Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

Г. П. Мартынов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия для обучающихся
по направлениям подготовки 05.03.03 Картография и геоинформатика,
38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2022

УДК 519.2
М294

Рецензенты: кандидат педагогических наук, доцент, СГУПС *Н. В. Миллер*
кандидат педагогических наук, доцент, СГУГиТ *М. А. Петрова*

Мартынов, Г. П.
М294 Теория вероятностей и математическая статистика : учебно-методическое пособие / Г. П. Мартынов. – Новосибирск : СГУГиТ, 2022. – 99 с. – Текст : непосредственный.
ISBN 978-5-907513-48-8

Учебно-методическое пособие подготовлено доцентом Г. П. Мартыновым на кафедре высшей математики СГУГиТ.

Пособие раскрывает основные аспекты курса «Теория вероятностей и математическая статистика»: понятие случайного события, теоремы о случайных событиях, повторение испытаний, случайные величины и их числовые характеристики, виды распределений случайных величин, статистическое распределение выборки, визуализация статистического распределения, проверка типа распределения на нормальность, зависимые и независимые случайные величины и корреляция случайных величин.

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» предназначено для обучающихся по направлениям 05.03.03 Картография и геоинформатика (уровень бакалавриата) и 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата).

Рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики, Ученым советом Института геодезии и менеджмента СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 519.2

ISBN 978-5-907513-48-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» является формирование у обучающихся универсальных и общепрофессиональных компетенций в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС-3++) по указанным выше направлениям подготовки, определяющих готовность и способность будущих выпускников к успешной деятельности в своей профессиональной области.

Задачами изучения данной дисциплины являются: научно-исследовательская и научно-педагогическая деятельность, обеспечивающая способность выпускника к следующим действиям:

– разработка методик сбора и анализа данных в окружающей среде;

– создание математических моделей рассматриваемых явлений и анализ связей этих моделей с окружающей средой;

– организация и проведение специально поставленных экспериментов для анализа адекватности математической модели реальной действительности.

Цель данного учебно-методического пособия – формирование понятийного аппарата обучающихся по изучаемой дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», доступное изложение примеров решения типовых задач по данному курсу.

Задачи учебно-методического пособия:

1) разъяснение основных математических терминов по изучаемому курсу;

2) раскрытие практического значения используемых понятий;

3) обеспечение единообразия в решениях задач, включенных в план практических занятий по изучаемой учебной дисциплине.

Функции, выполняемые учебно-методическим пособием:

1) информационно-познавательная;

2) систематизирующая;

3) справочная;
4) стимулирующая, или мотивационная;
5) функция самообразования и самоконтроля.

Данное учебно-методическое пособие соответствует рабочим программам дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для всех перечисленных выше направлений обучения. Излагаемые в данном пособии сведения соответствуют современному состоянию математической науки, что обеспечивается надежностью используемых источников библиографического списка.

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В данном разделе использованы некоторые определения и теоремы из учебных пособий [1–3]. Более подробную теорию можно найти в этих же учебных пособиях.

В окружающем внимательного человека мире возникают различные события (явления), которые можно подразделить на три вида: достоверные события, невозможные события и случайные события.

Определение 1.1. Событие U будет называться случайным, если при осуществлении некоторого известного набора условий ABC это событие U может либо произойти, либо не произойти. Далее, вместо слов «набор условий ABC осуществлен» всегда будет говориться кратко «произведено испытание», то есть выполнен определенный набор условий. Таким образом, каждое случайное событие будет рассматриваться как результат определенного испытания.

Определение 1.2. Достоверным будет называться событие, которое всегда происходит при осуществлении определенного набора условий ABC. Невозможным будет называться событие, которое никогда не происходит при осуществлении определенного набора условий ABC.

Иногда случайные события становятся массовым явлением при определенных однородных заданных условиях, тогда становится очевидным, что достаточно большое количество однородных случайных событий независимо от своей природы и происхождения подчиняются определенным закономерностям (пока невыясненным закономерностям).

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей этих самых массовых однородных случайных событий. Знание таких закономерностей позволяет предвидеть, как эти события будут протекать, что обеспечивает прогнозирование деятельности человека в природе и обществе.

Определение 1.3. События (объединенные в некоторую группу) будут называться несовместными, если появление одного из этих событий исключает появление других событий (из этой группы событий) в одном и том же испытании.

Определение 1.4. Полной группой событий будет называться группа событий, обладающая свойством: в результате конкретного испытания появится хотя бы одно из событий этой группы.

Следствие. Если же события, составляющие полную группу событий, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

Определение 1.5. События A и B называют равновозможными, если есть основание считать, что ни одно из этих событий не является **более** возможным, чем другое.

Определение 1.6 (классическое). Вероятностью события A называется неотрицательное число $P(A)$, равное отношению числа m **благоприятствующих** данному событию A элементарных исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу, тем самым $P(A) = m/n$.

Вероятность имеет следующие свойства:

1) вероятность невозможного события равна нулю;

2) вероятность достоверного события равна 1;

3) вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей:

$$\frac{0}{n} < \frac{m}{n} < \frac{n}{n} \Leftrightarrow 0 < P(A) < 1. \qquad (1.1)$$

Определение 1.7. Перестановками называются такие комбинации, которые состоят из одних и тех же n различных элементов и отличаются только порядком расположения этих элементов. Число всех возможных перестановок из n элементов равно:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \qquad (1.2)$$

причем $0! = 1$.

Определение 1.8. Размещениями называются такие комбинации, которые составлены из общего числа n различных элементов, взятых по m элементов. Размещения должны отличаться либо порядком элементов, либо составом элементов. Число всех возможных размещений элементов равно:

$$A_n^m = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-m+1), \tag{1.3}$$

где $m \le n$.

Определение 1.9. Сочетаниями называются такие размещения, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний из общего числа n различных элементов, взятых по m элементов, находится так:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}, m \le n. \tag{1.4}$$

Определение 1.10. Суммой $A + B$ двух событий A и B называется новое событие, состоящее в появлении события A, или события B, или в появлении событий A и B одновременно (рис. 1.1).

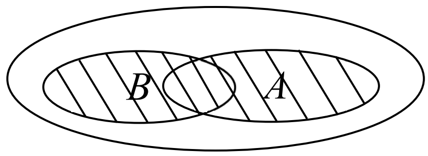

Рис. 1.1. Сумма

Определение 1.11. Произведением двух событий A и B называется новое событие $A \cdot B$, состоящее в совместном появлении этих событий A и B (рис. 1.2).

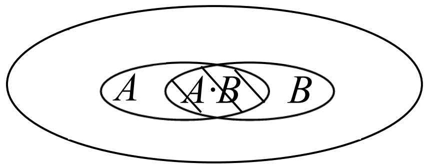

Рис. 1.2. Произведение

Определение 1.12. Противоположными событиями называются два единственно возможных несовместных события, образующих полную группу. Обычно они обозначаются так: A и $\overline{A}$ (рис. 1.3).

Замечание. Если $P\,(A) = p$, то обычно вероятность противоположного события обозначается так: $P\left(\overline{A}\right) = q$. При этом выполняется равенство: $p + q = 1$.

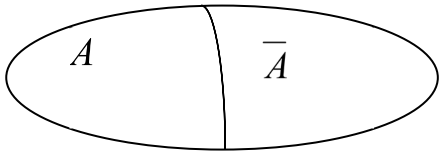

Рис. 1.3. Противоположные

Определение 1.13. Условной вероятностью $P_B(A)$ (вероятностью события A при условии осуществления события B) называется вероятность события A, вычисленная в предположении, что событие B уже наступило.

Определение 1.14. Событие A называют независимым от события B, если появление события B не изменяет вероятности появления A, то есть $P_B(A) = P(A)$. И наоборот, событие B независимо от события A, если $P(B) = P_A(B)$.

Замечание. Взаимно независимые события A и B – это такие события, что A не зависит от события B, и одновременно событие B не зависит от события A.

Теорема 1.1 (теорема сложения вероятностей для несовместных событий). Если события A, B несовместны, то вероятность суммы таких событий находится так:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие. Если A, B, C – попарно несовместные события, то вероятность суммы этих трех событий равна

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C). \tag{1.5}$$

Теорема 1.2. Если события $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ образуют полную группу и они попарно несовместны, то

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n) = 1.$$

Теорема 1.3 (теорема сложения вероятностей совместных событий). Пусть даны два совместных события A и B (то есть эти два события могут появиться в одном и том же испытании одновременно), тогда вероятность суммы таких совместных событий находится так:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Теорема 1.4. Рассматриваются два события A и B. Пусть известны вероятность $P(B)$ и условная вероятность $P_B\left(A\right)$. Тогда вероятность совместного появления событий A и B находится так:

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B\left(A\right).$$

Следствия:

1) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A\left(B\right)$; 2) $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A\left(B\right) \cdot P_{B \cdot A}\left(C\right)$.

Теорема 1.5 (теорема умножения вероятностей для независимых событий). Если A и B – взаимно независимые друг от друга события, то вероятность произведения таких событий равна:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Следствия:

1) если совместные события A и B взаимно независимы, то вероятность суммы таких событий равна:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(B) \cdot P(A);$$

2) если же совместные события A и B зависимы между собой, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A\left(B\right).$$

Теорема 1.6 (формула полной вероятности). Пусть событие A может наступить только при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$, которые все вместе образуют полную группу событий. Тогда имеет место формула «полной вероятности»:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A). \qquad (1.6)$$

Замечание. В этой формуле (1.6) события $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ обычно называются гипотезами.

Теорема 1.7 (формулы Байеса). Предположим, что произведено испытание, в результате которого и появилось случайное событие A; далее была поставлена задача определить, как изменились (в связи с тем, что событие A наступило) вероятности гипотез. Тогда следующие формулы (1.7) и (1.8) Байеса дают ответ на этот вопрос:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}. \qquad (1.7)$$

Аналогично для $i = 2, 3, \ldots, n$ выполняется равенство

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}. \qquad (1.8)$$

Эти формулы позволяют переоценивать вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в результате которого и появилось событие A. Формулы Байеса можно использовать для пошаговой корректировки прогнозов.

Теорема 1.8 (формула Бернулли). Предположим, что производится некоторая серия испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний этой серии, тогда такие испытания называются независимыми относительно события A. В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Далее рассматриваются только такие серии независимых испытаний, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность p.

Далее вводится понятие сложного события, понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые сами называются простыми. А именно: пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p или не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Тогда вероятность сложного события {в n таких испытаниях событие A появляется ровно k раз, а следовательно, не появляется $(n-k)$ раз} находится по формуле Бернулли:

$$P_n\left(k\right)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}. \qquad (1.9)$$

Уточнение. Длинное описание (схема Бернулли) в начале теоремы 1.8 есть описание всех условий применения формулы Бернулли.

Замечание. Формула (1.9) Бернулли обычно применяется, если количество n независимых испытаний не очень большое. При большом числе n независимых испытаний ($n > 30$) применяются приближенные формулы Лапласа.

Теорема 1.9 (локальная теорема П. С. Лапласа). Пусть выполняются все условия схемы Бернулли, и если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и от 1, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно находится (и тем более точнее находится, чем больше число n) по следующей формуле:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{1.10}$$

где $x = \dfrac{(k - np)}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – это функция Лапласа (ее значения приведены в табл. П.1 приложения).

Если при тех же условиях, что и в локальной теореме Лапласа, мы будем искать вероятность $P_n(k_1; k_2)$ того, что событие A в n независимых испытаниях появится не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, то получим интегральную теорему Лапласа.

Теорема 1.10 (интегральная теорема П. С. Лапласа). Если при тех же условиях, что и в локальной теореме Лапласа, требуется найти вероятность $P_n(k_1; k_2)$ того, что событие A в n независимых испытаниях появится не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, то получится следующая приближенная формула:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{1.11}$$

где $x_1 = (k_1 - n\,p) / \sqrt{n\,p\,q}$, $x_2 = (k_2 - n\,p) / \sqrt{n\,p\,q}$.

Замечание. Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ приведены в приложении (табл. П.2).

Определение 1.15. Если случайное *событие* X заключается только в появлении того или иного неизвестного числа (но только одного в данном испытании, причем наперед нельзя достоверно указать, какое это будет число), то такое случайное событие X называется случайной величиной.

Так, например, при бросании игральной кости могут появиться числа: 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Тем самым число X очков, выпавших на грани игральной кости, есть величина случайная; а числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 – это возможные значения этой случайной величины (в данном примере).

Определение 1.16. Дискретной (прерывной) случайной величиной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Например, если дискретная случайная величина X имеет только три возможных значения, то эти возможные ее значения можно обозначить через x_1, x_2, x_3.

Определение 1.17. Непрерывной случайной величиной X называется случайная величина, которая может принимать все возможные значения из некоторого конечного или бесконечного интервала.

Так, например, расстояние X, которое пролетит снаряд при выстреле из некоторого орудия, есть случайная величина. Возможные значения этой случайной величины принадлежат некоторому интервалу $(a; b)$, где a и b зависят от различных причин, в том числе и от тактико-технических характеристик этого орудия.

Определение 1.18. Законом распределения дискретной случайной величины X называется соответствие между возможными ее значениями и их вероятностями. С помощью таблицы закон распределения выглядит так:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

При этом выполняется равенство: $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Определение 1.19. Пусть дискретная случайная величина X принимает возможные (и только эти) значения $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$. Тогда математическим ожиданием случайной величины X называется число $M(X)$:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + ... + x_n \cdot p_n .$$

Математическое ожидание имеет следующие свойства:

1. $M(C) = C = \text{const}$.

2. $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$.

3. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$ – для независимых случайных величин.

4. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

5. Предположим, что производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления случайного события A постоянна и равна p. Пусть дискретная случайная величина X равна числу появлений события A в этих n испытаниях, тогда ее математическое ожидание равно $M(X) = n \cdot p$.

Определение 1.20. Дисперсией (или рассеянием) дискретной случайной величины X называется неотрицательное число $D(X)$, которое равно

$$D(X) = M\left([X - M(X)]^2\right). \quad (1.12)$$

Замечание. Если случайная величина X задана законом распределения (определение 1.18), то

$$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 \cdot p_1 + [x_2 - M(X)]^2 \cdot p_2 + ... + [x_n - M(X)]^2 \cdot p_n . \quad (1.13)$$

Теорема 1.11. $D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2$.

Замечание. Данная теорема 1.11 дает второй способ нахождения дисперсии, этот способ обычно используется для проверки правильности нахождения дисперсии первым способом (по определению 1.20).

Дисперсия имеет следующие свойства:

1. $D(C) = 0$, C – постоянная.

2. $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$.

3. $D(X) + D(Y) = D(X + Y)$ при условии, что X и Y независимые.

4. $D(C + X) = D(X)$, C – постоянная.

5. $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$ – если X и Y независимы.

6. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления случайного события A постоянна и равна p. Пусть случайная величина X есть число появлений события A в этих n испытаниях, тогда дисперсия случайной величины X равна $D(X) = n \cdot p \cdot q$, где $q = 1 - p$.

Определение 1.21. Число $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ называется среднеквадратическим отклонением случайной величины X.

Теорема 1.12. Если X и Y – взаимно независимые случайные величины, то: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$.

Теорема 1.13 (неравенство П. Л. Чебышева).

$$P\left(\left| X - M(X) \right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{1.14}$$

Замечание. Данное неравенство справедливо как для дискретных случайных величин, так и для непрерывных случайных величин. Используя неравенство П. Л. Чебышева, можно оценить снизу вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания менее чем на заданное исследователем отклонение ε.

Определение 1.22. Неотрицательная функция $F(x) = P(X < x)$ называется функцией распределения вероятностей случайной величины X.

Определение 1.23. Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция $F(x)$ есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с кусочно-непрерывной производной $F'(x)$.

Функция распределения имеет такие свойства:

1. $0 \le F(x) \le 1$ при всех x.

2. $F(x)$ – неубывающая функция, то есть если $x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2) \ge F(x_1)$.

3. $P(x_1 \le x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет только одно значение x_0, равна 0.

5. Если возможные значения $F(x)$ принадлежат интервалу (a, b), то

а) $F(x) = 0$ при $x \le a$;

б) $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Определение 1.24. Функция $f(x) = F'(x)$, равная производной от функции распределения $F(x)$, называется плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X.

Теорема 1.14. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Следствие. $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Теорема 1.15. Пусть $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X, тогда ее функция распределения находится так:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Плотность распределения $f(x)$ имеет следующие свойства:

1) это неотрицательная функция: $f(x) \ge 0$;

2) несобственный интеграл по всей числовой прямой равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Определение 1.25. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называют число $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$, где несобственный интеграл абсолютно сходится, т. е. сходится несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x)\, dx$.

Замечание. Если X имеет возможные значения только на ограниченном отрезке $[a, b]$, то математическое ожидание:

$$M(X) = \int\limits_{a}^{b} x \cdot f(x)\, dx. \tag{1.15}$$

Определение 1.26. Дисперсией непрерывной случайной величины X называют неотрицательное число:

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x)\, dx.$$

Определение 1.27. Число $\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$ называется среднеквадратическим отклонением случайной величины X.

Определение 1.28. Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описываются плотностью следующего вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)},$$

причем a – математическое ожидание этой нормально распределенной величины X; $\sigma^2 = D(X)$ – дисперсия этой случайной величины X, а σ – ее среднеквадратическое отклонение.

Нормально распределенную случайную величину X принято обозначать через $N(a; \sigma)$.

Определение 1.29. Нормированной (или стандартизованной) нормально распределенной случайной величиной называют величину $N(0; 1)$, т. е. при условии, что $a = 0$, $\sigma = 1$.

Плотность распределения для нормированной случайной величины $N\,(0;\,1)$ имеет вид $\varphi\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$, причем эта функция $\varphi\,(x)$ задана своими значениями в табл. П.1 приложения.

Функция распределения для $N\,(0;\,1)$ имеет вид $F_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} d\,z$,

при этом $F_0(x) = 0{,}5 + \Phi(x)$, где $\Phi\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{x} e^{-z^2/2} d\,z$ – функция Лапласа задана своими значениями в табл. П.2 приложения.

Замечание. Функция распределения для $N\,(a;\,\sigma)$ имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(z-a)^2/(2\sigma^2)} d\,z,$$

при этом $F(x) = F_0\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$.

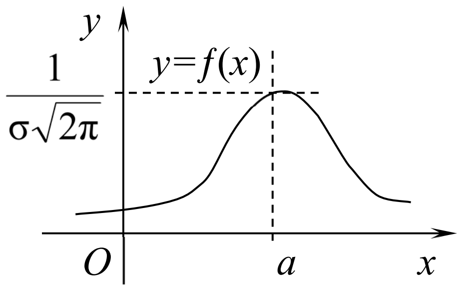

Рис. 1.4. Кривая Гаусса

Нормальной кривой (или кривой Гаусса) называется график плотности (рис. 1.4) нормального распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

График этой функции симметричен относительно прямой $x = a$ и при $x = a$ имеет максимальное значение, равное $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Теорема 1.15. Если $X = N\,(a;\,\sigma)$, т. е. X – нормально распределенная случайная величина с параметрами a, σ, то

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Замечание. Данная теорема позволяет найти вероятность попадания в интересующий исследователя интервал нормальной случайной величины.

Теорема 1.16. Пусть задана нормально распределенная случайная величина X, причем $a = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$, то вероятность заданного отклонения δ от математического ожидания находится так:

$$P\left(\left| X - a \right| < \delta\right) = 2\,\Phi(\delta/\sigma),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Замечание. Теорема 1.16 позволяет найти вероятность заданного отклонения нормально распределенной случайной величины.

2. КРАТКАЯ ТЕОРИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

В данном разделе использованы некоторые определения и теоремы из учебных пособий [1–3]. Более подробную теорию можно найти в этих же учебных пособиях.

Определение 2.1. Выборочной совокупностью (или выборкой) называется совокупность случайно отобранных объектов из некоторой большой (существенно более большой) совокупности.

Генеральной совокупностью называется существенно большая по объему совокупность объектов, из которой производится выборка.

Определение 2.2. Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называется число объектов в этой совокупности.

Определение 2.3. Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n, в которой величина x_1 наблюдалась n_1 раз, x_2 – n_2 раз,..., x_k – n_k раз, причем $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Наблюдаемые значения x_i называются **вариантами**, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется вариационным рядом. При этом числа n_i наблюдений вариант называются **частотами**, а их отношения $n_i / n = w_i$ частот n_i к объему выборки n называются **относительными частотами.**

Определение 2.4. Статистическим распределением выборки называется полный перечень вариант и полный перечень соответствующих им частот или относительных частот.

Замечание. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал).

Определение 2.5. Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака *X*. Обозначим: через n_x – число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака X меньшее, чем x; и пусть n – общее число наблюдений (объем выборки). Относительная частота такого события $A = \{ X < x \}$ равна числу n_x / n .

Если x изменяется, то, соответственно, изменяется и относительная частота, тем самым относительная частота n_x / n есть функция $F^*(x)$ переменной *x*. Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то она называется эмпирической функцией распределения.

Эмпирическая функция распределения имеет такие свойства:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F^*(x)$ – неубывающая функция;

3) если x_1 – наименьшая варианта вариационного ряда, а x_k – наибольшая варианта, то:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le x_1; \\ 1 \text{ при } x > x_k. \end{cases}$$

Определение 2.6. Полигоном частот называется ломаная линия, отрезки которой соединяют точки с координатами: $(x_1; n_1), (x_2; n_2), ..., (x_k; n_k)$.

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладываются варианты x_i , а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Соседние точки $(x_i; n_i)$ соединяются отрезками прямых, и получается полигон частот.

Определение 2.7. Полигоном относительных частот называется ломаная линия, отрезки которой соединяют точки $(x_1; w_1), (x_2; w_2), ..., (x_k; w_k)$. Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладываются варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты w_i. Соседние точки $(x_i; w_i)$ соединяются отрезками прямых, и получается полигон относительных частот.

Определение 2.8. Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы одинаковой длины h, а высоты равны отношению n_i / h (то есть плотностям частот).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладываются частичные интервалы одинаковой длины h, а затем на каждом частичном интервале строится прямоугольник соответствующей высоты n_i / h от оси абсцисс.

Определение 2.9. Гистограммой относительных частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношениям w_i / h (плотностям относительных частот).

Определение 2.10. Пусть изучается дискретная генеральная совокупность относительно количественного признака X. Генеральной средней называется число $\overline{x_\Gamma}$, равное среднему арифметическому всех значений признака генеральной совокупности. При этом:

1) если все значения $x_1, x_2, ..., x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$\overline{x_\Gamma} = (x_1 + x_2 + ... + x_N) / N; \tag{2.1}$$

2) если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, ..., N_k$, при этом $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$, то

$$\overline{x_\Gamma} = (x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_k N_k) / N, \tag{2.2}$$

т. е. генеральная средняя есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Теорема 2.1. Пусть обследуемый признак X генеральной совокупности рассматривается как дискретная случайная величина. Математическое ожидание признака равно генеральной средней этого признака равно $M(X) = \overline{x_\Gamma}$.

Определение 2.11. Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n. Выборочной средней $\overline{x_{\text{В}}}$ называется среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности. При этом:

1) если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$\overline{x_{\text{В}}} = (x_1 + x_2 + ... + x_n) / n; \tag{2.3}$$

2) если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, при этом $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то

$$\overline{x_{\text{В}}} = (n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k) / n, \tag{2.4}$$

т. е. выборочная средняя является средней взвешенной значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Замечание. Определения 2.11 и 2.10 аналогичны друг другу.

Теорема 2.2. Выборочная средняя есть несмещенная оценка генеральной средней, то есть: $M\left(\overline{x_{\text{В}}}\right) = \overline{x_{\Gamma}}$.

Определение 2.12. Генеральной дисперсией D_{Γ} называется среднее арифметическое значение квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\overline{x_{\Gamma}}$. При этом:

1) если все значения $x_1, x_2, ..., x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$D_{\Gamma} = (\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x_{\Gamma}})^2) / N); \tag{2.5}$$

2) если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, ..., N_k$, при этом $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$, то

$$D_{\Gamma} = (\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \bar{x}_{\Gamma})^2) / N, \tag{2.6}$$

т. е. генеральная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Определение 2.13. Генеральным среднеквадратическим отклонением (стандартом или стандартным отклонением) называется число, равное квадратному корню из генеральной дисперсии: $\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}}$.

Определение 2.14. Выборочной дисперсией $D_{\text{В}}$ называется среднее арифметическое значение квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\overline{x_{\text{В}}}$. При этом:

1) если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$D_{\text{В}} = (\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x_{\text{В}}}\right)^2 / n; \tag{2.7}$$

2) если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, при этом $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то

$$D_{\text{В}} = (\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \overline{x_{\text{В}}})^2) / n, \tag{2.8}$$

т. е. выборочная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Замечание. Определения 2.14 и 2.12 аналогичны друг другу.

Определение 2.15. Выборочным среднеквадратическим отклонением (стандартом) называется число, равное $\sigma_{\text{В}} = \sqrt{D_{\text{В}}}$.

Теорема 2.3. Дисперсия равна: $D_{\text{В}} = \overline{(x^2)_{\text{В}}} - [\overline{x_{\text{В}}}]^2$.

Замечание. Данная теорема справедлива и для генеральной дисперсии.

Однако кроме одномерных случайных величин изучаются величины, возможные значения которых определяются, например, двумя числами. Такие случайные величины называются соответственно двумерными.

Будем обозначать через (X, Y) двумерную случайную величину. Каждую из величин X и Y назовем составляющей; обе величины X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют систему двух случайных величин.

Определение 2.16. Законом распределения дискретной двумерной случайной величины назовем перечень возможных значений этой величины, т. е. набор пар чисел $(x_i; y_i)$ и их вероятностей $p(x_i; y_i)$, где i = 1, 2, …, n; j = 1, 2, …, m. Обычно закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом.

$Y \setminus X$	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	$p(x_1; y_1)$	$p(x_2; y_1)$	…	$p(x_i; y_1)$	…	$p(x_n; y_1)$
…	…	…	…	...	…	…
y_j	$p(x_1; y_j)$	$p(x_2; y_j)$	…	$p(x_i; y_j)$	…	$p(x_n; y_j)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1; y_m)$	$p(x_2; y_m)$	…	$p(x_i; y_m)$	…	$p(x_n; y_m)$

Первая строка таблицы содержит все возможные значения составляющей X, а первый столбец – все возможные значения составляющей Y. В клетке, стоящей на пересечении i-ого столбца и j-ой строки, указана вероятность $p(x_i; y_j)$ того, что двумерная случайная величина примет значение $(x_i; y_j)$.

При этом сумма вероятностей, записанных во всех клетках таблицы, равна единице.

Определение 2.17. Корреляционным моментом (или ковариацией) μ_{XY} случайных величин X и Y называется число μ_{XY}, равное математическому ожиданию произведения отклонений этих случайных величин:

$$\mu_{XY} = M\{[X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)]\}. \tag{2.9}$$

Для вычисления корреляционного момента дискретных случайных величин используется формула

$$\mu_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [x_i - M(X)][y_j - M(Y)] p(x_i, y_j), \tag{2.10}$$

а для непрерывных случайных величин применима такая формула:

$$\mu_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)][y - M(Y)] f(x, y)\, d\,x\, d\,y. \qquad (2.11)$$

Корреляционный момент служит для характеристики связи между величинами X и Y. При этом корреляционный момент равен нулю, если X и Y – независимые случайные величины. А, следовательно, если корреляционный момент не равен нулю, то случайные величины X и Y есть зависимые случайные величины.

Замечание. Корреляционный момент можно найти и по формуле:

$$\mu_{XY} = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y). \qquad (2.12)$$

Ковариация имеет следующие свойства.

1. Ковариация симметрична: $\mu_{XY} = \mu_{YX}$.

2. Дисперсия случайной величины есть ковариация ее с самой собой:

$$\mu_{XX} = D(X),\ \mu_{YY} = D(Y). \qquad (2.13)$$

3. Дисперсия суммы (разности) двух произвольных случайных величин равна сумме их дисперсий плюс (минус) удвоенная ковариация этих случайных величин:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\mu_{XY}. \qquad (2.14)$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак ковариации:

$$\mu_{(CX),Y} = \mu_{X,(CY)} = C\mu_{XY}. \qquad (2.15)$$

5. Ковариация не изменится, если к одной из случайных величин (или к обоим сразу) прибавить постоянную величину:

$$\mu_{(X+C),Y} = \mu_{X,(Y+C)} = \mu_{(X+C_1),(Y+C_2)}. \qquad (2.16)$$

6. Ковариация двух случайных величин по абсолютной величине не превосходит произведения их среднеквадратических отклонений:

$$|\mu_{XY}| \le \sigma(X) \cdot \sigma(Y). \qquad (2.17)$$

7. Ковариация независимых случайных величин X и Y равна нулю.

Определение 2.18. Коэффициентом корреляции r_{XY} двух случайных величин X и Y называется число r_{XY}, равное отношению корреляционного момента к произведению среднеквадратических отклонений этих величин, то есть $r_{XY} = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}$.

Коэффициент корреляции имеет такие свойства.

1. Коэффициент корреляции r_{XY} независимых случайных величин равен нулю (так как $\mu_{XY} = 0$).

2. Коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит единицы:

$$|r_{XY}| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le r_{XY} \le 1.$$

3. Если случайные величины X, Y связаны линейной зависимостью:

$$Y = aX + b,\ a \ne 0,$$

то $|r_{XY}| = 1$, причем $r_{XY} = 1$, если $a > 0$, *и* $r_{XY} = -1$, если $a < 0$.

4. Если $|r_{XY}| = 1$, то случайные величины X, Y связаны линейной функциональной зависимостью.

Вывод. Для независимых случайных величин коэффициент r_{XY} равен нулю, для случайных величин, связанных линейной зависимостью, выполняется равенство $|r_{XY}| = 1$, а в остальных случаях $-1 < r_{XY} < 1$.

Говорят, что случайные величины связаны положительной корреляцией, если $r_{XY} > 0$. А если $r_{XY} < 0$, то в этом случае говорят, что случайные величины связаны отрицательной корреляцией.

Чем ближе $|r_{XY}|$ к единице, тем больше оснований считать, что случайные величины X, Y связаны линейной функциональной зависимостью.

3. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Номер занятия	Тема практического занятия
1	Случайные события. Классическое определение вероятности. Геометрическая вероятность. Относительная частота появления события. Теоремы сложения и умножения вероятностей, формула полной вероятности, формула Байеса
2	Повторение испытаний: формула Бернулли, локальная и интегральная теоремы Лапласа. Дискретная случайная величина. Биномиальное распределение и распределение Пуассона. Простейший поток событий
3	Числовые характеристики дискретных случайных величин и их свойства
4	Неравенство Чебышева. Функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Нормальное распределение
5	Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма. Статистические оценки параметров распределения
6	Визуализация статистического распределения. Проверка типа распределения на его нормальность
7	Зависимые и независимые случайные величины
8	Контрольная работа по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»

4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

В данном разделе использованы примеры с решениями и задачи с ответами из учебно-методического пособия [5].

4.1. Занятие 1

Контрольные вопросы

1. Какое событие называется случайным?
2. Сформулируйте классическое определение вероятности.
3. Как находится геометрическая вероятность?
4. Что такое относительная частота появления события?
5. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для несовместных событий.
6. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для совместных событий.
7. Сформулируйте теорему умножения вероятностей для независимых событий.
8. Сформулируйте теорему умножения вероятностей для зависимых событий.
9. Запишите формулу полной вероятности для двух (трех) гипотез.
10. Что такое формулы Байеса?

Аудиторные задания

Пример 4.1.1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующего события A = {сумма выпавших на двух гранях – четная; причем хотя бы на одной грани – будет четыре очка}.

Решение. Испытание в этой задаче заключается в следующем: брошены две игральные кости, причем у каждой кости есть шесть граней. В таком испытании возможны различные случайные элементарные исходы.

Всего элементарных исходов в этом испытании: $n = 6 \times 6 = 36$.

Благоприятные для случайного события A элементарные исходы таковы:

$\omega_1 = \{2 + 4\}$; $\omega_2 = \{4 + 2\}$; $\omega_3 = \{4 + 4\}$; $\omega_4 = \{6 + 4\}$; $\omega_5 = \{4 + 6\}$.

Причем других благоприятных исходов нет, поэтому число всех благоприятных элементарных исходов $m = 5$. Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности: $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{5}{36}$.

Пример 4.1.2. На столе экзаменатора восемь одинаковых по форме билетов с номерами: 1, 2, ..., 8. Обучающиеся наудачу берут пять билетов со стола. Найти вероятность того, что среди взятых билетов окажутся: а) билет № 1 (он самый легкий из всех билетов); б) билет № 1 и билет № 2 (в билете № 2 написано: «Ваша оценка – "хорошо"»).

Решение. Испытание в этой задаче заключается в следующем: обучающиеся наудачу берут со стола пять билетов из восьми имеющихся. В результате такого испытания возможно множество вариантов элементарных исходов. Общее число n всех элементарных исходов в этом испытании равно числу различных способов выбора пяти билетов из восьми, то есть равно числу сочетаний:

$$n = C_8^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3!} = \frac{6 \cdot 56}{6} = 56;$$

а) рассматривается первое случайное событие A_1 = {среди взятых наудачу обучающимися пяти билетов оказался билет № 1, следовательно, вместе с билетом № 1 обучающиеся взяли еще четыре билета с номерами от 2 до 8 (а это семь различных номеров билетов)}. Число m_1 всех благоприятных для события A_1 элементарных исходов равно числу различных способов выбора номеров четырех билетов из семи, то есть равно числу сочетаний:

$$m_1 = C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = \frac{6 \cdot 35}{6} = 35.$$

Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности:

$$P(A_1) = \frac{35}{56} = 0{,}625;$$

б) рассматривается второе случайное событие A_2 = {среди взятых наудачу обучающимися пяти билетов оказались билеты № 1 и № 2, следовательно, вместе с билетами № 1, 2 обучающиеся взяли еще три билета с номерами от 3 до 8 (а это шесть различных номеров билетов)}. Число m_2 всех благоприятных для события A_2 элементарных исходов равно числу различных способов выбора номеров трех билетов из шести, то есть равно числу сочетаний:

$$m_2 = C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{3!} = \frac{6\cdot 20}{6} = 20.$$

Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности:

$$P(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}.$$

Ответ: $P(A_1) = 0{,}625$; $P(A_2) = 5/14$.

Пример 4.1.3. При испытании партии телефонов относительная частота исправных телефонов оказалась равной 0,93. Найти число исправных телефонов, если всего было проверено 400 телефонов.

Решение. Рассматривается случайное событие A = {проверяемый телефон исправен}. При проверке большой партии произвольных изделий такое случайное событие появляется не в каждом испытании из этой большой серии испытаний. Поэтому вводится понятие относительной частоты появления случайного события в большой серии испытаний – это число $w(A)$, равное отношению числа m_0 появления интересующего нас события A к общему числу n_0 всех испытаний данной серии. Поэтому

$$w(A) = 0{,}93 = \frac{m_0}{n_0}.$$

Так как $n_0 = 400$, то $m_0 = 0{,}93 \cdot 400 = 372$.

Ответ. В партии 372 исправных телефона.

Пример 4.1.4. Быстро вращающийся диск разделен на нечетное число равных по площади секторов, попеременно раскрашенных синим и красным цветом (пять красных и четыре синих сектора). По диску произведен удачный выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из красных секторов.

Решение. Рассмотрим случайное событие A = {пуля попала в красный сектор}. Данная задача решается с помощью геометрической вероятности. Всего секторов в диске – девять, из них красных – пять, поэтому благоприятная (красная) площадь диска равна: $S_{\text{крас}} = \frac{5}{9} \cdot S_{\text{круга}}$.

Следовательно, при использовании понятия геометрической вероятности (как отношение благоприятной площади ко всей площади), получается результат.

Ответ. $P(A) = \frac{S_{\text{крас}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{5}{9}$.

Пример 4.1.5. На плоскость, разлинованную (рис. 4.1) параллельными горизонтальными прямыми, отстоящими друг от друга на 9 см, наудачу брошена монета радиуса 1,5 см. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

Решение. Рассмотрим случайное событие A = {монета находится в какой-то полосе и не пересекает линий границ этой полосы}. Данная задача решается также методом геометрической вероятности. Если монета попала в какую-то полосу (см. рис. 4.1), то, чтобы она не пересекала линий границ этой полосы, необходимо, чтобы центр монеты не выходил за пределы внутренней полосы шириной 6 см (сверху – отступ 1,5 см и снизу – отступ 1,5 см). Максимум монета может касаться линии границы в одной точке сверху либо в одной точке снизу.

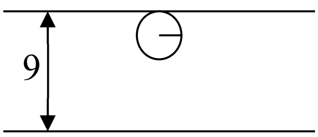

Рис. 4.1. Монета

Следовательно, при использовании понятия геометрической вероятности (как отношение ширины благоприятной полосы к ширине всей полосы) получается результат.

Ответ. $P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Пример 4.1.6. В коробке осталось семь одинаковых по размеру яблок: четыре красных и три зеленых. Наудачу из этой коробки взяты три яблока. Найти вероятность того, что среди трех взятых яблок окажется: а) одно красное; б) два красных; в) хотя бы одно красное яблоко.

Решение. Испытание в этой задаче заключается в следующем: из коробки наудачу взяты три из семи имеющихся яблок в этой коробке. В результате такого испытания возможно множество вариантов элементарных исходов. Общее число n всех элементарных исходов в этом испытании равно числу различных способов выбора трех яблок из семи, то есть равно числу сочетаний:

$$n = C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = 35;$$

а) рассмотрим случайное событие A_1 = {среди трех взятых наудачу яблок оказалось одно красное, следовательно, еще было взято два зеленых яблока}.

Одно красное яблоко можно взять из четырех имеющихся в коробке красных яблок C_4^1 различными способами. А два зеленых яблока из трех имеющихся в коробке зеленых яблок можно взять C_3^2 различными способами. Поэтому число благоприятных для события A_1 элементарных исходов находится так:

$$m = C_4^1 \cdot C_3^2 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{24}{2} = 12.$$

Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности:

$$P(A_1) = \frac{12}{35} \approx 0{,}343;$$

б) рассмотрим случайное событие A_2 = {среди трех взятых наудачу яблок оказалось два красных, следовательно, еще было взято одно зеленое яблоко}.

Два красных яблока можно взять из четырех имеющихся в коробке красных яблок C_4^2 различными способами, а одно зеленое яблоко из трех имеющихся в коробке зеленых яблок можно взять C_3^1 различными способами. Поэтому число благоприятных для события A_2 элементарных исходов находится так:

$$m = C_4^2 \cdot C_3^1 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{24 \cdot 6}{4 \cdot 2} = 18.$$

Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности:

$$P(A_2) = \frac{18}{35} \approx 0{,}514;$$

в) рассмотрим случайное событие A_3 = {среди трех взятых наудачу яблок оказалось хотя бы одно красное яблоко}. Вероятность такого события проще находить с помощью противоположного события $\overline{A_3}$ = {среди трех взятых наудачу яблок не оказалось ни одного красного яблока, то есть оказалось три зеленых яблока}. Три зеленых яблока из трех имеющихся в коробке зеленых яблок можно выбрать единственным способом. Поэтому число благоприятных для события $\overline{A_3}$ элементарных исходов находится так:

$$m = 1.$$

Поэтому, в соответствии с классическим определением вероятности:

$$P(\overline{A_3}) = \frac{1}{35} \approx 0{,}0286.$$

При использовании свойства противоположных событий получается:

$$P(A_3) = 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35} \approx 0{,}9714.$$

Ответ: $P(A_1) = \frac{12}{35} \approx 0{,}343$; $P(A_2) = \frac{18}{35} \approx 0{,}514$; $P(A_3) = \frac{34}{35} \approx 0{,}9714$.

Пример 4.1.7. В библиотеке на стеллаже «Математика» стоят 24 учебника, из которых шесть новых учебников (2022 г. издания), а остальные учебники – старые. Библиотекарь наугад берет четыре учебника для группы БК-21. Найти вероятность того, что:

$$A_1 = \{\text{хотя бы один из четырех выбранных учебников – новый}\};$$

$$A_2 = \{\text{три учебника из четырех выбранных – новые}\}.$$

Решение. Испытание в этой задаче заключается в следующем: со стеллажа наудачу взяты четыре учебника из 24 имеющихся учебников. В результате такого испытания возможно множество вариантов элементарных исходов. Общее число n всех элементарных исходов в этом испытании равно числу различных способов выбора четырех учебников из двадцати четырех, то есть равно числу сочетаний:

$$n = C_{24}^4 = \frac{24!}{20! \cdot 4!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{4!} = 10\,626.$$

а) рассмотрим событие A_1 = {хотя бы один из четырех выбранных учебников – новый}; данное событие достаточно сложно, так как включает в себя много вариантов, поэтому рассмотрим более простое противоположное событие:

$$\overline{A_1} = \{\text{все четыре отобранных учебника – старые}\}.$$

Эти четыре старых учебника можно выбрать со стеллажа из 18 старых учебников. Для события $\overline{A_1}$ число благоприятных исходов равно

$$m_1 = C_{18}^4 = \frac{18!}{14! \cdot 4!} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{24} = 3\,060.$$

Поэтому, в соответствии с классическим определением вероятности:

$$P(\overline{A}_1) = \frac{3\,060}{10\,626} \approx 0,288,$$

поэтому по свойствам противоположных событий:

$$P(A_1) = 1 - \frac{3\,060}{10\,626} \approx 0,712;$$

б) рассмотрим событие A_2 = {три учебника из четырех выбранных – новые, что автоматически означает, что четвертый учебник – старый}.

Для события A_2 число благоприятных исходов равно:

$$m_2 = C_6^3 \cdot C_{18}^1 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} \cdot \frac{18!}{17!\cdot 1!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{3!} \cdot 18 = 360.$$

Следовательно, в соответствии с классическим определением вероятности:

$$P(A_2) = \frac{360}{10\,626} \approx 0{,}033\,9.$$

Ответ: $P(A_1) \approx 0{,}712$; $P(A_2) \approx 0{,}033\,9$.

Пример 4.1.8. Для сигнализации о пожаре в гаражном боксе установлены два независимо работающих датчика. Вероятность того, что при пожаре первый из них сработает, равна 0,95; для второго эта вероятность равна 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) A_1 = {при пожаре сработал только один датчик}; б) A_2 = {при пожаре сработал хотя бы один датчик}, в) A_3 = {при пожаре не сработали оба датчика}.

Решение:

а) рассмотрим первое случайное событие A_1 = {при пожаре сработает только один датчик}.

Данное событие включает в себя два варианта, поэтому рассмотрим более простые события:

– событие B_1 = {сработал первый датчик}, по условию: $P(B_1) = 0{,}95$;

– событие B_2 = {сработал второй датчик}, по условию: $P(B_2) = 0{,}9$.

Тогда событие A_1 можно представить в виде

$$A_1 = B_1 \cdot \overline{B_2} + \overline{B_1} \cdot B_2 \Rightarrow P(A_1) = P(B_1 \cdot \overline{B_2} + \overline{B_1} \cdot B_2).$$

По теореме сложения вероятностей для несовместных событий (с учетом свойств противоположных событий) получается:

$$P(A_1) = P(B_1 \cdot \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} \cdot B_2) = P(B_1) \cdot (1 - P(B_2)) + (1 - P(B_1)) \cdot P(B_2).$$

В итоге: $P\,(A_1) = 0{,}95 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 = 0{,}095 + 0{,}045 = 0{,}14$;

б) рассмотрим второе случайное событие A_2 = {при пожаре сработал хотя бы один датчик}. При сравнении описаний событий A_2 и A_3 можно отметить, что они противоположны, причем событие A_3 проще. Это событие можно представить в виде формулы $A_3 = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2}$, поэтому по теореме произведения вероятностей для независимых событий (по условию: датчики работают независимо друг от друга) и с учетом свойств противоположных событий получается:

$$P(A_3) = P(\overline{B_1} \cdot \overline{B_2}) = P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) = (1 - P(B_1) \cdot (1 - P(B_2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; P(A_3) = 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}005;$$

в) с учетом противоположности событий A_2 и A_3 вычисляется вероятность:

$$P(A_2) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995.$$

Ответ: $P(A_1) = 0{,}14$; $P\,(A_2) = 0{,}995$; $P\,(A_3) = 0{,}005$.

Пример 4.1.9. По данным переписи населения за 2010 г. некоторой африканской страны установлено: чернокожие отцы и чернокожие сыновья (событие $A \cdot B$) составили 5 % обследованных лиц, чернокожие отцы и светлокожие сыновья (событие $A \cdot \overline{B}$) – 7,9 %, светлокожие отцы и чернокожие сыновья (событие $\overline{A} \cdot B$) – 8,9 %, светлокожие отцы и светлокожие сыновья ($\overline{A} \cdot \overline{B}$) – 78,2 %. Найти связь между цветом кожи отца и сына.

Решение. По условию:

$$P(A \cdot B) = 0{,}05, P(A \cdot \overline{B}) = 0{,}079, P(\overline{A} \cdot B) = 0{,}089, P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 0{,}782.$$

1. Первая возможная связь: если отец чернокожий (A), то сын – чернокожий (B). Найдем условную вероятность:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{0{,}05}{P(A \cdot B + A \cdot \overline{B})} = \frac{0{,}05}{P(A \cdot B) + P(A \cdot \overline{B})} = \frac{0{,}05}{0{,}05 + 0{,}079} = 0{,}39\,.$$

2. Вторая возможная связь: если отец чернокожий (A), то сын – светлокожий ($\overline{B}$). Найдем условную вероятность:

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cdot \overline{B})}{P(A)} = \frac{0,079}{0,129} = 0,61.$$

3. Третья возможная связь: если отец светлокожий ($\overline{A}$), то сын – чернокожий (B). Найдем условную вероятность:

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cdot B)}{P(\overline{A})} = \frac{0,089}{P(\overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B})} = \frac{0,089}{P(\overline{A} \cdot B) + P(\overline{A} \cdot \overline{B})} =$$

$$= \frac{0,089}{0,089 + 0,782} = 0,102.$$

4. Четвертая возможная связь: если отец светлокожий ($\overline{A}$), то сын – светлокожий ($\overline{B}$). Найдем условную вероятность:

$$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cdot \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{0,782}{0,089 + 0,782} = 0,898.$$

Ответ. Наиболее вероятна следующая связь: если отец светлокожий, то сын – светлокожий.

Пример 4.1.10. Два станка-автомата производят одинаковые тетрапаки для молока, затем все тетрапаки поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата в два раза выше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 66 % тетрапаков отличного качества, а второй – 93 %. Наудачу взятый с конвейера тетрапак оказался отличного качества (событие A). Найти вероятность того, что этот тетрапак произведен первым автоматом.

Решение. По поводу события A имеются две (и только две) гипотезы:

– B_1 = {этот тетрапак произведен первым станком-автоматом};

– B_2 = {этот тетрапак произведен вторым станком-автоматом}.

По условию: $P(B_1) = \frac{2}{3}$, $P(B_2) = \frac{1}{3}$.

Условная вероятность $P_{B_1}(A)$ – это вероятность того, что тетрапак окажется отличного качества (A), при условии, что он произведен первым станком-автоматом (B_1). По условию она равна: $P_{B_1}(A)=0{,}66$.

Аналогично другая условная вероятность равна: $P_{B_2}(A)=0{,}93$.

Поэтому по формуле полной вероятности для двух гипотез:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=\frac{2}{3}\cdot 0{,}66+\frac{1}{3}\cdot 0{,}93=0{,}44+0{,}31=0{,}75.$$

В данной задаче требуется найти вероятность того, что данный тетрапак произведен первым автоматом, при условии, что он оказался отличного качества. А это есть условная вероятность $P_A(B_1)$, которую можно найти по формуле Байеса:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}66}{0{,}75}=\frac{44}{75}\approx 0{,}587.$$

Ответ. $P_A(B_1)=\frac{44}{75}\approx 0{,}587$.

Самостоятельная работа

Задача 4.1.1. На кафедре прикладной оптики работают шесть мужчин и четыре женщины. Отдел кадров произвольно выбрал семь человек из этой кафедры для награждения по поводу юбилея института. Найти вероятность того, что среди отобранных сотрудников окажутся три женщины (событие A).

Ответ. $P(A)=0{,}5$.

Задача 4.1.2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующих событий: $A_1=\{$сумма выпавших очков равна 7$\}$, $A_2=\{$сумма выпавших очков равна 8, а разность равна 4$\}$.

Ответ: $P(A_1)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$; $P(A_2)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

Задача 4.1.3. Устройство состоит из пяти элементов, из которых только три в рабочем состоянии. При включении устройства включаются случайным образом только два элемента. Найти вероятность следующих событий: A_1 = {включенными окажутся рабочие элементы}, A_2 = {включенным окажется хотя бы один рабочий элемент}.

Ответ: $P(A_1) = 0{,}3;\quad P(A_2) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$

Задача 4.1.4. В коробке осталось восемь одинаковых по размеру груш: три желтых и пять зеленых. Наудачу из этой коробки взяты три груши. Найти вероятность того, что среди трех взятых груш окажется: а) одна желтая; б) две желтых; в) хотя бы одна желтая груша.

Ответ: $P(A_1) = \dfrac{15}{28} \approx 0{,}536;\ P(A_2) = \dfrac{15}{56} \approx 0{,}268;\ P(A_3) = \dfrac{23}{28} \approx 0{,}821.$

Задача 4.1.5. В круг радиуса R вписан правильный шестиугольник. По данному кругу произведен удачный выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в этот шестиугольник.

Ответ. $P(A) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$

Задача 4.1.6. В казарме находится пирамида из 10 винтовок, причем в этой пирамиде – четыре винтовки с оптическим прицелом, а шесть винтовок – без такого прицела. Вероятность того, что солдат поразит врага из винтовки с оптическим прицелом (гипотеза B_1), равна 0,97; а для винтовки без оптического прицела эта вероятность меньше – 0,81. Солдат поразил врага из наудачу выбранной винтовки (событие A). Что вероятнее: он стрелял из оружия с оптическим прицелом или без него?

Ответ: $P_A(B_1) \approx 0{,}444;\ P_A(B_2) \approx 0{,}556.$ Вывод: солдат вероятнее стрелял из винтовки без оптического прицела.

Задача 4.1.7. В магазин поступила партия телевизоров со склада: 12 штук – корейского производства, 20 штук – малайзийской сборки, 18 штук – японской сборки. Вероятность того, что телевизор, изготовленный в Корее, отличного качества, равна 0,9; для Малайзии – 0,6, а для Японии – 0,9. Найти вероятность того, что наудачу взятый телевизор окажется отличного качества (событие A).

Ответ. $P(A) = 0{,}78$.

Задача 4.1.8. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре авиабомбы, вероятность попадания которых равны 0,3; 0,4; 0,6 и 0,7.

Ответ. Вероятность примерно равна 0,95.

Задача 4.1.9. Обучающийся знает 20 из 25 вопросов к экзамену. Найти вероятность того, что он знает заданные экзаменатором три вопроса.

Ответ. $\dfrac{57}{118} \approx 0{,}496$.

Задача 4.1.10. Обучающийся разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что нужная формула находится в первом справочнике, равна 0,6; для второго – 0,7 и для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что формула находится: а) только в первом справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

Ответ: 0,188; 0,452; 0,336.

4.2. Занятие 2

Контрольные вопросы

1. При каких условиях применима формула Бернулли?
2. Записать формулу Бернулли.
3. В каких случаях применяется локальная теорема Лапласа и как она записывается?
4. В каких случаях применяется интегральная теорема Лапласа и как она записывается?

5. Что такое дискретная случайная величина и как выглядит закон распределения дискретной случайной величины?

6. Что такое биномиальное распределение?

7. Записать распределение Пуассона.

8. Что такое простейший поток событий?

Аудиторные задания

Пример 4.2.1. Два равносильных мастера спорта играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: а) одну партию из двух или две из четырех; б) не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти?

Решение. В этой задаче формула Бернулли применима, так как каждая партия играется независимо от результатов предыдущих партий; вероятность выигрыша $p = 0{,}5$ и постоянна в силу равносильности шахматистов. Кроме того, общее количество партий небольшое, поэтому эффект усталости шахматистов не влияет на результаты. Поэтому по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},\ q = 1 - p = 0{,}5 = p;$$

а) сравниваем вероятности:

$$\left.\begin{aligned} P_2(1) &= C_2^1 \cdot p^1 \cdot q^1 = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 = \frac{8}{16} \\ P_4(2) &= C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 = \frac{6}{16} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_2(1) > P_4(2);$$

б) $P_4(k \geq 2) = 1 - P_4(k < 2) = 1 - P_4(0) - P_4(1) = 1 - C_4^0 \cdot p^0 \cdot q^4 - C_4^1 \cdot p^1 \cdot q^3 =$

$$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{16};$$

$$P_5(k \geq 3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 + C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^0 + C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 =$$

$$= \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{1}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{8}{16} \Rightarrow P_4(k \geq 2) > P_5(k \geq 3).$$

Ответ: $P_2(1) > P_4(2)$; $P_4(k \geq 2) > P_5(k \geq 3)$.

Пример 4.2.2. В среднестатистической семье Узбекистана пятеро детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика в этот период времени считается равной $p = 0{,}51$.

Решение. Задача решается по формуле Бернулли, так как она аналогична предыдущему примеру:

а) $P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 5}{6} 0{,}51^2 \cdot 0{,}49^3 \approx 0{,}306$;

б) $P_5(k \le 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5 + C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4 + P_5(2) =$

$= 1 \cdot 0{,}49^5 + 5 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49^4 + 0{,}306 \approx 0{,}028 + 0{,}147 + 0{,}306 \approx 0{,}481$;

в) $P_5(k > 2) = 1 - P_5(k \le 2) \approx 1 - 0{,}481 = 0{,}519$;

г) $P_5(2 \le k \le 3) = P_5(2) + P_5(3) = 0{,}306 + C_5^3 \cdot 0{,}51^3 \cdot 0{,}49^2 =$

$= 0{,}306 + \dfrac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0{,}133 \cdot 0{,}240 \approx 0{,}625$.

Ответ: $P_5(2) \approx 0{,}306$; $P_5(k \le 2) \approx 0{,}481$; $P_5(k > 2) \approx 0{,}519$;
$P_5(2 \le k \le 3) \approx 0{,}625$.

Пример 4.2.3. В мирное время вероятность p рождения мальчика равна 0,49. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется ровно 50 мальчиков.

Решение. В связи с тем, что количество испытаний (100) достаточно большое, в этой задаче вместо формулы Бернулли применяется локальная теорема Лапласа (локальная – потому, что в условии число успехов (50) дано со словом «ровно»):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

У нас: $n = 100$, $k = 50$, $p = 0{,}49$, $q = 0{,}51 \Rightarrow \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51} \approx 4{,}999$, поэтому $x = \dfrac{(50 - 100 \cdot 0{,}49)}{4{,}999} \approx 0{,}200$, а, следовательно, по табл. П.1 приложения для нахождения значений функции Лапласа $\varphi(x) = \varphi(0{,}200) \approx 0{,}391$ в итоге получается: $P_{100}(50) \approx \dfrac{1}{4{,}999} \cdot 0{,}391 \approx 0{,}078$.

Пример 4.2.4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8 и постоянна в каждом из 400 выстрелов. Найти вероятность того, что мишень будет поражена при 400 выстрелах: а) не менее 310 раз, но не более 340 раз; б) не менее 310 раз.

Решение. В связи с тем, что количество испытаний (400) достаточно большое, в этой задаче вместо формулы Бернулли применяется интегральная теорема Лапласа (интегральная – потому, что в условии число успехов дано в виде интервала «от … до …»):

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, причем значения функции Лапласа $\Phi(x)$ находятся с помощью табл. П.2 приложения, в которой, в частности, написано, что функция $\Phi(x)$ является нечетной функцией:

а) имеем: $n = 400$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2 \Rightarrow \sqrt{npq} = 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{(340 - 0{,}8 \cdot 400)}{8} \approx 2{,}5;\ x_1 = \frac{(310 - 0{,}8 \cdot 400)}{8} \approx -1{,}25.$$

Поэтому $P_{400}(310;\ 340) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25)$ = (в силу нечетности) = $= \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) \approx 0{,}493\,8 + 0{,}394\,4 = 0{,}888\,2$;

б) $P_{400}(310;\ 400) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,

где $x_2 = \dfrac{(400 - 320)}{8} \approx 10$; $x_1 = \dfrac{(310 - 320)}{8} \approx -1{,}25 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_{400}(310;\ 400) \approx \Phi(10) - \Phi(1{,}25) \approx 0{,}5 + 0{,}394\,4 = 0{,}894\,4.$$

Ответ: $P_{400}(310;\,340)\approx 0{,}888\,2$; $P_{400}(310;\,400)\approx 0{,}894\,4$.

Вывод. При сравнении ответа примера 4.2.3 с ответом данного примера можно сделать вывод: если количество успехов дано в виде интервала, то вероятность успеха существенно выше.

Пример 4.2.5. Сложное устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность p отказа каждого элемента одинакова и равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном испытании.

Решение. Пусть дискретная случайная величина X = {число отказавших элементов из трех имеющихся в одном испытании}.

Все возможные значения данной случайной величины таковы:

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 1,\quad x_3 = 2,\quad x_4 = 3.$$

При описанных в тексте задачи условиях применима формула Бернулли:

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot p^0 \cdot q^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}729;$$

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot p \cdot q^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243;$$

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027;$$

$$P_3(3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0 = 1 \cdot 0{,}1^3 \cdot 1 = 0{,}001.$$

Проверка: 0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1 (точно).

Ответ. Закон распределения:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

Пример 4.2.6. Книга издана тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что отдельно взятая книга неправильно сброшюрована, равна 0,000 1. Найти вероятность того, что весь тираж содержит: а) равно 10 бракованных книг; б) от 8 до 10 бракованных книг.

Решение. Число испытаний $n = 100\,000$ достаточно большое, а вероятность $p = 0{,}000\,1$ очень маленькая, поэтому применимо распределение Пуассона: $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = n \cdot p = 100\,000 \cdot 0{,}000\,1 = 10$:

а) в первом случае:

$$P_{100\,000}(10) \approx \frac{10^{10} \cdot e^{-10}}{10!} = \frac{(10/e)^{10}}{10!} \approx \frac{453\,999{,}298\,4}{3\,628\,800} \approx 0{,}125\,11;$$

б) во втором:

$$P_{100\,000}(8 \le k \le 10) = P_{10^5}(8) + P_{10^5}(9) + P_{10^5}(10),$$

где $P_{10^5}(8) \approx \dfrac{10^8 \cdot e^{-10}}{8!} = \dfrac{(10/e)^8}{e^2 \cdot 8!} \approx 0{,}112\,599;$

$P_{10^5}(9) \approx \dfrac{10^9 \cdot e^{-10}}{9!} = \dfrac{(10/e)^9 \cdot e^{-1}}{9!} \approx \dfrac{45\,399{,}929\,84}{362\,880} \approx 0{,}125\,11;$

$P_{10^5}(10) \approx 0{,}125\,11.$

Поэтому при сложении получается: $P_{10^5}(8 \le k \le 10) \approx 0{,}362\,82$.

Ответ: $P_{100\,000}(10) \approx 0{,}125\,11$; $P_{10^5}(8 \le k \le 10) \approx 0{,}362\,82$.

Пример 4.2.7. Среднее число вызовов Яндекс.Такси, поступающих диспетчеру (по телефону 383-00-00) за одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 120 секунд поступит: а) четыре вызова; б) менее четырех вызовов; в) не менее четырех вызовов.

Решение. Имеет место простейший поток событий (вызов такси), поэтому по формуле Пуассона: $P_t(k) \approx \dfrac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$, где по условию: $\lambda = 3$, $t = 120$ с (секунды переводим в минуты, так как в начале условия время дано в минутах): $t = 2$ мин, поэтому:

$$P_t(k) \approx \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!} = \frac{6^k \cdot e^{-6}}{k!};$$

а) в первом случае:

$$P_2(4) \approx \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} = \frac{36 \cdot 36}{24 \cdot e^6} = \frac{54}{e^6} \approx 0{,}133\,85;$$

б) во втором:

$$P_2(k < 4) = P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) + P_2(3) =$$

$$= \frac{6^0 \cdot e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 \cdot e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} + \frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!} = e^{-6}(1+6+18+36) = \frac{61}{e^6} \approx 0{,}151\,20;$$

в) в третьем случае:

$$P_2(k \geq 4) = 1 - P_2(k < 4) \approx 1 - 0{,}151\,20 = 0{,}848\,80.$$

Ответ: $P_2(4) \approx 0{,}133\,85$; $P_2(k < 4) \approx 0{,}151\,20$; $P_2(k \geq 4) \approx 0{,}848\,80$.

Самостоятельная работа

Задача 4.2.1. Среднее число вызовов машины скорой помощи, поступающих в минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 240 секунд поступит: а) два вызова; б) менее трех вызовов; в) не менее трех вызовов.

Ответ: $P_4(2) \approx 0{,}010\,7$; $P_4(k < 3) \approx 0{,}012\,3$; $P_4(k \geq 3) \approx 0{,}987\,7$.

Задача 4.2.2. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень ровно 75 раз.

Краткое решение. Здесь: $n = 100$, $k = 75$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $\sqrt{npq} = 4$, $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{(75 - 80)}{4} \approx -1{,}25$, с учетом того, что функция $\varphi(x)$ – это четная функция (табл. П.1 приложения):

$$\varphi(x) = \varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) \approx 0{,}182\,6 \to P_{100}(75) \approx \frac{1}{4} \cdot 0{,}182\,6 \approx 0{,}045\,65.$$

Замечание. Обучающимся необходимо представить полное решение этой задачи.

Ответ. Вероятность равна 0,045 65. ***Вывод:*** довольно маленькая вероятность для достижения конкретного числа (75) успехов.

Задача 4.2.3. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,7 и постоянна в каждом из 200 выстрелов. Найти вероятность того, что мишень будет поражена при 200 выстрелах: а) не менее 120 раз, но не более 160 раз; б) не менее 160 раз; в) ровно 140 раз.

Ответ: а) 0,986; б) 0,007; в) 0,062.

Задача 4.2.4. В партии 10 % бракованных изделий. Наудачу отобраны четыре изделия. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа бракованных изделий среди четырех отобранных.

Ответ:

X	0	1	2	3	4
P	0,656 1	0,291 6	0,048 6	0,003 6	0,000 1

Задача 4.2.5. Устройство состоит из 1 000 простейших элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение недели равна 0,02. Найти вероятность того, что за неделю откажут ровно три простейших элемента.

Ответ. $P_{1\,000}(3) \approx 0{,}18$.

4.3. Занятие 3

Контрольные вопросы

1. Как находится математическое ожидание дискретной случайной величины?

2. Запишите свойства математического ожидания.

3. Как находится дисперсия и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины?

4. Запишите свойства дисперсии.

Аудиторные задания

Пример 4.3.1. Найти математическое ожидание $M(X)$ дискретной случайной величины X, которая задана законом распределения:

а)

X	–4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

б)

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

Решение:

а) $M(X) = -4\cdot 0{,}2 + 6\cdot 0{,}3 + 10\cdot 0{,}5 = 6$;

б) аналогично: $M(X) = 0{,}535$.

Пример 4.3.2. Найти математическое ожидание $M(Z)$, если известно: а) $Z = X + 2Y$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$; б) $Z = 3X + 4Y$, $M(X) = 2$, $M(Y) = 6$.

Решение:

а) используя свойство линейности математического ожидания:

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + 2\,M(Y) = 5 + 6 = 11;$$

б) аналогично:

$$M(Z) = M(3X + 4Y) = 3M(X) + 4\,M(Y) = 6 + 24 = 30.$$

Пример 4.3.3. Дан перечень всех возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; кроме этого, известны: $M(X) = 0{,}5$; $M(X^2) = 0{,}9$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3. Записать закон распределения.

Решение. По формуле для нахождения математического ожидания и с учетом данных из условия получается система трех уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ M(X) = 0{,}1 \\ M(X^2) = 0{,}9 \end{cases} \left| \begin{array}{l} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ -1\cdot p_1 + 0 + 1\cdot p_3 = 0{,}1 \\ (-1)^2\cdot p_1 + 0^2 + 1^2\cdot p_3 = 0{,}9 \end{array} \right| \begin{array}{l} p_2 = 1 - p_1 - p_3 \\ p_1 = p_3 - 0{,}1 \\ 2p_3 = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} p_2 = 0{,}1; \\ p_1 = 0{,}4; \\ p_3 = 0{,}5. \end{array} \right.$$

Ответ. Закон распределения:

X	–1	0	1
P	0,4	0,1	0,5

Пример 4.3.4. Найти $M(X)$, если X = {число таких бросаний пяти игральных костей, в каждом из которых на двух костях появляется по единице, причем общее число бросаний $n = 20$}.

Решение. По свойствам математического ожидания: $M(X) = n\cdot P$, где $n = 20$, а вероятность P находится по формуле Бернулли:

$$P = P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{4\cdot 5}{2}\cdot\frac{5^3}{6^5} = 2\cdot\frac{5^4}{6^5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(X) = n\cdot P = 20\cdot 2\cdot\frac{5^4}{6^5} = 8\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 3{,}215.$$

Пример 4.3.5. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию $D(Z)$, если $Z = 3X + 2Y$, $D(X) = 5$, $D(Y) = 7$.

Решение. Случайные величины $3X$ и $2Y$ тоже независимы, поэтому по свойствам дисперсии:

$$D(Z) = D(3X + 2Y) = D(3X) + D(2Y) = 3^2 \cdot D(X) + 2^2 \cdot D(Y) = 9 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 73.$$

Пример 4.3.6. Найти дисперсию $D(X)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$, если дан закон распределения случайной величины.

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. По свойствам дисперсии: $\sigma^2(X) = D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Закон распределения для случайной величины X^2 составляется так:

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Поэтому:

$$M(X^2) = 25\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}1 + 16\cdot 0{,}2 = 10 + 1{,}2 + 0{,}9 + 3{,}2 = 15{,}3.$$

Далее:

$$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -2 + 0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}8 = -0{,}3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(X) = \sigma^2(X) = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21 \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9.$$

Ответ: $D(X) = 15{,}21$; $\sigma(X) = 3{,}9$.

Пример 4.3.7. Найти $D(X)$, если X = {число отказов элемента устройства в двух независимых опытах}, при условии, что вероятность отказа в каждом опыте постоянна и математическое ожидание $M(X) = 1{,}2$.

Решение. По свойствам дисперсии: $D(X) = n \cdot p \cdot q$.

По свойствам математического ожидания:

$$M(X) = n \cdot p = M(X) = 1{,}2 = n \cdot p = 2 \cdot p \Rightarrow p = 0{,}6 \Rightarrow q = 0{,}4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D\,(X) = n \cdot p \cdot q = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48.$$

Пример 4.3.8. Дискретная случайная величина X принимает только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность p_1 для x_1 равна 0,6. Найти закон распределения, если математическое ожидание $M(X) = 1{,}4$, а дисперсия $D(X) = 0{,}24$.

Решение. Имеем: $p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Осталось найти x_1 и x_2. При этом закон распределения для случайной величины X^2 представлен в табличной форме.

X^2	${x_1}^2$	${x_2}^2$
P	0,6	0,4

Далее получается система двух уравнений для двух неизвестных:

$$\begin{cases} M(X) = 1{,}4 \\ D(X) = 0{,}24 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 0{,}6 \cdot x_1 + 0{,}4 \cdot x_2 = 1{,}4 \\ D(X) = 0{,}24 \end{array} \right|.$$

Учитывая следующее:

$$\left. \begin{array}{l} M(X^2) = 0{,}6 \cdot x_1^2 + 0{,}4 \cdot x_2^2 \\ [M(X)]^2 = 1{,}4^2 = 1{,}96 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0{,}6\,{x_1}^2 + 0{,}4\,{x_2}^2 - 1{,}96 = 0{,}24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 = 1{,}4 \\ 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 = 2{,}2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 = 14 \\ 6x_1^2 + 4x_2^2 = 22 \end{array} \right| \begin{array}{l} x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1 \\ 3x_1^2 + 2x_2^2 = 11 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1^2 + 2(3{,}5 - 1{,}5x_1)^2 = 11 \\ x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 3x_1^2 + 2(12{,}25 - 10{,}5x_1 + 2{,}25x_1^2) = 11 \\ x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7{,}5x_1^2 - 21x_1 + 13{,}5 = 0 \\ x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{21 \pm \sqrt{441 - 405}}{15} = \dfrac{21 \pm 6}{15} \\ x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = 1{,}8 \\ x_2 = 0{,}8 \end{cases}$, однако, по условию $x_1 < x_2$, следовательно, в ответ пойдет первый вариант.

Ответ:

X	1	2
P	0,6	0,4

Самостоятельная работа

Задача 4.3.1. Дискретная случайная величина X принимает только три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0{,}5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0{,}3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти закон распределения, если известно математическое ожидание $M(X) = 8$.

Ответ:

X	4	6	21
P	0,5	0,3	0,2

Задача 4.3.2. Известны все возможные значения дискретной случайной величины X: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Кроме этого, даны $M(X) = 2{,}3$; $M(X^2) = 5{,}9$. Найти закон распределения.

Ответ:

X	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

Задача 4.3.3. Устройство состоит из восьми элементов. Вероятность отказа любого элемента в течении опыта равна $p = 0{,}1$. Найти математическое ожидание числа таких опытов, в каждом из которых откажет ровно два элемента, если всего произведено 30 опытов, которые не зависят друг от друга.

Ответ. $M(X) \approx 4{,}464$.

Задача 4.3.4. Случайные величины X и Y независимы. Найти $D(Z)$, если $Z = 2X + 3Y$, $D(X) = 2$, $D(Y) = 6$.

Ответ. $D(Z) = 62$.

Задача 4.3.5. Найти $D(X)$ и $\sigma(X)$, если дан закон распределения.

X	4,3	5,1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

Ответ: $D(X) = 8{,}545$; $\sigma(X) = 2{,}923$.

Задача 4.3.6. Дискретная случайная величина X принимает только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность p_1 для x_1 равна 0,2. Найти закон распределения, если $M(X) = 2{,}6$ и $\sigma(X) = 0{,}8$.

Ответ:

X	1	3
P	0,2	0,8

4.4. Занятие 4

Контрольные вопросы

1. Запишите неравенство Чебышева.
2. Что такое непрерывная случайная величина и как задается ее функция распределения?
3. Каковы свойства функции распределения?
4. Что называется плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины, и каковы ее свойства?
5. Как можно найти функцию распределения, если задана плотность распределения?
6. Как определяются числовые характеристики непрерывной случайной величины?
7. Что такое нормальное распределение и как выглядит нормальная кривая?

Пример 4.4.1. Вероятность p появления «решки» в каждом из 100 независимых бросаний постоянна и равна 0,5. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина $X = \{$число «решек» в этих 100 бросаниях$\}$ будет заключена в пределах от 40 до 60.

Решение. По свойствам математического ожидания: $M(X) = n \cdot P = 50$.

По свойствам дисперсии: $D(X) = n \cdot p \cdot q = 50 \cdot 0{,}5 = 25$. По условию случайная величина X должна находиться в пределах от 40 до 60, то есть середина этого интервала есть 50, а разброс (влево, вправо) равен $\varepsilon = 10$.

Далее в соответствии с неравенством Чебышева:

$$P(40 < X < 60) = P\left(\left| X - 50 \right| < 10\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{25}{100} = 0{,}75.$$

Вывод: оцениваемая вероятность – не менее 0,75.

Пример 4.4.2. В осветительную сеть параллельно включены двадцать ламп. Вероятность того, что за сутки лампа будет включена, равна 0,8. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за сутки: а) будет меньше трех; б) будет не меньше трех.

Решение. Пусть дискретная случайная величина X задана так:

$$X = \{\text{число включенных ламп за сутки}\}.$$

По свойствам математического ожидания: $M(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}8 = 16$; а по свойствам дисперсии: $D(X) = n \cdot p \cdot q = 16 \cdot 0{,}2 = 3{,}2$. Далее по неравенству Чебышева:

а) $P\left(\left| X - 16 \right| < 3\right) \geq 1 - \dfrac{3{,}2}{3^2} \approx 0{,}64$, поэтому

б) $P\left(\left| X - 16 \right| \geq 3\right) = 1 - P\left(\left| X - 16 \right| < 3\right) < 1 - 0{,}64 = 0{,}36$.

Пример 4.4.3. Случайная величина X задана на всей числовой прямой своей функцией распределения: $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервал (0; 1).

Решение. В соответствии со свойствами функции распределения непрерывной случайной величины: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$, при этом $b = 1$, $a = 0$, значения функции распределения:

$$F(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}1=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=0,75;$$

$$F(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}0=0,5.$$

Ответ. $P(0 < X < 1) = 0,25$.

Пример 4.4.4. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\, x\le 0;\\ x^2 & \text{при}\, 0<x\le 1;\\ 1 & \text{при}\, x>1.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно 3 раза примет значение из интервала (0,25; 0,75).

Решение. В этой задаче есть повторение испытаний (четыре раза), поэтому по формуле Бернулли:

$$P_4(3)=C_4^3\cdot p^3\cdot q=\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot p^3\cdot q=4\cdot p^3\cdot(1-p).$$

Найдем $p = P\,(0,25 < X < 0,75) = F\,(0,75) - F\,(0,25)$.

По условию: $F\,(0,75) = x^2\Big|_{x=0,75}=\frac{9}{16}$; $F\,(0,25) = x^2\Big|_{x=0,25}=\frac{1}{16}$; поэтому $p = F\,(0,75) - F\,(0,25) = \frac{9}{16}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$.

Следовательно, $P_4(3)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=4\cdot\frac{1}{16}=0,25$.

Ответ. 0,25.

Пример 4.4.5. Задан закон распределения дискретной случайной величины. Найти функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

X	2	4	7
P	0,5	0,2	0,3

Решение. В соответствии с определением функция распределения задается так: $F(x) = P(X < x)$.

Получается несколько интервалов:

а) если $x \le 2 \Rightarrow F(x) = 0$;

б) если $2 < x \le 4 \Rightarrow F(x) = 0{,}5$;

в) если $4 < x \le 7 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X < 4) + P(4 < X \le 7) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$;

г) если $x > 7 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X < 4) + P(4 \le X < 7) + P(7 \le X < x) = 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}3 = 1$, поэтому:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2; \\ 0{,}5 & \text{при } 2 < x \le 4; \\ 0{,}7 & \text{при } 4 < x \le 7; \\ 1 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

Пример 4.4.6. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \sin x & \text{при } 0 < x \le \pi/2; \\ 1 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

Решение. По определению плотности распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \cos x & \text{при } 0 < x < \pi/2; \\ 0 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Причем $f(0)$ не существует, так односторонние пределы слева и справа от нуля не равны между собой: $F'(-0) \ne F'(+0)$.

Пример 4.4.7. Известна плотность распределения непрерывной случайной величины: $f(x) = \dfrac{2}{3}\sin(3x), x \in (0; \pi/3)$; и $f(x) = 0$ для всех остальных x. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (π/6; π/4).

Решение. По свойствам плотности распределения непрерывной случайной величины имеем:

$$P(X\in(\pi/6;\pi/4))=\int_{\pi/6}^{\pi/4}f(x)dx=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{2}{3}\sin(3x)dx=-\frac{2}{9}\cos(3x)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=$$

$$=-\frac{2}{9}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

Пример 4.4.8. Дана плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины. Найти функцию распределения, если:

$$f(x)=\cos x, x\in(0;\ \pi/2];\ f(x)=0, x\notin(0;\ \pi/2].$$

Решение. По формуле для восстановления функции распределения:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\,du\ .$$

Здесь имеется несколько вариантов:

а) если $x \le 0$, то $f(u) = 0$, поэтому $F(x) = 0$ на $(-\infty;\ 0]$;

б) если $0 < x \le \pi/2$, то $f(u) = 0$ на $(-\infty;0)$ и $f(u) = \cos u$ на $(0;\ x]$, поэтому

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\ du+\int_{0}^{x}\cos u\,du=0+\sin u\Big|_{0}^{x}=\sin x-\sin 0=\sin x;$$

в) если $x > \pi/2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,du+\int_{0}^{\pi/2}\cos u\,du+\int_{\pi/2}^{x}0\,du=\sin x\Big|_{0}^{\pi/2}=\sin(\pi/2)-\sin 0=1.$$

Ответ. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\, x\le 0;\\ \sin x & \text{при}\ 0<x\le \pi/2;\\ 1 & \text{при}\ x>\pi/2.\end{cases}$

Пример 4.4.9. Известна плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$, если:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x,\ x\in(0;\pi);\ f(x)=0,\ x\notin(0;\pi).$$

Решение. По определению математического ожидания непрерывной случайной величины:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_0^{\pi} x\cdot\frac{1}{2}\sin x\,dx.$$

Для нахождения последнего интеграла первого класса применим метод интегрирования по частям:

$$U=x,\ dU=dx,\ dV=\frac{1}{2}\sin x\,dx\Rightarrow V=\int dV=-\frac{1}{2}\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(X)=U\cdot V\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}VdU=-\frac{x}{2}\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos xdx=$$

$$=\frac{\pi}{2}+0+\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}+0+0=\frac{\pi}{2}.$$

То есть математическое ожидание найдено: $M(X)=\dfrac{\pi}{2}$.

Тогда дисперсия:

$$\sigma^2=D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2\cdot f(x)\,dx=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\sin xdx.$$

В этом интеграле тоже применяется метод интегрирования по частям:

$$U=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2, dU=(2x-\pi)dx, dV=\frac{1}{2}\sin xdx, V=-\frac{1}{2}\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(X) = U \cdot V\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} VdU = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos xdx =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{8} + \int_0^{\pi} x\cos xdx - \frac{\pi}{2}\sin x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} + \int_0^{\pi} x\cos xdx - 0 + 0 = \int_0^{\pi} x\cos xdx + \frac{\pi^2}{4}.$$

К последнему интегралу применим метод интегрирования по частям: $U = x$, $dU = dx$, $dV = \cos x\, dx$, $V = \sin x$, поэтому

$$D(X) = U \cdot V\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} VdU + \frac{\pi^2}{4} = x \cdot \sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin xdx + \frac{\pi^2}{4} =$$

$$= 0 + 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Ответ: $M(X) = \frac{\pi}{2}$; $\sigma = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}$.

Пример 4.4.10. Дана функция $F(x)$ нормального распределения:

$$F(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(x-2)^2}{18}} dx.$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Для непрерывной случайной величины функция распределения выражается через плотность распределения следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Следовательно, можно найти плотность распределения $f(x)$ и сравнить ее со стандартной записью плотности нормального распределения:

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-2)^2}{18}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{(2\sigma^2)}}.$$

Из полученного равенства следует:

$$\sigma = 3; \quad a = 2; \quad M(X) = a = 2; \quad D(X) = \sigma^2 = 9.$$

Ответ: $M(X) = 2$; $D(X) = 9$.

Пример 4.4.11. Случайная величина X распределена нормально, причем $M(X) = 20$, $D(X) = 25$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (15; 25).

Решение. По свойствам нормального распределения вероятность попадания в заданный интервал находится так:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{25-20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{15-20}{5}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$$

$$= (\text{так как } \Phi(x) \text{ – нечетная функция}) = 2\Phi(1) = (\text{по табл. П.2 приложения}) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}341\,3 = 0{,}682\,6.$$

Ответ. 0,682 6.

Самостоятельная работа

Задача 4.4.1. Непрерывная случайная величина X задана своей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1; \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} & \text{при} -1 < x \le \frac{1}{3}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что величина X примет значение из интервала (0; 1/3).

Ответ. $P(0 < X < 1/3) = 0{,}25$.

Задача 4.4.2. Задан закон распределения дискретной случайной величины X. Найти функцию распределения и построить ее график.

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Ответ. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 3;\\ 0{,}2 & \text{при } 3<x\le 4;\\ 0{,}3 & \text{при } 4<x\le 7;\\ 0{,}7 & \text{при } 7<x\le 10;\\ 1 & \text{при } x>10.\end{cases}$

Задача 4.4.3. Найти плотность распределения непрерывной случайной величины, если известна ее функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ \sin(2x) & \text{при } 0<x<\pi/4;\\ 0 & \text{при } x>\pi/4.\end{cases}$$

Ответ. $f(x) = 2\cos(2x)$, $0 < x < \pi/4$, а для всех остальных x: $f(x) = 0$.

Задача 4.4.4. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины: $f(x)=\alpha\cdot e^{-\alpha x}, x\in(0;\infty), \alpha>0,\ f(x)=0, x\notin(0;\infty)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала (1; 2).

Ответ. $e^{-\alpha}-e^{-2\alpha}$.

Задача 4.4.5. Задана плотность распределения $f(x)$. Найти соответствующую ей функцию распределения $F(x)$, если:

$$f(x)=\sin x, x\in(0;\pi/2]; f(x)=0, x\notin(0;\pi/2].$$

Ответ. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ 1-\cos x & \text{при } 0<x\le \pi/2;\\ 1 & \text{при } x>\pi/2.\end{cases}$

Задача 4.4.6. Известна плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X. Найти $M(X)$ и $D(X)$, если:

$$f(x)=\cos x,\ x\in(0;\ \pi/2);\ f(x)=0,\ x\notin(0;\ \pi/2).$$

Ответ: $M(X) = \frac{\pi}{2} - 1;\quad D(X) = \pi - 3$.

Задача 4.4.7. Найти $M(X)$ и $D(X)$, если задана плотность нормального распределения: $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-3)^2}{50}} \, d\, x$.

Ответ: $M(X) = 3$; $D(X) = 25$.

Задача 4.4.8. Случайная величина X распределена нормально, причем $M(X) = 10$, $D(X) = 4$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (12; 14).

Ответ. $P(12 < X < 14) = 0{,}1359$.

4.5. Занятие 5

Контрольные вопросы

1. Что такое выборка, какие бывают выборки?
2. Что такое статистическое распределение выборки?
3. Что называется эмпирической функцией распределения, каковы ее свойства?
4. Что такое полигон частот (полигон относительных частот)?
5. Что такое гистограмма частот (гистограмма относительных частот) и как ее построить?

Аудиторные задания

Пример 4.5.1. Найти распределение относительных частот, если выборка задана в виде распределения частот.

x_i	3	5	10
n_i	2	3	5

Решение. Найдем объем выборки: $n = \sum n_i = 2 + 3 + 5 = 10 \Rightarrow n = 10$.

Относительные частоты: $w_1 = \frac{n_1}{n} = 0{,}2$; $w_2 = \frac{3}{10} = 0{,}3$; $w_3 = \frac{5}{10} = 0{,}5$.

Контроль: $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}5 = 1$.

Ответ.

x_i	3	5	10
w_i	0,2	0,3	0,5

Пример 4.5.2. Найти эмпирическую функцию распределения, если известно распределение частот.

x_i	2	4	7
n_i	20	10	20

Решение. Эмпирической функцией распределения называется функция $F^*(x)=\dfrac{n_x}{n}$, где n_x – частота появления события $A = \{X < x\}$.

Объем выборки: $n = 20 + 10 + 20 = 50$. Далее:

а) так как наименьшая варианта равна 2, а наибольшая равна 7, то по свойствам эмпирической функции распределения $F^*(x) = 0$ при $x \le 2$ и $F^*(x) = 1$ при $x > 7$;

б) при $X < 4$, значение $x_1 = 2$ наблюдалось 20 раз, поэтому $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n} = \dfrac{20}{50} = 0{,}4$ при $2 < x \le 4$;

в) в интервал $X < 7$ попадают два значения: $x_1 = 2$ (с частотой 20 раз) и $x_2 = 4$ (с частотой 10 раз), то есть $X < 7$ наблюдалось 20 + 10 = 30 = n_x раз, поэтому $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n} = \dfrac{30}{50} = 0{,}6$ при $4 < x \le 7$.

Ответ. $$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2; \\ 0{,}4 & \text{при } 2 < x \le 4; \\ 0{,}6 & \text{при } 4 < x \le 7; \\ 1 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

Пример 4.5.3. Построить полигон частот по данному распределению выборки.

x_i	2	4	7	8
n_i	10	20	12	8

Решение. По оси абсцисс откладываются варианты: x_1, x_2, x_3, x_4; а по оси ординат – их частоты. Точки $(x_i; n_i)$ соединяются ломаной линией – это и есть полигон частот. Обучающимся придется построить чертеж самостоятельно.

Пример 4.5.4. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки.

x_i	2	4	5	7	10
n_i	3	4	2	2	9

Решение. Найдем объем выборки: $n = \sum n_i = 20$.

Относительные частоты:

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = 0{,}15;\ w_2 = \frac{4}{20} = 0{,}2;\ w_3 = \frac{2}{20} = 0{,}1;$$

$$w_4 = \frac{n_4}{n} = 0{,}1;\ w_5 = \frac{9}{20} = 0{,}45.$$

Далее строится полигон относительных частот. По оси абсцисс откладываются варианты: x_1, x_2, x_3, x_4; а по оси ординат – их частоты. Точки $(x_i; w_i)$ соединяются ломаной линией – это и есть полигон частот. Обучающимся придется построить чертеж самостоятельно.

Пример 4.5.5. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема n = 100.

Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала
1–5	20
5–9	10
9–13	50
13–17	8
17–21	12

Решение. Найдем h – длину любого из интервалов: $h = 5 - 1 = 4$.

Находим плотности частот:

$$\frac{n_1}{h} = 5,\ \frac{n_2}{h} = 2{,}5;\ \frac{n_3}{h} = 12{,}5;\ \frac{n_4}{h} = 2,\ \frac{n_5}{h} = 3.$$

На оси абсцисс откладываются все частичные интервалы, а на этих интервалах достраиваются прямоугольники высотой, равной соответствующей плотности частоты. Получается гистограмма частот.

Замечание. Обучающимся нужно самостоятельно построить эту гистограмму и проверить, что сумма площадей всех прямоугольников равна 100 (объему выборки).

Пример 4.5.6. Из генеральной совокупности известна выборка объема n = 50. Найти несмещенную оценку генеральной средней, а также найти выборочную и исправленную дисперсии.

Решение. 1. По свойствам выборочной средней несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя:

$$\overline{x_{\text{В}}} = \frac{(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + x_4 \cdot n_4)}{n} = \frac{(36+40+66+171)}{50} = 6{,}26.$$

2. Дисперсия (первый способ):

$$D_{\text{В}} = \overline{(x^2)_{\text{В}}} - \left(\overline{x_{\text{В}}}\right)^2 = \frac{(x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + x_3^2 \cdot n_3 + x_4^2 \cdot n_4)}{n} - (6{,}26)^2 =$$

$$= \frac{(3^2 \cdot 12 + 5^2 \cdot 8 + 6^2 \cdot 11 + 9^2 \cdot 19)}{50} - 39{,}187\,6 =$$

$$= \frac{(108+200+396+1\,539)}{50} - 39{,}187\,6 =$$

$$= \frac{2\,243}{50} - 39{,}187\,6 = 44{,}86 - 39{,}187\,6 = 5{,}672\,4.$$

3. Дисперсия (второй способ):

$$D_{\text{В}} = \frac{(x_1 - \overline{x_{\text{В}}})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{x_{\text{В}}})^2 \cdot n_2 + (x_3 - \overline{x_{\text{В}}})^2 \cdot n_3 + (x_4 - \overline{x_{\text{В}}})^2 \cdot n_4}{n} =$$

$$= \frac{(3-6{,}26)^2 \cdot 12 + (5-6{,}26)^2 \cdot 8 + (6-6{,}26)^2 \cdot 11 + (9-6{,}26)^2 \cdot 19}{50} =$$

$$= \frac{10{,}627\,6 \cdot 12 + 1{,}587\,6 \cdot 8 + 0{,}067\,6 \cdot 11 + 7{,}507\,6 \cdot 19}{50} =$$

$$= \frac{127{,}531\,2 + 12{,}700\,8 + 0{,}743\,6 + 142{,}644\,4}{50} = \frac{283{,}62}{50} = 5{,}672\,4,$$

что совпадает абсолютно точно с первым способом.

4. Исправленная дисперсия:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{В}} = \frac{50}{49} \cdot 5{,}672\,4 \approx 5{,}788\,2.$$

Ответ: $\overline{x_{\text{В}}} = 6{,}26$; $D_{\text{В}} = 5{,}672\,4$; $S^2 \approx 5{,}788\,2$.

Пример 4.5.7. Найти выборочную среднюю, если известно распределение выборки объема n = 100.

x_i	1 350	1 380	1 420
n_i	3	5	2

Решение. Первоначальные варианты x_i – большие числа, поэтому перейдем к условным вариантам: $u_i = x_i - 1\,380$, в результате чего получим следующее распределение условных вариант.

u_i	–30	0	40
n_i	3	5	2

Тогда $\overline{x_{\text{В}}} = 1\,380 + \overline{u_{\text{В}}}$, где $\overline{u_{\text{В}}} = \dfrac{(-30\cdot 3 + 0\cdot 5 + 40\cdot 2)}{10} = -1$, поэтому $\overline{x_{\text{В}}} = 1\,379$.

Ответ. $\overline{x_{\text{В}}} = 1\,379$.

Пример 4.5.8. По выборке объема n = 51 найдена смещенная оценка $D_{\text{В}}$ = 4 генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

Решение. По свойствам выборочной дисперсии искомая несмещенная оценка равна исправленной дисперсии: $S^2 = \dfrac{n}{n-1}\cdot D_{\text{В}} = \dfrac{51}{50}\cdot 4 = 4{,}08$.

Ответ. $S^2 = 4{,}08$.

Пример 4.5.9. В итоге пяти измерений прибором длины недоступного объекта получены следующие результаты (без систематических ошибок): 92 мм; 94 мм; 103 мм; 105 мм; 106 мм. Найти:

1) выборочную среднюю длину объекта;

2) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

Решение. 1. Используем технологию решения примера 4.5.7 для нахождения выборочной средней:

$$\overline{x_{\text{В}}} = 92 + \frac{(0+2+11+13+14)}{5} = 100.$$

2. Выборочная дисперсия (первый способ):

$$D_{\text{В}} = \overline{(x^2)_{\text{В}}} - \left(\overline{x_{\text{В}}}\right)^2 = \frac{(x_1^2\cdot n_1 + x_2^2\cdot n_2 + x_3^2\cdot n_3 + x_4^2\cdot n_4 + x_5^2\cdot n_5)}{n} - 100^2 =$$

= (в этом примере все частоты у вариант одинаковы и равны единице) =

$$= \frac{(92^2 \cdot 1 + 94^2 \cdot 1 + 103^2 \cdot 1 + 105^2 \cdot 1 + 106^2 \cdot 1)}{5} - 10\,000 =$$

$$= \frac{(8\,464 + 8\,836 + 10\,609 + 11\,025 + 11\,236)}{50} - 10\,000 = \frac{50\,170}{50} - 10\,000 =$$

$$= 10\,034 - 10\,000 = 34.$$

3. Выборочная дисперсия (второй способ):

$$D_B = \sum_{i=1}^{5} \frac{(x_i - \overline{x_B})^2}{n} = \frac{1}{5}[(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2 +$$

$$+ (105-100)^2 + (106-100)^2] = \frac{1}{5}[64+36+9+25+36] = \frac{1}{5} \cdot 170 = 34,$$

что совпадает абсолютно точно с первым способом.

4. Исправленная дисперсия: $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{5}{4} \cdot 34 = 42{,}5$.

Ответ: $\overline{x_B} = 100$; $D_B = 34$; $S^2 = 42{,}5$.

Пример 4.5.10. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 10$.

u_i	–6	0	2
n_i	2	5	3

Решение. Так как варианты x_i – большие числа, поэтому перейдем к условным вариантам: $u_i = x_i - 192$.

В итоге получим распределение условных вариант.

При этом дисперсии будут одинаковы (по свойствам дисперсии):

$$D_B(u) = \overline{u^2} - [\overline{u_B}]^2 = 0{,}1 \cdot [2 \cdot (-6)^2 + 5 \cdot 0^2 + 3 \cdot 2^2] -$$

$$- [0{,}1 \cdot (2 \cdot (-6) + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 2)]^2 = \frac{84}{10} - \frac{36}{100} = 8{,}04.$$

Ответ. $D_B(x) = 8{,}04$.

Пример 4.5.11. Найти выборочную и исправленную дисперсии по данному распределению выборки.

x_i	0,01	0,05	0,09
n_i	2	3	5

Решение. Найдем объем выборки: $n=\sum n_i = 2+3+5=10$.

Для того чтобы избежать действий с дробями, перейдем к условным вариантам: $u_i = 100 \cdot x_i$. При этом по свойствам дисперсии выборочные дисперсии связаны так: $D_{\text{В}}(x) = \dfrac{D_{\text{В}}(u)}{100^2}$.

u_i	1	5	9
n_i	2	3	5

Имеем распределение условных вариант.

Выборочная дисперсия:

$$D_{\text{В}}(u) = \overline{u^2}_{\text{В}} - [\overline{u_{\text{В}}}]^2 = 0{,}1\cdot[2\cdot 1^2 + 3\cdot 5^2 + 5\cdot 9^2] - [0{,}1\cdot(2\cdot 1 + 3\cdot 5 + 5\cdot 9)]^2 =$$

$$= 48{,}2 - 6{,}2^2 = 9{,}76.$$

Тогда $D_{\text{В}}(x) = \dfrac{9{,}76}{100^2} = 0{,}000\,976$, а исправленная дисперсия:

$$S^2(x) = \frac{n}{n-1}\cdot D_{\text{В}} = \frac{10}{9}\cdot 0{,}000\,976 \approx 0{,}001.$$

Ответ: $D_{\text{В}}(x) = 0{,}000\,976;\ \ S^2(x) \approx 0{,}001.$

Самостоятельная работа

Задача 4.5.1. Выборка задана в виде распределения частот. Найти распределение относительных частот.

x_i	3	6	8	14
n_i	4	1	10	5

Ответ:

x_i	3	6	8	14
w_i	0,20	0,05	0,5	0,25

Задача 4.5.2. Найти эмпирическую функцию распределения, если известно распределение частот.

x_i	3	6	8
n_i	2	3	5

Ответ. $F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 3; \\ 0{,}2 & \text{при } 3 < x \le 6; \\ 0{,}5 & \text{при } 6 < x \le 8; \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$

Задача 4.5.3. Построить полигон частот по данному распределению выборки.

x_i	1	3	5	7
n_i	15	10	20	5

Задача 4.5.4. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки.

x_i	2	4	5	8	10
n_i	3	5	6	4	2

Задача 4.5.5. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема $n = 50$.

Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала
3–8	4
8–13	6
13–18	5
18–23	10
23–28	25

Задача 4.5.6. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 100$. Найти несмещенную оценку генеральной средней, а также найти выборочную и исправленную дисперсии.

x_i	1	2	5	8	10
n_i	10	24	11	20	35

Ответ: $\overline{x_{\text{В}}} = 6{,}23$; $D_{\text{В}} = 12{,}7971$; $S^2 \approx 12{,}926$.

Задача 4.5.7. Найти выборочную среднюю, если известно распределение выборки объема $n = 20$.

x_i	3 650	3 690	3 710	3 740
n_i	2	3	10	5

Ответ. $\overline{x_{\text{В}}} = 3708{,}5$.

Задача 4.5.8. По выборке объема $n = 106$ найдена смещенная оценка $D_В = 6$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

Ответ. $S^2 = 6{,}06$.

Задача 4.5.9. В итоге четырех измерений прибором длины недоступного объекта получены следующие результаты (без систематических ошибок): 8; 9; 11; 12. Найти: 1) выборочную среднюю длину объекта; 2) выборочную и исправленную дисперсии ошибок.

Ответ: $\overline{x_В} = 10$; $D_В = 2{,}5$; $S^2 = 10/3$.

Задача 4.5.10. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 100$.

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

Ответ. $D_В(x) = 167{,}29$.

Задача 4.5.11. Найти выборочную и исправленную дисперсии по данному распределению выборки.

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

Ответ: $D_В(x) = 0{,}049\,875$; $S^2(x) \approx 0{,}052\,5$.

4.6. Занятие 6

Пример 4.6.1. Дано распределение выборки объема $n = 30$. Требуется: 1) построить гистограмму распределения относительных частот; 2) по среднеинтервальным значениям рассчитать $\overline{x_В}$ и $\sigma_В$; 3) после округления рассчитать параметры a и σ кривой соответствующего нормального распределения (кривой Гаусса); 4) построить кривую Гаусса на одном чертеже с гистограммой относительных частот; 5) после визуального их сравнения сформулировать гипотезу о типе данного статистического распределения.

Интервалы наблюдений	Сумма частот интервала
82–84	4
84–86	8
86–88	10
88–90	6
90–92	1
92–94	1

Решение. 1. Находим относительные частоты (объем выборки $n = 30$):

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{4}{30}; \quad w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{8}{30}; \quad w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{10}{30};$$

$$w_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{6}{30}; \quad w_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{1}{30}; \quad w_6 = \frac{n_6}{n} = \frac{1}{30}.$$

Найдем h – длину любого из интервалов: $h = 84 - 82 = 2$.

Вычисляем плотности относительных частот:

$$\frac{w_1}{h} = \frac{4}{60}; \;\; \frac{w_2}{h} = \frac{8}{60}; \;\; \frac{w_3}{h} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}; \;\; \frac{w_4}{h} = \frac{6}{60}; \;\; \frac{w_5}{h} = \frac{1}{60}; \;\; \frac{w_6}{h} = \frac{1}{60}.$$

На оси абсцисс откладываются все частичные интервалы, а на этих интервалах достраиваются прямоугольники высотой, равной соответствующей плотности относительной частоты. Получается гистограмма относительных частот (рис. 4.2).

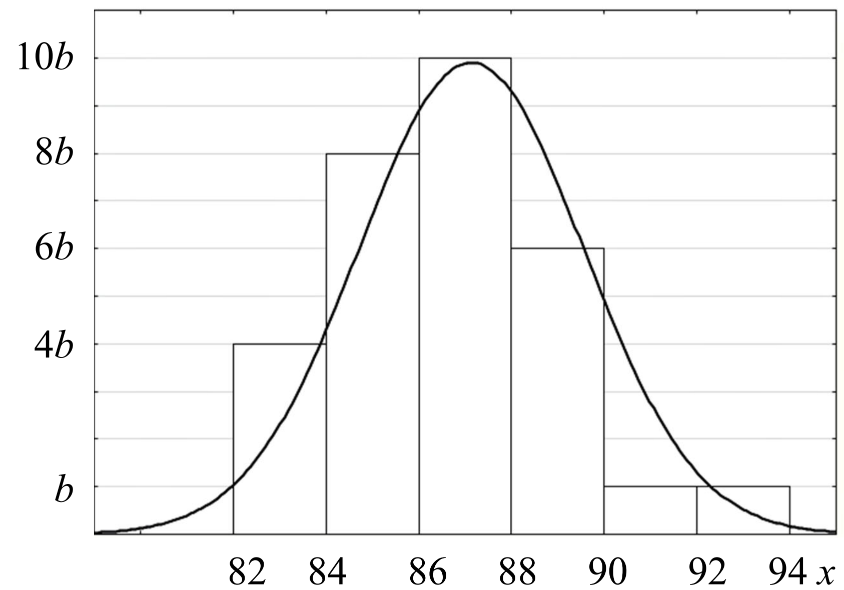

Рис. 4.2. Гистограмма и кривая Гаусса:

$b = 1/60$ – параметр высоты гистограммы

2. Составляется распределение частот по среднеинтервальным значениям:

x_i	83	85	87	89	91	93
n_i	4	8	10	6	1	1

По полученному распределению частот вычисляется выборочная средняя и выборочная дисперсия (двумя способами):

$$\overline{x_{\text{В}}} = \frac{(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + x_4 \cdot n_4 + x_5 \cdot n_5 + x_6 \cdot n_6)}{n} =$$

$$= \frac{332 + 680 + 870 + 534 + 91 + 93}{30} = \frac{2600}{30} \approx 86,667 .$$

Дисперсия (первый способ):

$$D_{\text{В}} = \overline{(x^2)_{\text{В}}} - \left(\overline{x_{\text{В}}}\right)^2 = = \frac{1}{n} \cdot (x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + x_3^2 \cdot n_3 + x_4^2 \cdot n_4 + x_5^2 \cdot n_5 + x_6^2 \cdot n_6) -$$

$$-\left(\frac{260}{3}\right)^2 \approx \frac{(83^2 \cdot 4 + 85^2 \cdot 8 + 87^2 \cdot 10 + 89^2 \cdot 6 + 91^2 \cdot 1 + 93^2 \cdot 1)}{30} - 7\,511,111 =$$

$$= \frac{27\,556 + 57\,800 + 75\,690 + 47\,526 + 8\,281 + 8\,649}{30} - 7\,511,111 =$$

$$= \frac{225\,502}{30} - 7\,511,111 \approx 5,622.$$

Дисперсия (второй способ):

$$D_{\text{В}} = \frac{1}{n} \cdot [(x_1 - \overline{x_{\text{В}}})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{x_{\text{В}}})^2 \cdot n_2 + (x_3 - \overline{x_{\text{В}}})^2 \cdot n_3 +$$

$$+ (x_4 - \overline{x_{\text{В}}})^2 \cdot n_4 + (x_5 - \overline{x_{\text{В}}})^2 \cdot n_5 + (x_6 - \overline{x_{\text{В}}})^2 \cdot n_6] \approx$$

$$\approx \frac{1}{30} \cdot [(83 - 86,667)^2 \cdot 4 + (85 - 86,667)^2 \cdot 8 + (87 - 86,667)^2 \cdot 10 +$$

$$+ (89 - 86,667)^2 \cdot 6 + (91 - 86,667)^2 \cdot 1 + (93 - 86,667)^2 \cdot 1] \approx$$

$$\approx \frac{1}{30} \cdot [13,444 \cdot 4 + 2,779 \cdot 8 + 0,111 \cdot 10 + 5,443 \cdot 6 + 18,775 \cdot 1 + 40,107 \cdot 1] =$$

$$= \frac{1}{30} \cdot [53,776 + 22,232 + 1,111 + 32,658 + 18,775 + 40,107] = 5,622,$$

что совпадает абсолютно точно с первым способом.

Следовательно, выборочное среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_{\text{В}} = \sqrt{D_{\text{В}}} \approx \sqrt{5,622} \approx 2,371 .$$

3. Округляем $\overline{x_{\text{В}}} \approx 86,667$ до 86,7 = a, округляем $\sigma_{\text{В}} \approx 2,371$ до 2,4 = σ. Получены параметры кривой Гаусса: 86,7 = a, 2,4 = σ.

Кривая Гаусса – это график плотности нормального распределения, то есть график функции (заданной на всей числовой прямой):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Сначала рассчитаем максимальную высоту нашей кривой:

$$f(a) = f(86,7) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{2,4 \cdot \sqrt{2 \cdot 3,141\,59}} \approx \frac{1}{6,016} \approx \frac{1}{6}.$$

Эта высота практически совпадает с высотой наибольшего прямоугольника гистограммы относительных частот.

Далее рассчитаем значения функции $f(x)$ в дополнительных точках:

$$x = 82,\ x = 84,\ x = 86,\ x = 88,\ x = 90,\ x = 92,\ x = 94.$$

Получается:

$$f(82) \approx \frac{1}{6} \cdot e^{-(82-86,7)^2/11,244} \approx 0,016\,7 \approx \frac{1}{60};$$

$$f(84) \approx \frac{1}{6} \cdot e^{-(84-86,7)^2/11,244} \approx 0,066\,7 \approx \frac{4}{60} \text{ и т. д.;}$$

$$f(92) \approx \frac{1}{6} \cdot e^{-(92-86,7)^2/11,244} \approx 0,020\,8 \approx \frac{1,25}{60};$$

$$f(94) \approx \frac{1}{6} \cdot e^{-(94-86,7)^2/11,244} \approx 0,003\,1 \approx 0.$$

4. Строим кривую Гаусса с помощью рассчитанных дополнительных точек на одном чертеже (см. рис. 4.2) с гистограммой относительных частот.

5. Визуальное сравнение кривой и гистограммы позволяет сформулировать гипотезу о том, что исследуемое статистическое распределение имеет нормальный тип распределения. Проверка этой гипотезы не входит в рамки данной задачи, но описана в пособии [2, с. 267] или в пособии [4, с. 78, 79].

Задача 4.6.1. Дано распределение выборки объема $n = 50$. Требуется: 1) построить гистограмму распределения относительных частот; 2) по среднеинтервальным значениям рассчитать $\overline{x_В}$ и $\sigma_В$; 3) после округления рассчитать параметры a и σ кривой соответствующего нормального распределения (кривой Гаусса); 4) построить кривую Гаусса на одном чертеже с гистограммой относительных частот; 5) после визуального их сравнения сформулировать гипотезу о типе данного статистического распределения.

Интервалы наблюдений	Сумма частот интервала
2–4	6
4–6	8
6–8	16
8–10	10
10–12	6
12–14	4

4.7. Занятие 7

Пример 4.7.1. Пусть изучается связь между количественным признаком X и другим количественным признаком Y по карте заданного масштаба. Результаты измерений этих двух признаков сведены в таблицу.

Y / X	Интервалы	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	Частоты
	Среднее	25	35	45	55	65	75	n_x
40–60	50	2	1	0	0	0	0	3
60–80	70	0	2	1	0	0	0	3
80–100	90	0	0	2	1	0	0	3
100–120	110	0	0	0	1	2	0	3
120–140	130	0	0	0	0	3	1	4
140–160	150	0	0	0	0	2	2	4
Частоты	n_y	2	3	3	2	7	3	20

Требуется: 1) проверить признаки X и Y на наличие корреляционной зависимости между ними; 2) записать выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X.

Решение. 1. С помощью среднеинтервальных значений признаков составляется таблица для двумерной случайной величины, перейдя при этом от частот появления к относительным частотам (некоторые аналоги вероятностей). Результат в таблице ниже.

$X \backslash Y$	25	35	45	55	65	75	w_x
50	2/20	1/20	0	0	0	0	3/20
70	0	2/20	1/20	0	0	0	3/20
90	0	0	2/20	1/20	0	0	3/20
110	0	0	0	1/20	2/20	0	3/20
130	0	0	0	0	3/20	1/20	4/20
150	0	0	0	0	2/20	2/20	4/20
w_y	2/20	3/20	3/20	2/20	7/20	3/20	1

2. Далее составляются отдельные законы распределения для случайных величин X и Y.

Y	25	35	45	55	65	75
W	2/20	3/20	3/20	2/20	7/20	3/20

X	50	70	90	110	130	150
W	3/20	3/20	3/20	3/20	4/20	4/20

3. Находятся выборочные средние:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\cdot[50\cdot3+70\cdot3+90\cdot3+110\cdot3+130\cdot4+150\cdot4] = 104;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{20}\cdot[25\cdot2+35\cdot3+45\cdot3+55\cdot2+65\cdot7+75\cdot3] = 54.$$

4. Вычисляются выборочные дисперсии составляющих X и Y (первым способом):

$$D_{\text{В}}(X) = \overline{\left(\left(X-\bar{x}\right)^2\right)}_{\text{В}} = \frac{1}{20}\cdot[(50-104)^2\cdot3+(70-104)^2\cdot3+$$

$$+(90-104)^2\cdot3+(110-104)^2\cdot3+(130-104)^2\cdot4+(150-104)^2\cdot4] =$$

$$=\frac{1}{20}\cdot[2\,916\cdot3+1156\cdot3+196\cdot3+36\cdot3+676\cdot4+2\,116\cdot4]=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot[8\,748+3\,468+588+108+2\,704+8\,464] = 1\,204;$$

$$D_{\text{В}}(Y)=\overline{\left(\left(Y-\overline{y}\right)^2\right)_B}=\frac{1}{20}\cdot[(25-54)^2\cdot 2+(35-54)^2\cdot 3+(45-54)^2\cdot 3+$$

$$+(55-54)^2\cdot 2+(65-54)^2\cdot 7+(75-54)^2\cdot 3]=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot[841\cdot 2+361\cdot 3+81\cdot 3+1\cdot 2+121\cdot 7+441\cdot 3]=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot[1\,682+1\,083+243+2+847+1\,323]=259.$$

5. Находятся выборочные дисперсии составляющих X и Y (вторым способом):

$$D_B(X)=\overline{\left(x^2\right)_B}-\left(\overline{x}\right)^2=\frac{1}{20}\cdot[50^2\cdot 3+70^2\cdot 3+90^2\cdot 3+110^2\cdot 3+130^2\cdot 4+$$

$$+150^2\cdot 4]-104^2=\frac{1}{20}\cdot[7\,500+14\,700+24\,300+36\,300+67\,600+90\,000]-$$

$$-10\,816=12\,020-10\,816=1\,204;$$

$$D_{\text{В}}(Y)=\overline{\left(y^2\right)_{\text{В}}}-\left(\overline{y}\right)^2=\frac{1}{20}\cdot\left[25^2\cdot 2+35^2\cdot 3+45^2\cdot 3+55^2\cdot 2+65^2\cdot 7+75^2\cdot 3\right]-54^2=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot[1\,250+3\,675+6\,075+6\,050+29\,575+16\,875]-2\,916=3\,175-2\,916=259.$$

6. Два способа нахождения выборочных дисперсий сошлись абсолютно точно. Поэтому выборочные среднеквадратические отклонения получаются такие:

$$\sigma_{\text{В}}(X)=\sqrt{1\,204}\approx 34,698\,7;\quad \sigma_{\text{В}}(Y)=\sqrt{259}=16,093\,5.$$

7. Далее с помощью таблицы пункта 1 этого решения находится выборочная средняя произведения случайных величин X и Y:

$$\overline{(X\cdot Y)}=\frac{1}{20}\cdot[25\cdot 50\cdot 2+35\cdot 50\cdot 1+35\cdot 70\cdot 2+45\cdot 70\cdot 1+45\cdot 90\cdot 2+55\cdot 90\cdot 1+$$

$$+55\cdot 110\cdot 1+65\cdot 110\cdot 2+65\cdot 130\cdot 3+65\cdot 150\cdot 2+75\cdot 130\cdot 1+75\cdot 150\cdot 2]=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot[2\,500+1\,750+4\,900+3\,150+8\,100+4\,950+6\,050+14\,300+$$

$$+25\,350+\quad+19\,500+9\,750+22\,500]=6\,140.$$

8. Теперь находится выборочный коэффициент корреляции:

$$r_{\text{В}} = \frac{\overline{(X \cdot Y)} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_{\text{В}}(X) \cdot \sigma_{\text{В}}(Y)} = \frac{6\,140 - 104 \cdot 54}{34{,}698\,7 \cdot 16{,}093\,5} \approx 0{,}938\,4 > 0.$$

Вывод: выборочный коэффициент корреляции близок к единице, поэтому можно говорить о почти прямой линейной (корреляционной) зависимости случайных величин X и Y (в рамках представленной в условии статистики). В следующем пункте будет найдена эта зависимость.

9. Изучая таблицу из условия задачи, можно отметить, что каждому среднему значению переменной x соответствует не одно значение y, а целый ряд значений. Поэтому далее для каждого интервала по переменной x вычисляется условная средняя величина $\overline{y}_x$:

– при среднем $x = 50$ $\overline{y}_x = \dfrac{25 \cdot 2 + 35 \cdot 1}{2+1} \approx 28{,}3;$

– при среднем $x = 70$ $\overline{y}_x = \dfrac{35 \cdot 2 + 45 \cdot 1}{2+1} \approx 38{,}3, ...;$

– при среднем $x = 130$ $\overline{y}_x = \dfrac{65 \cdot 3 + 75 \cdot 1}{3+1} = 67{,}5;$

– при среднем $x = 150$ $\overline{y}_x = \dfrac{65 \cdot 2 + 75 \cdot 2}{4} = 70.$

В результате получится таблица, состоящая из двух строк, где в первой строке находятся средние величины x каждого интервала, а во второй строке – условные средние $\overline{y}_x$:

x	50	70	90	110	130	150
$\overline{y}_x$	28,3	38,3	48,3	61,7	67,5	70

10. Если последние данные (x и $\overline{y}_x$) из этой таблицы отметить в виде точек на плоскости (обучающимся необходимо построить данный чертеж самостоятельно), то можно заметить, что все эти точки располагаются вдоль некоторой прямой. Поэтому далее считается, что связь x и $\overline{y}_x$ – ли-

нейная, то есть $\overline{y}_x \approx a \cdot x + b$, где числа a и b определяются [1, с. 221] следующим образом:

$$a = r_{\text{В}} \cdot \frac{\sigma_{\text{В}}(Y)}{\sigma_{\text{В}}(X)} = 0{,}938\,4 \cdot \frac{16{,}093\,5}{34{,}698\,7} = 0{,}435\,2;$$

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x} = 54 - 0{,}435\,2 \cdot 104 = 8{,}739\,2.$$

В итоге получается приближенная формула

$$\overline{y}_x \approx 0{,}435\,2 \cdot x + 8{,}739\,2.$$

Эта формула и задает уравнение прямой линии регрессии Y на X.

11. Составим сравнительную таблицу расчетных данных $\overline{y}_x$ (по полученной приближенной формуле) и экспериментальных данных (на основе таблицы пункта 9 данного решения):

x	50	70	90	110	130	150
Расчет	30,5	39,2	47,9	56,6	65,3	74
Эксперимент	28,3	38,3	48,3	61,7	67,5	70

Замечание. Обучающимся необходимо самостоятельно построить на плоскости точки (в соответствии с этой таблицей) и на этом же чертеже построить график прямой линии $\overline{y}_x \approx 0{,}435\,2 \cdot x + 8{,}739\,2$, после чего можно отметить, что экспериментальные точки не очень сильно разбросаны относительно этой прямой линии регрессии Y на X.

Ответ. $\overline{y}_x \approx 0{,}435\,2 \cdot x + 8{,}739\,2$.

Задача 4.7.1. Пусть изучается связь между количественным признаком X и другим количественным признаком Y по карте заданного масштаба. Результаты измерений этих двух признаков сведены в таблицу.

Требуется:

1) проверить признаки X и Y на наличие корреляционной зависимости между ними;

2) записать выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X;

3) построить на плоскости экспериментальные точки и на этом же чертеже построить график прямой линии регрессии, после чего сделать вывод.

Y / X	Интервалы	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	Частоты
	Среднее	5	15	25	35	45	55	n_x
60–80	70	2	1	0	0	0	0	2
80–100	90	0	2	1	0	0	0	4
100–120	110	0	0	2	1	0	0	3
120–140	130	0	0	0	1	2	0	3
140–160	150	0	0	0	0	3	1	4
160–180	170	0	0	0	0	2	2	4
Частоты	n_y	3	2	3	2	7	3	20

4.8. Занятие 8

Для получения допуска к контрольной работе обучающемуся необходимо выполнить следующее:

а) сдать все задачи расчетно-графической работы по своему варианту и получить по этим задачам «зачтено»;

б) затем представить на проверку рукописные решения всех занятий 1–7 (ответы на контрольные вопросы, аудиторные задания и самостоятельную работу) и получить по ним «зачтено»;

в) представить рукописные решения нижеследующего образца контрольной работы (занятие 8) (и получить «зачтено»).

Задача 4.8.1. В коробке находятся пять синих, четыре красных и три зеленых карандаша. Наудачу из этой коробки взяты три карандаша. Какова вероятность того, что среди взятых трех карандашей окажется: а) три карандаша одного цвета; б) все три карандаша разных цветов; в) два синих и один зеленый карандаш?

Ответ: а) 3/44; б) 3/11; в) 3/22.

Задача 4.8.2. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. По данному кругу произведен удачный выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в этот треугольник.

Ответ. $P(A) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Задача 4.8.3. Из колоды в 36 карт наудачу взяты три карты. Найти вероятность того, что среди взятых трех карт окажется: а) хотя бы один туз; б) ровно два туза.

Ответ: а) 0,305 3; б) 192 / 7 140.

Задача 4.8.4. В выставочный зал магазина электроники поступает 40 % телевизоров с первого склада и 60 % – со второго склада. На первом складе находится в среднем 90 % исправных телевизоров, а на втором – 5 % бракованных. Найти вероятность того, что наудачу взятый продавцом телевизор окажется исправным.

Ответ. 0,93.

Задача 4.8.5. Обучающийся Сидоров выучил 30 экзаменационных билетов из сорока, которые приготовил преподаватель для этого экзамена. Каким ему выгоднее зайти на экзамен: первым или вторым?

Ответ. Вероятность равна 0,75, одинаково.

Задача 4.8.6. Прибор составлен из двух микросхем. Вероятность выхода из строя в течение 10 лет для первой микросхемы равна 0,07, та же вероятность для второй микросхемы – 0,1. Известно, что из строя вышла одна (неизвестно которая) микросхема. Какова вероятность того, что вышла из строя именно первая микросхема?

Ответ. 0,404.

Задача 4.8.7. Найти математическое ожидание, дисперсию (двумя способами) и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины X, если известно распределение.

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

Ответ: $M(X) = 3{,}15$; $D(X) = 1{,}427\,5$; $\sigma(X) = 1{,}194\,8$.

Задача 4.8.8. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию (двумя способами), если дано распределение выборки.

x_i	3	5	7	9	11
p_i	10	20	30	20	20

Ответ: $\overline{x_{\text{В}}} = 7{,}4$; $D_{\text{В}}(x) = 6{,}24$.

Задача 4.8.9. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению. По среднеинтервальным значениям найти $\overline{x_{\text{В}}}$ и $\sigma_{\text{В}}$, затем построить на том же чертеже кривую Гаусса по найденным значениям a и σ. Произвести сравнение гистограммы и кривой Гаусса, сделать вывод.

Интервалы	Частоты
1–6	10
6–11	20
11–16	35
16–21	25
21–26	10

Ответ: $a = 13{,}75$; $\sigma = 5{,}6$. Визуальный вывод: данное распределение близко к нормальному.

Задача 4.8.10. Дискретная случайная величина X принимает только два возможных значения: $x_1 < x_2$. Кроме этого известно, что вероятность p_2 для x_2 равна 0,4, математическое ожидание равно 4,4 и дисперсия равна 0,24. Найти закон распределения.

Ответ.

X	4	5
P	0,6	0,4

Задача 4.8.11. Найти коэффициент корреляции, если известен закон распределения двумерной случайной величины.

Y/X	2	4
1	0,2	0,1
2	0,15	0,25
3	0,15	0,15

Ответ. $r_{XY} = 0{,}13$.

5. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

В данном разделе использованы примеры с решениями и задания для индивидуального выполнения по вариантам из учебно-методического пособия [5].

Расчетно-графическая работа по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» состоит из пяти задач, для каждой из которых разработано 30 вариантов. Номер варианта устанавливается преподавателем для каждого обучающегося. Работа выполняется в отдельной тетради чернилами или пастой любого цвета, кроме красного, с полями шириной 2 см. Каждая задача начинается с новой страницы. Задачи располагаются по порядку номеров. Решению задачи предшествует условие этой задачи, записанное конкретно для данного варианта. Все преобразования выполняются подробно с пояснениями и чертежами, в конце записывается ответ.

5.1. Образец выполнения задания

Пример 5.1.1. Партия деталей, среди которых 39 % нестандартных (дефектных), поступила на проверку. Технология проверки такова, что с вероятностью $P_1 = 0{,}939$ обнаруживается дефект (если он есть), и существует ненулевая вероятность $P_0 = 0{,}039$ того, что стандартная деталь будет признана дефектной. Задание:

1) требуется найти вероятность того, что случайно выбранная из партии деталь будет признана дефектной;

2) случайно выбранная из партии деталь признана дефектной. Какова вероятность того, что на самом деле деталь стандартна?

Решение. 1. Рассмотрим событие A = {случайно выбранная из партии деталь при проверке признана дефектной}. С этим событием A тесно связаны две гипотезы (события) B_1 и B_2:

$$B_1 = \{\text{поступившая на проверку деталь дефектна на самом деле}\};$$

$$B_2 = \{\text{поступившая на проверку деталь на самом деле стандартна}\}.$$

Безусловные (априорные) вероятности легко вычисляются по классической формуле: $P(B_1)$ = [отношение числа дефектных деталей к общему числу деталей] = 0,39, $P(B_2)$ = 1 – $P(B_1)$ = 0,61.

Условные вероятности заданы в условии задачи:

$$P_{B_1}(A)=0{,}939;\quad P_{B_2}(A)=0{,}039.$$

Применяя формулу полной вероятности для двух гипотез, получим:

$$P(A)=P_{B_1}(A)\cdot P(B_1)+P_{B_2}(A)\cdot P(B_2)=$$

$$=0{,}939\cdot 0{,}39+0{,}039\cdot 0{,}61=0{,}366\,21+0{,}023\,79=0{,}39.$$

2. В этом пункте событие A уже произошло и необходимо найти вероятность гипотезы B_2 (берется вторая гипотеза потому, что речь о стандартной детали идет именно во второй гипотезе) при условии, что событие A произошло. По формуле Байеса:

$$P_A(B_2)=\frac{P_{B_2}(A)\cdot P(B_2)}{P(A)}=\frac{0{,}039\cdot 0{,}61}{0{,}39}=0{,}061.$$

Ответ: $P(A)=0{,}39$; $P_A(B_2)=0{,}061$.

Пример 5.1.2. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0; \\ x^4/16 & \text{при } 0<x\le 2; \\ 1 & \text{при } x>2. \end{cases}$$

Требуется: а) найти $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X; б) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$; в) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины.

Решение:

а) по определению плотности имеем:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0; \\ x^3/4 & \text{при } 0<x<2; \\ 0 & \text{при } x>2; \end{cases}$$

б) графики на рис. 5.1:

x	0	1	2
$F(x)$	0	1/16	1

x	0	1	2–0
$f(x)$	0	1/4	2

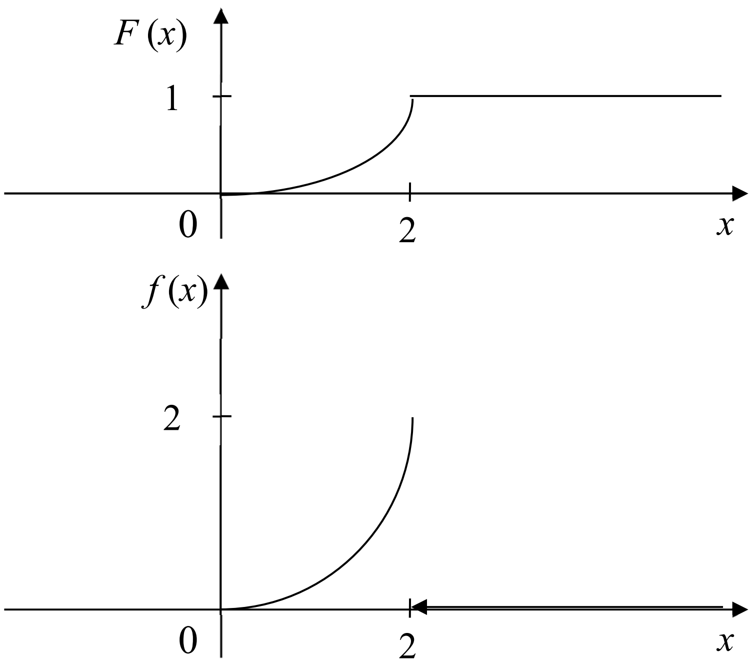

Рис. 5.1. Графики

в) по определению математического ожидания имеем:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{2} x\cdot x^3/4\,dx=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2} x^4\,dx=\frac{1}{20}\cdot x^5\Big|_0^2=\frac{32}{20}=1,6;$$

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{2} x^2\cdot x^3/4\,dx=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2} x^5\,dx=\frac{1}{24}\cdot x^6\Big|_0^2=\frac{64}{24}=\frac{8}{3},$$

поэтому дисперсия первым способом (по определению):

$$D(X)=M\left(\left(X-M(X)\right)^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{2}\left(x-1,6\right)^2\cdot x^3/4\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2}\left(x^2-2x\cdot 1,6+2,56\right)\cdot x^3dx=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2}\left(x^5-3,2x^4+2,56x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x^6}{6}-\frac{32x^5}{10\cdot 5}+\frac{256x^4}{100\cdot 4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2^6}{6}-\frac{16\cdot 2^5}{25}+\frac{16\cdot 2^4}{25}\right)= \frac{1}{4}\left(\frac{32}{3}-\frac{16\cdot 32}{25}+\frac{256}{25}\right)=$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{128}{25}+\frac{64}{25}=\frac{200}{75}-\frac{64}{25}=\frac{200}{75}-\frac{192}{75}=\frac{8}{75}.$$

Дисперсия вторым способом (по свойствам) находится так:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2 = 8/3 - (1{,}6)^2 = 8/3 - 256/100 =$$

$$= 8/3 - 64/25 = 200/75 - 192/75 = 8/75.$$

Два способа нахождения дисперсии сошлись абсолютно точно.

Ответ: $M(X) = 1{,}6$; $D(X) = 8/75$.

Пример 5.1.3. Произведено 100 выборочных измерений уровня загрязненности некоторого района вредными для здоровья некоторого комбината. Построить гистограмму частот уровня загрязненности по данному распределению выборки.

Интервалы загрязнения	Сумма частот вариант интервала
1–5	20
5–9	10
9–13	50
13–17	8
17–21	12

Решение. Находится длина любого из интервалов: $h = 5 - 1 = 4$.

Находятся плотности частот:

$$\frac{n_1}{h}=5;\ \ \frac{n_2}{h}=2{,}5;\ \ \frac{n_3}{h}=12{,}5;$$

$$\frac{n_4}{h}=2;\ \ \frac{n_5}{h}=3.$$

Далее на оси абсцисс откладываются все частичные интервалы, а на этих интервалах достраиваются прямоугольники высотой, равной соответствующей плотности частоты. Получается гистограмма частот (рис. 5.2).

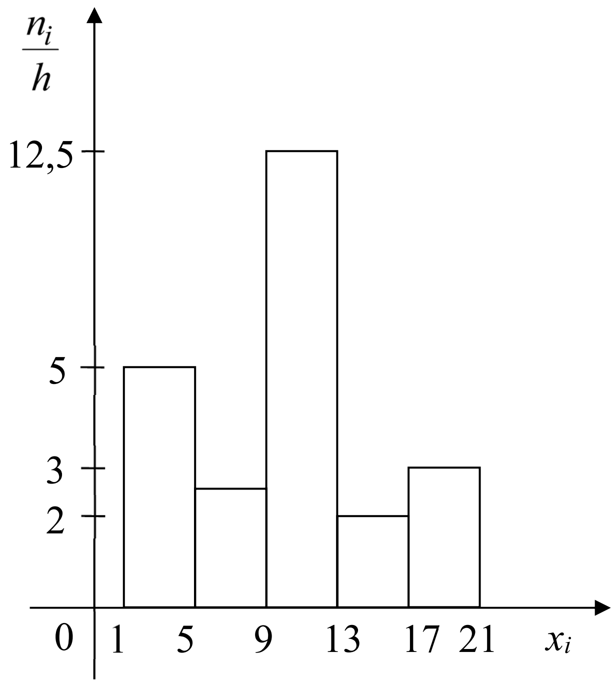

Рис. 5.2. Гистограмма частот

Замечание: сумма площадей всех прямоугольников равна 100 (это есть проверка для гистограммы).

Пример 5.1.4. В итоге десяти измерений прибором длины недоступного объекта получены следующие результаты (без систематических ошибок): 92; 94; 103; 105; 106; 92; 103; 105; 92; 105 мм. Найти:

1) выборочную среднюю длину объекта;

2) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

Решение. По данным измерений составим распределение выборки:

x_i	92	94	103	105	106
n_i	3	1	2	3	1

1. Имеем: объем выборки $n = 10$, поэтому выборочная средняя длина:

$$\overline{x_{\text{В}}} = \frac{1}{n} \cdot \sum n_i \cdot x_i = \frac{1}{10} \cdot (3 \cdot 92 + 1 \cdot 94 + 2 \cdot 103 + 3 \cdot 105 + 1 \cdot 106) = 99,7;$$

2. По определению выборочная дисперсия (первый способ):

$$D_{\text{В}} = \sum_{i=1}^{5} \frac{n_i \cdot (x_i - \overline{x}_{\text{В}})^2}{n} = 0,1 \cdot [3 \cdot (92 - 99,7)^2 + 1 \cdot (94 - 99,7)^2 +$$

$$+ 2 \cdot (103 - 99,7)^2 + 3 \cdot (105 - 99,7)^2 + 1 \cdot (106 - 99,7)^2] =$$

$$= 0,1 \cdot [3 \cdot 59,29 + 1 \cdot 32,49 + 2 \cdot 10,89 + 3 \cdot 28,09 + 1 \cdot 39,69] =$$

$$= 0,1 \cdot [177,87 + 32,49 + 21,78 + 84,27 + 39,69] = 0,1 \cdot 356,1 = 35,61.$$

Выборочная дисперсия (второй способ, по свойствам):

$$D_{\text{В}} = \overline{(x^2)_{\text{В}}} - \left(\overline{x_{\text{В}}}\right)^2 = \frac{(x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + x_3^2 \cdot n_3 + x_4^2 \cdot n_4 + x_5^2 \cdot n_5)}{n} - (99,7)^2 =$$

$$= \frac{(92^2 \cdot 3 + 94^2 \cdot 1 + 103^2 \cdot 2 + 105^2 \cdot 3 + 106^2 \cdot 1)}{10} - 9\,940,09 =$$

$$= \frac{8\,464 \cdot 3 + 8\,836 + 10\,609 \cdot 2 + 11\,025 \cdot 3 + 11\,236}{10} - 9\,940,09 =$$

$$= 9\,975,7 - 9\,940,09 = 35,61.$$

Два способа нахождения дисперсии сошлись абсолютно точно.

Найдем исправленную дисперсию: $S^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot D_B = \dfrac{10}{9} \cdot 35{,}61 \approx 39{,}57.$

Ответ: $\overline{x_{\text{В}}} = 99{,}7$; $D_{\text{В}} = 35{,}61$; $S^2 = 39{,}57.$

Пример 5.1.5. Найти коэффициент корреляции, если задан закон распределения двумерной случайной величины.

Y / X	1	4
–1	0,20	0,10
2	0,45	0,05
3	0,05	0,15

Решение. Находим законы распределения составляющих X и Y (отдельно):

Находим математические ожидания составляющих X и Y:

X	1	4
P	0,7	0,3

Y	– 1	2	3
P	0,3	0,5	0,2

$$M(X)=1 \cdot 0{,}7+4 \cdot 0{,}3=1{,}9,\ M(Y)=-1 \cdot 0{,}3+2 \cdot 0{,}5+3 \cdot 0{,}2=1{,}3.$$

Находим дисперсии составляющих X и Y (первым способом):

$$D(X)=M\left(\left(X-M(X)\right)^2\right)=(1-1{,}9)^2 \cdot 0{,}7+(4-1{,}9)^2 \cdot 0{,}3=$$

$$= 0{,}81 \cdot 0{,}7+4{,}41 \cdot 0{,}3= 0{,}567+1{,}323 = 1{,}89;$$

$$D(Y)=M\left(\left(Y-M(Y)\right)^2\right)=(-1-1{,}3)^2 \cdot 0{,}3+(2-1{,}3)^2 \cdot 0{,}5+(3-1{,}3)^2 \cdot 0{,}2 =$$

$$=5{,}29 \cdot 0{,}3+0{,}49 \cdot 0{,}5+2{,}89 \cdot 0{,}2=1{,}587+0{,}245+0{,}578=2{,}41.$$

Находим дисперсии составляющих X и Y (вторым способом):

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=(1^2 \cdot 0{,}7+4^2 \cdot 0{,}3)-(1{,}9)^2 = 5{,}5-3{,}61=1{,}89;$$

$$D(Y)=M\left(Y^2\right)-\left(M(Y)\right)^2=((-1)^2 \cdot 0{,}3+ 2^2 \cdot 0{,}5+3^2 \cdot 0{,}2)-(1{,}3)^2 = 4{,}1-1{,}69=2{,}41.$$

Два способа нахождения дисперсий сошлись абсолютно точно. Поэтому среднеквадратические отклонения:

$$\sigma(X)=\sqrt{1{,}89} \approx 1{,}374\,8; \quad \sigma(Y)=\sqrt{2{,}41}=1{,}552\,4.$$

Далее с помощью таблицы из условия (закон распределения двумерной случайной величины) находится математическое ожидание произведения случайных величин X и Y:

$$M(X\cdot Y)=1\cdot(-1)\cdot 0,20+1\cdot 2\cdot 0,45+1\cdot 3\cdot 0,05+4\cdot(-1)\cdot 0,10+$$
$$+4\cdot 2\cdot 0,05+4\cdot 3\cdot 0,15=2,65.$$

Теперь находится ковариация и коэффициент корреляции:

$$\mu_{XY}=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y)=2,65-1,9\cdot 1,3=0,18\neq 0;$$

$$r_{XY}=\frac{\mu_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}\approx\frac{0,18}{1,3748\cdot 1,5524}\approx 0,084>0.$$

Ответ. Коэффициент корреляции положителен $r_{XY}\approx 0,084$, то есть случайные величины X и Y связаны положительной корреляцией, близкой к нулю, что говорит о слабой зависимости этих случайных величин.

5.2. Варианты заданий

Задача 5.2.1. Партия приборов, среди которых N % дефектных (нестандартных), поступила на проверку в ОТК. Схема проверки такова, что с вероятностью $P_1 = 0,9N$ обнаруживается дефект (если он есть) и существует ненулевая вероятность $P_0 = 0,0N$ того, что стандартный прибор будет признан дефектным. Требуется ответить на следующие вопросы:

а) какова вероятность того, что случайно выбранный из партии прибор будет признан дефектным?

б) случайно выбранный из партии прибор признан дефектным. Какова вероятность того, что на самом деле прибор стандартен?

Замечание. В условии число N является номером варианта задания обучающегося, причем варианты обучающихся нумеруются следующим образом: 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12 и т. д.

Поэтому, например, для $N = 02$ вероятности P_1 и P_0 имеют вид:

$$P_1 = 0,902;\quad P_0 = 0,002.$$

А для $N = 10$ вероятности P_1 и P_0 имеют вид:

$$P_1 = 0{,}910; \;\; P_0 = 0{,}010.$$

При $N = 11$ вероятности P_1 и P_0 имеют вид:

$$P_1 = 0{,}911; \;\; P_0 = 0{,}011 \text{ и т. д.}$$

Задача 5.2.2. Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ g(x) & \text{при } 0 < x \le b; \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Требуется: а) найти $f(x)$ плотность распределения случайной величины X; б) найти математическое ожидание и дисперсию (двумя способами) этой случайной величины; в) построить графики функций $F(x)$, $f(x)$.

При этом функция $g(x)$ и значение числа b заданы по вариантам в таблице ниже.

N	$g(x)$	b	N	$g(x)$	b	N	$g(x)$	b
01	x^2	1	11	$4x^2$	1/2	21	$x^3/8$	2
02	$x^2/4$	2	12	$9x^2$	1/3	22	$x^3/27$	3
03	$x^2/9$	3	13	$16x^2$	1/4	23	$x^3/64$	4
04	$x^2/16$	4	14	$25x^2$	1/5	24	x^4	1
05	$x^2/25$	5	15	$36x^2$	1/6	25	x^5	1
06	$x^2/36$	6	16	$49x^2$	1/7	26	x^6	1
07	$x^2/49$	7	17	$64x^2$	1/8	27	x^7	1
08	$x^2/64$	8	18	$81x^2$	1/9	28	x^8	1
09	$x^2/81$	9	19	$100x^2$	1/10	29	x^9	1
10	x^3	1	20	$121x^2$	1/11	30	x^{10}	1

Задача 5.2.3. Произведено 100 выборочных измерений уровня загрязненности района вредными для здоровья выбросами комбината. Построить гистограмму частот уровня загрязненности по данному распределению вы-

борки (по вариантам). В таблице ниже применены следующие обозначения: И – интервалы, Ч – сумма частот вариант интервала загрязнения, *N* – номер варианта.

И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч
0–5	15	1–5	25	0–5	20	1–6	50	1–5	20	5–7	20
5–10	15	5–9	10	5–10	10	6–11	10	5–9	10	7–9	30
10–15	50	9–13	40	10–15	30	11–16	20	9–13	20	9–11	30
15–20	8	13–17	13	15–20	28	16–21	8	13–17	38	11–13	8
20–25	12	17–21	12	20–25	12	21–26	12	17–21	12	13–15	12
***N* = 01**		***N* = 02**		***N* = 03**		***N* = 04**		***N* = 05**		***N* = 06**	

И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч
1–5	10	0–5	20	0–4	10	1–6	25	2–5	12	3–7	10
5–9	10	5–10	10	4–8	10	6–11	13	5–8	10	7–11	30
9–13	30	10–15	30	8–12	25	11–16	30	8–11	20	11–15	40
13–17	28	15–20	13	12–16	38	16–21	17	11–14	38	15–19	12
17–21	22	20–25	27	16–20	17	21–26	15	14–17	20	19–23	8
***N* = 07**		***N* = 08**		***N* = 09**		***N* = 10**		***N* = 11**		***N* = 12**	

И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч
2–6	10	0–5	10	0–4	10	1–6	20	2–6	20	2–7	15
6–10	10	5–10	20	4–8	15	6–11	18	6–10	10	7–12	30
10–14	30	10–15	30	8–12	20	11–16	30	10–14	20	12–17	35
14–18	28	15–20	27	12–16	38	16–21	17	14–18	38	17–22	8
18–22	22	20–25	13	16–20	17	21–26	15	18–22	12	22–27	12
***N* = 13**		***N* = 14**		***N* = 15**		***N* = 16**		***N* = 17**		***N* = 18**	

И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч
2–4	10	1–5	10	0–5	15	1–6	50	1–5	5	1–6	30
4–6	20	5–9	25	5–10	15	6–11	20	5–9	12	6–11	20
6–18	50	9–13	40	10–15	30	11–16	12	9–13	20	11–16	30
8–10	12	13–17	13	15–20	28	16–21	10	13–17	25	16–21	12
10–12	8	17–21	12	20–25	12	21–26	8	17–21	38	21–26	8
***N* = 19**		***N* = 20**		***N* = 21**		***N* = 22**		***N* = 23**		***N* = 24**	

И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч	И	Ч
1–5	5	0–5	25	0–4	10	1–6	23	2–6	10	2–7	10
5–9	15	5–10	5	4–8	15	6–11	15	6–10	12	7–12	40
9–13	30	10–15	30	8–12	20	11–16	30	10–14	23	12–17	30
13–17	22	15–20	15	12–16	35	16–21	15	14–18	35	17–22	12
17–21	28	20–25	25	16–20	20	21–26	17	18–22	20	22–27	8
***N* = 25**		***N* = 26**		***N* = 27**		***N* = 28**		***N* = 29**		***N* = 30**	

Задача 5.2.4. Найти выборочную и исправленную дисперсии по данному распределению выборки. Данные по вариантам приведены в нижеследующих таблицах.

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9	x_i	1	5	7	9	x_i	2	4	6	8
n_i	6	12	1	1	n_i	2	10	3	5	n_i	3	9	2	6
***N* = 01**					***N* = 02**					***N* = 03**				

x_i	3	5	8	9	x_i	0,2	0,5	0,6	0,9	x_i	1,6	2,5	3,6	4,9
n_i	5	8	3	4	n_i	8	12	10	20	n_i	16	12	10	12
***N* = 04**					***N* = 05**					***N* = 06**				

x_i	8	15	27	49	x_i	11	25	37	59	x_i	4	5	7	9
n_i	10	10	15	15	n_i	10	12	16	12	n_i	2	5	5	8
***N* = 07**					***N* = 08**					***N* = 09**				

x_i	9	15	37	39	x_i	0,2	0,6	0,8	0,9	x_i	4	5	7	9
n_i	6	10	1	3	n_i	12	6	1	1	n_i	6	7	2	5
***N* = 10**					***N* = 11**					***N* = 12**				

x_i	2	5	6	9	x_i	4	5	8	9	x_i	0,3	0,6	0,7	0,9
n_i	3	9	6	2	n_i	8	4	3	5	n_i	12	8	10	20
***N* = 13**					***N* = 14**					***N* = 15**				

x_i	16	25	36	49	x_i	8	15	27	29	x_i	11	25	37	39
n_i	12	16	10	12	n_i	10	15	10	15	n_i	12	10	12	16
***N* = 16**					***N* = 17**					***N* = 18**				

x_i	1	5	7	9	x_i	4	7	9	11	x_i	0,2	0,5	0,7	0,9
n_i	5	2	8	5	n_i	8	3	4	5	n_i	6	11	2	1
N = 19					**N = 20**					**N = 21**				

x_i	3	5	8	9	x_i	3	5	6	9	x_i	4	6	7	9
n_i	7	6	2	5	n_i	9	3	2	6	n_i	3	8	4	5
N = 22					**N = 23**					**N = 24**				

x_i	1	6	7	9	x_i	0,1	0,2	0,8	0,9	x_i	1	6	7	9
n_i	20	4	10	6	n_i	4	12	3	1	n_i	10	2	5	3
N = 25					**N = 26**					**N = 27**				

x_i	3	4	6	9	x_i	3	7	8	9	x_i	0,3	0,5	0,8	0,9
n_i	9	3	2	6	n_i	8	5	3	4	n_i	12	8	10	20
N = 28					**N = 29**					**N = 30**				

Задача 5.2.5. Найти коэффициент корреляции, если задан закон распределения двумерной случайной величины (по вариантам).

Y / X	1	2	Y / X	0	1	Y / X	–1	1	Y / X	2	4
0	0,15	0,15	–1	0,20	0,10	–1	0,05	0,15	1	0,2	0,1
1	0,25	0,15	0	0,45	0,05	0	0,2	0,2	2	0,15	0,25
2	0,1	0,2	1	0,05	0,15	2	0,3	0,1	3	0,15	0,15
N = 01			**N = 02**			**N = 03**			**N = 04**		

Y / X	0	2	Y / X	1	3	Y / X	–1	2	Y / X	1	2
–2	0,1	0,2	–2	0,2	0,1	2	0,25	0,05	–2	0,05	0,25
0	0,2	0,25	0	0,25	0,2	3	0,25	0,15	1	0,15	0,25
2	0,1	0,15	1	0,15	0,1	4	0,1	0,2	2	0,2	0,1
N = 05			**N = 06**			**N = 07**			**N = 08**		

Y / X	1	2	Y / X	1	3	Y / X	–1	2	Y / X	3	5
–1	0,15	0,25	–3	0,2	0,1	–2	0,15	0,05	1	0,1	0,15
2	0,05	0,25	0	0,1	0,2	0	0,2	0,2	2	0,15	0,25
3	0,1	0,2	3	0,1	0,3	2	0,3	0,1	5	0,3	0,05
N = 09			**N = 10**			**N = 11**			**N = 12**		

Y / X	0	2
–1	0,2	0,1
1	0,2	0,25
3	0,1	0,15
***N* = 13**		

Y / X	2	4
–2	0,2	0,1
0	0,2	0,25
1	0,15	0,1
***N* = 14**		

Y / X	1	5
2	0,25	0,05
3	0,25	0,15
4	0,2	0,1
***N* = 15**		

Y / X	4	5
–2	0,25	0,05
1	0,15	0,25
2	0,2	0,1
***N* = 16**		

Y / X	1	5
–1	0,15	0,25
2	0,05	0,25
4	0,1	0,2
***N* = 17**		

Y / X	1	2
–2	0,2	0,1
1	0,1	0,2
4	0,3	0,1
***N* = 18**		

Y / X	–1	3
–2	0,15	0,05
1	0,2	0,2
2	0,1	0,3
***N* = 19**		

Y / X	2	5
1	0,15	0,1
3	0,15	0,25
5	0,3	0,05
***N* = 20**		

Y / X	2	4
–1	0,2	0,1
2	0,25	0,2
3	0,1	0,15
***N* = 21**		

Y / X	–2	4
–2	0,2	0,1
1	0,2	0,25
3	0,1	0,15
***N* = 22**		

Y / X	3	5
1	0,25	0,05
3	0,25	0,15
4	0,1	0,2
***N* = 23**		

Y / X	2	5
–2	0,25	0,05
2	0,15	0,25
4	0,1	0,2
***N* = 24**		

Y / X	2	5
–1	0,25	0,15
3	0,05	0,25
4	0,1	0,2
***N* = 25**		

Y / X	1	3
–2	0,2	0,1
2	0,2	0,1
4	0,3	0,1
***N* = 26**		

Y / X	–1	4
–2	0,15	0,05
1	0,2	0,2
3	0,3	0,1
***N* = 27**		

Y / X	3	5
1	0,15	0,1
2	0,25	0,15
4	0,3	0,05
***N* = 28**		

Y / X	1	2
–2	0,1	0,2
0	0,25	0,2
4	0,1	0,15
***N* = 29**		

Y / X	–1	3
–2	0,2	0,1
0	0,2	0,25
1	0,15	0,1
***N* = 30**		

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Курс «Теория вероятностей и математическая статистика» изучается обычно обучающимся 2-го курса. Данное учебно-методическое пособие предназначено для проведения практических занятий по этому курсу и для организации самостоятельной работы обучающихся. В соответствии с последней редакцией учебных планов самостоятельная работа обучающегося занимает 70 % времени, отведенного на изучения данной дисциплины. Поэтому каждое занятие начинается с контрольных вопросов, ответы на которые он будет искать либо в теоретической части данного пособия, либо в рекомендованной для изучения литературе.

Отчетная работа обучающегося по каждому занятию оформляется так: пишется краткий титульный лист занятия. Затем записывается первый контрольный вопрос и подробный ответ на этот вопрос. После этого идет второй контрольный вопрос и подробный ответ на него, и так далее. Затем изучаются и подробно записываются примеры решения аудиторных заданий. После этого записывается первая самостоятельная задача и с помощью найденного примера пишется подробное решение этой задачи. В конце записывается подробный ответ. Все остальные самостоятельные задачи оформляются аналогичным образом.

Готовый отчет по конкретному занятию оформляется в виде документа Word со встроенными фотографиями (одно фото на одной странице). Имя файла должно содержать номер занятия и информацию об авторе решения. Этот документ Word отправляется на проверку преподавателю через систему ЭИОС. Все зачтенные практические занятия и задачи расчетно-графической работы обеспечивают обучающемуся допуск на контрольную работу по данному курсу.

Подобный метод организации самостоятельной работы обучающегося, по мнению автора, обеспечивает хороший уровень освоения дисциплины.

Приложение

Таблица П.1

Значения функции $\varphi(x)$ с точностью до 10^{-4}

x	Сотые доли переменной x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2030	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1004	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
При $x \geq 2$ функция Лапласа $\varphi(x)$ принимает значения										
x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$\varphi(x)$	0,0540	0,0440	0,0355	0,0283	0,0224	0,0175	0,0136	0,0104	0,0079	0,0060
x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\varphi(x)$	0,0044	0,0033	0,0024	0,0017	0,0012	0,0009	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002

Замечание. При $x > 4$ можно считать, что $\varphi(x) = 0$. Функция Лапласа $\varphi(x)$ обладает свойством четности, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Таблица П.2

Значения функции $\Phi(x)$ с точностью до 10^{-4}

x	Сотые доли переменной x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
При $x \geq 2$ функция Лапласа $\Phi(x)$ принимает значения										
x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$\Phi(x)$	0,4773	0,4821	0,4861	0,4893	0,4918	0,4938	0,4953	0,4965	0,4974	0,4981
x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	$x > 3{,}8$
$\Phi(x)$	0,4987	0,4990	0,4993	0,4995	0,4997	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,5000

Замечание. Функция Лапласа $\Phi(x)$ обладает свойством нечетности, то есть: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вербная В. П., Мартынов Г. П., Плюснина Е. С. Математика для дистанционного изучения [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов. – М. : ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 230 с. – Режим доступа: http://lib.ssga.ru/fulltext/UMK/%D0%90%D0%AD%D0%A3%D0%9C%D0%9F/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%D0%B4%D0%BB%D1%8F%20%D0%B4%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%20%D0%B8%D0%B7%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F.pdf. – Загл. с экрана.

2. Вербная В. П., Мартынов Г. П., Плюснина Е. С. Математика для дистанционного обучения [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., стереотипн. – Новосибирск : СГУГиТ, 2016. – 278 с. – Режим доступа: http://lib.sgugit.ru/irbisfulltext/2017/26.05.17/2016-2017/%D0%92%D0%B5%D1%80%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%9C%D0%B0%D1%80%D1%82%D1%8B%D0%BD%D0%BE%D0%B2/%D0%9E%D0%B1.%20%D0%B4%D0%BE%D0%BA%D1%83%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82.pdf. – Загл. с экрана.

3. Мартынов Г. П. Математические аспекты в экологии [Электронный ресурс] : конспект лекций. – Новосибирск : СГГА, 2012. – 77 с. – Режим доступа: http://lib.sgugit.ru/irbisfulltext/UMK/%D0%AD%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5%20%D0%B8%D0%B7%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%9C%D0%B0%D1%80%D1%82%D1%8B%D0%BD%D0%BE%D0%B2_%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5%20%D0%B0%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%8B%20%D0%B2%20%D1%8D%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D0%B8.pdf. – Загл. с экрана.

4. Пузаченко Ю. Г. Математические методы в экологических и географических исследованиях : учеб. пособие для студ. вузов. – М. : Издательский центр «Академия», 2004. – 416 с.

5. Мартынов Г. П. Практикум. Математика. Математические аспекты в экологии. [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие. – М. : ИНФОРМИО, 2020. – 61 с. – Режим доступа: http://www.informio.ru/contest/5428/Uchebno-metodicheskoe-posobie-Praktikum-Matematika-Matematicheskie-aspekty-v-yekologii. – Загл. с экрана.

6. Трубина Л. К., Беленко О. А. Экологическая информатика [Электронный ресурс] : лабораторный практикум. – Новосибирск : СГГА, 2009. – 87 с. – Режим доступа: http://lib.ssga.ru/fulltext/2009/%D0%A2%D1%80%D1%83%D0%B1%D0%B8%D0%BD%D0%B0%20%D0%9B.%D0%9A.,%20%D0%91%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE%20%D0%9E.%D0%90.%20%D0%AD%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F%20%D0%B8%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%5B%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B9%20%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC%5D.%202009.pdf. – Загл. с экрана.

Учебное издание

Мартынов Геннадий Павлович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Редактор *О. В. Георгиевская*

Компьютерная верстка *Н. Ю. Леоновой*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.
Подписано в печать 21.06.2022. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 5,75. Тираж 145 экз. Заказ 99.
Гигиеническое заключение
№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.