

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

В. С. Айрапетян, В. А. Райхерт

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА.

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия для обучающихся по специальности
17.05.01 Боеприпасы и взрыватели (уровень специалитета)

Новосибирск
СГУГиТ
2022

УДК 531.8+621.01+621.03

А36

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор НГТУ

В. Я. Костюченко

кандидат технических наук, доцент, СГУГиТ *И. Н. Карманов*

Айрапетян, В. С.

А36 Электротехника и электроника. Электротехника : учебное пособие /
В. С. Айрапетян, В. А. Райхерт. – Новосибирск : СГУГиТ, 2022. – 84 с. –
Текст : непосредственный
ISBN 978-5-907513-29-7

Учебное пособие подготовлено профессором кафедры, доктором технических наук В. С. Айрапетяном и старшим преподавателем В. А. Райхертом на кафедре специальных устройств, инноватики и метрологии СГУГиТ.

В учебном пособии описана последовательность лекционного материала для укороченных курсов, рассмотрены основные разделы работы, приведены методические материалы, поясняющие изучение отдельных этапов работы, а также даны рекомендации по подготовке к выполнению и защите лабораторных работ.

Учебное пособие по дисциплине «Электротехника и электроника» предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 17.05.01 Боеприпасы и взрыватели (уровень специалитета).

Рекомендовано к изданию кафедрой специальных устройств, инноватики и метрологии СГУГиТ, Ученым советом Института оптики и технологий информационной безопасности СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 531.8+621.01+621.03

ISBN 978-5-907513-29-7

© СГУГиТ, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ	6
1.1. Основные понятия электрических цепей	6
1.2. Пассивные элементы электрической цепи	7
1.3. Активные элементы электрической цепи.....	9
1.4. Режимы работы электрических цепей	11
1.5. Геометрические параметры электрических цепей	12
1.6. Преобразование треугольника сопротивлений в эквивалент- ную звезду	14
1.7. Преобразование звезды сопротивлений в эквивалентный треугольник	15
2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ ПОСТОЯННОГО ТОКА	17
2.1. Метод свертывания	17
2.2. Метод подобия, или метод пропорциональных величин.....	19
3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ.....	21
3.1. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа	21
3.2. Метод контурных токов.....	22
3.3. Метод узловых потенциалов	24
3.4. Принцип суперпозиции токов	26
4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА.....	28
4.1. Основные определения	28
4.2. Графический метод расчета нелинейных цепей постоянного тока.....	30

5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА	33
5.1. Основные определения	33
5.2. Представление синусоидальных функций в комплексной форме	34
5.3. Сопротивление в цепи переменного тока	35
5.4. Индуктивная катушка в цепи переменного тока	37
5.5. Конденсатор в цепи переменного тока	40
5.6. Последовательное соединение R , L и C элементов в цепь пе- ременного тока	41
5.7. Параллельное соединение R , L и C элементов в цепь пере- менного тока	45
5.8. Резонансный режим в цепи, состоящей из параллельно включенных R , L и C элементов	47
5.9. Мощность в цепи переменного тока	49
6. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ	52
6.1. Основные определения	52
6.2. Соединение нагрузки звездой	54
6.3. Соединение нагрузки в треугольник	55
6.4. Расчет цепи при соединении нагрузки звездой	57
6.5. Мощность в трехфазных цепях	62
7. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ	64
7.1. Основные определения переходных процессов	64
7.2. Переходные процессы в цепи с реальным индуктивным эле- ментом	66
7.3. Переходные процессы в цепи с R - C элементами	71
7.4. Переходные процессы в цепях с R - L - C элементами	75
Заключение	82
Библиографический список	83

ВВЕДЕНИЕ

Электротехника является общеобразовательной дисциплиной в технических вузах Российской Федерации и служит базой для изучения специальных дисциплин, связанных с разработкой и применением электротехнических средств и электрооборудований в различных областях народного хозяйства.

Основные цели электротехники основаны на законах электромагнитного явления, для достижения этих целей решаются задачи, связанные с преобразованием электрической энергии в другие виды энергии, передачей информации и др.

В учебном пособии особое внимание уделено строгому изложению принципов действия, свойств и характеристик электротехнических элементов и электрических цепей.

Учебное пособие состоит из семи разделов.

Начиная с первого раздела, в учебном пособии систематизированно и строго излагаются основные функции и обозначения элементов электрических цепей, способы преобразования электрических цепей, методы расчета линейных и нелинейных цепей постоянного и переменного токов, принципы действия переходных процессов в линейных электрических цепях.

Для понимания процессов, происходящих в электрических цепях, обучающемуся необходимо знание определенных разделов математики и физики. Из курса математики это разделы: комплексные числа, интегральное исчисление дифференциальные уравнения, вектора. Из курса физики – разделы механики и электричества.

1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

1.1. Основные понятия электрических цепей

Электрическая цепь представляет собой совокупную электротехническую систему, составные части которой связаны проводниками с электрическим током.

По принципу действия, назначению и конструктивному изготовлению составных частей электротехнические устройства делятся на три группы [1].

1. *Источник электрической энергии* представляет собой устройство, обеспечивающее направленное перемещение зарядов по электрической цепи.

2. *Приемником*, или *нагрузкой*, называют технические устройства, в которых происходит преобразование электрической энергии в другие виды энергии.

3. *Соединительные провода* и различные *коммутационные устройства* представляют собой электрические линии, связывающие источник и приемник электрической цепи.

Участок электрической цепи, содержащий источник электродвижущей силы (ЭДС), является активным. Участок, не содержащий источника ЭДС, является пассивным.

Электрические цепи являются *линейными*, если параметры нагрузки не зависят величин и направлений напряжения и тока. В остальных случаях *цепи нелинейные*.

Основные геометрические понятия, применяющиеся в электрических цепях:

1. *Узел* называют место электрической цепи, в которое сходятся не менее трех проводников с током.

2. Участок цепи, связывающий два соседних узла, является *ветвью*. Различают два типа узлов: устранимый, если в нем сходятся две ветви, и неустранимый, если количество ветвей больше трех.

3. Замкнутый путь, соединяющий *несколько* ветвей электрической цепи, называется *контуром*.

Графическая запись электрической цепи, которая содержит условные обозначения элементов и соединительные линии между ними, называется *электрической схемой*.

На рис. 1.1 приведены схема электрической цепи и ее замещения.

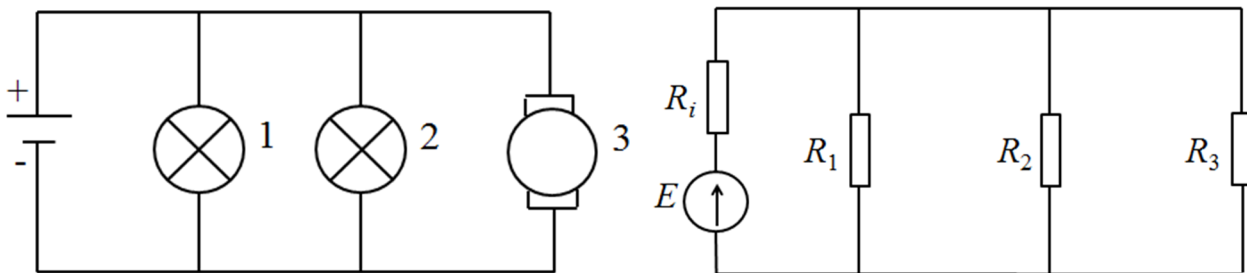


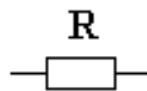
Рис. 1.1

1.2. Пассивные элементы электрической цепи

По своим свойствам элементы электрической цепи делятся на два вида. Элементы, которые производят электрическую энергию, называются *активными* элементами. Элементы электрической цепи, потребляющие электрическую энергию или преобразующие ее в другие виды энергии, являются *пассивными* элементами.

К ним относятся: сопротивление, катушка индуктивности и конденсатор [2].

В условно графическом отображении электрической цепи *сопротивление* представляется в следующем виде:



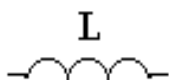
Сопротивление преобразовывает электрическую энергию в другие виды энергии (механическую, световую, тепловую и др.). Величина электрического сопротивления проводника зависит от его геометрических размеров, формы и свойства вещества, из которого изготовлено сопротивление.

На схеме электрической цепи нагрузка обозначается латинской буквой R , а величина ее сопротивления определяется по формуле

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1.1)$$

где ρ – удельное сопротивление проводника; l и s – длина и поперечное сечение проводника, соответственно.

Главным свойством индуктивной катушки является накопление магнитной энергии в электрической цепи. Индуктивная катушка в условно-графическом отображении электрической цепи представляется в следующем виде:

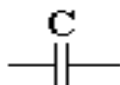


На схеме электрической цепи индуктивная катушка обозначается латинской буквой L , а величина ее индуктивности определяется по формуле

$$L = \frac{w \Phi}{i}, \quad (1.2)$$

где w – число витков катушки; Φ – магнитный поток; i – сила тока.

Основной способностью конденсатора является накопление электрической энергии в цепи. Условно графическое изображение конденсатора представляется в виде



Величина, определяющая количество электрической энергии, накопленной в цепи, называется *электрической емкостью* C . Емкость зависит от формы и геометрических размеров обкладок конденсатора, а также величины диэлектрической проницаемости среды, заполненной между обкладками.

На схеме электрической цепи конденсатор обозначается латинской буквой C , а величина его емкости определяется по формуле

$$C = \frac{q}{U_c}, \quad (1.3)$$

где q – количество зарядов, накопленных в конденсаторе; U_c – разность потенциалов между обкладками конденсатора, или падение напряжения на конденсаторе.

1.3. Активные элементы электрической цепи

Устройства, преобразующие другие виды энергии в электрическую, называются источниками электрической энергии, или *активными* элементами электрической цепи. По способу преобразования энергии различают два вида активных элементов с идеальными свойствами [3].

1. Источник электродвижущей силы или источник напряжения.
2. Источник тока.

Разность потенциалов на зажимах 1 и 2, или напряжение на выходе источника ЭДС (рис. 1.2), не зависит от направления и величины тока, протекающего через нагрузку внешней цепи. Здесь R – внешнее сопротивление; R_i – внутреннее сопротивление источника ЭДС.

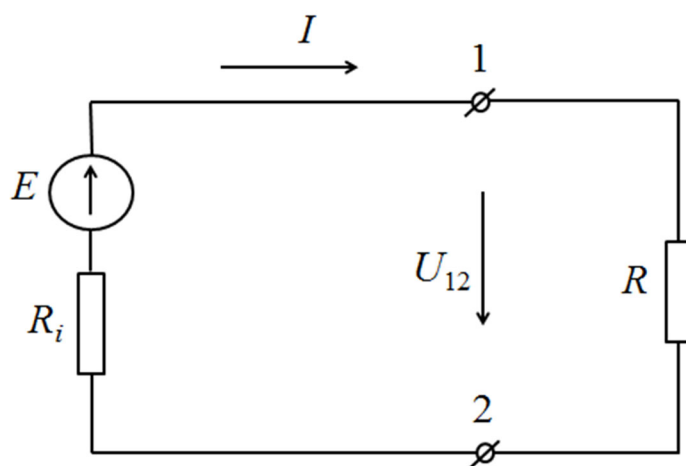


Рис. 1.2

На условно графических изображениях (см. рис. 1.2) источник ЭДС представляется в виде окружности со стрелкой внутри, указывающей направление действия ЭДС. Положительным направлением ЭДС принято считать возрастание электрического потенциала $\varphi_1 > \varphi_2$. Направление выходного напряжения U_{12} противоположное.

Ток, протекающий в цепи, согласно закону Ома, прямо пропорционален ЭДС источника и обратно пропорционален полному сопротивлению цепи

$$I = \frac{E}{R_i + R}. \quad (1.4)$$

После преобразования формулы (1.4) можно вычислить напряжения U_{12}

$$U_{12} = I \cdot R = E - I \cdot R_i. \quad (1.5)$$

Из формулы (1.5) следует два вывода:

1. Отсутствие внутреннего сопротивления источника ЭДС $R_i = 0$ выравнивает разность потенциалов на зажимах 1, 2 (напряжение цепи) с ЭДС источника $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = E$. Источник, внутреннее сопротивление которого равно нулю, называется идеальным источником ЭДС. У идеального источника напряжение на выходе не зависит от тока и равно электродвижущей силе.

2. Для реального источника ЭДС, когда его внутреннее сопротивление $R_i \neq 0$, возрастание тока, проходящего через него, приводит к уменьшению разности потенциалов на зажимах 1, 2 или уменьшению напряжения $U_{12} < E$.

Если ток, выработанный активным элементом, не зависит от напряжения на выходе источника, то в нагрузке формируется постоянный электрический ток. Такой активный элемент цепи называется *источником тока*.

На условно графических изображениях источник тока представляется в виде окружности с двойной стрелкой внутри, указывающий направление протекания тока.

Применим закон Ома для электрической цепи с источником тока (рис. 1.3). После преобразования уравнения (1.4) можно получить величину проводимости

$$J = U_{12} \cdot g_i + I, \quad (1.6)$$

где $\frac{E}{R_i} = J$ – ток источника; $\frac{1}{R_i} = g_i$ – проводимость источника тока.

Из анализа формулы (1.6) можно делать следующий вывод.

Внутреннее сопротивление источника тока бесконечно большое $R = \infty$, следовательно, его проводимость $g_i = 0$, тогда из уравнения (1.6) получим $J = I$. Такой источник тока является идеальным, и ток, протекающий через него, не зависит от сопротивления нагрузки.

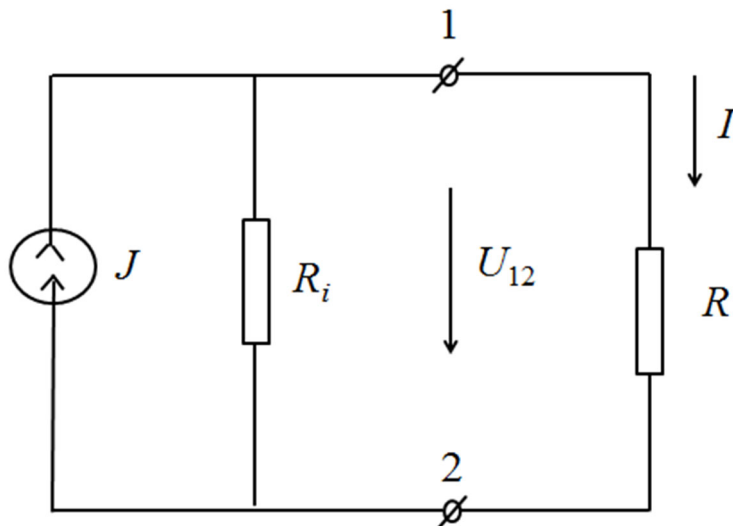


Рис. 1.3

Таким образом, из теории цепей следует, что два вида реальных активных элементов электрической цепи (источник ЭДС и источник тока) – взаимно заменяемые. Если внутреннее сопротивление активного элемента незначительное по сравнению с внешней нагрузкой $R_i \ll R$, тогда источник ЭДС по своим характеристикам приближается к идеальному источнику ЭДС. Если внутреннее сопротивление активного элемента велико по сравнению с внешней нагрузкой $R_i \gg R$, тогда такой источник по своим характеристикам приближается к идеальному источнику тока.

1.4. Режимы работы электрических цепей

Значение основных параметров (тока, напряжения и мощности), а также характер нагрузки электрической цепи определяют режимы работы источника ЭДС.

Выделим наиболее характерные и применяемые на практике режимы работы электрической цепи [4].

1. Номинальный режим.

2. Режим холостого хода.
3. Режим короткого замыкания.
4. Согласованный режим.

Номинальным называется режим работы источника ЭДС, при котором все параметры электротехнического устройства соответствуют предъявляемым к ним техническими требованиями завода-изготовителя.

Режим холостого хода возникает, когда сопротивление нагрузки цепи возрастает до бесконечности $R_{\text{н}} = \infty$.

Режим короткого замыкания наступает, когда сопротивление нагрузки цепи значительно ниже внутреннего сопротивления источника ЭДС $R_{\text{н}} \approx 0$.

Согласованный режим работы цепи – это режим, при котором сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника ЭДС $R_{\text{внеш}} = R_i$. При этом максимальная мощность источника ЭДС передается к нагрузке.

1.5. Геометрические параметры электрических цепей

По степени сложности анализа электрических цепей различают разветвленные и неразветвленные схемы. На рис. 1.4, 1.5 представлены разветвленная и неразветвленная схемы, соответственно.

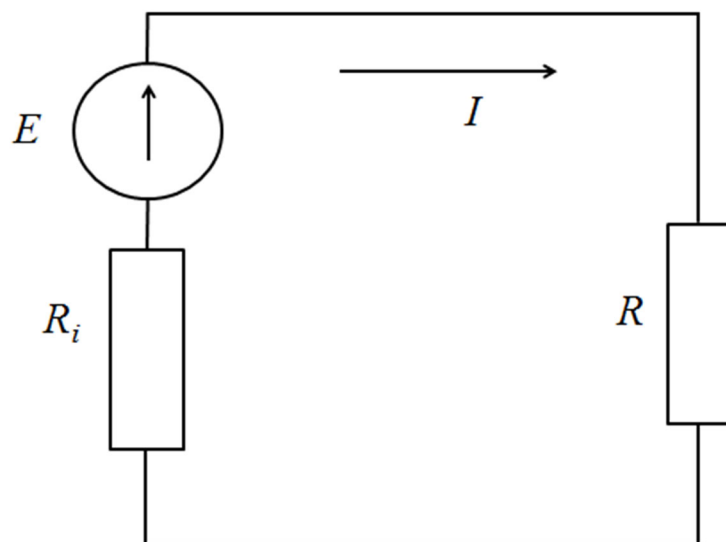


Рис. 1.4

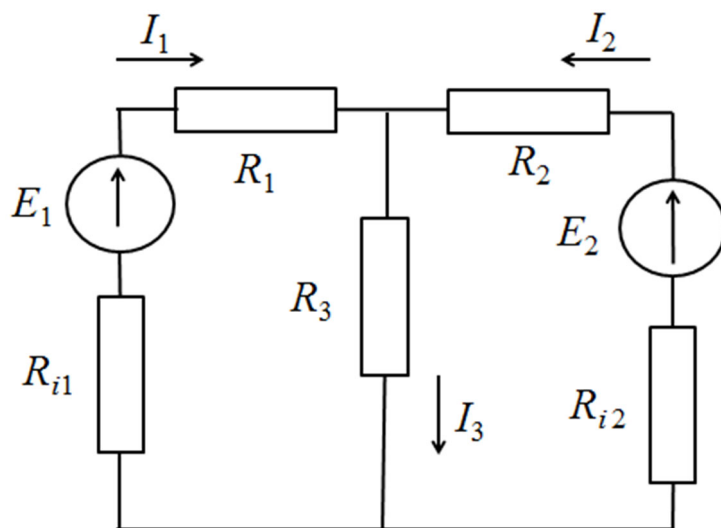


Рис. 1.5

Разветвленная схема представляется как комбинированное соединение пассивных и активных элементов цепи. На рис. 1.5 представлено условно-графическое изображение разветвленной цепи, с двумя источниками ЭДС и пятью пассивными элементами. Сопротивления соединительных проводов ничтожно малы по сравнению с сопротивлением внешней нагрузки.

Для существенного упрощения расчета параметров электрических цепей применяют различные способы соединения пассивных элементов, а именно:

- 1) последовательное;
- 2) параллельное;
- 3) смешанное;
- 4) звездой;
- 5) треугольником.

Смешанное соединение, соединение звездой и треугольником – это произвольная комбинация последовательных и параллельных соединений.

В целях упрощения анализа электрических цепей выполняют эквивалентное преобразование путем определения параметров электрической цепи способом последовательных и параллельных соединений отдельных элементов. Рассмотрим два способа эквивалентного преобразования электрических цепей.

1.6. Преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду

Рассмотрим мостовую схему включения сопротивлений в электрическую цепь. На рис 1.6 приведена электрическая схема такой цепи. На первом этапе эквивалентного преобразования заменяется участок цепи с сопротивлениями R_1, R_2, R_3 соединенными между узлами 1-2-3 в виде треугольника, на участок цепи, представленный в виде трехлучевой звезды с сопротивлениями $R_{\lambda 1}, R_{\lambda 2}, R_{\lambda 3}$. Лучи этого участка цепи расходятся из точки 0 в узлы 1-2-3.

В итоге эквивалентного преобразования схема замещения представляется в виде изображенной на правой стороне рис. 1.6.

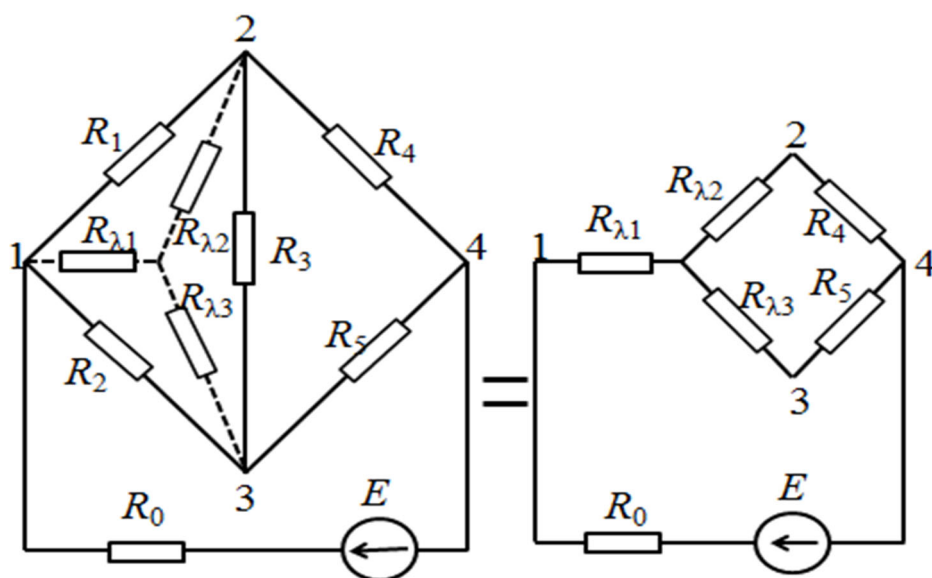


Рис. 1.6

На втором этапе выполняется расчет сопротивлений согласно правилам последовательного и параллельного соединения сопротивлений по формулам

$$R_{\lambda 1} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad R_{\lambda 2} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad R_{\lambda 3} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (1.7)$$

Окончательная формула эквивалентного сопротивления после преобразования определяется по формуле

$$R_9 = R_0 + R_{\lambda 1} + \frac{(R_{\lambda 2} + R_4) \cdot (R_{\lambda 3} + R_5)}{R_{\lambda 2} + R_4 + R_{\lambda 3} + R_5}. \quad (1.8)$$

Правило преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду: *сопротивление луча эквивалентной звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений всех сторон треугольника.*

1.7. Преобразование звезды сопротивлений в эквивалентный треугольник

Взаимное преобразование соединений электрической цепи в виде трехлучевой звезды и треугольника позволяет получить более простое смешанное соединение цепи. После упрощения схемы можно выполнить расчеты параметров электрической цепи.

Для преобразования схемы электрической цепи в виде трехлучевой звезды в схему в виде треугольника сопротивлений заменим участок цепи с сопротивлениями R_1 , R_2 и R_3 на эквивалентный участок цепи с сопротивлениями $R_{\Delta 1}$, $R_{\Delta 2}$ и $R_{\Delta 3}$ (рис. 1.7), где зависимость сопротивлений $R_{\Delta 1}$, $R_{\Delta 2}$ и $R_{\Delta 3}$ от R_1 , R_2 , R_3 – линейная, и сопротивления вычисляются согласно правилу последовательного и параллельного соединений сопротивления.

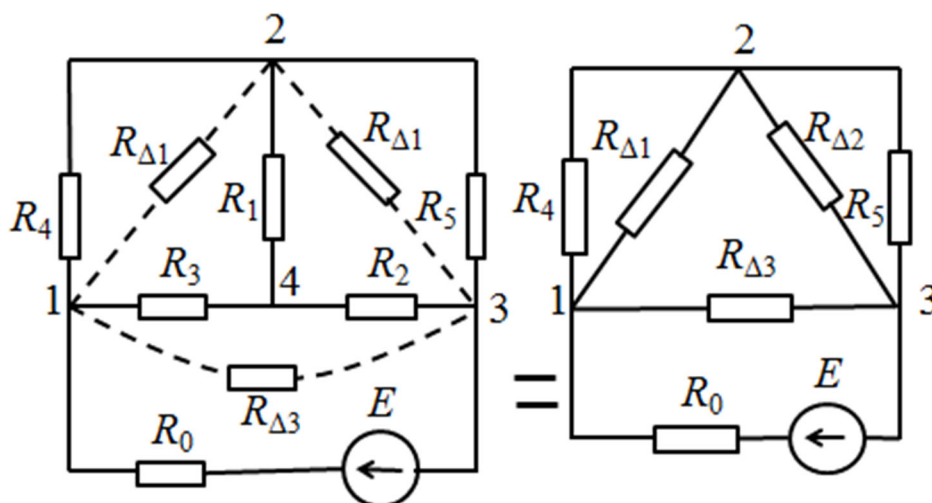


Рис. 1.7

Сопротивление участка цепи эквивалентного треугольника равно сумме сопротивлений двух прилегающих лучей звезды и произведения этих же сопротивлений, деленного на сопротивление противолежащего луча

$$\begin{aligned}
 R_{\Delta 1} &= R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}; & R_{\Delta 2} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}; \\
 R_{\lambda 3} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}.
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

Таким образом, после преобразования участка цепи с сопротивлениями, соединенными в виде звезды, на участок цепи в виде треугольника, эквивалентное сопротивление вычисляется по формуле

$$R_3 = R_0 + \frac{\left(\frac{R_4 \cdot R_{\Delta 1}}{R_4 + R_{\Delta 1}} + \frac{R_5 \cdot R_{\Delta 2}}{R_5 + R_{\Delta 2}} \right) \cdot R_{\Delta 3}}{\frac{R_4 \cdot R_{\Delta 1}}{R_4 + R_{\Delta 1}} + \frac{R_5 \cdot R_{\Delta 2}}{R_5 + R_{\Delta 2}} + R_{\Delta 3}}.
 \tag{1.10}$$

2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Расчет электрической цепи выполняется с целью ее оптимизации и выбора режима работы, а также определения параметров, обеспечивающих заданный режим работы.

2.1. Метод свертывания

При выполнении расчета электрической цепи методом свертывания применяется закон Ома для отдельных участков цепи, состоящих из нескольких сопротивлений и одного источника ЭДС. Принцип действия метода заключается в преобразовании сложных участков цепи до получения одного эквивалентного сопротивления, включенного к выходным зажимам источника ЭДС. Последовательное применение законов Ома и Кирхгофа к преобразованной цепи позволяет определить вначале эквивалентный ток, а затем токи в ветвях.

Расчет параметров разветвленной цепи выполним на примере электрической схемы, приведенной на рис. 2.1.

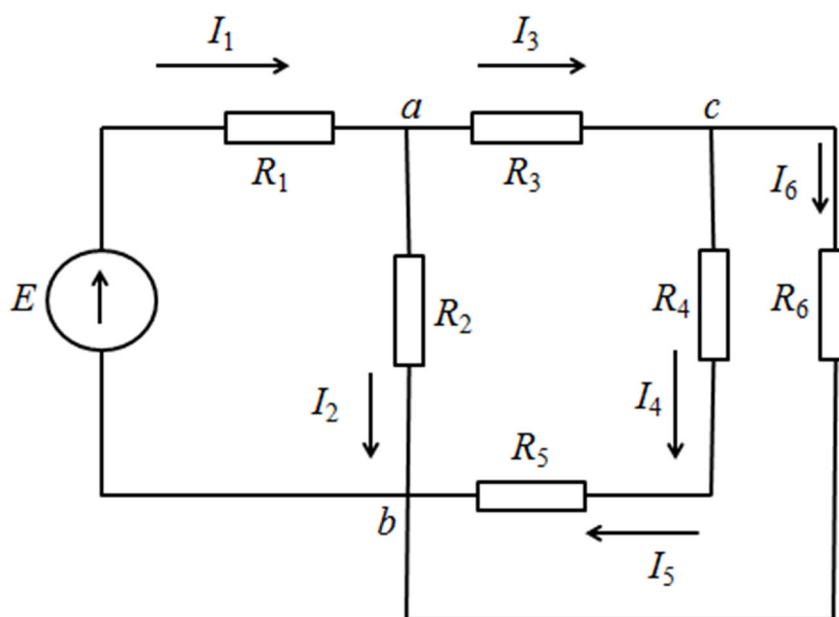


Рис. 2.1

Из условий задачи известны значения сопротивлений $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ и ЭДС источника E . Необходимо вычислить токи в ветвях.

Для удобства преобразование схемы следует начать с участка cb , где сопротивления R_4 и R_5 соединены последовательно, а сопротивление R_6 – параллельно с ними, для определения эквивалентного сопротивления этого участка воспользуемся формулой

$$R_{4,5,6} = \frac{(R_4 + R_5) \cdot R_6}{R_4 + R_5 + R_6}. \quad (2.1)$$

На рис. 2.2 приведено условно-графическое изображение итогового эквивалентного преобразования цепи, из которого легко вычисляется общее сопротивление всей цепи

$$R_{\Sigma} = R_1 + \frac{R_2 \cdot (R_3 + R_{4,5,6})}{R_2 + R_3 + R_{4,5,6}}. \quad (2.2)$$

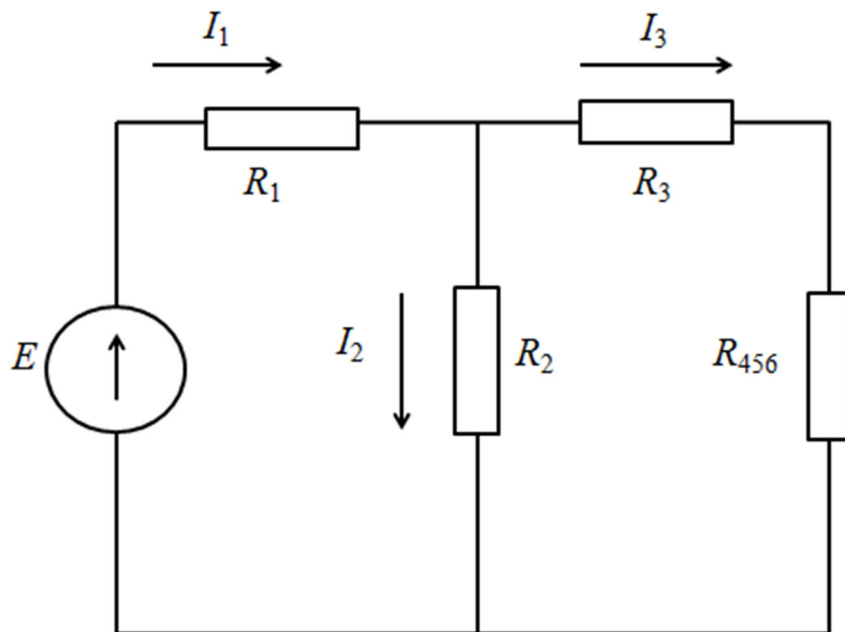


Рис. 2.2

Далее по закону Ома для неразветвленной части схемы вычислим токи I_1 и I_2 по формулам

$$I_1 = \frac{E}{R_3}; \quad (2.3)$$

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = I_1 \cdot \frac{R_2 \cdot (R_3 + R_{4,5,6})}{R_2 \cdot (R_2 + R_3 + R_{4,5,6})} = I_1 \cdot \frac{(R_3 + R_{4,5,6})}{(R_2 + R_3 + R_{4,5,6})}. \quad (2.4)$$

Для определения тока I_3 применяем первый закон Кирхгофа для узла a

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \quad (2.5)$$

Откуда

$$I_3 = I_1 - I_2. \quad (2.6)$$

После определения токов I_1 , I_2 и I_3 возвращаемся к исходной схеме на рис. 2.1 и, применяя законы Ома и Кирхгофа, определим токи в ней по известным значениям сопротивлений согласно формулам

$$I_4 = I_5 = \frac{U_{cb}}{R_4 + R_5} = \frac{I_3 \cdot (R_4 + R_5) \cdot R_6}{(R_4 + R_5) \cdot (R_4 + R_5 + R_6)} = \frac{I_3 \cdot R_6}{R_4 + R_5 + R_6}; \quad (2.7)$$

$$I_6 = I_3 - I_4. \quad (2.8)$$

2.2. Метод подобия, или метод пропорциональных величин

Рассмотрим условно графическое изображение цепи, приведенное в предыдущем подразделе (см. рис. 2.1). Принцип действия метода подобия заключается в том, что одному из шести токов, имеющих в электрической цепи, задается определенное значение. Для простоты примем произвольным значением тока I'_6 , также известны значения сопротивлений $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ и ЭДС источника E . По известным значениям тока I'_6 и сопротив-

ления R_6 согласно закону Ома для участка цепи определим напряжение $U'_{cb} = I'_6 \cdot R_6$. Далее, применяя законы Ома и Кирхгофа, определим токи в ветвях и ЭДС источника E' по формулам

$$I'_4 = I'_5 = \frac{U'_{cb}}{R_4 + R_5}; \quad I'_3 = I'_4 + I'_6; \quad (2.9)$$

$$U'_{ac} = I'_3 \cdot R_3; \quad (2.10)$$

$$I'_2 = \frac{U'_{ab}}{R_2}; \quad I'_1 = I'_2 + I'_3; \quad (2.11)$$

$$E' = R_1 \cdot I'_1 + R_2 \cdot I'_2. \quad (2.12)$$

При сравнении полученного значения ЭДС E' с заданной величиной ЭДС E наблюдается расхождение, это означает, что отличаются и значения токов, полученных при расчете. Для этого необходимо определить коэффициент подобия как $K = \frac{E}{E'}$. Далее, учитывая, что зависимость между токами и ЭДС линейная, можно использовать коэффициент K для определения действительных значений токов и напряжений в ветвях. Для этого необходимо полученные при расчете значения токов и напряжений умножить на коэффициент K .

3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

Расчет разветвленных электрических цепей, содержащих больше одного источника энергии, – достаточно сложная и трудоемкая работа. Целью выполнения такого расчета является определение токов, напряжений и мощностей на участках или элементах при известных значениях геометрических параметров пассивных и активных элементов электрической цепи.

3.1. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа

При выполнении расчета параметров электрической цепи с применением законов Кирхгофа необходимо соблюдать определенную последовательность решения.

Рассмотрим разветвленную электрическую цепь с известными значениями сопротивлений нагрузок и ЭДС источника энергии (рис. 3.1). Необходимо определить токи в ветвях.

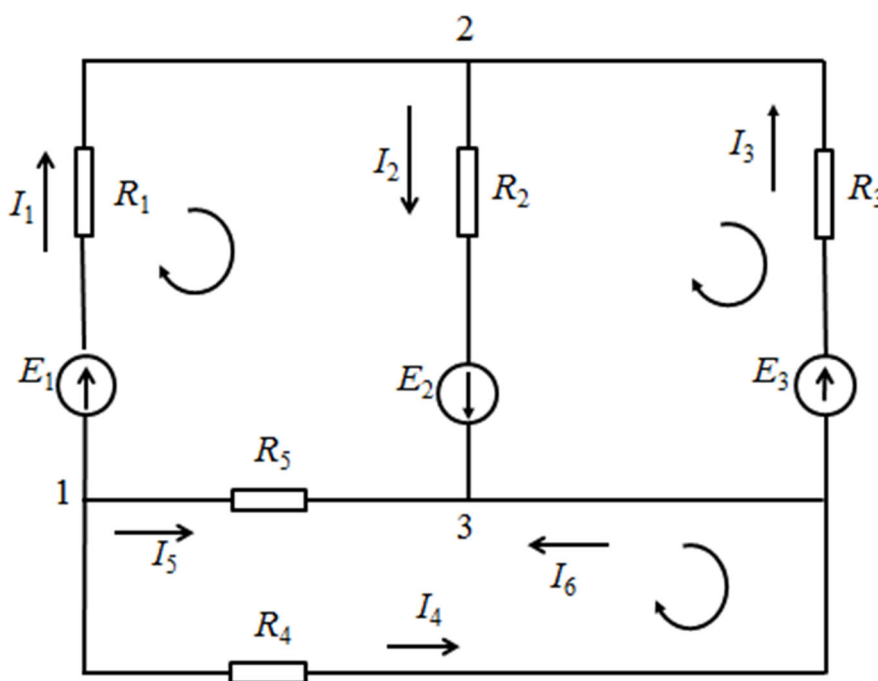


Рис. 3.1

Сначала определяем число ветвей и узлов. Для четырех узлов цепи, согласно первому закону Кирхгофа, составляем систему из четырех уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \text{для узла 1} \quad -I_1 - I_5 - I_4 = 0 \\ \text{для узла 2} \quad I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ \text{для узла 3} \quad I_2 + I_5 + I_6 = 0 \\ \text{для узла 4} \quad -I_3 - I_6 + I_4 = 0 \end{array} \right\}. \quad (3.1)$$

После исключения из системы повторяющегося уравнения для четвертого узла получим систему из трех независимых уравнений

$$\left. \begin{array}{l} -I_1 - I_5 - I_4 = 0 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ I_2 + I_5 + I_6 = 0 \end{array} \right\}. \quad (3.2)$$

На следующем этапе решения, согласно второму закону Кирхгофа, составляем систему уравнений для трех независимых контуров цепи, учитывая направления обхода контуров

$$\left. \begin{array}{l} E_1 + E_2 = -I_5 \cdot R_5 + I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 \\ -E_2 - E_3 = -I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 + I_6 \cdot 0 \\ 0 = I_5 \cdot R_5 - I_4 \cdot R_4 - I_6 \cdot 0 \end{array} \right\}. \quad (3.3)$$

Совместным решением двух систем линейных уравнений (3.2) и (3.3) определяются токи в ветвях цепи.

Отрицательное значение тока в ветви, полученного при расчете, означает, что действительное направление тока противоположно выбранному направлению.

3.2. Метод контурных токов

Расчет разветвленных цепей со многими ветвями упрощается применением метода контурных токов.

Для выполнения расчета неразветвленной электрической цепи рассмотрим двухконтурную схему с контурными токами I_{11} и I_{22} , приведенную на рис. 3.2.

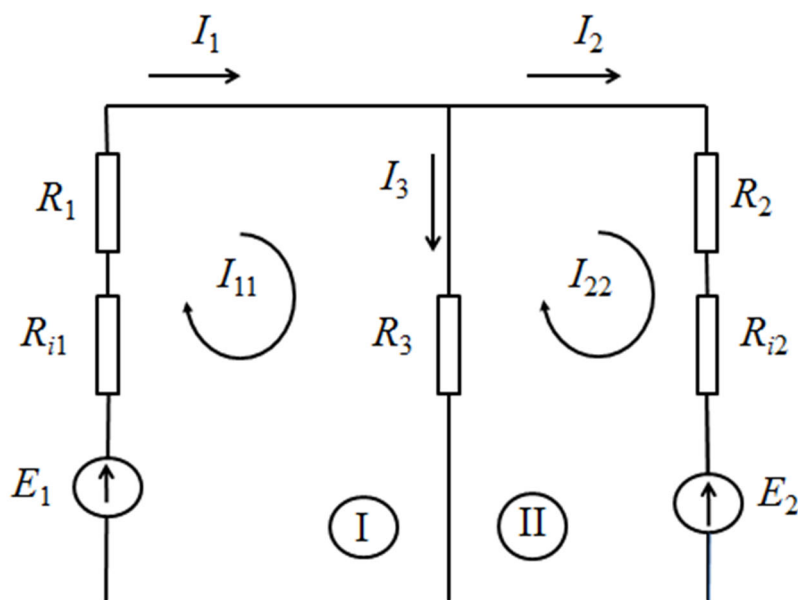


Рис. 3.2

Токи, протекающие в сопротивлениях R_1 и R_2 , являются соответствующими контурными токами. Контурсы I и II – независимы друг от друга, и в них протекают контурные токи I_{11} и I_{22} . Направление обхода контура совпадает с направлением контурных токов.

Для каждого контура по отдельности можно составить линейное уравнение, основываясь на втором законе Кирхгофа

$$\begin{aligned} I_{11} \cdot (R_1 + R_{i1}) + I_{11} \cdot R_3 - I_{22} \cdot R_3 &= E_1; \\ I_{22} \cdot (R_{i2} + R_2) + I_{22} \cdot R_3 - I_{11} \cdot R_3 &= -E_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Сначала примем следующие допущения.

1. Собственные сопротивления контуров

$$R_{11} = R_1 + R_{i1} + R_3; \quad R_{22} = R_{i2} + R_2 + R_3.$$

2. Общее сопротивление двух контуров – сопротивление, $R_{12} = R_{21} = R_3$, так как оно принадлежит одновременно двум контурам.

3. Контурные ЭДС $E_{11} = E_1$ и $E_{22} = E_2$.

Учитывая принятые допущения, после преобразования уравнение (3.4) примет вид

$$I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} = E_{11}; \quad (3.5)$$

$$I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{12} = E_{22}. \quad (3.6)$$

Совместным решением уравнений (3.5) и (3.6) определяются контурные токи I_{11} и I_{22} , а ток в третьей ветви I_3 вычисляется по первому закону Кирхгофа

$$I_1 = I_{11}; \quad I_2 = I_{22}; \quad I_3 = I_{11} - I_{22}. \quad (3.7)$$

Если по контуру протекает один-единственный ток, он называется *внешним*, если по ветви протекают несколько контурных токов, они являются *общими*. Величины внешнего и контурного токов равны, а их направления – коллинеарные.

Ток во внешней ветви совпадает по величине и по направлению с контурным. Ток в общей ветви равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих в этой ветви.

3.3. Метод узловых потенциалов

Для расчета параметров электрической цепи по методу узловых потенциалов составляется система уравнений на основе законов Ома и Кирхгофа. Принцип действия метода узловых потенциалов заключается в том, что из системы уравнений исключаются неизвестные узловые потенциалы.

Вычислим параметры электрической цепи с четырьмя узлами, условно графическое изображение которых приведено на рис. 3.3. Примем равным нулю один из четырех узловых потенциалов. Для удобства допустим, что потенциал четвертого узла равен нулю $\varphi_4 = 0$. *Базисным* называется узел, потенциал которого принимается равным нулю.

К первому узлу применим первый закон Кирхгофа

$$I_1 + J - I_2 = 0. \quad (3.8)$$

Из закона Ома для активной и пассивной ветвей определим токи I_1 и I_2

$$I_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = (-\varphi_1 + E_1) \cdot g_1; \quad (3.9)$$

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot g_2, \quad (3.10)$$

где $g_1 = \frac{1}{R_1}$ – проводимость первой ветви; $g_2 = \frac{1}{R_2}$ – проводимость второй ветви.

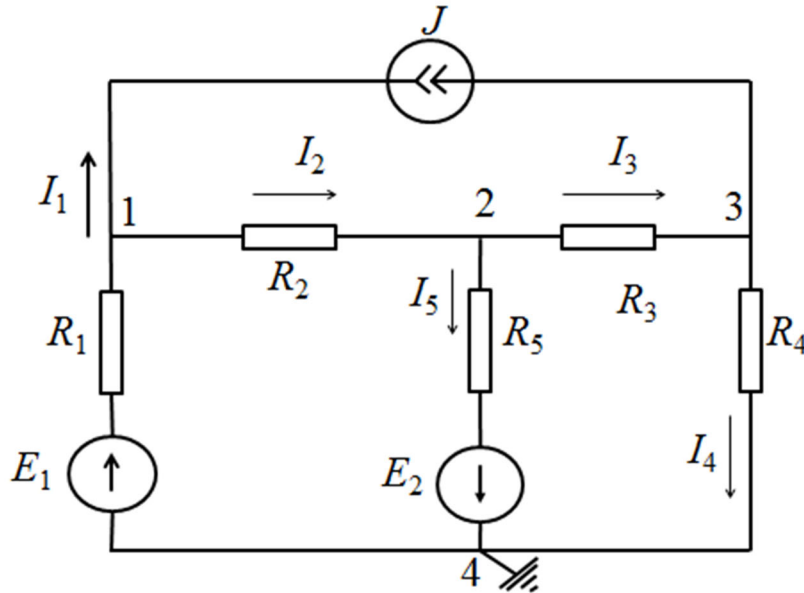


Рис. 3.3

Полученные из формул (3.9) и (3.10) значения токов I_1 и I_2 подставим в уравнение (3.8) и упростим

$$\begin{aligned} -\varphi_1 g_1 + E_1 g_1 + J - \varphi_1 g_2 + \varphi_2 g_2 &= 0; \\ \varphi_1 (g_1 + g_2) - \varphi_2 g_2 &= E_1 g_1 + J; \\ \varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} &= E_1 g_1 + J. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В системе уравнений (3.11) $g_{11} = g_1 + g_2$ является *собственной проводимостью* первого узла. Она определяется как алгебраическая сумма проводимостей ветвей, сходящихся в данном узле.

$g_{12} = g_2$ является *общей проводимостью* первого и второго узлов. *Общая проводимость* – это проводимость ветви, соединяющей соседние узлы.

Аналогичным методом составляются уравнения для второго и третьего узлов

$$\varphi_2(g_2 + g_3 + g_5) - \varphi_1 g_2 - \varphi_3 g_3 = -E_5 g_5; \quad (3.12)$$

$$\varphi_3(g_3 + g_4) - \varphi_2 g_3 = -J. \quad (3.13)$$

Совместным решением уравнений (3.11), (3.12) и (3.13) вычисляются неизвестные потенциалы φ_1, φ_2 и φ_3 , после чего по выражениям (3.9) и (3.10) легко можно определить токи в ветвях.

3.4. Принцип суперпозиции токов

В электротехнике принцип суперпозиции токов применяется только для линейных электрических цепей. Из принципа суперпозиции токов непосредственно следует метод наложения токов, позволяющий определять ток в произвольной ветви линейной электрической цепи как алгебраическая сумма токов, создаваемых каждым источником в отдельности.

В качестве примера рассмотрим применение принципа суперпозиции для вычисления тока I'_1 в цепи, электрическая схема которой представлена на рис. 3.4.

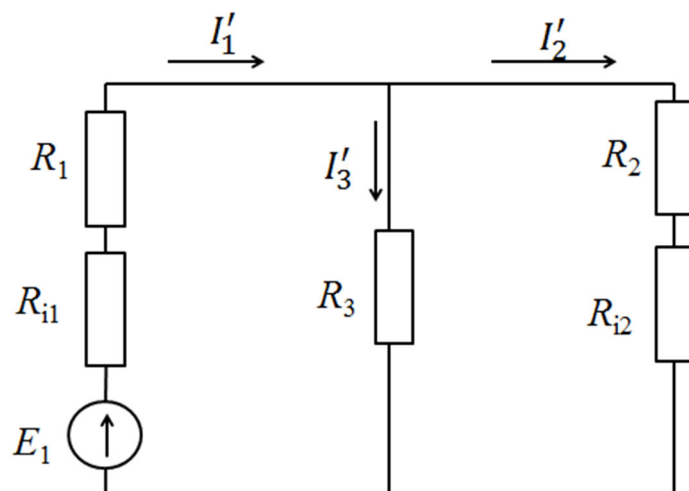


Рис. 3.4

После эквивалентного преобразования схемы (рис. 3.5) выполним расчет электрической цепи с одним источником методом свертывания.

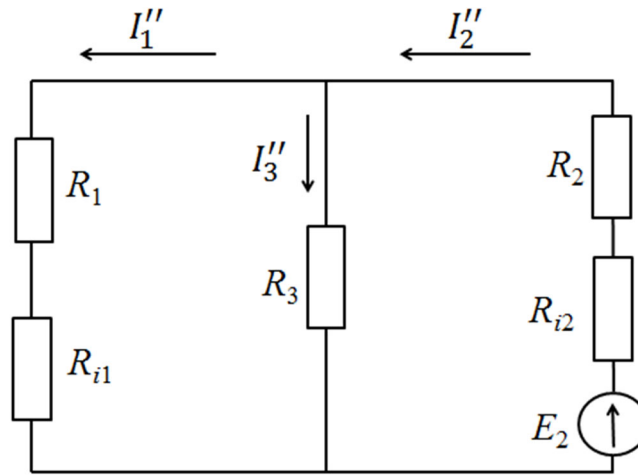


Рис. 3.5

Ток I_1' вычисляется по закону Ома

$$I_1' = \frac{E_1}{R_{i1} + R_1 + \frac{(R_{i2} + R_2) \cdot R_3}{R_{i2} + R_2 + R_3}}. \quad (3.14)$$

Аналогичное выражение для вычисления тока I_2'

$$I_2' = \frac{E_2}{R_{i2} + R_2 + \frac{(R_{i1} + R_1) \cdot R_3}{R_{i1} + R_1 + R_3}}. \quad (3.15)$$

Ток I_1'' в параллельной ветви определяется по известной формуле

$$I_1'' = I_2'' \frac{R_3}{R_{i1} + R_1 + R_3}. \quad (3.16)$$

На последнем этапе из первого закона Кирхгофа вычисляется результирующий ток I_1

$$I_1 = I_1' - I_1''. \quad (3.17)$$

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

4.1. Основные определения

Основным признаком нелинейности электрической цепи является наличие в ней нелинейного сопротивления пассивных элементов, т. е. ситуации, когда изменение тока в сопротивлении не прямо пропорционально зависит от напряжения.

В нелинейной электрической цепи величина сопротивления пассивного элемента зависит от величины и направления тока (напряжения).

Описание нелинейных электрических цепей становится наглядным при графическом представлении зависимости тока от напряжения $I(U)$, являющейся *вольт-амперной характеристикой (ВАХ)*. Графические отображения ВАХ нелинейных цепей представлены на рис. 4.1, 4.2. Если величина сопротивления пассивного элемента не меняется ($R = \text{const}$, при $I > 0$ или $I < 0$) при изменении направления тока, получается симметричная ВАХ (см. рис. 4.1). ВАХ несимметричная (см. рис. 4.2), когда величина сопротивления меняется при изменении направления тока ($R \neq \text{const}$, при $I > 0$ или $I < 0$).

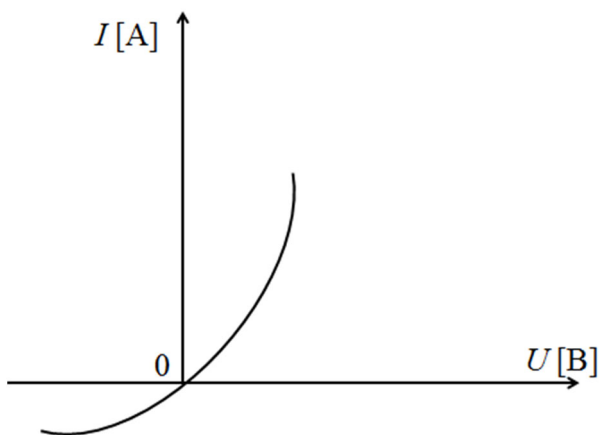


Рис. 4.1

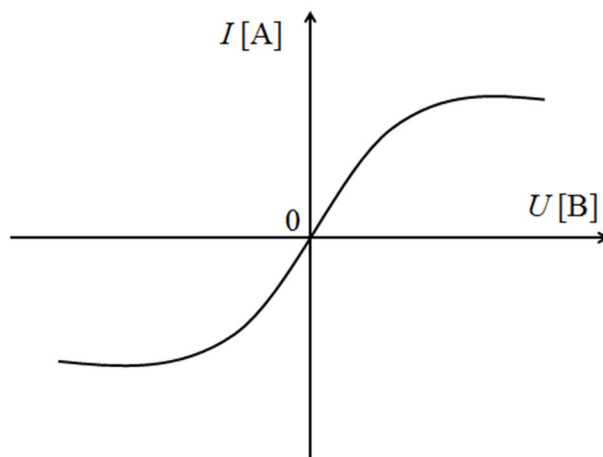


Рис. 4.2

В зависимости от скорости изменения величины сопротивления нелинейные цепи классифицируются *статической (интегральной)* или *дифференциальной (динамической)* характеристикой.

Основные свойства нелинейного сопротивления определяются двумя параметрами: *статическим (интегральным)* и *дифференциальным (динамическим)* сопротивлением.

Статическое сопротивление $R_{ст} = U/I$ равно отношению напряжения на пассивном элементе к току в данной точке ВАХ. *Статическое* (интегральное) сопротивление прямо пропорционально тангенсу угла α , образованного между осью абсцисс (тока) и прямой, проведенной из начала координат в точку a (рис. 4.3)

$$R_{ст} = \frac{U}{I} = \frac{m_U}{m_I} \cdot \frac{ov}{av} = \frac{m_U}{m_I} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.1)$$

Дифференциальное (динамическое) сопротивление $R_{диф} = dU/dI$, устанавливает взаимосвязь между мгновенными значениями тока и напряжения цепи. Дифференциальное сопротивление прямо пропорционально котангенсу угла наклона β между осью абсцисс (тока) и касательной к точке a (рис. 4.4)

$$R_{диф} = \frac{dU}{dI} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{m_U}{m_I} \cdot \frac{av}{dv} = \frac{m_U}{m_I} \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (4.2)$$

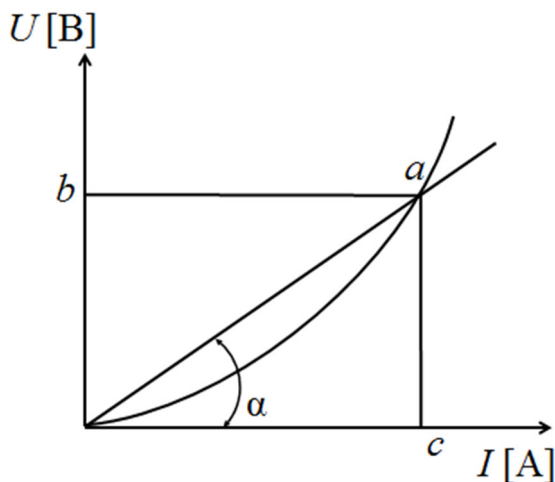


Рис. 4.3

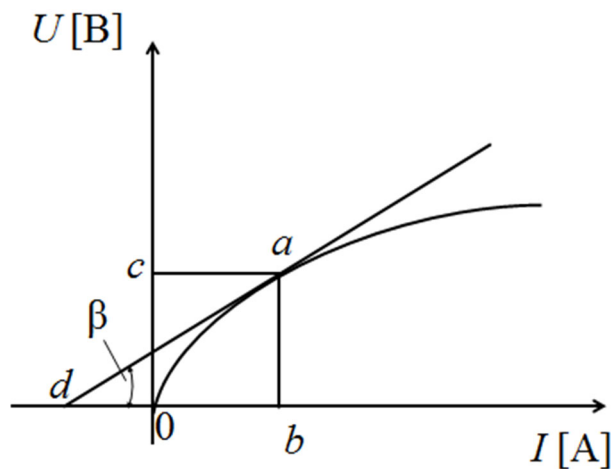


Рис. 4.4

При переходе от одной точки ВАХ к другой статическое и динамическое сопротивления нелинейного элемента меняются, причем интегральное сопротивление всегда положительное, а дифференциальное – знакопеременное.

4.2. Графический метод расчета нелинейных цепей постоянного тока

Расчет нелинейных электрических цепей выполняют двумя методами: графическим и аналитическим.

Расчет параметров нелинейных электрических цепей упрощается, когда применяются графоаналитические методы, основанные на законах Кирхгофа с использованием показания ВАХ элементов электрической цепи. На рис. 4.5 представлена схема электрической цепи с двумя последовательно соединенными нелинейными сопротивлениями Н.С.1 и Н.С.2, ВАХ 1 и ВАХ 2 которых приведены на рис. 4.6.

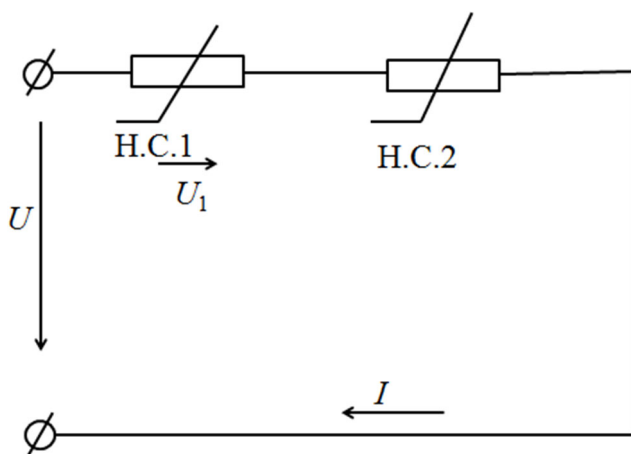


Рис. 4.5

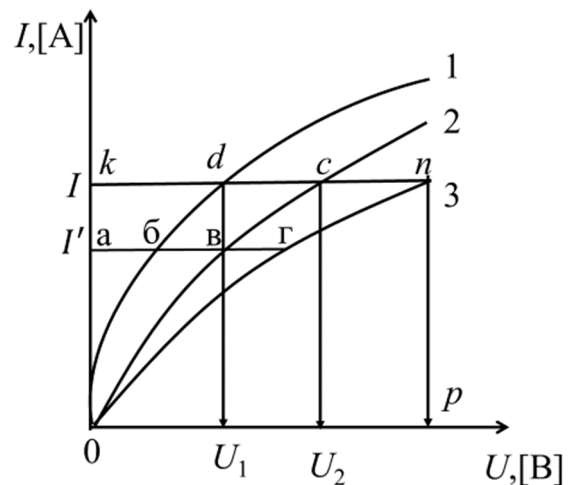


Рис. 4.6

Напряжение на зажимах U равно сумме падений напряжений на Н.С.1 (U_1) и Н.С.2 (U_2)

$$U(I) = U_1(I) + U_2(I). \quad (4.3)$$

Из правила последовательного соединения нелинейных сопротивлений Н.С.1 и Н.С.2 следует, что по цепи протекает одинаковый ток I , для определения которого необходимо построить ВАХ цепи. При построении ВАХ следует суммировать абсциссы кривых 1 и 2 ($a\gamma = a\beta + a\alpha$), соответствующие одним и те же значениям тока. Далее, задаваясь произвольным значением тока $I' \neq I$, можно построить ВАХ всей цепи (рис. 4.6, кривая 3), из которой находим искомые ток всей цепи и напряжения на зажимах нелинейных сопротивлений Н.С.1 и Н.С.2.

Для этого отложим на оси абсцисс отрезок $op = \frac{U}{m_U}$ (m_U – масштаб напряжения источника питания) и проведем из точки p прямую, перпендикулярную оси абсцисс до пересечения с кривой 3. Получим отрезок $pr = ko$. Ток $I = ko \cdot m_I$ (m_I – масштаб тока всей цепи).

Для найденного тока по ВАХ1 и ВАХ2 находим напряжения U_1 и U_2

$$U_1 = kd \cdot m_U; \quad U_2 = kc \cdot m_U. \quad (4.4)$$

Аналогично расчет выполняется для нелинейной электрической цепи с двумя параллельно соединенными нелинейными сопротивлениями Н.С.1 и Н.С.2 (рис. 4.7) и ВАХ1 и ВАХ2 (рис. 4.8). При параллельном соединении двух нелинейных элементов ток в неразветвленной части электрической цепи равен сумме токов в параллельных отделенных ветвях. Поэтому при построении результирующей ВАХ всей цепи следует суммировать ординаты графиков 1 и 2, соответствующие одним и те же значениям напряжения, так как к этим нелинейным элементам приложено одно и то же напряжение, равное напряжению внешней сети. Для произвольного значения напряжения $U' = oa \cdot m_U$ находим ординату $a\gamma$ точки для результирующей кривой 3 ($a\gamma = a\alpha + a\beta$).

Далее, задаваясь произвольным значением напряжения $U' \neq U$, можно построить ВАХ всей цепи (кривая 3). Затем, пользуясь ВАХ, можно при любом значении приложенного напряжения U (отрезок op) найти величину общего тока I ($pr = ok$). Это напряжение также определяет значения токов I_1 и I_2 в отдельных ветвях с учетом масштаба тока m_I .

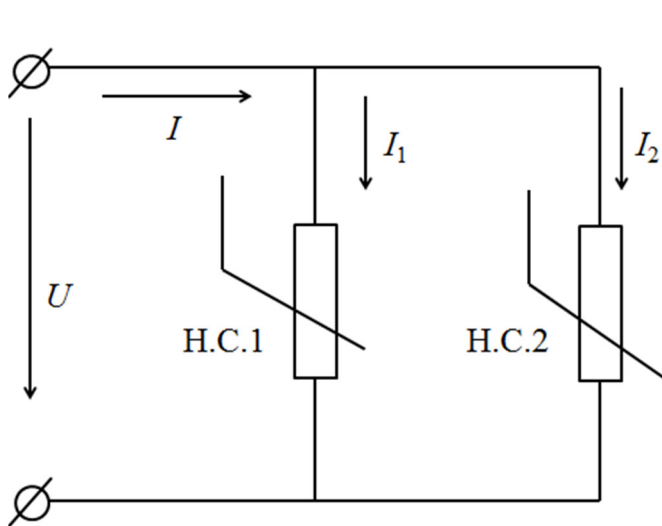


Рис. 4.7

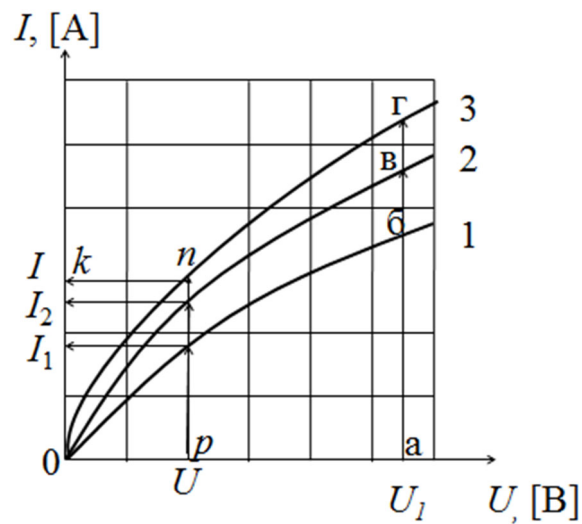


Рис. 4.8

Расчет схемы со смешанным соединением нелинейных сопротивлений (рис. 4.9) выполняется в два этапа: на первом этапе заменяют два параллельно соединенных нелинейных сопротивления одним эквивалентным; на втором этапе выполняются аналогичные действия, что и для схемы с последовательно соединенными нелинейными сопротивлениями.

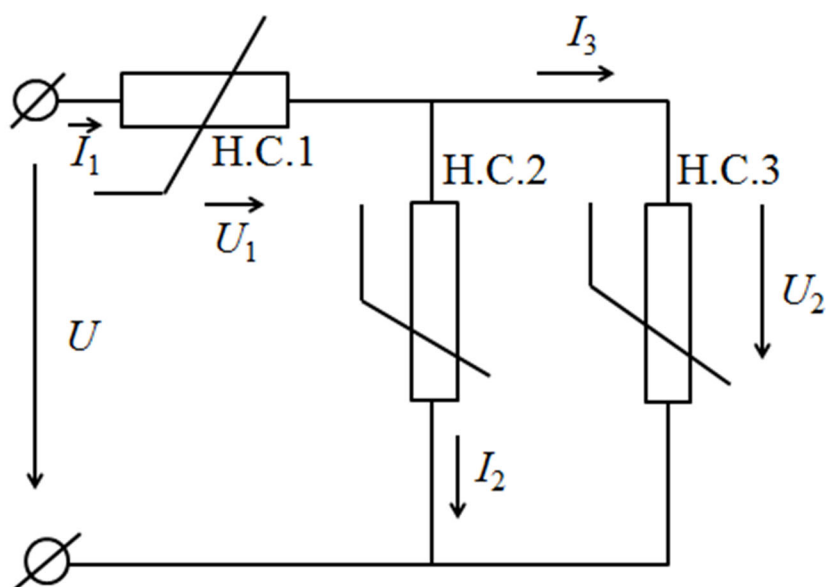


Рис. 4.9

5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

5.1. Основные определения

Переменным называется электрический ток, который с течением времени t меняет свое значение I или направление.

В электротехнике особую роль играет периодический переменный ток, мгновенное значение которого изменяется по закону синуса или косинуса

$$i(t) = I_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_i\right) = I_m \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi_i) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i), \quad (5.1)$$

где I_m – максимальное или амплитудное значение тока; $T = 1/f$ период; f – частота. Величина $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$ – *круговая*, или *угловая частота*.

Аргумент функции (5.1) $\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_i$ является *полной фазой*; φ_i – начальная фаза, когда время $t = 0$.

Электроизмерительные приборы регистрируют *действующее* (*среднеквадратичное*) значение переменного тока, которое является эквивалентом теплового, механического, магнитного и других видов действия тока. Для определения среднеквадратичного значения тока нужно проинтегрировать функцию (5.1) за период T

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cdot \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2} \cdot dt} = \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t \cdot dt \right)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Подобным образом определяются действующие значения и направления напряжения (U) и ЭДС (E).

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (5.3)$$

Максимальные значения переменного тока I_m , напряжения U_m и ЭДС E_m в $\sqrt{2}$ раз больше соответствующих значений действующих значений переменного тока I , напряжения U и ЭДС E .

Среднее значение переменного тока принято как положительный полупериод функции синуса и вычисляется из выражения (5.4)

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega t \cdot dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0,638 I_m. \quad (5.4)$$

Такие же значения имеют среднее напряжение и средняя ЭДС

$$E_{\text{ср}} = 2E_{\text{ср}} / \pi; \quad U_{\text{ср}} = 2U_{\text{ср}} / \pi. \quad (5.5)$$

Мгновенные значения токов напряжения и ЭДС определяются из законов Ома и Кирхгофа

$$i = \frac{u}{R}; \quad (5.6)$$

$$\sum i = 0; \quad (5.7)$$

$$\sum e = \sum u. \quad (5.8)$$

5.2. Представление синусоидальных функций в комплексной форме

Расчеты электрических цепей синусоидального тока или напряжения упрощаются с представлением их в комплексной форме. При этом используется преобразование тригонометрической формы функции в показательную форму комплексного числа по формуле Эйлера

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x; \quad (5.9)$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}, \quad (5.10)$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Применительно к синусоидальному напряжению можно записать

$$U_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}. \quad (5.11)$$

Выражение (5.11) является комплексной формой записи синусоидального напряжения, где $\dot{U}_m = U_m \cdot e^{j\varphi}$ – комплексная амплитуда.

Преобразование Эйлера позволяет перейти из комплексной формы записи к тригонометрической

$$\begin{aligned} J_m [\dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}] &= J_m [U_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}] = \\ &= J_m [U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) + jU_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)] = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = u. \end{aligned} \quad (5.12)$$

В комплексной записи выражения (5.12) мнимая часть соответствует мгновенному значению напряжения. Аналогичные выражения можно записать для тока и ЭДС переменной цепи.

Замечание. В этом учебном пособии ставится точка над символами комплексного напряжения, тока или ЭДС вместо подчеркивания, как принято в некоторых изданиях.

При анализе цепей переменного тока синусоидальную функцию времени представляют в виде вектора на комплексной плоскости. Вращение этого вектора вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω равно циклической частоте синусоидального напряжения (тока, ЭДС). Векторная форма представления синусоидального напряжения (тока, ЭДС) позволяет перейти от тригонометрической формы записей к алгебраической, а также получить количественные и фазовые соотношения параметров электрической цепи.

5.3. Сопротивление в цепи переменного тока

В электрической цепи с источником переменного тока, к зажимам которого подключено сопротивление R , протекает синусоидальный ток

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i). \quad (5.13)$$

Следовательно, по закону Ома в нем возникает падение напряжения, которое имеет форму функции синуса или косинуса

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (5.14)$$

Из выражений (5.13) и (5.14) видно, что разность фаз между *напряжением на сопротивлении и током*, протекающим через него, отсутствует, $\varphi_i = \varphi_u$, амплитудное значение напряжения в R раз больше амплитуды тока $U_m = RI_m$.

В комплексной форме запись тока и напряжения получим из выражений (5.13) и (5.14)

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R}, \quad (5.15)$$

где $\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j\varphi_i}$ и $\dot{U}_m = U_m \cdot e^{j\varphi_u}$ – максимальные значения комплексного тока и напряжения, соответственно.

Векторная диаграмма тока и напряжения для сопротивления в цепи переменного тока приведена на рис. 5.1.

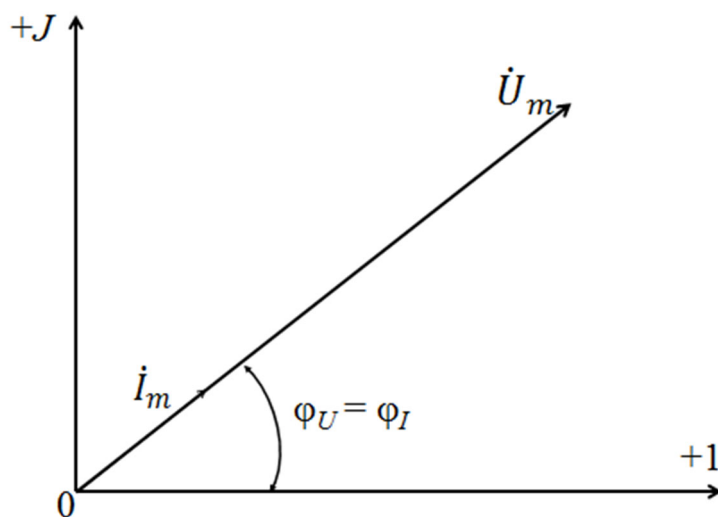


Рис. 5.1

Из диаграммы следует, что направления векторов напряжения и тока совпадают.

Сопротивление участка цепи с постоянным источником тока называется *омическим*, а сопротивление того же участка с переменным источником тока – *активным сопротивлением*.

5.4. Индуктивная катушка в цепи переменного тока

Представим переменный источник ЭДС, к зажимам которого подключена идеальная катушка с индуктивностью L , по которой протекает синусоидальный ток

$$i = I_m \cdot \sin \omega t. \quad (5.16)$$

Изменение модуля и направления тока генерирует в индуктивной катушке переменное магнитное поле, ЭДС самоиндукции которого определяется по формуле

$$e_L = -L \cdot \frac{di}{dt}. \quad (5.17)$$

Согласно второму закону Кирхгофа, ЭДС самоиндукции уравновешивается значением напряжения на катушке

$$u + e_L = 0. \quad (5.18)$$

Подставив выражения (5.16) и (5.17) в формулу (5.18), получим

$$u = -e_L = L \cdot \frac{di}{dt} = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \cos \omega t = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (5.19)$$

Из уравнения (5.19) видно, что разность начальных фаз напряжения u и тока равна $+\pi/2$, это означает, что ток в индуктивной катушке отстает по фазе от напряжения на 90°

$$\varphi_u = \varphi_i + \pi/2. \quad (5.20)$$

Для реальной катушки, когда сопротивление катушки равно R_L , уравнение (5.20) примет вид

$$u = R \cdot I_m \cdot \sin \omega t + \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (5.21)$$

Расхождение фаз в уравнениях (5.20) и (5.21) объясняется тем, что ЭДС самоиндукции и ток в катушке направлены в противоположные стороны.

Следовательно, возрастание тока уменьшает величину ЭДС, вследствие чего происходит отставание начальной фазы тока от напряжения на угол φ меньше чем 90° ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Строгое значение разностной фазы между напряжением и током определяется из соотношения R и L .

Комплексное уравнение для тока и напряжения в переменной цепи с реальной индуктивностью представится в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= R \cdot \dot{I}_m + \omega \cdot L \cdot e^{j90^\circ} \cdot \dot{I}_m = R \cdot \dot{I}_m + j \cdot \omega \cdot L \cdot \dot{I}_m = \\ &= (R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot \dot{I}_m = Z_L \cdot \dot{I}_m = z_L \cdot e^{j\varphi} \cdot \dot{I}_m; \\ e^{j90^\circ} &= \cos 90^\circ + j \cdot \sin 90^\circ = j, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где Z_L – полное реактивное сопротивление индуктивной катушки ($Z_L = R + j \cdot X_L$); z_L – абсолютное значение реактивного сопротивления; $\varphi = \arctg \frac{\omega \cdot L}{R}$ – начальная фаза реактивного сопротивления; $X_L = \omega \cdot L$ – индуктивное сопротивление.

Абсолютное значение полного реактивного сопротивления индуктивной катушки определяется выражением

$$z_L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}. \quad (5.23)$$

Векторная диаграмма индуктивной катушки, представленная на комплексной плоскости, приведена на рис. 5.2.

Из векторной диаграммы (см. рис. 5.2) видно, что начальная фаза напряжения на идеальной индуктивности опережает начальную фазу тока на $\pi/2$.

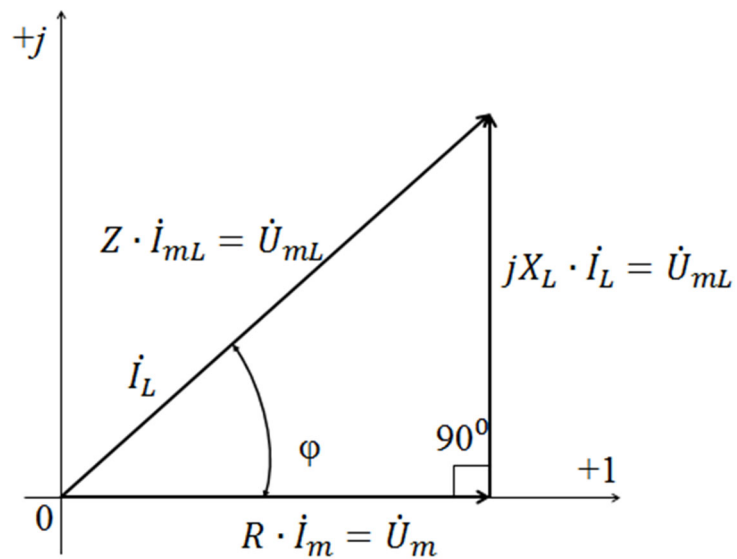


Рис. 5.2

Применив закон Ома для участка цепи к векторной диаграмме, можно перейти к треугольнику сопротивлений (рис. 5.3).

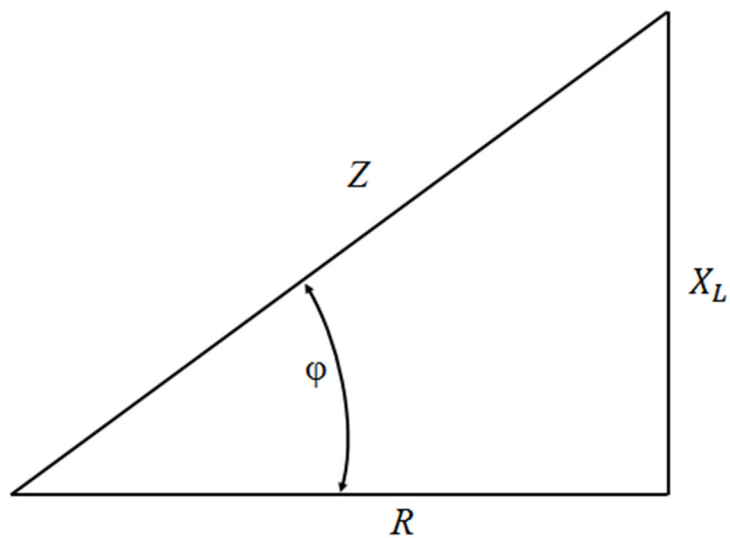


Рис. 5.3

Из рис. 5.2 можно получить некоторые формулы, устанавливающие взаимосвязь между активным, реактивным и полным сопротивлениями переменной цепи, содержащей реальную индуктивность:

$$\cos \varphi = \frac{R}{z}; \quad \sin \varphi = \frac{X_L}{z}; \quad (5.24)$$

$$z = \sqrt{R^2 + X_L^2}; \quad (5.25)$$

$$R = z \cdot \cos \varphi; \quad X_L = z \cdot \sin \varphi. \quad (5.26)$$

5.5. Конденсатор в цепи переменного тока

Разберем схему переменной электрической цепи, к зажимам которой подключен конденсатор емкостью C .

Напряжение в цепи меняется по формуле $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$, тогда изменение тока протекающего по цепи, определится согласно выражению

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} = \omega \cdot C \cdot U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ). \quad (5.27)$$

Из выражения (5.27) следует, что фаза *тока в емкостном элементе опережает фазу напряжения на $\pi/2$*

$$\varphi_i = \varphi_U + \pi/2. \quad (5.28)$$

В комплексной форме ток в конденсаторе из выражения (5.27) представится в виде

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m \cdot e^{j90^\circ}}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{j \cdot \dot{U}_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{\dot{U}_m}{-j X_C}; \quad e^{j90^\circ} = j, \quad (5.29)$$

где $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – *емкостное сопротивление*, которое ограничивает величину тока заряда-разряда конденсатора.

На рис. 5.4 представлена векторная диаграмма тока и напряжения. Видно, что напряжение отстает по фазе на $\pi/2$ от тока, протекающего через конденсатор.

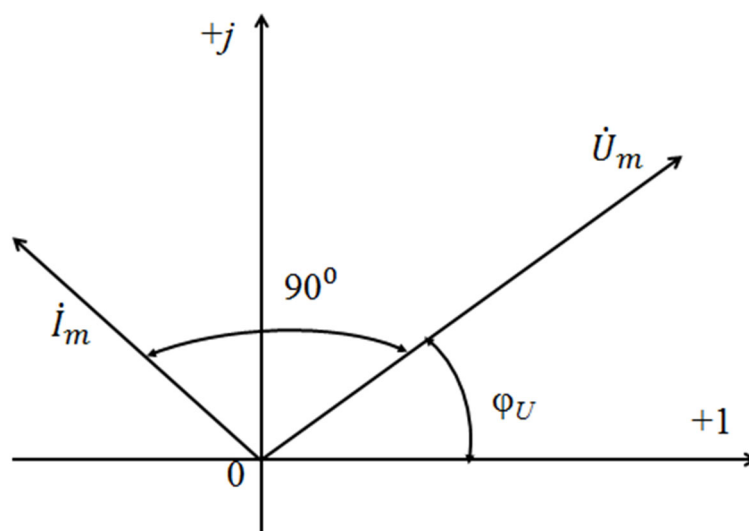


Рис. 5.4

5.6. Последовательное соединение R , L и C элементов в цепь переменного тока

На рис. 5.5 представлено условно-графическое отображение участка переменной электрической цепи, содержащего последовательно соединенные три элемента: реальную катушку индуктивностью L , резистор сопротивлением R и конденсатор емкостью C . Ток и напряжение в цепи изменяются по синусоидальному закону

$$i = I_m \cdot \sin \omega t; \quad u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u).$$

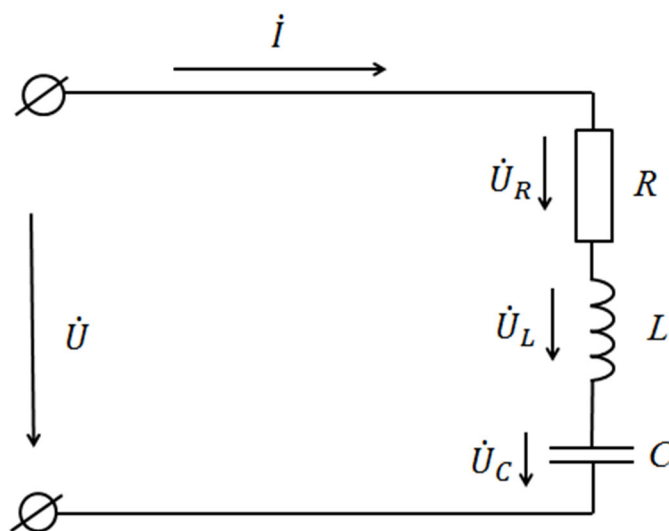


Рис. 5.5

Согласно второму закону Кирхгофа, полное напряжение цепи равно алгебраической сумме напряжений на каждом элементе:

$$u = u_R + u_L + u_C. \quad (5.30)$$

Известно, что падение напряжения на отдельных пассивных элементах R , L и C связано с соответствующими значениями токов согласно формулам

$$u_R = i \cdot R; \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt. \quad (5.31)$$

После подстановки этих формул в уравнение (5.30) и преобразования в комплексной форме получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dot{U}_m &= \left(R \cdot \dot{I}_m + X_L \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j90^\circ} + X_C \cdot \dot{I}_m \cdot e^{-j90^\circ} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= \left(R \cdot \dot{I}_m + j \cdot X_L \cdot \dot{I}_m - j \cdot X_C \cdot \dot{I}_m \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Из выражения (5.32) следует:

1. В активном элементе отсутствует разность между начальными фазами напряжения и тока.

2. На индуктивности начальная фаза напряжения опережает фазу тока на $\pi/2$.

3. На конденсаторе фаза напряжения отстает от фазы тока на $\pi/2$.

Комплексная форма записи уравнения для действующих токов и напряжений представляется в виде

$$\dot{U} = \dot{I} [R + j(X_L - X_C)] = \dot{I} \cdot Z = \dot{I} \cdot z \cdot e^{j\varphi}, \quad (5.33)$$

где $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – емкостное сопротивление; $X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление; $Z = R + j(X_L - X_C)$ – полное комплексное сопротивление цепи;

$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ – модуль комплексного сопротивления;

$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$ – начальная фаза комплексного сопротивления.

Рассмотрим частные случаи.

1. $X_L > X_C$. Реактивное сопротивление индуктивности больше реактивного сопротивления емкости, цепь носит индуктивный характер. На векторной диаграмме (рис. 5.6) величины $\dot{U}_L = j \cdot X_L \cdot \dot{I} \neq \dot{U}_C = -jX_C \cdot \dot{I}$ не равны друг другу и противоположны по направлению, поэтому частично компенсируются.

2. $X_L < X_C$. Реактивное сопротивление катушки меньше реактивного сопротивления конденсатора. Цепь носит емкостный характер. На векторной диаграмме (рис. 5.7) величина напряжения на емкости не равна величине напряжения на индуктивности $\dot{U}_L = j \cdot X_L \cdot \dot{I} \neq \dot{U}_C = -jX_C \cdot \dot{I}$ и направлена в противоположную сторону, поэтому эти напряжения частично компенсируют друг друга.

3. $X_L = X_C$. Реактивные сопротивления индуктивности и емкости равны. На векторной диаграмме (рис. 5.8) напряжение на емкости по модулю равно напряжению на индуктивности $\dot{U}_L = j \cdot X_L \cdot \dot{I} = \dot{U}_C = -jX_C \cdot \dot{I}$ и направлено в противоположную сторону, поэтому напряжения полностью компенсируют друг друга. В электрической цепи наступает *режим резонанса напряжения*.

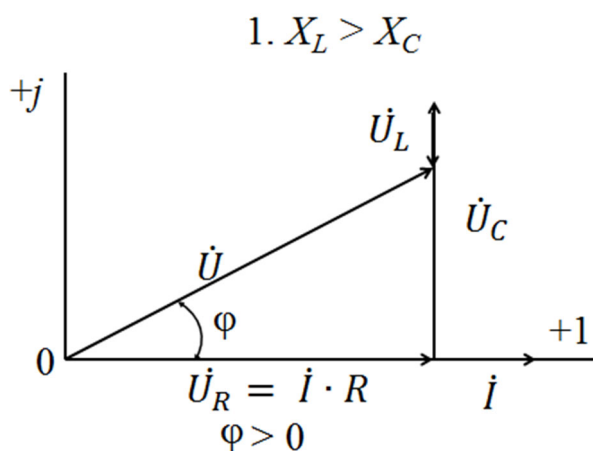


Рис. 5.6

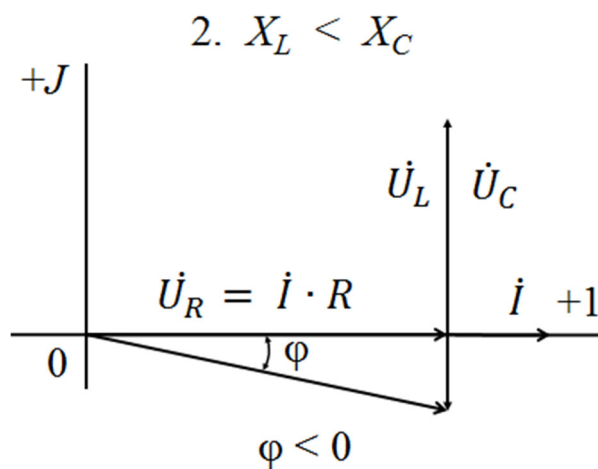


Рис. 5.7

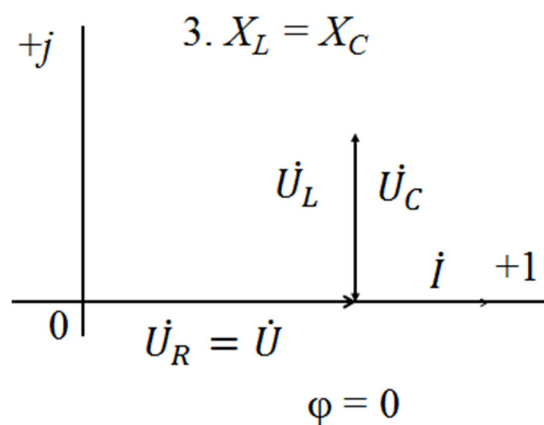


Рис. 5.8

Резонанс напряжения имеет некоторые характерные особенности:

1. При равенстве реактивного сопротивления нулю, полное сопротивление контура равно активному сопротивлению, и оно минимальное, тогда ток в контуре достигает максимального значения

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{R}. \quad (5.34)$$

2. При резонансе напряжения входное напряжение контура становится равным напряжению на активном элементе. А когда $X_L = X_C > R$ реактивное напряжение становится больше входного напряжения, при этом наблюдается усиление напряжения.

3. Активная мощность, потребляемая контуром, максимальная, так как она пропорциональна квадрату активного тока.

Из условия возникновения резонанса напряжения в контуре определяется резонансная частота $X_L = X_C$ или $\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C}$, отсюда определяется резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}. \quad (5.35)$$

Условие резонанса напряжения в контуре достигается тремя способами: изменением частоты ω_0 , изменением индуктивности L и изменением емкости C .

5.7. Параллельное соединение R , L и C элементов в цепь переменного тока

На рис. 5.9 приведено условно графическое отображение участка переменной цепи с параллельно соединенными элементами R , L и C . Напряжение к зажимам источника имеет синусоидальную форму $u = U_m \cdot \sin \omega t$.

Применим первый закон Кирхгофа для определения тока на входе схемы

$$i = i_R + i_L + i_C. \quad (5.36)$$

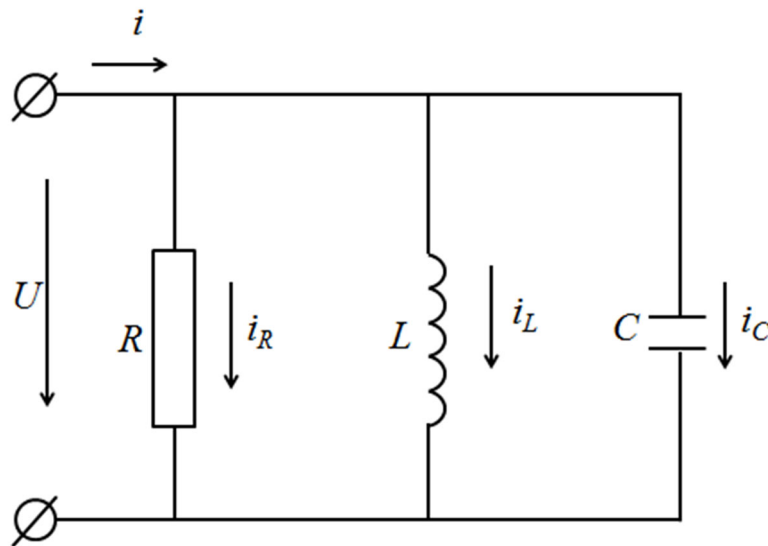


Рис. 5.9

Воспользуемся известными формулами для определения токов, протекающих через R , L и C элементы

$$i_R = \frac{U}{R} = g \cdot U_m \cdot \sin \omega t,$$

где $g = \frac{1}{R}$ – активная проводимость; $i_L = \frac{1}{L} \int u dt$; $i_C = C \frac{du}{dt}$.

После подстановки их в (5.36) и преобразования в комплексной форме уравнение примет вид

$$\dot{I} = g \cdot \dot{U} - \dot{U} \cdot j \cdot b_L + \dot{U} \cdot j \cdot b_C = \dot{U}[g + j(b_C - b_L)] = \dot{U} \cdot Y = \dot{U} \cdot y \cdot e^{j\varphi}, \quad (5.37)$$

где $Y = g + j(b_C - b_L)$ – комплексная проводимость; $y = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2}$ – полная проводимость; $\varphi = \arctg \frac{b_C - b_L}{g}$ – начальная фаза комплексной про-

водимости; $b_L = \frac{1}{\omega \cdot L}$ – индуктивная проводимость; $b_C = \omega \cdot C$ – емкостная проводимость.

На рис. 5.10–5.12 представлены векторные диаграммы на комплексной плоскости параллельного соединения R, L и C элементов в контуре синусоидального тока для случаев $b_C < b_L$, $b_C > b_L$ и $b_C = b_L$ соответственно.

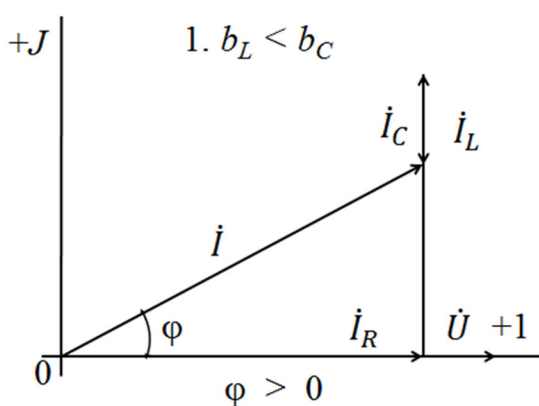


Рис. 5.10

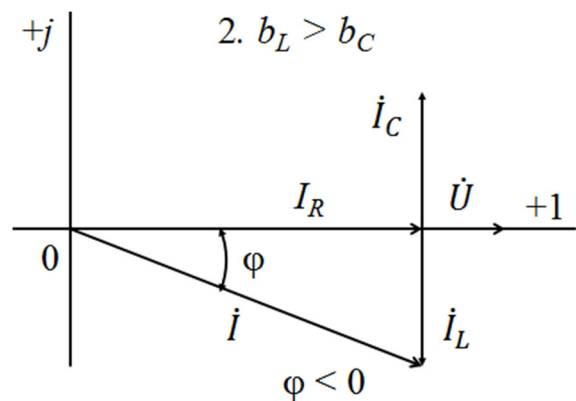


Рис. 5.11

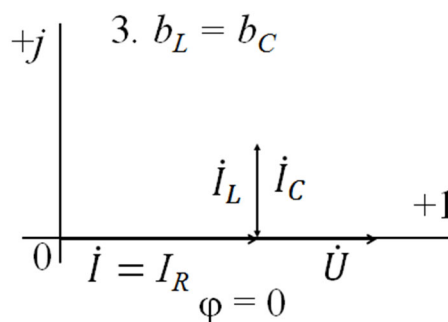


Рис. 5.12

После несложного преобразования уравнения (5.36) можно получить условие возникновения резонанса тока для равенства индуктивной и емкостной проводимости $b_C = b_L$ и определить резонансную частоту $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C \cdot L}}$.

В режиме резонанса тока полная проводимость цепи $y = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2} = g$ – минимальна, а полное сопротивление $z = \frac{1}{y}$ –

максимально. В случае резонансного режима работы цепи ток $I = \frac{U}{z}$, проходящий через неразветвленный участок, *принимает минимальное значение. Это связано с максимальным значением полного сопротивления цепи.*

В идеализированном случае $R = 0$, $y = b_C - b_L = 0$ и $z = \frac{1}{y} = \infty$.

Зафиксируем некоторые особенности резонанса токов.

1. Величина резонансной частоты зависит не только от сопротивлений реактивных элементов, но и от сопротивления активного элемента.
2. Резонанс токов возможен, если активное сопротивление не равно реактивному сопротивлению.
3. Индуктивный и емкостный токи по модулю равны и имеют противоположные знаки, следовательно, полностью компенсируют друг друга.
4. Если активное сопротивление намного меньше реактивных сопротивлений, частота при резонансе тока равна частоте при резонансе напряжения.

5.8. Резонансный режим в цепи, состоящей из параллельно включенных R , L и C элементов

Рассмотрим упрощенную синусоидальную цепь с параллельно включенными реальной индуктивной катушкой и конденсатором.

Резонансный режим тока в этой цепи с параллельно включенными пассивными элементами R , L и C (рис. 5.13) наступает, когда комплексные проводимости индуктивной и емкостной ветвей выравниваются

$$b_{LK} = b_C, \quad (5.38)$$

где $b_{LK} = \frac{\omega_0 \cdot L_K}{R_K^2 + (\omega_0 \cdot L_K)^2} = \frac{\omega_0 \cdot L_K}{z_K^2}$ – индуктивная проводимость катушки;

$b_C = \omega_0 \cdot C$ – емкостная проводимость.

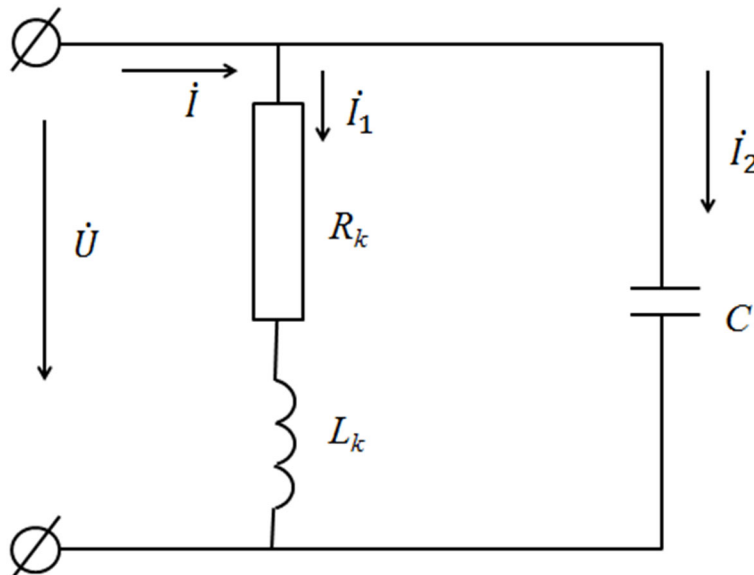


Рис. 5.13

Подстановку значений индуктивной и емкостной проводимостей в выражение (5.37) получим

$$\frac{\omega_0 \cdot L_K}{R_K^2 + (\omega_0 \cdot L_K)^2} = \omega_0 \cdot C. \quad (5.39)$$

Из (5.39) легко можно определить частоту, при которой наступает резонанс тока

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_K \cdot C}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{L_K}{C} - R_K^2}{\frac{L_K}{C}}}. \quad (5.40)$$

Анализ выражения (5.40) показывает, что резонансная частота зависит не только от индуктивности и емкости, но и от активного сопротивления R_K .

На рис. 5.14 представлена векторная диаграмма контура в режиме резонанса тока.

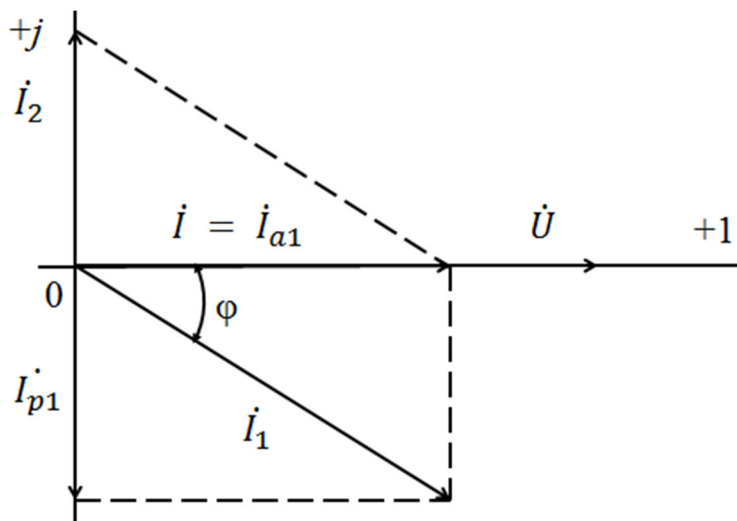


Рис. 5.14

Разложим ток I_1 на две взаимно перпендикулярных составляющих: составляющей тока I_{a1} , направление которой совпадает с направлением напряжения, является активной, другая – реактивной составляющей тока I_{p1} , сдвиг фаз, которой с напряжением составляет $\pi/2$.

Начальная фаза тока I_2 опережает фазу напряжения на $\pi/2$, а фаза тока I_1 отстает от фазы напряжения на угол φ , где $\varphi = \arctg \frac{\omega_0 \cdot L_K}{R_K}$. В неразветвленной части схемы фаза тока совпадает с фазой напряжения $\varphi_i = \varphi_u$.

В режиме резонанса тока реактивная составляющая тока I_{p1} и емкостный ток I_2 по абсолютной величине равны и направлены в противоположные стороны, т. е. полностью компенсируют друг друга.

5.9. Мощность в цепи переменного тока

В общем случае мгновенные значения тока и напряжения синусоидальной цепи отличаются на некоторую начальную фазу φ

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi); \quad i = I_m \cdot \sin \omega t. \quad (5.41)$$

Мгновенным значением мощности называется произведение мгновенного напряжения на мгновенный ток на входе цепи

$$\begin{aligned}
 p &= u \cdot i = U_m \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin \omega t = \\
 &= U_m \cdot I_m \cdot \frac{1}{2} \cdot [\cos(\omega t + \varphi - \omega t) - \cos(\omega t + \varphi + \omega t)] = \\
 &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] = U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi). \quad (5.42)
 \end{aligned}$$

Из (5.42) следует, что мощность имеет две составляющие: постоянную и переменную, причем переменная часть изменяется с двойной частотой.

Баланс входящей и выходящей мощностей соответствует среднему за период значению мощности или *активной мощности*:

$$\begin{aligned}
 p_{\text{ср}} &= \frac{1}{T} \int_0^T [U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi)] \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi \int_0^T dt - \frac{1}{T} \cdot U \cdot I \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) \cdot dt = U \cdot I \cdot \cos \varphi. \quad (5.43)
 \end{aligned}$$

Учитывая формулы (5.13), (5.14) и (5.15), можно определить среднюю мощность

$$p_{\text{ср}} = U \cdot I \cdot \cos \varphi = U \cdot I \cdot \frac{R}{Z} = I^2 \cdot R = P \text{ (Вт)}. \quad (5.44)$$

Полной мощностью является максимальная активная мощность, которая определяется по формуле $S = UI$.

Коэффициент мощности – величина, равная отношению активной мощности к полной

$$\frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi. \quad (5.45)$$

Мощность характеризует необратимое преобразование электрической энергии в другой вид энергии.

В реактивном элементе (L или C элементе) активная мощность равна $P = U \cdot I \cdot \cos 90^\circ = 0$, так как сдвиг фаз напряжения и тока в индуктивности или емкости равен 90° . В реактивных элементах отсутствуют необратимые потери электрической энергии, не происходит нагрева элементов.

Интенсивность обмена энергией между источником и нагрузкой характеризуется *реактивной мощностью* Q , которую можно получить после преобразования выражения (5.45):

$$\begin{aligned} p &= U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I (\cos 2\omega t \cdot \cos \varphi - \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi) = \\ &= U \cdot I \cdot \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) + U \cdot I \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t = p_1 + p_2, \end{aligned} \quad (5.46)$$

где $p_1 = U \cdot I \cdot \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t)$ – мгновенная мощность в активном сопротивлении; $p_2 = U \cdot I \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t$ – мгновенная мощность в реактивном элементе.

Максимальное или амплитудное значение реактивной мощности p_2 определяется как

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = U \cdot I \cdot \frac{x}{z} I^2 \cdot x \text{ (ВАр)}, \quad \sin \varphi = \frac{x}{z}, \quad (5.47)$$

где x – реактивное сопротивление.

Амплитудное значение суммарной мощности $p = p_1 + p_2$ называется *полной мощностью*.

6. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

6.1. Основные определения

Трехфазная система представляется как совокупность электрических цепей с тремя источниками синусоидальных ЭДС, имеющими одинаковые амплитуды и частоты. Однако если фазы у источников сдвинуты друг относительно друга на одинаковый угол, такая трехфазная система ЭДС является симметричной. Система является несимметричной, если численные значения всех трех ЭДС не равны или сдвинуты друг относительно друга на угол, не равный 120° . Часть трехфазной системы электрических цепей, в которой может протекать один из токов трехфазной системы, называется фазой. Фазой является обмотка генератора, в которой возбуждается электрический ток. Нагрузка проводами присоединяется к этой обмотке, т. е. к фазе.

Принцип действия трехфазного генератора заключается в том, что в статоре (неподвижная часть генератора) пространственно размещаются симметрично смещенные на 120° три обмотки или фазы. В этих фазах генерируется трехфазный электрический ток, с одинаковым амплитудным значением и сдвинутыми на 120° фазами.

Если считать начальную фазу ЭДС e_a равной нулю, то фазы других обмоток будут сдвинуты на $+120^\circ$ и -120° . В этом случае мгновенные значения и соответствующие им комплексные выражения действующих ЭДС можно выразить в следующем виде:

$$e_a = E_m \sin \omega t; \quad e_B = E_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ); \quad e_c = E_m \cdot \sin(\omega t + 120^\circ); \quad (6.1)$$

$$\dot{E}_A = E; \quad \dot{E}_B = E \cdot e^{-j120^\circ}; \quad \dot{E}_C = E \cdot e^{j120^\circ}. \quad (6.2)$$

Главным свойством симметрии трехфазных систем является то, что сумма мгновенных значений ЭДС равна нулю

$$e_A + e_B + e_C = 0. \quad (6.3)$$

Это доказывается выражением

$$\begin{aligned} \dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C &= E \left(1 + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ} \right) = \\ &= E \left(1 + \cos 120^\circ - j \cdot \sin 120^\circ + \cos 120^\circ + j \cdot \sin 120^\circ \right) = E \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

На электрических схемах начала обмоток генератора обозначаются буквами латинского алфавита A , B , C , а их концы – буквами X , Y , Z (рис. 6.1). Направление ЭДС указывается от конца обмотки генератора к ее началу.

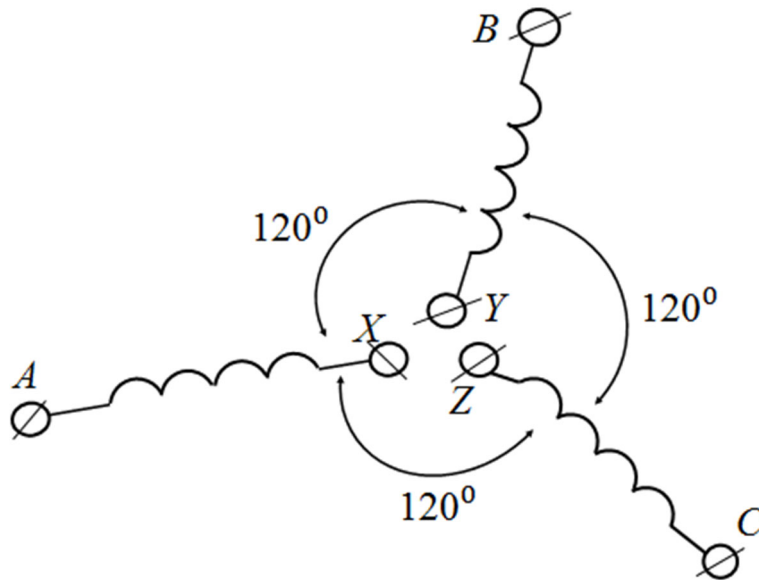


Рис. 6.1

Нагрузка соединяется прямым и обратным проводами с обмоткой генератора. Если к каждой фазе генератора подключить нагрузку, получатся три изолированные и независимые электрические цепи. Получается несвязанная трехфазная система, в которой имеется шесть соединительных проводов. Эффективность действия трехфазных систем повышается с использованием способов соединения трехфазных цепей в виде звезды или треугольника.

6.2. Соединение нагрузки звездой

На рис. 6.2 приведена схема трехфазной электрической цепи, в которой фазы генератора и нагрузка соединены между собой в виде трехлучевой звезды. Провод, соединяющий узлы генератора и нагрузку, называется *нейтральным*, или *нулевым*.

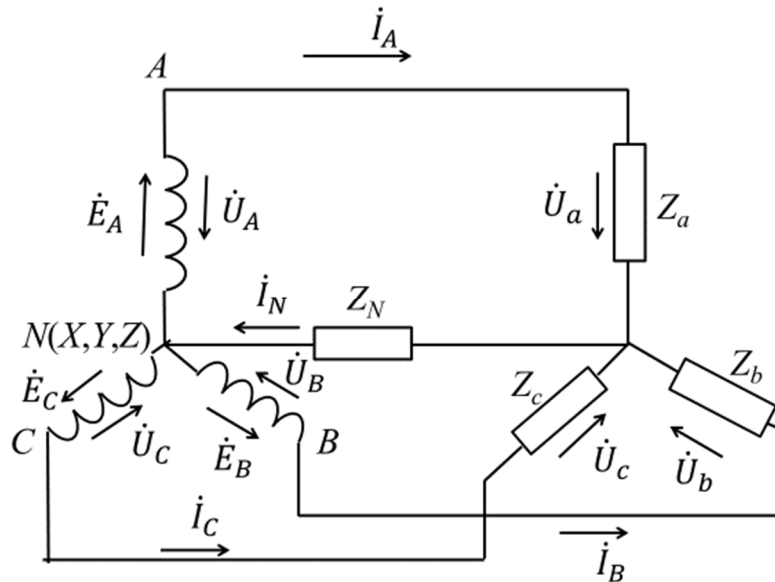


Рис. 6.2

Провода, соединяющие начало генератора и нагрузку, называются *линейными* проводами, напряжения между линейными проводами (U_{AB} , U_{BC} , U_{CA}) являются линейными напряжениями. Фазные напряжения возникают при разности потенциалов между линейными и нейтральным проводами.

Существуют различные способы соединений генератора с нагрузкой. Эффективность, стоимость и эксплуатационные расходы увеличиваются при снижении количества соединительных проводов между генератором и нагрузкой. Однако генераторы обычно соединяют в виде трехлучевой звезды, при котором линейные провода соединены последовательно с фазами генератора и нагрузки, следовательно, линейные токи равны фазным токам $I_{\text{л}} = I_{\text{ф}}$.

Геометрическое построение в виде треугольника векторов напряжений, приведенное на рис. 6.3, позволяет установить связь между фазными

и линейными напряжениями симметричного трехфазного генератора. В комплексной форме эта связь запишется

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (6.5)$$

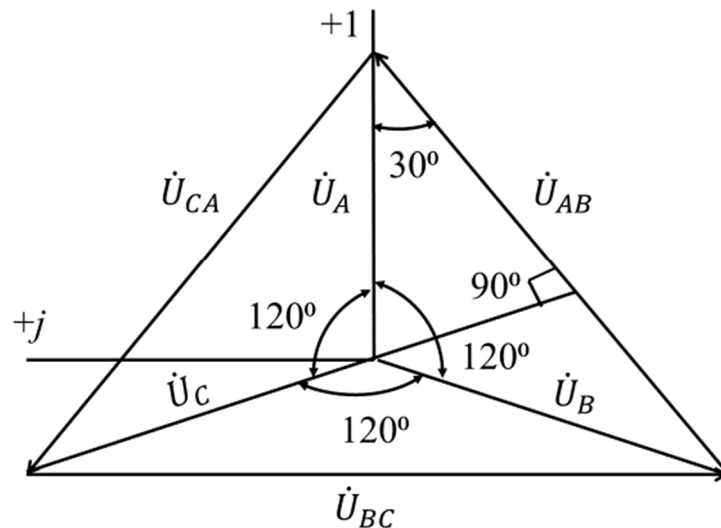


Рис. 6.3

Из тригонометрической формы записи получим

$$U_{\text{л}} = U_{AB} = 2U_{\text{ф}} \cdot \cos 30^\circ = 2U_{\text{ф}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot U_{\text{ф}} \quad (6.6)$$

линейное напряжение больше фазного в $\sqrt{3}$ раз.

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} \cdot U_{\text{ф}}. \quad (6.7)$$

6.3. Соединение нагрузки в треугольник

На рис. 6.4 приведено условно-графическое отображение трехфазной цепи, в котором нагрузки соединены в виде треугольника. В этом способе соединений фазные напряжения равны линейным напряжениям генератора

$$U_{\phi} = U_{\text{л}}. \quad (6.8)$$

Пусть I_{ab}, I_{bc}, I_{ca} – фазные токи, которые определяются по закону Ома; I_A, I_B, I_C – линейные токи, которые вычисляются через фазные токи согласно первому закону Кирхгофа для узлов a, b, c . В комплексной форме уравнения запишутся в виде

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}. \quad (6.9)$$

Линейный ток равен геометрической разности соответствующих фазных токов.

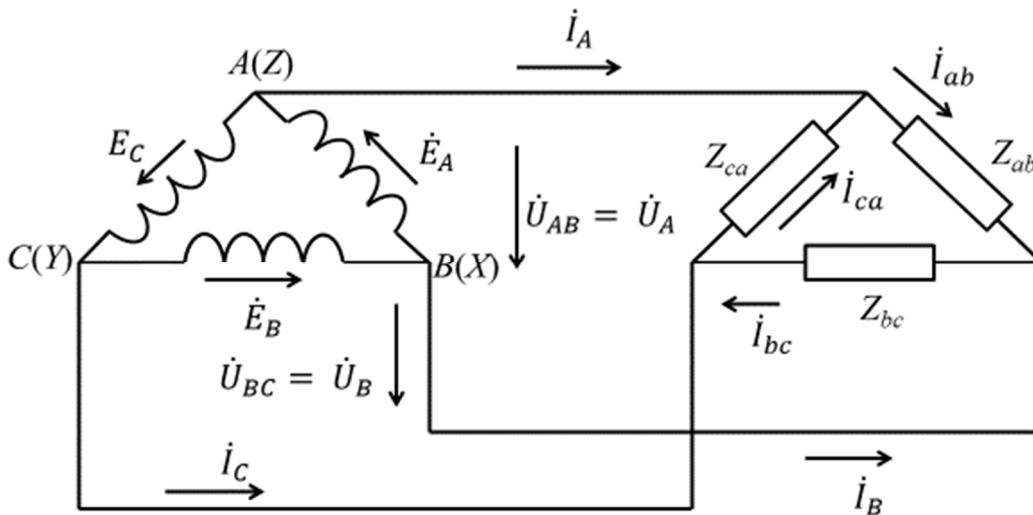


Рис. 6.4

На рис. 6.5 представлено геометрическое построение векторов линейных токов симметричной трехфазной цепи, соединенной в виде треугольника. Учитывая, что трехфазная цепь имеет симметричную нагрузку соединения, т. е. когда

$$\dot{Z}_{ab} = \dot{Z}_{bc} = \dot{Z}_{ca} = Z_{\phi} e^{i\varphi}, \quad (6.10)$$

сопротивления фаз одинаковы.

Из векторной диаграммы видно, что направления фазных токов и напряжений смещены на одинаковый угол φ , это объясняется наличием активных сопротивлений в цепи.

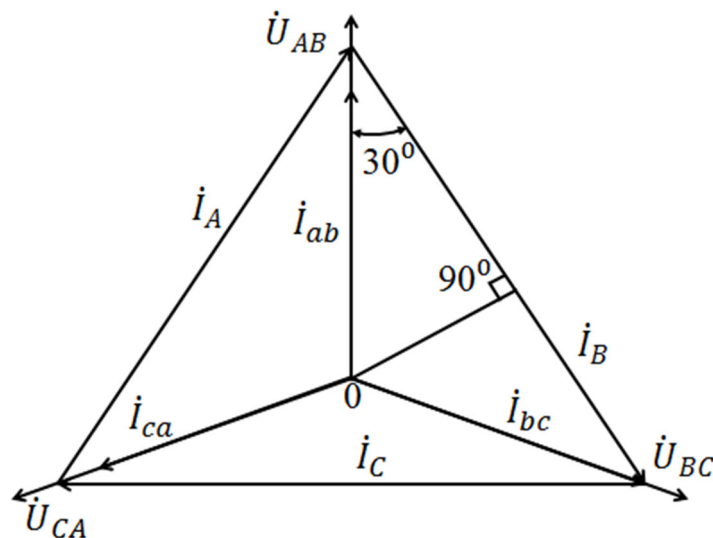


Рис. 6.5

Расчеты линейных токов при симметричной нагрузке можно выполнять по формуле

$$I_{\text{л}} = 2I_{\text{ф}} \cdot \cos 30^\circ = 2I_{\text{ф}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot I_{\text{ф}}. \quad (6.11)$$

Для расчета линейных токов с несимметричной нагрузкой также применяется формула (6.9), при этом учитываются конкретные параметры активных сопротивлений каждой фазы.

6.4. Расчет цепи при соединении нагрузки звездой

В общем случае трехфазная цепь, нагрузки которой соединяются в виде звезды, представлена на рис. 6.6.

В четырехпроводной цепи фазные и линейные напряжения равны ($\dot{U}_A = \dot{U}_a; \dot{U}_B = \dot{U}_b; \dot{U}_C = \dot{U}_c$), а сопротивления фаз нагрузки различаются ($Z_A \neq Z_B \neq Z_C$). Сопротивление нейтрального провода равно Z_N .

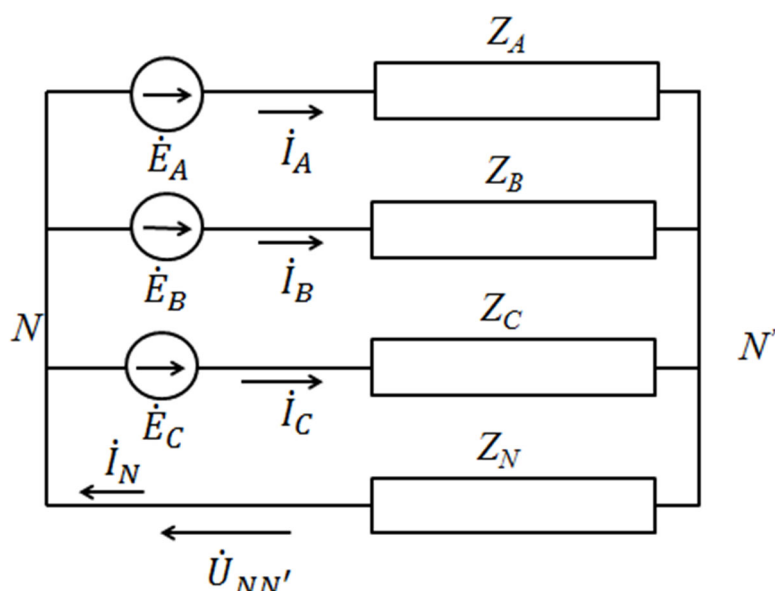


Рис. 6.6

Разность потенциалов между нейтральными точками генератора и нагрузки $\dot{U}_{NN'}$ определяется из выражения

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{E}_A \cdot \frac{1}{Z_A} + \dot{E}_B \cdot \frac{1}{Z_B} + \dot{E}_C \cdot \frac{1}{Z_C}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_N}}. \quad (6.12)$$

Комплексные фазные токи определяются в соответствии с законом Ома для активной ветви

$$\begin{aligned} \dot{i}_A &= \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_{N'N}}{Z_A} = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{N'N}}{Z_A} = \frac{\dot{U}_a}{Z_A}; \\ \dot{i}_B &= \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_{N'N}}{Z_B} = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_{N'N}}{Z_B} = \frac{\dot{U}_b}{Z_B}; \\ \dot{i}_C &= \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_{N'N}}{Z_C} = \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_{N'N}}{Z_C} = \frac{\dot{U}_c}{Z_C}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ток, протекающий через нейтральный провод, определяется согласно первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{N'N}}{Z_N}. \quad (6.14)$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Симметричная система с одинаковым и конечным значением фазных сопротивлений $Z_A = Z_B = Z_C = R$.

Подставив эти значения сопротивлений в (6.12), учитывая, что алгебраическая сумма ЭДС симметричной трехфазной системы равна нулю ($\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$), получим:

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{E}_A \cdot \frac{1}{R} + \dot{E}_B \cdot \frac{1}{R} + \dot{E}_C \cdot \frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_N}} = \frac{\frac{1}{R}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C)}{\frac{3}{R} + \frac{1}{Z_N}} = 0. \quad (6.15)$$

Из формулы (6.15), следует, что фазные токи по модулю равны, а направление их фаз совпадает с направлением соответствующих фаз напряжения. Ток в узле N определяется по первому закону Кирхгофа как алгебраическая сумма фазных токов $\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = \dot{I}_N$. Однако для симметричной системы алгебраическая сумма фазных токов в узле равна нулю, следовательно, ток в нейтральном проводе отсутствует, и нет необходимости такого провода.

На рис. 6.7 представлено геометрическое построение векторов линейных напряжений симметричной трехфазной цепи нагрузки, которые соединены в виде треугольника.

2. При неравенстве значений сопротивления нагрузки получается несимметричная схема. Допустим, сопротивления нагрузки определяются как $R_A < R_B = R_C$, а сопротивление нейтрального провода равно нулю: $Z_N = 0$. Тогда из выражения (6.12) напряжение нейтрального провода определится

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{E}_A \cdot \frac{1}{R_A} + \dot{E}_B \cdot \frac{1}{R_B} + \dot{E}_C \cdot \frac{1}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} + \infty} = 0; \quad \frac{1}{Z_N} = \infty. \quad (6.16)$$

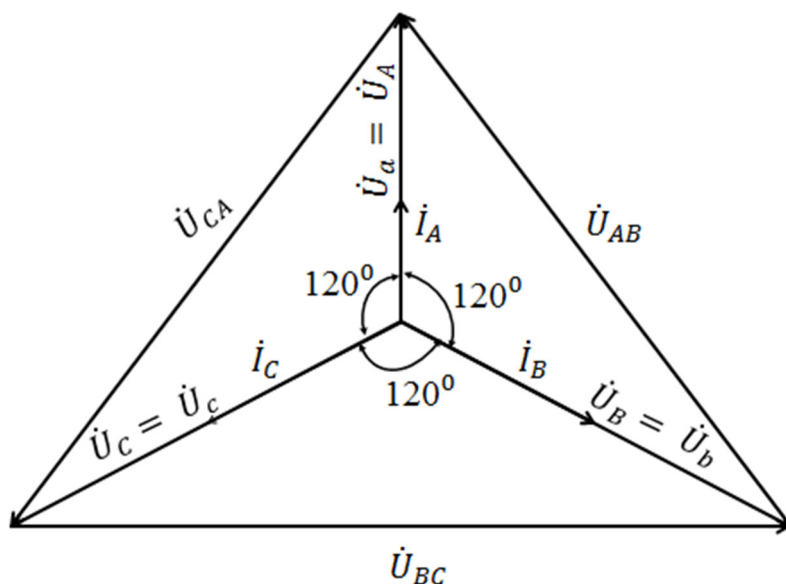


Рис. 6.7

Учитывая, что фазные и линейные напряжения равны, фазные токи можно определить из закона Ома:

$$i_A = \frac{U_A}{R_A}; \quad i_B = \frac{U_A}{R_B}; \quad i_C = \frac{U_A}{R_C}. \quad (6.17)$$

Из векторной диаграммы (рис. 6.8) следует, что величина тока в нейтральном проводе определяется как геометрическая сумма фазных токов.

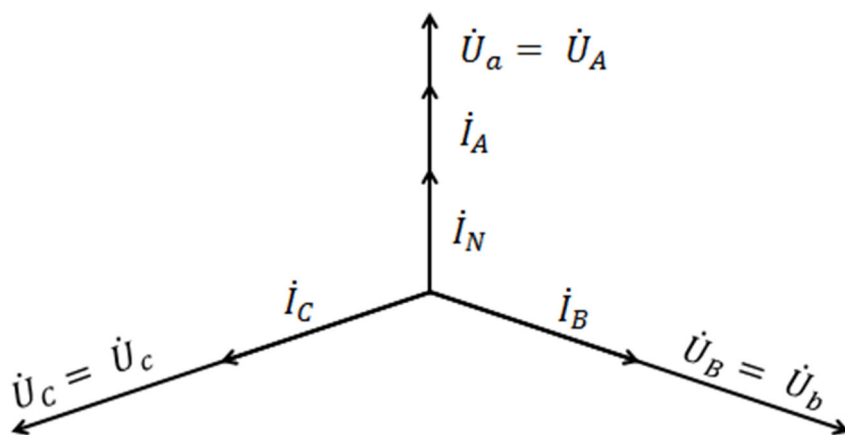


Рис. 6.8

3. Рассмотрим несимметричную нагрузку $R_A < R_B = R_C$ в отсутствии нейтрального провода $Z_N = \infty$, $\frac{1}{Z_N} = 0$.

Согласно выражению (6.12), в цепи появляются напряжения смещения нейтрали при несимметричной нагрузке. Система фазных напряжений генератора остается симметричной

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{E}_A \cdot \frac{1}{R_A} + \dot{E}_B \cdot \frac{1}{R_B} + \dot{E}_C \cdot \frac{1}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}} = 0. \quad (6.18)$$

Нейтральный провод с нулевым сопротивлением (см. рис. 6.6) в схеме с несимметричной нагрузкой выравнивает несимметрию фазных напряжений нагрузки, т. е. с включением данного нейтрального провода фазные напряжения нагрузки становятся одинаковыми.

При отсутствии нейтрального провода геометрическая сумма фазных токов равна нулю.

На рис. 6.9 представлена векторная диаграмма трехфазной цепи с несимметричной нагрузкой и оборванным нейтральным проводом.

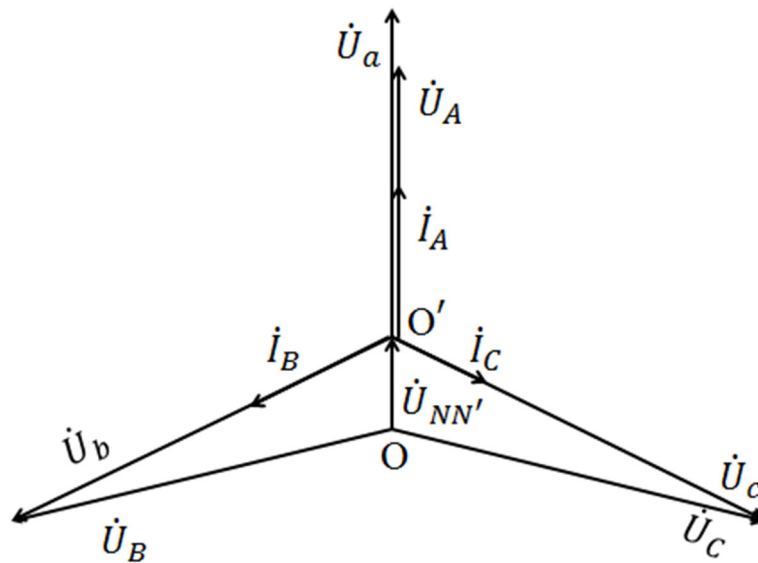


Рис. 6.9

Векторы фазных токов совпадают по направлению с векторами соответствующих фазных напряжений нагрузки.

Таким образом, изменение нагрузки в любой фазе приводит к смещению нейтрали и изменений напряжений и токов в других фазах.

6.5. Мощность в трехфазных цепях

Мощности отдельных фаз при симметричной нагрузке трехфазной цепи равны друг другу. Полная активная мощность трехфазной цепи равна сумме активных мощностей отдельных фаз

$$P = 3P_{\Phi} = 3 \cdot U_{\Phi} \cdot I_{\Phi} \cdot \cos \varphi. \quad (6.19)$$

В несимметричной системе трехфазной цепи, когда начальные фазы не равны $\varphi_A \neq \varphi_B \neq \varphi_C$, полная активная мощность определяется как сумма мощностей отдельных фаз

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A \cdot I_A \cdot \cos \varphi_A + U_B \cdot I_B \cdot \cos \varphi_B + U_C \cdot I_C \cdot \cos \varphi_C. \quad (6.20)$$

При симметричной системе соединения нагрузки в треугольник фазные и линейные напряжения одинаковые, а токи отличаются в $\sqrt{3}$ раза:

$$U_{\Phi} = U_{\text{Л}}; \quad I_{\Phi} = \frac{I_{\text{Л}}}{\sqrt{3}}. \quad (6.21)$$

Тогда активная мощность равна

$$P = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi_{\Phi}. \quad (6.22)$$

Реактивная мощность определяется

$$Q = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi_{\Phi}. \quad (6.23)$$

Полная мощность определяется

$$S = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}}. \quad (6.24)$$

При симметричной системе соединения нагрузки в звезду фазные и линейные токи одинаковые, а напряжения отличаются в $\sqrt{3}$ раза

$$U_{\Phi} = \frac{U_{\text{Л}}}{\sqrt{3}}; \quad I_{\Phi} = I_{\text{Л}}. \quad (6.25)$$

Формулы для определения активной, реактивной и полной мощности трехфазной симметричной системы при соединении нагрузки в звезду аналогичны формулам (6.22), (6.23) и (6.24) соответственно.

7. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

7.1. Основные определения переходных процессов

Переходные процессы в электрических цепях – это переходы токов, ЭДС и напряжения от одного установившегося значения к другому в течение короткого промежутка времени. Эти процессы осуществляются коммутацией цепи. Изменение значений токов, ЭДС и напряжения приводит к изменению энергии электромагнитного поля электрической цепи. Поэтому для описания переходных процессов необходимо составить дифференциальные уравнения зависимости параметров электрической цепи от времени. Решения этих уравнений должны быть конечными и непрерывными, так как изменение электромагнитной энергии в цепи происходит плавно.

Коммутация электрической цепи осуществляется с помощью *идеального ключа*, который может находиться в двух положениях: с нулевым и бесконечным сопротивлением. Коммутация является мгновенной, если изменение сопротивления нагрузки меньше длительности последующего процесса.

Переходные процессы описываются двумя законами.

Из зависимости мощности индуктивного элемента цепи от тока $P_L = L \frac{di_L}{dt} i_L$ следует, что скачкообразное изменение тока $\frac{di_L}{dt} = \infty$ приводит к бесконечно большой мощности цепи $P = \infty$.

Первый закон. Ток в ветви с индуктивным элементом не может изменяться скачкообразно и после коммутации сохраняет то значение, которое было до коммутации

$$i_L(0+) = i_L(0-). \quad (7.1)$$

Здесь $i_L(0+)$ – ток в индуктивном элементе после коммутации, $i_L(0-)$ – ток в индуктивном элементе перед коммутацией, это нулевое начальное условие.

Из зависимости мощности на емкостном элементе от напряжения $P_C = U_C C \frac{dU_C}{dt}$ следует, что скачкообразное изменение напряжения $\frac{dU_C}{dt} = \infty$ приведет к бесконечно большой мощности. Это означает, что в цепи не обеспечивается баланс мощностей.

Второй закон. Напряжение на емкостном элементе не может изменяться скачкообразно, и после коммутации оно сохраняет то значение, которое имело перед коммутацией.

$$u_C(0+) = u_C(0-), \quad (7.2)$$

где $u_C(0+)$ – значение напряжения на емкости после коммутации; $u_C(0-)$ – значение напряжения на емкости перед коммутацией, является нулевым начальным условием переходного процесса.

Для описания состояния цепи после коммутации необходимо составлять систему дифференциальных уравнений согласно первому и второму законам переходных процессов. В этой системе уравнений неизвестными величинами являются ток в индуктивном элементе и напряжение на конденсаторе.

Далее решение (например, для тока) неоднородного дифференциального уравнения ищут в виде суммы принужденного и свободного токов

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t), \quad (7.3)$$

где $i_{\text{пр}}(t)$ – принужденный ток, определяется в установившемся режиме после коммутации; $i_{\text{св}}(t)$ – свободный ток, созданный внутренним источником, определяется после коммутации.

Свободный ток представляет собой сумму n независимых слагаемых в виде экспоненциальных функций

$$i_{\text{св}}(t) = A_1 \cdot e^{P_1 t} + A_2 \cdot e^{P_2 t} + \dots \quad (7.4)$$

Количество слагаемых n равно числу реактивных элементов (индуктивностей и емкостей) в цепи.

P_1, P_2 – корни характеристического уравнения.

A_1, A_2 – постоянные интегрирования, определяются из начальных условий.

7.2. Переходные процессы в цепи с реальным индуктивным элементом

Графическое отображение цепи с последовательным включением сопротивления R и реальным индуктивным элементом L приведено на рис. 7.1. Рассмотрим переходные процессы в двух режимах работы цепи: при замкнутом и разомкнутом рубильнике.

Отключение R - L контура от источника ЭДС

При замыкании рубильника в цепи образуется замкнутый на себя R - L контур без внешнего источника ЭДС.

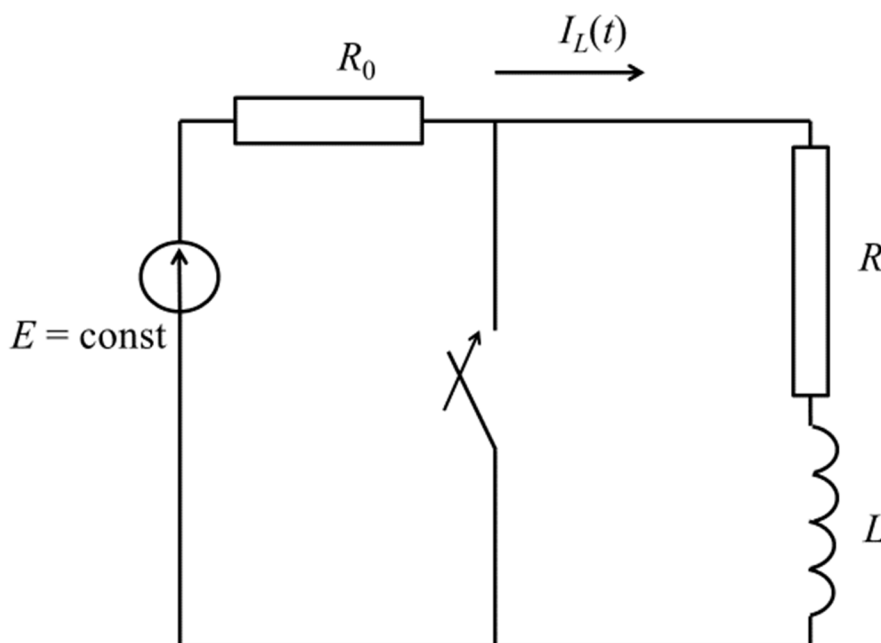


Рис. 7.1

Ток, протекавший через индуктивный элемент до замыкания рубильника (до коммутации), определяется по формуле

$$i_L(0-) = \frac{E}{R_0 + R}. \quad (7.5)$$

Для установления процесса изменения тока в индуктивности после коммутации необходимо составить дифференциальное уравнение, решение которого даст искомое значение тока

$$i_{L\text{св}} \cdot R + L \cdot \frac{di_{L\text{св}}}{dt} = 0. \quad (7.6)$$

Решение уравнения (7.6) начнем с составления характеристического уравнения в виде

$$R - Lp = 0, \quad (7.7)$$

где $p = -R/L$ – корень характеристического уравнения.

Отсюда находим свободную составляющую тока

$$i_{L\text{св}} = A \cdot e^{Pt}. \quad (7.8)$$

Продифференцируем (7.6) и подставим в (7.8), получим

$$\frac{di_{L\text{св}}}{dt} = A \cdot P \cdot e^{Pt}, \quad (7.9)$$

где $\tau = -\frac{1}{P} = \frac{L}{R}$ – постоянная времени переходного процесса, это интервал времени, за который ток уменьшается в e раз.

Окончательно свободная составляющая тока определяется по выражению

$$i_{L\text{св}} = A \cdot e^{-R/L \cdot t} = A \cdot e^{-t/\tau}. \quad (7.10)$$

Из начального условия определяем постоянную интегрирования A равной переходящему току до коммутации

$$i_L(0) = i_{L\text{св}}(0) = A = i_L(0-) = \frac{E}{R_0 + R}. \quad (7.11)$$

Тогда определим значения тока и напряжения на индуктивности после коммутации согласно выражениям

$$i_L(t) = i_{L\text{св}}(t) = \frac{E}{R_0 + R} \cdot e^{-R/L \cdot t}; \quad (7.12)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \left(\frac{-R}{L} \right) \cdot \frac{E \cdot e^{-R/L \cdot t}}{R_0 + R} = -\frac{R}{R_0 + R} \cdot E \cdot e^{-R/L \cdot t}. \quad (7.13)$$

На графике (рис. 7.2) приведены зависимости переходного тока через индуктивность и переходного напряжения на индуктивности от времени.

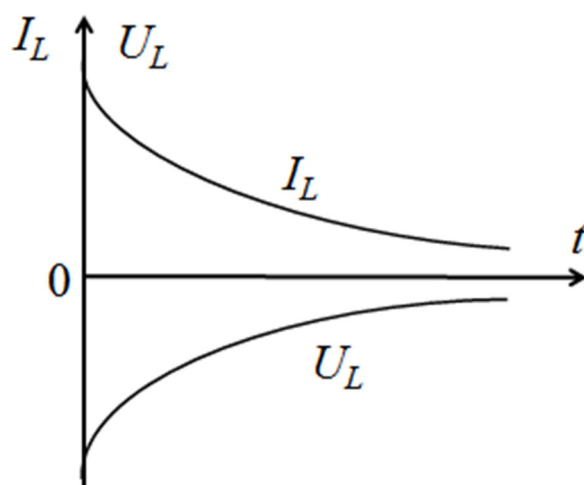


Рис. 7.2

Видно, что переходные ток и напряжение изменяются по экспоненциальному закону.

В технике принято считать интервал времени равный $(4 \div 5)\tau$ — это время, за которое переходный процесс заканчивается.

Подключение R - L контура к источнику ЭДС

Рассмотрим случай, когда в цепи (рис. 7.3) рубильник переключен на источник с постоянной ЭДС, тогда в установившемся режиме ток не меняется

$$\frac{di_{\text{уст}}}{dt} = 0. \quad (7.14)$$

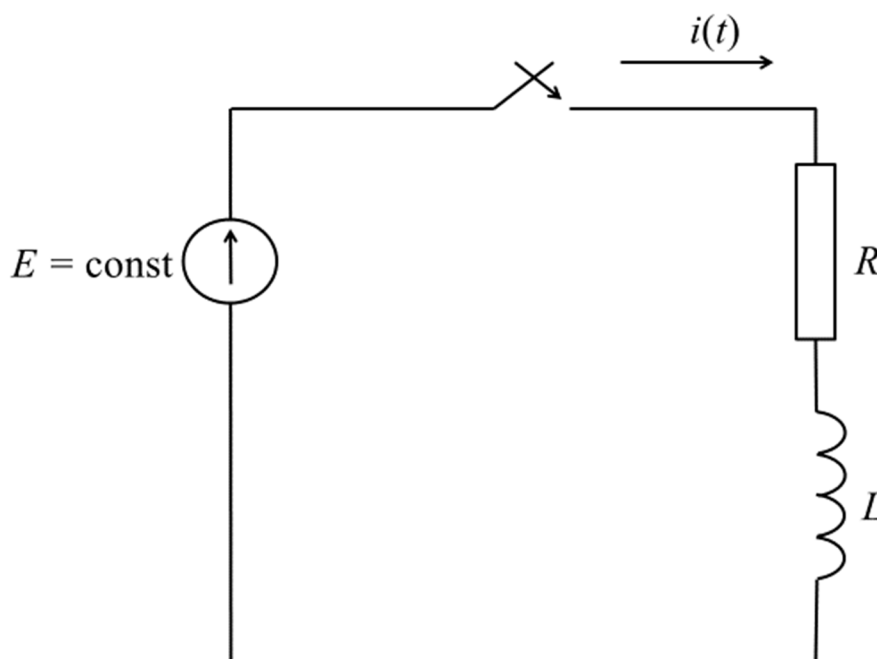


Рис. 7.3

Тогда зависимость функции переходного тока от времени можно выразить как сумму функций принужденного и свободного токов от времени

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}(t) = i_{\text{пр}} + A \cdot e^{Pt}. \quad (7.15)$$

Учитывая, что принужденный ток в установившемся режиме после коммутации определяется по формуле $i_{\text{пр}} = \frac{E}{R}$, а постоянная интегрирова-

ния – $A = -\frac{E}{R}$, после несложного преобразования получим окончательное выражение для тока

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-R/L \cdot t} = \frac{E}{R} (1 - e^{-R/L \cdot t}). \quad (7.16)$$

Отсюда нетрудно определить напряжение на индуктивном элементе

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = -L \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot \frac{E}{R} \cdot e^{-R/L \cdot t} = E \cdot e^{-R/L \cdot t}. \quad (7.17)$$

На рис. 7.4 представлены зависимости переходного, принужденного, свободного токов и переходного напряжения на индуктивном элементе от времени.

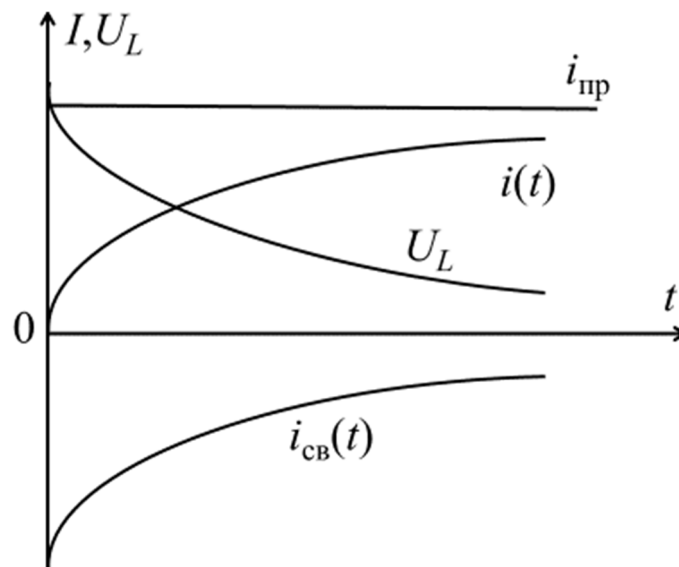


Рис. 7.4

Свободный ток и напряжение на индуктивном элементе экспоненциально уменьшаются с постоянным временем τ .

Физический смысл переходного процесса, происходящего в цепи ЭДС с подключением реального индуктивного элемента, заключается в накоплении энергии магнитного поля в катушке индуктивности.

7.3. Переходные процессы в цепи с R - C элементами

На рис. 7.5 приведена схема цепи с последовательным включением резисторного R и емкостного C элементов. Аналогично со схемой с R - L элементами рассмотрим два случая переходных процессов R - C цепи с внешним источником ЭДС и без него.

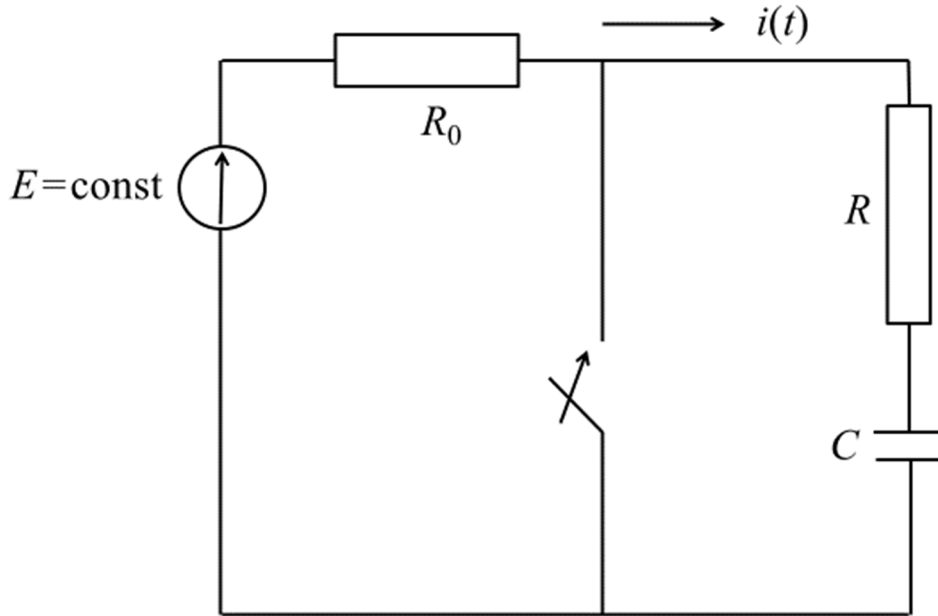


Рис. 7.5

Отключение R - C контура от источника ЭДС

Рассмотрим переходной процесс в R - C цепи с предварительно заряженным конденсатором. В схеме на рис. 7.5 к моменту коммутации рубильника в R - C контуре емкость полностью зарядилась до напряжения, равного ЭДС источника, то есть $u_C(0-) = E$. После переключения конденсатор оказывается замкнутым последовательно соединенным сопротивлением. Через R - C контур проходит ток разрядки, направление которого противоположно току зарядки конденсатора. Принужденные ток и напряжение в R - C контуре отсутствуют. По контуру протекает только свободный ток за счет полностью заряженного конденсатора. На основе второго закона Кирхгофа составляем уравнение для R - C контура

$$u_{C\text{св}} + R \cdot i_{\text{св}} = 0. \quad (7.18)$$

Свободный ток разрядки конденсатора определяется по формуле

$$i_{\text{св}} = C \cdot \frac{d u_{\text{C св}}}{d t}. \quad (7.19)$$

Подстановка (7.19) в (7.18) позволяет составлять линейное дифференциальное уравнение для свободного напряжения

$$u_{\text{C св}} + R \cdot C \cdot \frac{d u_{\text{C св}}}{d t} = 0. \quad (7.20)$$

Характеристическим уравнением представляется

$$1 + R \cdot C \cdot P = 0, \quad (7.21)$$

где $P = -\frac{1}{R \cdot C}$ – корень характеристического уравнения; $\tau = -\frac{1}{P} = R \cdot C$ – постоянная времени переходного процесса.

Решение дифференциального уравнения (7.20) позволяет определить закон изменения напряжения на конденсаторе по времени с учетом начального условия $A = E$

$$u_{\text{C}} = E \cdot e^{-t/R \cdot C}. \quad (7.22)$$

Далее, подставив полученное значение напряжения в (7.20), можно определить изменение тока от времени по формуле

$$i(t) = C \cdot \frac{d u_{\text{C}}}{d t} = C \cdot \left(-\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot E \cdot e^{-t/R \cdot C} = -\frac{E}{R} \cdot e^{-t/R \cdot C}. \quad (7.23)$$

Из графика (рис. 7.6) видно, что переходное напряжение в R - C контуре с отключенным источником питания экспоненциально снижается от максимального значения ЭДС источника до нуля.

Переходный ток R - C контура в момент коммутации скачкообразно возрастает до максимального значения, затем экспоненциально уменьшается до нуля.

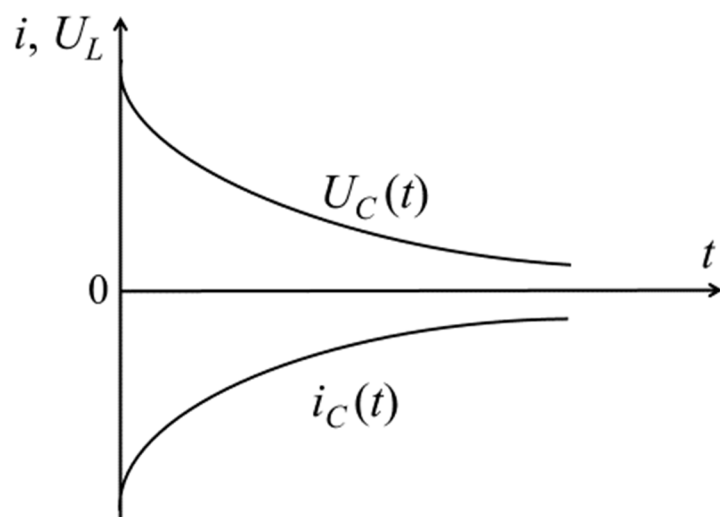


Рис. 7.6

Подключение R - C контура к источнику ЭДС

Для цепи с последовательным включением сопротивления и конденсатора (рис. 7.7) после коммутации рубильника конденсатор полностью заряжается и напряжение на нем равно ЭДС источника $u_{C\text{пр}} = E$, следовательно,

т.е. $\frac{du_{\text{уст}}}{dt} = 0$.

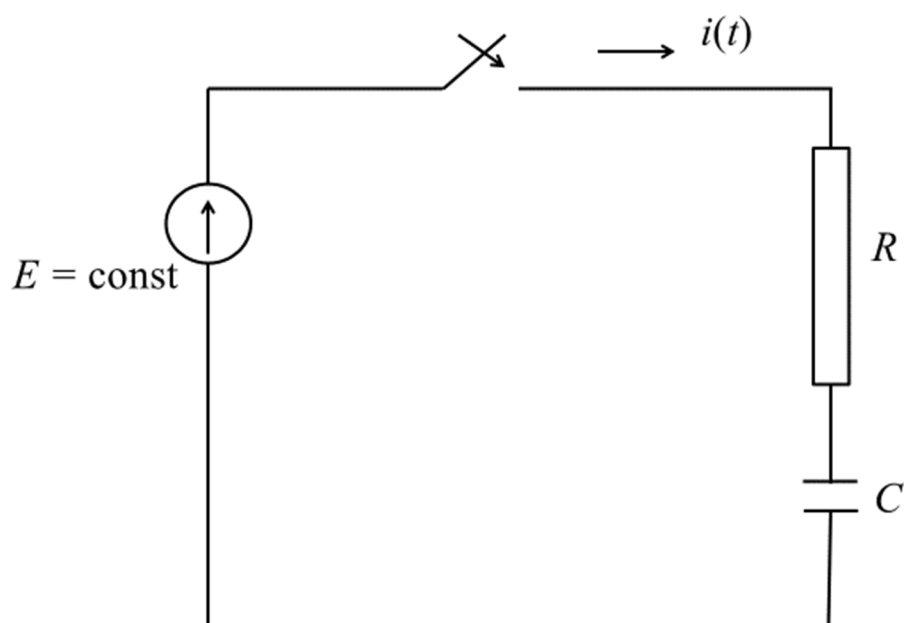


Рис. 7.7

Отсюда общее решение дифференциального уравнения (7.20) для переходного напряжения представляется в виде

$$u_C(t) = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}} = u_{C\text{пр}} + A \cdot e^{-t/R \cdot C}. \quad (7.24)$$

В момент коммутации $u_C(0) = u_{C\text{пр}} + A$. Из этого выражения определяем постоянную интегрирования $A = u_C - u_{C\text{пр}}$. В соответствии со вторым законом коммутации $u_C(0) = u_C(0-) = 0$, определим постоянную интегрирования как

$$A = 0 - u_{C\text{пр}} = -u_{C\text{пр}} = -E.$$

Таким образом, значения переходных напряжения и тока определяются из выражений (7.24) и (7.23)

$$u_C(t) = E - E \cdot e^{-t/R \cdot C} = E(1 - e^{-t/R \cdot C}); \quad (7.25)$$

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \left(-\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot E \cdot e^{-t/R \cdot C} = -\frac{E}{R} \cdot e^{-t/R \cdot C}. \quad (7.26)$$

На рис. 7.8 приведены зависимости переходного тока и напряжения, принужденного и свободного составляющих напряжения от времени. В момент коммутации ток скачкообразно увеличивается до максимального значения, затем по экспоненте уменьшается до нуля в конце переходного процесса.

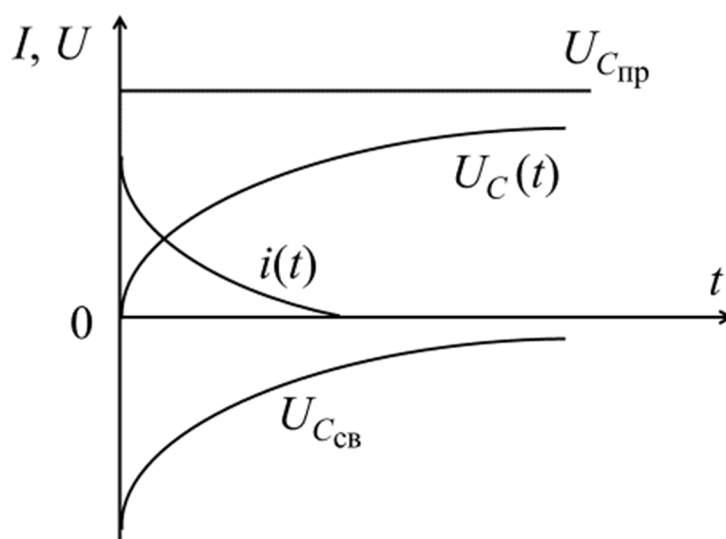


Рис. 7.8

Физический смысл переходного процесса в R - C контуре с подключенным источником постоянной ЭДС заключается в накоплении заряда на обкладках конденсатора.

7.4. Переходные процессы в цепях с R - L - C элементами

Рассмотрим электрическую цепь постоянного источника ЭДС с последовательным соединением R - L - C элементов (рис. 7.9).

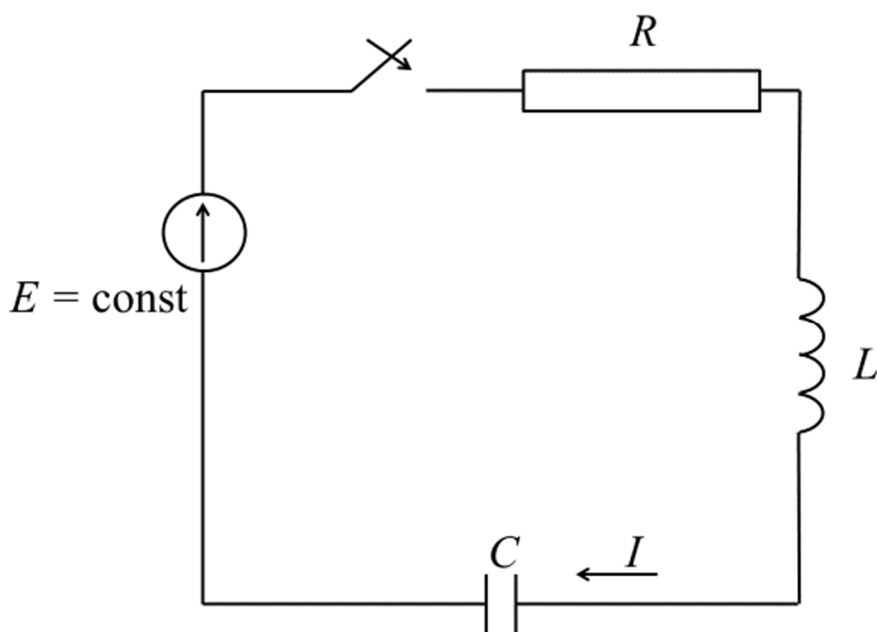


Рис. 7.9

Для описания переходных процессов в R - L - C контуре после коммутации рубильника нужно составлять дифференциальное уравнение на основе законов Ома и Кирхгофа

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = E. \quad (7.27)$$

Упрощая выражение (7.27), получим однородное дифференциальное уравнение второго рода для тока

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i = 0. \quad (7.28)$$

Решение уравнения (7.28) ищем в виде суммы принужденной и свободной составляющих тока $i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}$.

В случае цепи с постоянным источником ЭДС принужденная составляющая переходного тока равна нулю, так как конденсатор разрывает цепь постоянного тока. Следовательно, общим решением линейного уравнения (7.27) будет только свободный ток

$$\frac{d^2 i_{\text{св}}}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di_{\text{св}}}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i_{\text{св}} = 0. \quad (7.29)$$

Если свободную составляющую тока представить в виде экспоненциальной функции от времени и дважды продифференцировать ее, то получим

$$i_{\text{св}} = A \cdot e^{Pt}; \quad \frac{di_{\text{св}}}{dt} = A \cdot P \cdot e^{Pt}; \quad \frac{d^2 i_{\text{св}}}{dt^2} = A \cdot P^2 \cdot e^{Pt}. \quad (7.30)$$

Подстановкой выражений (7.30) в уравнение (7.29) получим характеристическое уравнение

$$P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC} = 0. \quad (7.31)$$

Корнями характеристического уравнения определяются

$$P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad (7.32)$$

где $\alpha = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания; $\tau = -\frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R}$ – время релаксации переходного процесса; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – круговая резонансная частота контура без потерь.

Возвращаясь к уравнению (7.30) для переходного тока, находим

$$i = i_{\text{св}} = A_1 \cdot e^{P_1 t} + A_2 \cdot e^{P_2 t}. \quad (7.33)$$

На последнем этапе решения уравнения (7.33) из начальных условий определяем постоянные интегрирования A_1, A_2 . Анализ полученных значений переходного тока показывает, что характер изменения свободного тока зависит от отношения

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2\sqrt{L/C}} = \frac{R}{2\rho} = \frac{1}{2Q}, \quad (7.34)$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ – характеристическое или волновое сопротивление контура; $Q = \rho / R$ – добротность контура.

Колебательный режим

Характер переходного процесса обусловлен численными величинами элементов цепи. Часто встречающийся случай – когда корни $R < 2\rho$ и как следствие $\alpha < \omega_0$; $Q > \frac{1}{2}$; $P_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{\text{св}}$.

Здесь $\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ – круговая частота собственных колебаний в контуре; $T_{\text{св}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{св}}}$ – период собственных колебаний.

Из анализа этого случая можно заключить, что происходит замедление рассеяния энергии в нагрузке цепи. В результате в контуре возникает периодический обмен энергиями электрического и магнитного полей. В отсутствие внешнего источника процесс обмена сопровождается потерей энергии в цепи и наблюдаются затухающие колебания. Таким образом, свободная составляющая тока $i_{\text{св}}(t)$ из уравнения (7.33) представляется как затухающее колебание.

В случае $R = 2\rho$ корни кратные и переходной процесс будет аperiodическим.

Колебательный переходной процесс

Начальные условия используются в случае периодического изменения свободного тока от времени. Тогда можно заключить, что свободная со-

ставляющая тока в индуктивности до и сразу после коммутации остается равной нулю

$$u_c(0-) = u(0+) = E; \quad i(0) = i_{св}(0) = i(0-) = 0. \quad (7.35)$$

Тогда решение дифференциального уравнения (7.29) можно представить в виде синусоидальной функции с экспоненциально убывающей амплитудой

$$i_{св} = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_{св} \cdot t + \varphi), \quad (7.36)$$

где A и φ – постоянные интегрирования.

Для окончательного решения дифференциального уравнения необходимо определить постоянные интегрирования из начальных условий. Продифференцировав свободную составляющую тока по времени, вычислим напряжение на индуктивности:

$$\begin{aligned} u_L &= L \cdot \frac{di_{св}}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt} [A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_C t + \varphi)] = \\ &= L \cdot A \cdot (-\alpha) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_C t + \varphi) + L \cdot A \cdot \omega_C \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_C t + \varphi), \end{aligned} \quad (7.37)$$

где $u_L(0)$ – напряжение на индуктивности в момент коммутации, считается начальным условием.

Совместное решение уравнений (7.29) и (7.37) позволяет определить постоянные интегрирования, переходные ток и напряжение

$$\varphi = 0; \quad A = \frac{E}{L \cdot \omega_C}; \quad i(t) = \frac{E}{L \cdot \omega_C} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega_C \cdot t. \quad (7.38)$$

$$u_L = \frac{E}{\omega_C} e^{-\alpha t} (\omega_c \cos \omega_c t - \alpha \sin \omega_c t). \quad (7.39)$$

На рис. 7.10 сплошной линией показана кривая изменения во времени свободного тока в контуре при подключении к нему источника постоянной ЭДС. Пунктирными линиями показаны экспоненциальное уменьшение ам-

плитудного значения тока во времени. Такое уменьшение тока связано с потерей электрической энергии в активном сопротивлении R .

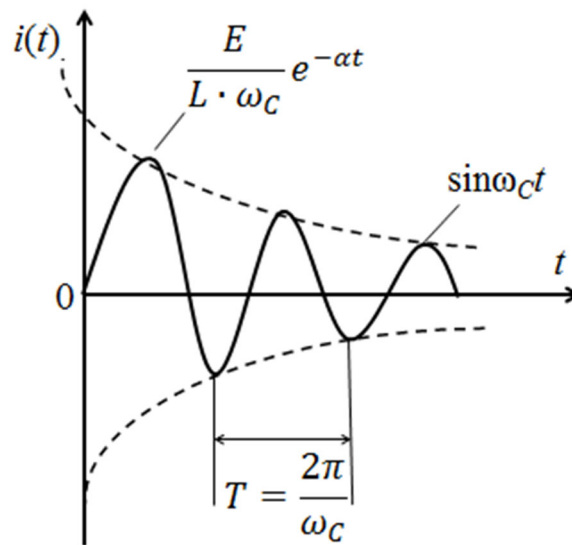


Рис. 7.10

При малом коэффициенте затухания частота свободного колебания (ω_C) незначительно отличается от резонансной частоты ω_0 .

Основными физическими величинами, характеризующими затухающие колебания, наряду с коэффициентом затухания (α), добротностью контура (Q), временем релаксации (τ), приведенными выше, являются декремент затухания (Δ) и натуральный логарифм от него. Декремент затухания представляется отношением амплитудных значений токов, отличающихся друг от друга на один период

$$\Delta = \frac{e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega_C \cdot t}{e^{-\alpha(t+T)} \cdot \sin \omega_C (t + T_C)} = e^{\alpha T_C}. \quad (7.40)$$

Логарифмический декремент затухания вычисляется по формуле

$$\ln \Delta = \alpha \cdot T_C. \quad (7.41)$$

При $\omega_C \approx \omega_0$ логарифмический декремент определяется

$$\ln \Delta \approx \frac{2\pi\alpha}{\omega_0} = \frac{\pi}{Q}. \quad (7.42)$$

Апериодический режим в R - L - C контуре наблюдается при большом затухании энергии электрического поля, когда $\alpha > \omega_0$, $Q < \frac{1}{2}$, $R > 2\rho$. В этом случае корни $P_{1,2}$ уравнения (7.32) вещественные, отрицательные, различные.

Свободный ток определяется из выражения

$$i_{\text{св}} = A_1 \cdot e^{P_1 t} + A_2 \cdot e^{P_2 t}. \quad (7.43)$$

Напряжение на индуктивности определяется из выражения

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{di_{\text{св}}}{dt} = L \cdot A_1 \cdot P_1 \cdot e^{P_1 t} + L \cdot A_2 \cdot P_2 \cdot e^{P_2 t}. \quad (7.44)$$

Подставив значения тока и напряжения в уравнения (7.9) и (7.10) для момента коммутации ($t = 0$), можно составить систему уравнений

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0; \\ A_1 \cdot P_1 + A_2 \cdot P_2 &= \frac{E}{L}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Решение системы (7.45) определяет постоянные интегрирования в виде

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{L(P_1 - P_2)}. \quad (7.46)$$

Тогда, для свободной составляющей тока в R - L - C контуре получим

$$i = i_{\text{св}} = \frac{E}{L \cdot (P_1 - P_2)} \cdot (e^{P_1 t} - e^{P_2 t}). \quad (7.47)$$

Из выражения (7.47) следует, что свободный ток состоит из положительной, медленно затухающей экспоненты с коэффициентом затухания P_1 и отрицательной, но быстро затухающей экспоненты P_2 (рис. 7.11).

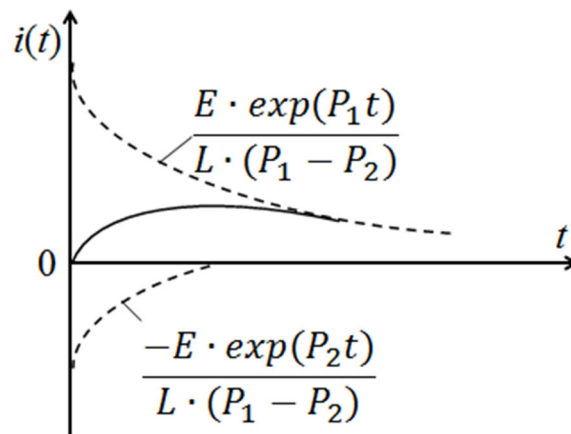


Рис. 7.11

Ток меняется не по закону синусоидальной функции, а монотонно затухает до нуля, не принимая отрицательного значения, то есть не меняет своего направления.

Предельный режим колебательного и апериодического процессов наступает при значениях $\alpha = \omega_0$; $Q = \frac{1}{2}$; $R = 2\rho$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие «Электротехника и электроника. Электротехника» написано в соответствии с СТО СГУГиТ. Материал изложен с учетом его восприятия обучающимися. Так, нетрадиционно изложены методы контурных токов, двух узлов, экспериментальное и расчетное определение параметров эквивалентного генератора по представлению синусоидальных функций времени в векторной и комплексной формах.

С учетом того, что в библиотеке СГУГиТ отсутствуют в достаточном количестве учебные издания по электротехнике, пособие «Электротехника и электроника. Электротехника» может быть полезно обучающимся неэлектротехнических специальностей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Усольцев А. А. Общая электротехника : учеб. пособие. – СПб. : СПбГУ, ИТМО, 2009. – 301 с.
2. Матуско В. Н. Общая электротехника : учеб. пособие. – 2-е изд., испр. – Новосибирск : СГГА, 2003. – 119 с.
3. Данилов И. А., Иванов П. М. Общая электротехника с основами электроники : учеб. пособие. – М. : Высш. шк., 2005. – 752 с.
4. Евдокимов Ф. Е. Общая электротехника : учеб. пособие. – 3-е изд., М. : Высш. шк., 2004. – 367 с.

Учебное издание

Айрапетян Валерик Сергеевич

Райхерт Валерий Андреевич

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА.

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Редактор *Е. К. Деханова*

Компьютерная верстка *Н. Ю. Леоновой*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 11.02.2022. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 4,88. Тираж 60 экз. Заказ 15.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 8.