окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{\frac{a}{1-a}}$.

Пример 13. Найти предельные точки, замыкание и границу множества

$$D = \left\{ z = \frac{p}{m} + i \frac{q}{n}; p, q, n \in Z \right\}.$$

Является ли множество D открытым, замкнутым или областью?

Решение. Как известно, в любой окрестности произвольного рационального числа содержится бесконечно много иррациональных чисел; это означает, что R является множеством предельных точек для Q .

Возьмем произвольное $d_0 = \left(\frac{p_0}{m_0}; \frac{q_0}{n_0} \right) \in D$. Для любого $\varepsilon > 0$ в $\varepsilon/2$ -окрестности рационального числа $\frac{p_0}{m_0}$ на действительной оси найдется хотя бы одно иррациональное число, обозначим его x_0 ; аналогично в $\varepsilon/2$ -окрестности числа $\frac{q_0}{n_0}$ на мнимой оси найдется хотя бы одно иррациональное число, обозначим его y_0 . Тогда $z_0 = x_0 + iy_0 \in C$ и по теореме Пифагора z_0 попадает в ε -окрестность d_0 . В силу произвольности выбора чисел d_0 и ε заключаем, что множеством предельных точек D является R^2 или, что в данном случае то же самое, вся комплексная плоскость C .

Понятно, что $\bar{D} = C$. Аналогичными рассуждениями получаем, что $\partial D = C$ (провести эти рассуждения самостоятельно).

Используя определения, легко проверить, что множество D не является ни открытым, ни замкнутым; не является оно и областью.

Пример 14. Доказать или опровергнуть утверждение: расстояние между любыми двумя замкнутыми непересекающимися множествами на комплексной плоскости больше нуля.

Решение. Рассмотрим множества $B = \{z : \operatorname{Re} z \in (-\infty; \infty), \operatorname{Im} z = 0\}$ и $D = \left\{ z = x + iy : x \in (0; \infty), y = \frac{1}{x} \right\}$. Оба множества замкнуты (доказательство провести самостоятельно) и не пересекаются. Расстояние d_x между $t = (x, 0) \in B$, $x > 0$ и $\tau = \left(x; \frac{1}{x} \right) \in D$ равно $\frac{1}{x}$, то есть $d_x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда из двойного неравенства $0 \leq \operatorname{dist}(B; G) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} d_x$, которое легко получить из определения расстояния между множествами, вытекает, что $\operatorname{dist}(B; G) = 0$.

Мы привели контрпример к утверждению задачи и тем самым доказали, что оно неверно.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть точкам z_1, z_2 и $z = z_1 + z_2$ комплексной плоскости соответствуют точки ω_1, ω_2 и ω на сфере Римана. Выразить координаты через координаты ω_1 и ω_2 .

2. Найти на сфере Римана образ окружности $C(0; r) = \{z : |z| = r\}$.

3. Дать геометрическое описание множеств на сфере Римана, являющихся образами множеств на комплексной плоскости:

а) $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$; б) $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$; в) $\{z : |z| > 1\}$; г) $\{z : |z| < 1\}$.

4. Доказать, что отличные от начала координат и северного полюса N точки S_1 и S_2 сферы Римана диаметрально противоположны тогда и только тогда, когда их прообразы на комплексной плоскости z_1 и z_2 связаны соотношением $z_1 \cdot z_2 = -1$.

5. Найти предельные точки, замыкание и границу $D = \{z \in C : |z^2 - 1| < 1\}$.

Является ли множество D открытым, замкнутым или областью?

6. Пусть z_0 является предельной точкой множества B и внутренней точкой множества D . Доказать, что z_0 является предельной точкой множества $B \cap D$.

7. Пусть $\operatorname{dist}(z_0; G) = 0$. Доказать, что $z_0 \in G$ или является предельной точкой множества (или верно и то, и другое).

8. Доказать: множество G замкнуто тогда и только тогда, когда предел каждой сходящейся последовательности точек G принадлежит G .

9. Показать, что предел сходящейся последовательности точек множества G не всегда является предельной точкой данного множества.

10. Пусть G и H – непустые непересекающиеся замкнутые множества, G – ограничено. Доказать, что расстояние между G и H положительно.

8. РЯДЫ ФУРЬЕ

8.1. Тригонометрические ряды.

Ряд Фурье 2π -периодической функции

Тригонометрическим рядом называется выражение

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (8.1)$$

Числа $a_n, b_n \in R$ называются *коэффициентами тригонометрического ряда*. На интервале сходимости тригонометрический ряд есть 2π -периодическая функция. Сумма тригонометрического ряда $f(x)$ является непрерывной функцией во всех точках интервала сходимости.

Найдем выражения для коэффициентов тригонометрического ряда.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ – 2π -периодическая, непрерывная на $[-\pi; \pi]$ или имеющая конечное число точек разрыва первого рода функция. Тогда разложение $f(x)$ в тригонометрический ряд существует, и его коэффициенты равны:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (8.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.3)$$

Выражения (8.2), (8.3) вытекают из равенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n; \end{cases} \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n; \end{cases} \quad m, n = 1, 2, \dots \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots; \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right. , \quad (8.4)$$

которые легко проверить.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi; \pi]$. Тогда существует интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ и с учетом (8.4) получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx = \pi a_0,$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx \cos nx)dx = \\ &= \{\text{согласно (2)}\} = \pi a_n \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx. \end{aligned}$$

Аналогично используя разложение $f(x)$ в тригонометрический ряд, запишем $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \pi b_n$, откуда вытекает $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$,

что

и требовалось доказать. Коэффициенты a_n и b_n , найденные по формулам (8.2), (8.3) есть *коэффициенты Фурье* для функции $f(x)$.

Ряд Фурье для функции $f(x)$ — это тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье для функции $f(x)$. Если ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ во всех точках ее непрерывности, то говорят, что $f(x)$ *раскладывается в ряд Фурье*.

Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье. Пусть $f(x)$ монотонна на каждом из промежутков, на который разбивается отрезок $[a; b]$, и этих промежутков конечное число. Тогда $f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на $[a; b]$.

Теорема 2 (Дирихле). Пусть $f(x)$ 2π -периодическая, кусочно-монотонная и кусочно-непрерывная на $[-\pi; \pi]$, причем имеет точки разрыва только первого рода.

Тогда:

1. Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится при всех значениях x , причем в точках непрерывности его сумма равна $f(x)$, а в точках разрыва $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$.

2. Ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится на любом отрезке, лежащем внутри интервала непрерывности функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-гладкой* на $[a; b]$, если $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на $[a; b]$, или имеют конечное число разрывов I рода.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ 2π -периодическая, кусочно-гладкая на $[-\pi; \pi]$. Тогда имеют место утверждения 1 и 2 предыдущей теоремы.

8.2. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Свойства четных и нечетных функций

$$1. \int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) - \text{четная}; \\ 0, & f(x) - \text{нечетная}. \end{cases}$$

2. Произведение $f(x) \cdot g(x)$ – четная функции, если $f(x)$ и $g(x)$ одновременно являются четными или нечетными функциями.

3. Произведение четной функции и нечетной есть нечетная функция.

Эти свойства сразу следуют из определения четной и нечетной функции.

Пусть $f(x)$ – четная, 2π -периодическая, ее коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \xrightarrow{2,1} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \xrightarrow{3,1} 0.$$

Для четной 2π -периодической функции коэффициенты разложения в ряд Фурье имеют вид

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.5)$$

Аналогично, для нечетной 2π -периодической функции коэффициенты Фурье таковы:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad a_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.6)$$

Запишем собственно разложение в ряд Фурье для четной, 2π -периодической функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (8.7)$$

коэффициенты a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) находятся по формуле (8.5).

Разложение в ряд Фурье для нечетной 2π -периодической функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (8.8)$$

коэффициенты b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) находятся по формуле (8.6).

Пример 1. Функция $f(x)$ 2π -периодическая и на $[-\pi; \pi]$ имеет место равенство $f(x) = x^3$. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье.

Решение. Достаточно получить разложение на отрезке $[-\pi; \pi]$ и продолжить на всю ось как периодическую функцию. Функция $f(x) = x^3$ нечетная, поэтому разложение находим по формуле (8.8), коэффициенты найдем по формуле (8.6). Вычислим коэффициенты Фурье:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx, n = 1, 2, \dots; f(x) = x^3;$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^3 \sin nxdx = \left[\begin{array}{l} U = x^3; dU = 3x^2 dx \\ dV = \sin nxdx; V = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-x^3 \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 3x^2 \frac{\cos nx}{n} dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(-\pi^3 \frac{\cos \pi n}{n} + \frac{3}{n} \int_0^{\pi} x^2 \cos nxdx \right) = \\ &= \left[\begin{array}{l} U = x^2; dU = 2xdx \\ dV = \cos nxdx; V = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\pi^3 \frac{\cos \pi n}{n} + \frac{3}{n} \left\{ \underbrace{x^2 \frac{\sin nx}{n}}_{=0} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nxdx \right\} \right) = \\ &= \left[\begin{array}{l} U = x; dU = dx \\ dV = \sin nxdx; V = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\pi^3 \frac{\cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2} \left\{ -\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nxdx \right\} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\pi^3 \frac{\cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2} \left\{ -\frac{\pi \cos \pi n}{n} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right\} \right) = \\ &= (-1)^n \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \cos \pi n \cdot \left(-\pi^2 + \frac{6}{n^2} \right) = \frac{2}{n} (-1)^n \left(\frac{6}{n^2} - \pi^2 \right). \\ x^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n} \left(\frac{6}{n^2} - \pi^2 \right) \sin nx; x \in [-\pi; \pi]. \end{aligned}$$

8.3. Ряд Фурье функции общего вида

Разложение в ряд Фурье функции с произвольным периодом.
Пусть $f(x)$ – периодическая с периодом $T = 2l$, на отрезке длины $2l$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.

Тогда ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right);$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Для четной функции произвольного периода $2l$ разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + \frac{a_0}{2}; \quad a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Для нечетной функции с периодом $2l$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Разложения в ряд Фурье непериодической функции. Пусть функция $f(x)$ на $[a; b]$ непериодическая. Рассмотрим $[C; C + 2T] \supset [a; b]$, $2T > |b - a|$. На отрезке $[C; C + 2T] \setminus [a; b]$ продолжим $f(x)$ кусочно-гладко.

Тогда на всю числовую ось функцию $f(x)$ можно продолжить как периодическую с периодом $2T$ функцию $g(x): g(x) = f(x), \forall x \in [a; b]$. Функция $g(x)$ раскладывается в ряд Фурье. Таких функций бесконечно много, но на $[a; b]$ разложение $g(x)$, то есть $f(x)$, в ряд Фурье единственное.

Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на отрезке $[a; b]$, называются *ортогональными*,

если $\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = 0$.

Набор функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, определенный на $[a; b]$, называется *ортogonalной системой* (функций), если любые две функции из этого набора попарно ортогональны:

$$\int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = 0, \text{ если } j \neq k; j, k = 1, 2, \dots$$

Система функций называется *ортонормированной* (ортонормальной), если $\int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$.

Рядом Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется ряд вида $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, коэффициенты a_n имеют вид

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx}{\int_a^b (\varphi_n(x))^2 dx}.$$

Замечания.

1. Разложения по ортогональной системе функций на конечном отрезке возможны для любой функции $f(x)$, которая является непрерывной на $[a; b]$ или имеет там конечное число точек разрыва первого рода.

2. Для ортонормированной системы функций коэффициенты разложения в ряд Фурье имеют вид

$$a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx.$$

3. Если ортогональная система, состоящая из конечного числа функций, образует базис данного пространства, то и ряд Фурье будет состоять из конечного числа слагаемых.

8.4. Некоторые приложения рядов Фурье.

Сигналы и Фурье-анализ

Сигналом называется величина, отражающая текущее состояние физической системы. Сигналы есть функции, заданные в физических координатах, например, функции времени $x(t)$, функции $I(x, y)$, зависящие от декартовых координат на плоскости. *Аналоговые (континуальные)* сигналы описываются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями $x(t)$. *Дискретные сигналы* имеют являются прерывистыми и имеют вид $x_{\text{д}}(t) = x(t) \cdot y(t)$, где $y(t)$ – так называемая функция дискретизации. *Цифровой сигнал* есть сигнал, который может быть представлен в последовательность чисел, имеющих ограниченное количество разрядов.

Электрическими сигналами связи называются меняющиеся со временем сигналы напряжения или тока. При разработке систем связи необходимо описывать сигналы также в частотной области, где описание сигнала называется его спектром.

Для построения системы связи нужно описать, какие частоты занимает сигнал, а какие остаются не занятыми им. Частотными спектральными характеристиками можно описать как сами сигналы, так и электрические схемы. Один из способов описания сигнала – задание его амплитуды и фазы как функций частоты.

Спектральным параметром схемы называется передаточная функция (частотная характеристика), связывающая выход схемы с ее входом.

Пусть наблюдается некоторый физический процесс с периодом T . Зададим *круговую частоту* $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. $\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ – число циклов (осцилляций), возникающих за единицу времени.

Разложение в ряд Фурье функции $f(x)$, определенной на интервале $-L \leq x \leq L$ с периодом $T = 2L$, имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x),$$

где $\omega_0 = \frac{\pi}{L}$, $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$ – *среднее значение сигнала на периоде*;

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\omega_0 x) dx, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(n\omega_0 x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Частота $n\omega_0$ называется *n-й гармоникой* сигнала.

Обозначим $A_n = \left(a_n^2 + b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_n = \arctg \left(-\frac{b_n}{a_n} \right).$

Тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 x + \varphi_n)$, где $A_n, n\omega_0, \varphi_n$ называются

соответственно *амплитудой, угловой частотой и начальная фазой n-й гармоники*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие посвящено рассмотрению основных понятий дифференциального исчисления и интегрального исчисления функций нескольких переменных, обыкновенных дифференциальных уравнений первого и более высоких порядков, числовых и степенных рядов.

В совокупности с пройденными ранее курсами линейной алгебры и аналитической геометрии, основ математического анализа функций одной переменной, эти разделы формируют у обучающихся представление о математических моделях, которые возникают при изучении специальных предметов и в профессиональной деятельности, методах их построения, верификации и исследования. Эти разделы также являются прочным основанием для изучения математического программирования, теории вероятностей и математической статистики, методов оптимизации и приближенных вычислений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бегматов А. Х. Комплексные числа и функции : учеб.-метод. пособие. – Новосибирск : НГУ, 2009. – 46 с.
2. Бегматов А. Х. Математический анализ : учеб. пособие. Ч. 1 : Функции одной переменной. – Новосибирск : НГТУ, 2016. – 152 с.
3. Бегматов А. Х. Математика (математический анализ и дифференциальные уравнения): функции одной переменной : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2019. – 166 с.
4. Бегматов А. Х. Математика: линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2020. – 102 с.
5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие для вузов. – 22-е изд., перераб. – СПб. : Профессия, 2007. – 432 с.
6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Решение типичных и трудных задач : учеб. пособие. – СПб. : Лань, 2005. – 608 с.
7. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов. – 6-е изд. – М. : Оникс, 2003. – 304 с.
8. Ляховский В. А., Мартыненко А. И., Миносцев В. Б. Курс математики для технических высших учебных заведений. Ч. 2 : Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление. Теория поля : учеб. пособие / под ред. В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря. – 2-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2013. – 432 с.
9. Миносцев В. Б., Берков Н. А., Зубков В. Г. Курс математики для технических высших учебных заведений. Ч. 3 : Дифференциальные уравнения. Уравнения математической физики. Теория оптимизации : учеб. пособие / под ред. В. Б. Миносцева, Е. А. Пушкаря. – 2-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2021. – 528 с.

10. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. пособие для втузов. Т. 2. – М. : Интеграл-Пресс, 2009. – 544 с.
11. Шипачев В. С. Высшая математика : учеб. пособие для бакалавров. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2013. – 447 с.
12. Шипачев В. С. Задачник по высшей математике. – 3-е изд., стереотип. – М. : Высшая школа, 2003. – 304 с.

Учебное издание

Бегматов Акбар Хасанович

МАТЕМАТИКА:
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ,
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, РЯДЫ

Редактор *О. В. Георгиевская*

Компьютерная верстка *О. И. Голиков*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 29.12.2021. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 8,54. Тираж 140 экз. Заказ 194.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.