Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

В. Л. Неклюдова, В. П. Вербная, О. Г. Павловская

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве задачника для обучающихся по направлению подготовки
09.03.02 Информационные системы и технологии (уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2022

УДК 51
Н476

Рецензенты: кандидат педагогических наук, доцент СГУПС *Н. В. Миллер*

кандидат физико-математических наук, доцент, СГУГиТ
О. В. Григоренко

Неклюдова, В. Л.

Н476 Дискретная математика : задачник / В. Л. Неклюдова, В. П. Вербная, О. Г. Павловская. – Новосибирск : СГУГиТ, 2022. – 42 с. – Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-907513-50-1

Задачник подготовлен кандидатом физико-математических наук, доцентом В. Л. Неклюдовой, старшим преподавателем В. П. Вербной и кандидатом технических наук, доцентом О. Г. Павловской на кафедре высшей математики СГУГиТ.

Издание содержит материалы для практических занятий по разделам математики: теория множеств, комбинаторика, теория отношений, алгебраические системы, теория графов, логика высказываний, логика предикатов, конечные автоматы, теория алгоритмов.

Задачник дисциплине «Дискретная математика» предназначен для обучающихся по направлению подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии (уровень бакалавриата), а также может быть использован по направлению подготовки 10.03.01 Информационная безопасность (уровень бакалавриата).

Рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики, Ученым советом Института геодезии и менеджмента СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 51

ISBN 978-5-907513-50-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика имеет широкий спектр приложений, особенно в областях, связанных с организацией и технологиями защиты информации. Актуальность изучения дискретной математики обусловлена стремительным развитием компьютерной техники, необходимостью создания средств обработки, передачи и защиты информации, а также представления различных информационных моделей, являющихся по сути конечными структурами.

Настоящее издание предназначено для обучающихся по направлению подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии (уровень бакалавриата) в качестве сборника задач по дисциплине «Дискретная математика», содержит задачи по темам дисциплины в соответствии с рабочей программой. Задачник также может использоваться для обучающихся по направлению подготовки 10.03.01 Информационная безопасность (уровень бакалавриата) по дисциплинам «Дискретная математика» и «Математическая логика и теория алгоритмов»

Задачник является практическим продолжением учебных пособий авторов В. Л. Неклюдова, О. В. Григоренко, О. Г. Павловская, В. П. Вербная «Дискретная математика» (СГУГиТ, 2020 г.), В. Л. Неклюдова, О. В. Григоренко «Дискретная математика» (СГУГиТ, 2021 г.) и В. Л. Неклюдова, В. П. Вербная «Математическая логика и теория алгоритмов» (СГУГиТ, 2022 г.) [1–3].

Задачник предназначен для использования преподавателями и студентами на практических занятиях, а также может применяться и при самостоятельной работе обучающимися.

1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

№ 1. Выясните, принадлежат ли числа

$$x_1 = 4,\ x_2 = -3,\ x_3 = 3/4,\ x_4 = \sqrt[4]{3},\ x_5 = -4\sqrt{3}$$

следующим множествам:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid -4 \le x \le 3\};\ B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3/4 \le x \le 4\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid -3{,}4 < x < 4\};\ D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \le 4/3\}.$$

№ 2. Выпишите все подмножества множеств:

а) $I = \{a; b\}$; **б)** $M = \{1; 2; 3\}$; **в)** $D = \{1; 2; a; b\}$.

№ 3. Задайте множества интервалами или перечислением всех элементов:

а) $A = \{x \mid 3x - 2 > 0\}$; **б)** $B = \{x \mid x + 1 > 0\}$;

в) $C = \{x \mid -3 \le x < 9, x \in \mathbb{Z}\}$; **г)** $D = \{x \mid 5 \le x \le 6, x \in \mathbb{N}\}$;

д) $L = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$; **е)** $Y = \{x \mid x^2 - 3x - 4 \le 0\}$.

№ 4. Установите соответствие между множествами T–Y:

$T = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 1 \text{ и } x \ge -2\}$; $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 1 \text{ и } x \ge -2\}$;

$V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \le 1 \text{ и } x > -2\}$; $W = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 1 \text{ или } x < -2\}$;

$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 1 \text{ или } x \le -2\}$; $Y = \{x \in \mathbb{N} \mid x \ge 1 \text{ или } x \le -2\}$

и множествами A–F:

$A = (-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$; $B = [-2; 1]$; $C = \{-1; 0; 1\}$;

$D = \mathbb{N}$; $E = (-\infty; 1]$; $F = \{1\}$.

Какие из перечисленных множеств являются конечными, счетными или имеют мощность континуума?

№ 5. Пусть универсальное множество – это множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, а его подмножества A и B состоят, соответственно, из чисел вида $4n$ и $3n$, $n \in \mathbb{N}$. Из каких элементов состоят множества $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \setminus B$?

№ 6. Пусть универсальное множество – это множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, а его подмножества C и D состоят, соответственно, из чисел вида $2n+1$ и $4n$, $n \in \mathbb{N}$. Из каких элементов состоят множества $\overline{C}$, $C \cap D$, $\overline{C} \cap D$, $C \setminus D$?

№ 7. Дано универсальное множество $\mathbf{E} = \{1;2;3;4;5\}$. Выпишите все элементы множества $M = (A \setminus B) \cup \overline{A}$, если

а) $A = \{1;2;3\}$, $B = \{3;4;5\}$; **б)** $A = \{2;4;5\}$, $B = \{1;4\}$;

в) $A = \{1\}$, $B = \varnothing$; **г)** $A = \{1;3;4;5\}$, $B = \{1;2;4;5\}$.

№ 8. Дано универсальное множество $\mathbf{E} = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ и его подмножества: $A = \{1;2;3;4;7;9\}$, $B = \{3;4;5;6;8;9\}$, $C = \{2;3;4;7;8\}$, $D = \{0;4;7\}$. Найдите множества:

а) $(A \cup B) \cap (D \setminus C)$; **б)** $\left(\left(A \cap \overline{C}\right) \cup D\right) \cap \left(B \cup \overline{A}\right)$;

в) $\left(\overline{C} \cap D\right) \cap \left(D \cup \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\right)$; **г)** $\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cup (C \cap D)$;

д) $(A \circ D) \cup (B \cap C)$; **е)** $(A \cup C) \circ (B \setminus C)$;

ж) $((A \cup B) \cup C) \cap \left(B \cup \overline{A}\right)$; **з)** $((A \cap B) \cup C) \cup D$;

и) $(A \circ B) \cap (C \circ D)$; **к)** $\left(A \setminus B \setminus \overline{C}\right) \cup D$;

л) $\left(\overline{A \cup D}\right) \setminus (B \setminus C)$; **м)** $(A \cap B) \setminus \left(\overline{C \cup D}\right)$.

№ 9. Даны непустые множества A, B и C. Изобразите с помощью диаграмм Венна следующие множества:

а) $M = A \cap B \cap C$; **б)** $N = (A \setminus B) \setminus C$;

в) $K = A \setminus (B \setminus C)$; **г)** $L = A \cup B \cap C$;

д) $P = (A \cup B) \cap C$; **е)** $R = (A \circ B) \cup C$;

ж) $S = A \circ (B \cup C)$; **з)** $T = A \cap B \circ C$.

№ 10. Используя диаграммы Венна, продемонстрируйте справедливость тождеств:

а) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$;

б) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;

в) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B)$;

г) $(A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) = A \cap (B \circ C)$;

д) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;

е) $A \circ (B \cup C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cup A \cap C)$.

2. КОМБИНАТОРИКА

№ 1. Из 30 учеников в классе 19 посещают театральный кружок, 17 – танцевальный, 11 – кружок рисования. При этом 12 занимаются как в театральном, так и в танцевальном кружке, 7 увлекаются и театром, и рисованием, 5 – рисованием и танцами, а 2 ученика посещают все три кружка. Сколько учеников не посещает ни один из трех кружков?

№ 2. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1 000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

№ 3. Сколько трехзначных натуральных чисел делятся только на одно из чисел 7, 11 или 13?

№ 4. В танцевальном кружке занимается 12 девушек и 8 юношей. Сколькими способами можно выбрать: **а)** одного участника кружка для выступления на конкурсе; **б)** юношу и девушку для парного танца?

№ 5. Группе из пяти сотрудников выделено три путевки. Сколько существует способов распределить путевки, если: **а)** все путевки различны; **б)** все путевки одинаковы?

№ 6. Сколько пятизначных чисел можно написать, используя только цифры 0, 1 и 2?

№ 7. Сколько различных трехзначных чисел можно образовать из цифр 4, 5, 6, 7 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

№ 8. Сколько четырехзначных чисел можно составить из чисел 0, 1, 2, 5, 8 при условии, что:

а) цифры могут повторяться;

б) числа четные, и цифры могут повторяться;

в) числа делятся на пять, и цифры могут повторяться;

г) все цифры каждого числа различны;

д) числа четные, и все цифры каждого числа различны;
е) числа делятся на пять, и все цифры каждого числа различны?

№ 9. В подразделении 30 солдат и 3 офицера. Сколькими способами можно выделить караул, состоящий из трех солдат и одного офицера?

№ 10. Сколькими способами можно рассадить 7 человек для общей фотографии на 7 стульях, стоящих в ряд? Каким будет число способов, если имеются два человека, не желающие сидеть рядом?

№ 11. Сколько различных перестановок можно образовать из букв слова:

а) ЧИСЛО; **б)** СПОСОБ; **в)** МАТЕМАТИКА.

№ 12. В группе, состоящей из 22 студентов, при выборе старосты за выдвинутую кандидатуру проголосовало 12 человек, против 7, воздержалось 3. Сколькими способами могло быть проведено такое голосование?

№ 13. Раскройте скобки, используя формулу бинома Ньютона:

а) $(1+x)^7$; **б)** $(x-y)^6$; **в)** $(2x+3y)^5$.

№ 14. Выпишите все слагаемые, содержащие a^4 в разложении выражения $(a+b+c)^6$.

3. ТЕОРИЯ ОТНОШЕНИЙ

№ 1. Выпишите все элементы множества $A \times B$, если $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{p, q, s\}$.

№ 2. Бинарное отношение $\mathbf{R}$ задано на множестве I^2, где $I = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, следующим образом: $\mathbf{R} = \{(1; 4), (1; 5), (1; 6)\}$. Постройте таблицу отношения $\mathbf{R}$. Найдите его область определения и область значений. Задайте отношение $\mathbf{R}^{-1}$.

№ 3. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Для следующих отношений внутренней композиции, заданных на A^2, выясните, являются ли они рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными и транзитивными:

а) $\mathbf{R}_1 = \{(1;1), (1;3), (1;5), (3;3), (3;5), (5;5)\}$;

б) $\mathbf{R}_2 = \{(1;2), (2;1), (4;5), (5;4)\}$;

в) $\mathbf{R}_3 = \{(1;2), (2;3), (3;4), (4;5)\}$;

г) $\mathbf{R}_4 = \{(1;1), (2;2), (4;4), (5;5)\}$;

д) $\mathbf{R}_5 = \{(1;1), (2;1), (2;2), (2;3), (3;3), (4;3), (4;4), (4;5), (5;5)\}$.

№ 4. Исследуйте свойства отношения $\mathbf{R} \subseteq \boldsymbol{E}^2$. Является ли $\mathbf{R}$ отношением эквивалентности? Если да, то укажите классы эквивалентности, на которые это отношение разбивает множество $\boldsymbol{E}$:

а) $\boldsymbol{E} = \{a, b, c\}$ и $\mathbf{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$;

б) $\boldsymbol{E} = \mathbb{N}$ и $(m, n) \in \mathbf{R}$, если и только если m и n имеют общие делители, отличные от единицы;

в) $\boldsymbol{E}$ – множество всех квадратных матриц размерности 3×3, и $(A,B)\in \mathbf{R}$, если и только если $\det A=\det B$;

г) $\boldsymbol{E}$ – множество всех слов русского языка, и связанными отношением считаются слова, начинающиеся с одной и той же буквы (например, «астра» $\mathbf{R}$ «арбуз»);

д) $\boldsymbol{E}$ – множество всех слов русского языка, и связанными отношением считаются слова, содержащие хотя бы одну общую букву (например, «миф» $\mathbf{R}$ «орбита»).

е) $\boldsymbol{E}$ – множество всех векторов на плоскости и $(\overline{a},\overline{b})\in \mathbf{R}$, если и только если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны;

ж) $\boldsymbol{E}$ – множество всех векторов на плоскости и $(\overline{a},\overline{b})\in \mathbf{R}$, если и только если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны.

№ 5. Приведите примеры отношений эквивалентности:

а) на множестве прямоугольных матриц размерности 2×3;

б) на множестве прямых на плоскости;

в) на множестве слов русского языка.

№ 6. Выясните, является ли $\mathbf{S}\subseteq \boldsymbol{E}^2$ отношением строгого/нестрогого порядка? Если да, то является ли порядок линейным? Если нет, то укажите несравнимые элементы.

а) $\boldsymbol{E}=\{a,b,c,d\}$; $\mathbf{S}=\{(a,a),(a,c),(a,d),(b,b),(c,c),(c,d),(d,d)\}$;

б) $\boldsymbol{E}=\mathbb{N}$ и $m\mathbf{S}n$ если и только если m делит n;

в) $\boldsymbol{E}$ – множество отрезков вещественной прямой и $I_1\,\mathbf{S}\,I_2$, если и только если $I_1\subset I_2$;

г) $\boldsymbol{E}$ – множество отрезков вещественной прямой и $I_1\,\mathbf{S}\,I_2$, если и только если $I_1\subseteq I_2$;

д) $\boldsymbol{E}=\mathbb{C}$ (множество комплексных чисел) и $z_1\,\mathbf{S}\,z_2$, если и только если $|z_1|\le |z_2|$.

№ 7. Являются ли функциями отношения $\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_5$ из задачи **№ 3**?

№ 8. Являются ли следующие функции всюду определенными, сюръективными, инъективными? Являются ли они биективными функциями или взаимно однозначными соответствиями?

а) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = |x|$;

б) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = e^x$;

в) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \ln x$;

г) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = x^3$;

д) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_5(x) = \sqrt{x}$;

е) $f_4 : A \to A$, где $A = \{1;2;3;4\}$, заданная отношением $\mathbf{P} = \{(1;4),(2;2),(3;3),(4;1)\}$;

ж) $f_5 : B \to C$, где $B = \{1;2;3\}$, $C = \{c_1, c_2\}$, заданная отношением $\mathbf{S} = \{(1, c_1),(3, c_2)\}$.

№ 9. Выполнимы ли следующие унарные операции:

а) возведения в квадрат на множестве целых чисел;

б) извлечение алгебраического квадратного корня на множестве натуральных чисел;

а также бинарные операции сложения и умножения на множествах:

в) нечетных натуральных чисел;

г) четных натуральных чисел;

д) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$;

е) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$;

ж) $M = \{-1;\ 0;\ 1\}$

з) матриц размерности 2 × 2;

и) матриц размерности 2 × 2, определитель которых равен 1;

к) комплексных чисел, лежащих в первой четверти.

№ 10. Приведите примеры множеств, на которых не выполнимы операции

а) сложения; **б)** вычитания; **г)** умножения; **д)** деления.

4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

4.1. Группы, кольца, поля. Группа подстановок

№ 1. Выясните, образуют ли группу:

а) множество чётных чисел $E = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ с операцией сложения;

б) множество нечётных чисел $O = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ с операцией сложения;

в) множество чётных чисел $E = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ с операцией умножения;

г) множество нечётных чисел $O = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ с операцией умножения;

д) множество целых степеней числа a, $S = \left\{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ с операцией умножения.

№ 2. Выясните, образуют ли кольцо или поле:

а) множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$;

б) множество целых чисел $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;

в) множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

г) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$;

д) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$;

е) множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$;

ж) множество векторов в пространстве с операциями сложения и векторного произведения.

№ 3. Заданы две подстановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите $\sigma\pi$, $\pi\sigma$, σ^2, π^2, σ^{-1}, π^{-1}.

4.2. Кольцо многочленов

№ 1. Разделите с остатком:

а) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$;

б) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$.

№ 2. Найдите наибольший общий делитель многочленов:

а) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$;

б) $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ и $x^5 + x^2 - x + 1$;

№ 3. Найдите наименьшее общее кратное многочленов:

а) $2x^3 + x - 3$ и $x^2 + x - 2$;

б) $x^4 + x^3 + x^2 - x - 2$ и $x^3 + 3x^2 - x - 3$.

№ 4. Пользуясь схемой Горнера, разделите $f(x)$ на $x - x_0$ и вычислите $f(x_0)$:

а) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $x_0 = 4$;

б) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $x_0 = -1$.

№ 5. Найдите кратность корня x_0 многочлена $f(x)$:

а) $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 26x^2 - 31x + 11$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $x_0 = 2$;

в) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $x_0 = -2$.

№ 6. Разложите многочлен на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$ и над полем $\mathbb{C}$. Перечислите все его корни с учётом кратности:

а) $x^5 + x^4 - 2x^3$; **б)** $x^5 - x^4 - 16x + 16$;

в) $x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 10x + 3$.

№ 7. С помощью схемы Горнера вычислите значение многочлена $f(z)$ в точке z_0:

а) $f(z) = iz^3 + (1-2i)z^2 - 2(1-i)z + 2$, $z_0 = 1+i$;

б) $f(z) = z^4 + 2iz^3 - (1+i)z^2 - 3z + 7 + i$, $z_0 = -i$;

в) $f(z) = z^5 + (1+2i)z^4 - (1+3i)z^2 + 7$, $z_0 = -2-i$.

№ 8. Найдите многочлен 4-й степени с заданными корнями:

а) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = -4$;

б) $x_1 = x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = i$;

в) $x_1 = x_2 = 1+i$, $x_3 = x_4 = 2$.

№ 9. Найдите сумму квадратов и произведение всех корней многочленов:

а) $f(z) = 3z^5 - z^3 + z + 2$;

б) $f(z) = z^4 + (1+i)z^3 + (2+3i)z^2 - z + 3 + i$.

4.3. Кольцо вычетов

№ 1. Найдите значения n, удовлетворяющие условию $20 \equiv 8 (\bmod n)$.

№ 2. Найдите остаток от деления чисел на 7:

а) $11 \cdot 18 \cdot 2322 \cdot 13 \cdot 19$; **б)** $233^{635} + 327^{355}$.

№ 3. Найдите последнюю цифру числа

а) 127^{345}; **б)** 169^{100}; **в)** 22^{33}; **г)** 248^{125}.

№ 4. Вычислите в поле вычетов $\mathbb{Z}_7$:

а) $\left(\frac{\bar{1}}{\bar{4}} + \frac{\bar{5}}{\bar{3}}\right) \cdot \frac{\bar{4}}{\bar{5}} - \frac{\bar{3}}{\bar{2}}$;

б) $\frac{\bar{1}}{\bar{6}} \cdot \left(\frac{\bar{3}}{\bar{4}} + \bar{5}\right) - \bar{4}$.

№ 5. Вычислите те же выражения в поле вычетов $\mathbb{Z}_{11}$.

№ 6. Найдите решения сравнений:

а) $4x \equiv 5 \pmod{6}$;

б) $45x \equiv 18 \pmod{99}$;

в) $189x \equiv 63 \pmod{819}$;

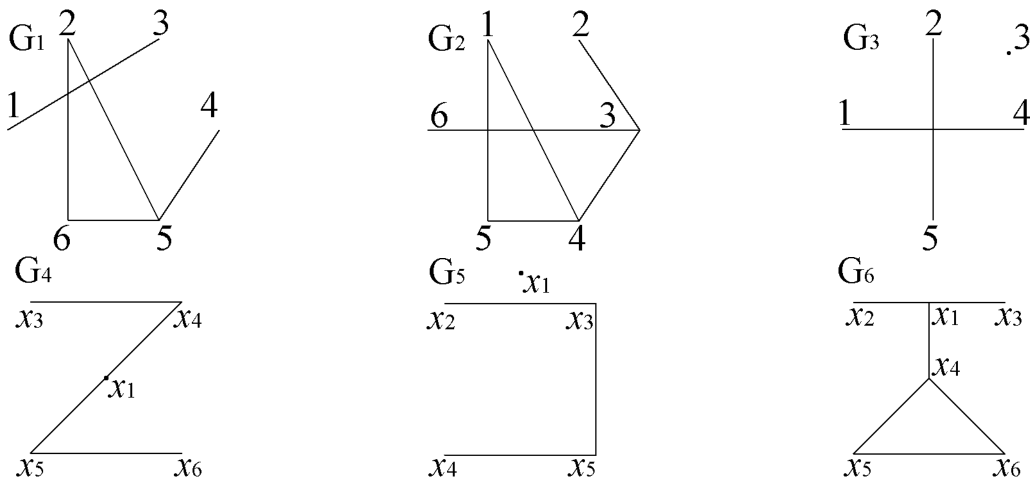
г) $165x \equiv 231 \pmod{297}$;

д) $132x \equiv 60 \pmod{72}$.

5. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

5.1. Неориентированные графы и операции над ними

Заданы графы G_1 – G_6.



№ 1. Перечислите вершины и ребра графов G_1 и G_6.

№ 2. Постройте матрицы смежности графов G_2 и G_5.

№ 3. Постройте матрицы инцидентности графов G_3 и G_4.

№ 4. Постройте следующие графы:

а) $H_1 = G_1 \cup G_3$; **б)** $H_2 = G_4 \cup G_5$; **в)** $H_3 = G_1 \cap G_2$;
г) $H_4 = G_4 \cap G_6$; **д)** $H_5 = \overline{G_3}$; **е)** $H_6 = \overline{G_6}$.

№ 5. Произведите следующие операции над графами G_1 – G_3:

а) удаление вершины 5 графа G_1;
б) удаление ребер [1; 5] и [3; 4] графа G_2;
в) отождествление вершин 1 и 5 графа G_3;
г) стягивание ребра [3; 4] графа G_2;
и над графами G_4 – G_6:
д) удаление вершины x_1 графа G_4;
е) удаление ребра $[x_4, x_5]$ и вершины x_3 графа G_5;
ж) отождествление вершин x_2 и x_5 графа G_6;
з) стягивание ребра $[x_3, x_5]$ графа G_5.

№ 6. Среди графов $G_1 - G_6$ укажите изоморфные.

№ 7. Какую операцию следует произвести:

а) над графом G_5, чтобы G_3 и G_5 стали изоморфными;
б) над графом G_3, чтобы G_3 и G_5 стали изоморфными;
в) над графом G_4, чтобы G_4 и G_5 стали изоморфными.

№ 8. Даны полный граф T с вершинами v_2, v_4, v_5, v_6; полный граф с петлями S с вершинами v_1, v_2, v_4; граф P, состоящий из шести вершин и ребер $[v_2, v_3]$, $[v_3, v_3]$, $[v_3, v_1]$, $[v_1, v_4]$, $[v_4, v_4]$, $[v_4, v_6]$, $[v_6, v_5]$. Постройте матрицу смежности графа $T \cup S \cup P$.

№ 9. Граф G_7 состоит из вершин 4, 6 и ребра [4; 6]; граф G_8 – из вершин x_1, x_3 и не содержит ни одного ребра. Постройте графы:

а) $G_3 + G_7$; **б)** $G_4 + G_8$; **в)** $G_7 + G_8$.

5.2. Маршруты в графе. Ориентированные графы. Некоторые задачи теории графов

Неориентированные графы $Q_1 - Q_6$ заданы своими матрицами смежности:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

№ 1. Среди перечисленных маршрутов укажите те, которые являются цепью, простой цепью, циклом, простым циклом в графе Q_1:

а) 5 – 3 – 1 – 2 – 3 – 5; **б)** 4 – 6 – 7 – 3 – 2 – 1;

в) 5 – 3 – 1 – 2 – 3 –7; **г)** 3 – 4 – 6 – 7 – 3;

д) 4 – 6 – 7 – 3 – 2 – 1 – 3 – 4;

в графе Q_2:

е) 7 – 5 – 6 – 7; **ж)** 3 – 1 – 2 – 4 – 3 – 5;

з) 6 – 5 – 3 – 1 – 3 – 5 – 6; **и)** 4 – 2 – 1 – 3 – 5 – 6;

к) 3 – 1 – 2 – 4 – 7 – 5 – 3.

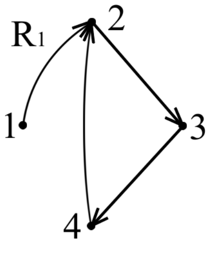
№ 2. Перечислите циклы и простые циклы и в графах Q_3 и Q_4, начинающиеся и заканчивающиеся в вершине 3; укажите их длину (циклы, содержащие одни и те же вершины и ребра и отличающиеся только порядком их обхода, считайте одним циклом).

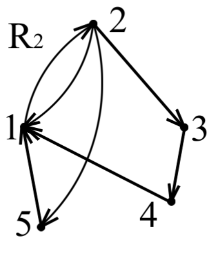
№ 3. Найдите обхват графов: **а)** Q_3; **б)** Q_4.

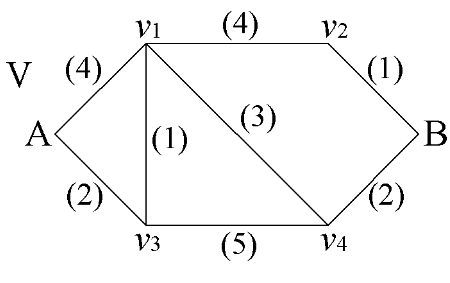
№ 4. Можно ли превратить связные графы Q_1 – Q_4 в несвязные, удалив одну вершину? Если да, то какую именно?

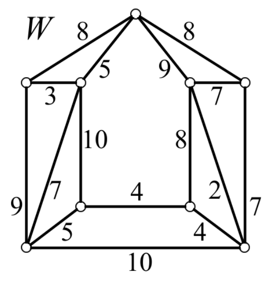
№ 5. Составьте матрицы связности для графов Q_5 и Q_6. Укажите компоненты связности для каждого графа.

Заданы орграфы R_1, R_2 и взвешенные графы V и W.









№ 6. Перечислите все дуги ориентированных графов R_1 и R_2.

№ 7. Постройте матрицы смежности, инцидентности и достижимости ориентированных графов R_1 и R_2. Являются ли эти графы слабо связными или сильно связными?

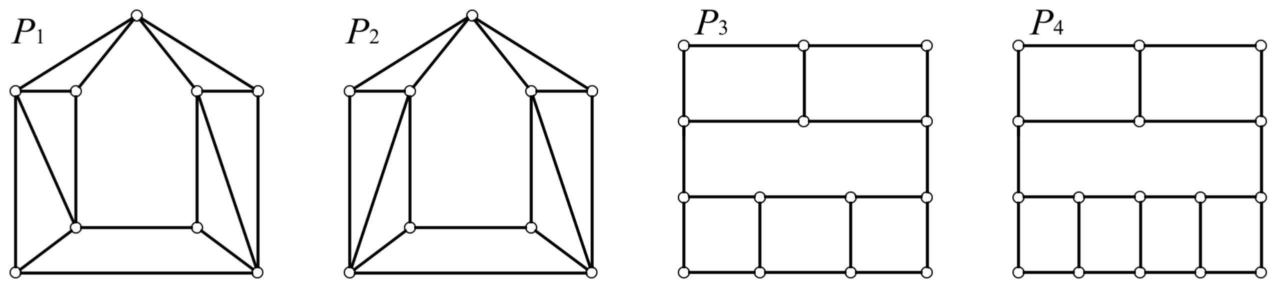
№ 8. Постройте следующие графы: **а)** $R_1 \cap R_2$; **б)** $R_1 \cup R_2$.

№ 9. Являются ли графы Q_1 – Q_4 эйлеровыми, гамильтоновыми, полуэйлеровыми, полугамильтоновыми графами? Если да, то укажите эйлеров/гамильтонов цикл/маршрут.

№ 10. Постройте матрицу весов графа V.

№ 11. Найдите остовное дерево наименьшего веса для графов V и W (задача о проведении дорог) и вычислите суммарный вес его ребер.

№ 12. Найдите хроматические числа графов P_1, P_2, P_3, P_4, произведя раскраску вершин.



6. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

№ 1. Постройте таблицы истинности формул:

а) $(x \vee y) \to (x \wedge z)$; **б)** $x \vee (y \downarrow \bar{z})$; **в)** $(\bar{x} \wedge y) \leftrightarrow z$;

г) $(x \to y) \wedge ((\bar{y} \to z) \to \bar{x})$; **д)** $(\bar{x} \vee y) \leftrightarrow (\bar{y} \wedge (x \mid z))$;

е) $((x \oplus y) \to \bar{z}) \vee ((x \mid \bar{y}) \wedge \bar{x})$; **ж)** $(((x \mid z) \downarrow x) \oplus (x \wedge y)) \leftrightarrow (\bar{z} \to x)$.

№ 2. Выделите среди трех заданных формул тождественно истинную, тождественно ложную и не являющуюся ни тождественно истинной, ни тождественно ложной:

а) (1) $(x \wedge y) \wedge (x \downarrow y)$, (2) $(x \vee y \vee 0) \leftrightarrow (x \wedge y \wedge 1)$, (3) $(x \wedge y) \to (\bar{x} \vee y)$;

б) (1) $y \mid \bar{x} \to \bar{x}$, (2) $x \to (y \vee 1)$, (3) $(\bar{x} \vee y) \oplus (x \mid \bar{y})$.

№ 3. Определите, каким логическим операциям эквиваленты формулы:

а) $(x \wedge y) \vee (x \downarrow y)$; **б)** $\bar{x} \to (x \oplus y)$;

в) $((x \vee y) \to \bar{x}) \to \bar{y}$; **г)** $(x \to \bar{y}) \oplus (x \leftrightarrow y)$.

№ 4. Какие из приведенных формул эквивалентны между собой: $\varphi_1 = \bar{x} \wedge (x \vee y)$, $\varphi_2 = \overline{(x \wedge y)}$ и $\varphi_3 = \bar{x} \wedge y$?

№ 5. Выясните, являются ли эквивалентными формулы:

а) $x \to y$ и $\bar{x} \vee y$; **б)** $x \wedge (y \to z)$ и $(\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

в) $x \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ и $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

№ 6. Найдите СДНФ для формул **а)** – **в)** и СКНФ для формул **г)** – **е)** из задачи № 1.

№ 7. Для каждой из заданных функций трех переменных $f_1 - f_4$ найдите МДНФ и МКНФ методом Квайна и с помощью карт Карно постройте полином Жегалкина и двойственную к ней функцию:

а) $f_1(x,y,z)$ истинна на следующих наборах значений переменных и только на них:

$$f_1(0,1,0) = f_1(1,1,0) = f_1(1,1,1) = 1;$$

б) $f_2(x,y,z)$ задана таблицей

$f_2(x,y,z)$	1	1	1	1	0	1	0	1
(x,y,z)	(0, 0, 0)	(0, 0, 1)	(0, 1, 0)	(0, 1, 1)	(1, 0, 0)	(1, 0, 1)	(1, 1, 0)	(1, 1, 1)

в) $f_3(x,y,z)$ принимает значение 1, если большинство ее переменных истинны, и значение 0, если большая часть переменных имеют ложное значение;

г) $f_4(x,y,z)$ ложна на следующих наборах значений переменных и только на них:

$$f_4(1,0,0) = f_4(0,1,1) = f_4(0,1,0) = 0.$$

№ 8. Найдите формулы, реализующие функции, двойственные к функциям в соответствии с принципом двойственности:

а) $(a \vee b) \wedge \bar{a} \wedge c$; **б)** $x \wedge (y \vee z \vee 0)$; **в)** $x \to y$.

№ 9. Какие функции являются двойственными к операциям $\leftrightarrow$, $|$, $\downarrow$, $\oplus$?

№ 10. Исследуйте функции $f_1 - f_4$ из задачи № 7 на принадлежность к классам Поста.

№ 11. Докажите, что следующие системы функций образуют базис:

а) $\{\to, \bar{\ }\}$; **б)** $\{\leftrightarrow, \vee, 0\}$; **в)** $\{\leftrightarrow, \wedge, \oplus\}$; **г)** $\{\downarrow\}$; **д)** $\{\,|\,\}$.

7. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

№ 1. Даны два предиката $P(x)$: $5x-6<3x$ и $Q(x)$: $2<x\le 8$. Найдите области истинности предикатов:

а) $\overline{P(x)}$; **б)** $\overline{Q(x)}$; **в)** $P(x)\wedge Q(x)$;
г) $P(x)\vee Q(x)$; **д)** $P(x)\to Q(x)$; **е)** $P(x)\leftrightarrow Q(x)$.

№ 2. Дано универсальное множество $U=\{e,d,f,c,g,a,h,b,o,u,l\}$ и два подмножества: $I=\{o,h,b,l,u,a\}$ и $J=\{f,b,g,h,a,c\}$. Заданы предикаты $C(x)=\{x\in J\}$ и $B(x)=\{x\in I\}$. Найдите области истинности предикатов:

а) $P_1(x)=B(x)\vee C(x)$; **б)** $P_2(x)=B(x)\to C(x)$;
в) $P_3(x)=B(x)\leftrightarrow C(x)$; **г)** $P_4(x)=B(x)\wedge C(x)$.

№ 3. Даны два предиката: $P(x,y): 2x+3y\ge 6$ и $Q(x,y): x-2y\le 0$. Найдите области истинности предикатов:

а) P; **б)** Q; **в)** $\overline{P}$; **г)** $\overline{Q}$;
в) $P\wedge Q$; **г)** $P\vee Q$; **д)** $P\to Q$; **е)** $P\leftrightarrow Q$.

№ 4. Пусть на множестве всех людей задан двуместный предикат $\Lambda(X,Y)$: «*X* любит *Y*». Запишите высказывания:

а) каждый человек любит себя; **б)** некоторые люди любят всех людей;
в) не все люди любят всех людей; **г)** каждый кого-нибудь любит;
д) каждого кто-нибудь любит; **е)** всякая любовь взаимна.

№ 5. Пусть на множестве людей заданы предикаты

$m(X)$: «*X* мужского пола»; $f(X)$: «*X* женского пола»;

$F(X,Y)$: «*X* отец *Y*»; $M(X,Y)$: «*X* мать *Y*»;

$H(X,Y)$: «*X* муж *Y*»; $W(X,Y)$: «*X* жена *Y*».

Сформулируйте следующие предикаты:

а) $S(X,Y)$: «X – сын Y»; **б)** $D(X,Y)$: «X – дочь Y»;

в) $B(X,Y)$: «X – брат Y»; **г)** $C(X,Y)$: «X – сестра Y»;

д) $L(X,Y)$: «X – свекровь Y»; **е)** $N(X,Y)$: «X – племянница Y».

Сформулируйте следующие утверждения:

ж) все люди братья; **з)** у каждого есть родители;

и) не все люди состоят в браке.

№ 6. Привести формулы к предваренной нормальной форме:

а) $R(X,Y) = \forall X \neg \exists Y\, P(X,Y) \wedge \exists X \forall Y\, Q(X,Y)$;

б) $R(X,Y) = \forall X \exists Y\, P(X,Y) \to \forall X \exists Y\, Q(X,Y)$.

№ 7. Двуместные предикаты P и Q определены на множестве $\{a,b,c\}$. Найти предикат, равносильный предикату $R(z) = \forall x \exists y P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z)$, но не содержащий кванторов.

№ 8. Среди следующих формул найти все пары равносильных формул:

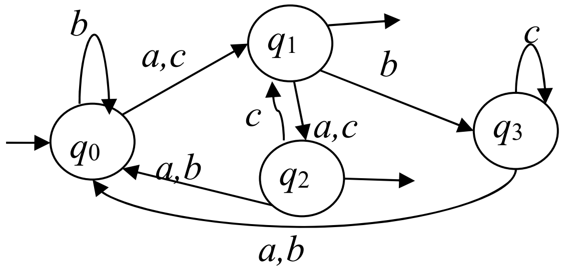
а) $\forall x \forall y (P(x) \to Q(y))$; **б)** $\forall x \exists y (P(x) \to Q(y))$;

в) $\exists y \forall x (P(x) \to Q(y))$; **г)** $\forall y \exists x (P(x) \to Q(y))$;

д) $\exists x \forall y (P(x) \to Q(y))$; **е)** $\exists x \exists y (P(x) \to Q(y))$.

8. КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

№ 1. Задан конечный автомат K с входным алфавитом $V=\{a,b,c\}$, входным состоянием q_0 и множеством конечных состояний $F=\{q_1,q_2\}$.



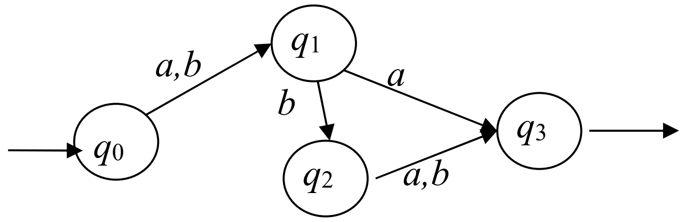
Выясните, принадлежат ли языку данного автомата $L(K)$ следующие слова: $\alpha_1=abccc$, $\alpha_2=acbba$, $\alpha_3=bbabbc$, $\alpha_4=cbaabc$, $\alpha_5=abccba$, $\alpha_6=baacbb$.

№ 2. Для конечного автомата K из задачи 1 вычислите $S_k(\alpha,t)$, где

а) $\alpha=cacac,\ t=3$; **б)** $\alpha=aaaca,\ t=3$;

в) $\alpha=cacac,\ t=4$; **г)** $\alpha=cacac,\ t=2$.

№ 3. Задан конечный автомат M с входным алфавитом $V=\{a,b\}$ и множеством конечных состояний $F=\{q_3\}$. Сформируйте язык конечного автомата.



№ 4. Для конечных автоматов K и M из задач № 1 и № 2 постройте функции перехода состояний.

№ 5. Конечный автомат D с входным алфавитом $V=\{a,b\}$, множеством состояний $Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$, входным состоянием q_0 и множеством заключительных состояний $F=\{q_2,q_3\}$ задан функцией перехода состояний:

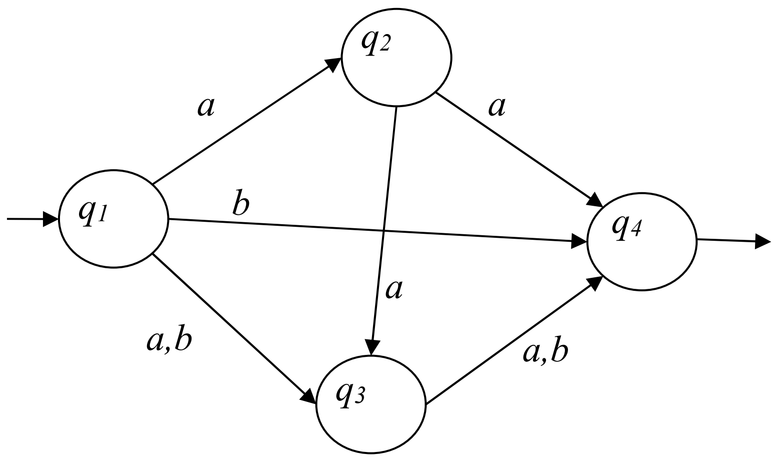
$$q_0\, a \to q_2\,,\ q_0\, b \to q_1\,,\ q_1\, a \to q_2\,,\ q_2\, b \to q_3\,,\ q_3\, a \to q_0\,,\ q_3\, b \to q_0\,.$$

Постройте орграф, описывающий автомат. Выпишите все слова алфавита данного автомата, содержащие не более пяти символов.

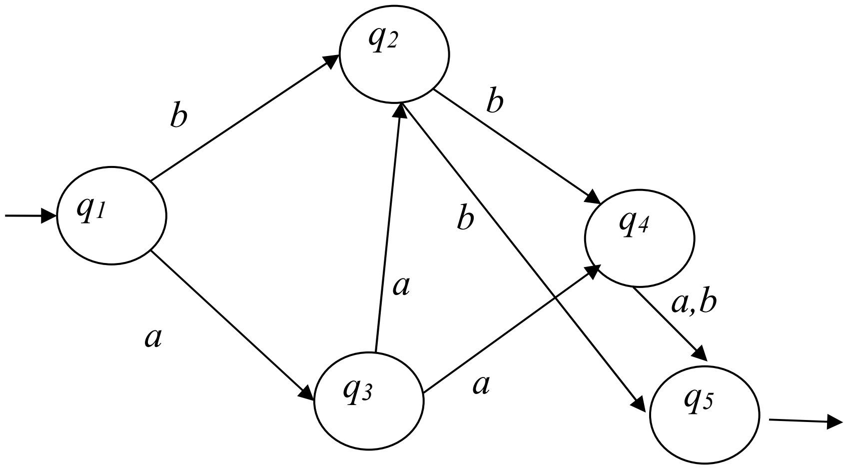
№ 6. Постройте конечный автомат, описывающий организацию ужина человеком, возвращающимся домой после работы. Человек может заехать в магазин, купить продукты и приготовить еду сам, заказать ее в ресторане с доставкой на дом или, сделав заказ, забрать его самостоятельно. Пусть заданы состояния конечного автомата q_0 «на работе» (входное состояние), q_1 – «сделан заказ с самовывозом», q_2 – «сделан заказ с доставкой», q_3 – «в магазине», q_4 – «в ресторане», q_5 – «дома» (конечное состояние). Задайте алфавит и команды конечного автомата. Постройте орграф автомата. Перечислите все слова, которые распознает построенный конечный автомат.

№ 7. Конечный автомат задан орграфом. Постройте эквивалентный ему детерминированный конечный автомат.

а)



б)



9. ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

№ 1. В машине Поста целое неотрицательное число n задается массивом из $n+1$ единицы. Составьте программу, отнимающую единицу из заданного числа n, если это число положительное, и оставляющую число неизменным, если оно равно нулю. Каретка в начальном и конечном положении указывает на первую единицу массива.

№ 2. В машине Поста исходные данные имеют вид массива из n единиц. Составьте программу, которая вставляет ноль перед последним символом. Каретка в начальном положении указывает на первую единицу массива, конечное положение произвольно

$$11111 \to 111101.$$

№ 3. В машине Поста целое неотрицательное число n задается массивом из $n+1$ единицы. Составьте программу, вычисляющая разность двух чисел, разделенных нулем (предполагается, что первое число не превосходит второе). Каретка в начальном положении указывает на первую единицу массива, конечное положение произвольно.

№ 4. Алфавит машины Тьюринга состоит из единицы и нуля, играющего роль пустого символа. Составьте программу, которая, имея на ленте два массива из единиц, разделенные нулями, заполняет эти нули единицами и останавливается у последней единицы второго массива. Первоначальное положение каретки – у первой единицы первого массива, конечное положение произвольно, т. е.

$$011100011110 \to 011111111110.$$
$$q_1 \qquad\qquad q_0$$

№ 5. Алфавит машины Тьюринга состоит из 0, 1 и пустого символа _. На ленте в ячейках находятся входные данные в виде последовательности нулей и единиц, каретка находится на первом символе последовательности.

Составьте программу, которая заменит 0 на 1, 1 на 0 и вернет каретку в первоначальное положение.

№ 6. Задан алфавит машины Тьюринга $A = \{1, 2, 3, \_\}$. Входные данные заданы в виде произвольной последовательности символов 1, 2 и 3; каретка находится на первом символе последовательности. Составьте программу, которая переносит первый символ в конец последовательности, например:

$$\underset{q_1}{3}212 \to 212\underset{q_0}{3}.$$

№ 7. Алфавит машины Тьюринга состоит из 0, 1 и пустого символа _. На ленте в ячейках находятся входные данные в виде последовательности нулей и единиц, каретка находится на первом символе последовательности. Составьте программу, которая рассортирует нули и единицы, оставив на ленте массив из нулей и массив из единиц, разделенные пустым символом, например:

$$\underset{q_1}{0}11100011110 \to 00000\_111111\underset{q_0}{1}.$$

№ 8. Оцените количество элементарных операций при решении решения задач:

а) суммирования элементов квадратной матрицы порядка n;
б) поиска максимального элемента в массиве объема n.

ОТВЕТЫ

1. Теория множеств

№ 1. $x_1 \in B$; $x_2 \in C$; $x_3 \in C$, $x_3 \in D$; $x_4 \in D$.

№ 2. а) $\{\varnothing\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a;\ b\}$; **б)** $\{\varnothing\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;\ 2\}$, $\{1;\ 3\}$, $\{2;\ 3\}$, $\{1;\ 2;\ 3\}$; **в)** $\{\varnothing\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{1;\ 2\}$, $\{1;\ a\}$, $\{1;\ b\}$, $\{2;\ a\}$, $\{2;\ b\}$, $\{a;\ b\}$, $\{1;\ 2;\ a\}$, $\{1;\ 2;\ b\}$, $\{1;\ a;\ b\}$, $\{2;\ a;\ b\}$, $\{1;\ 2;\ a;\ b\}$.

№ 3. а) $\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$; **б)** $(-1;+\infty)$; **в)** $\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$; **г)** $\{5;6\}$; **д)** $\{2;3\}$; **е)** $[-1;4]$.

№ 4. $T = B$, $U = F$, $V = C$, $W = A$, $X = E$, $Y = D$; C и F – конечные, D – счетное, A, B и E – континуум.

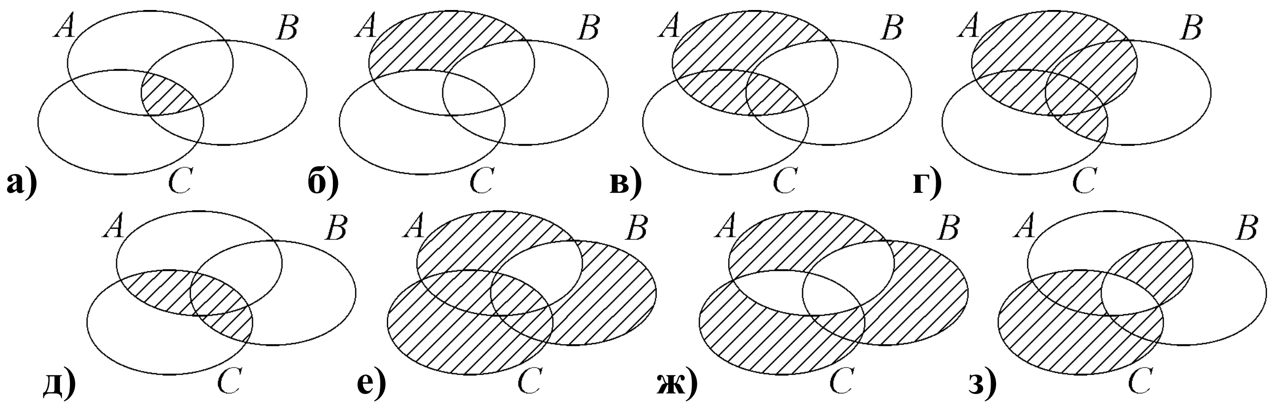
№ 5. $\overline{A}$ – множество чисел, не делящихся на 4; $\overline{B}$ – множество чисел, не делящихся на 3; $A \cap B$ – множество чисел, делящихся на 12; $A \setminus B$ – множество чисел, делящихся на 4, но не делящихся на 12.

№ 6. $\overline{C}$ – множество четных чисел; $C \cap D = \varnothing$; $\overline{C} \cap D = D$; $C \setminus D = C$.

№ 7. а) $\{1;\ 2;\ 4;\ 5\}$; **б)** $\{1;\ 2;\ 3;\ 5\}$; **в)** E; **г)** $\{2;\ 3\}$.

№ 8. а) $\varnothing$; **б)** $\{0;4;9\}$; **в)** $\{0\}$; **г)** $\{0;4;7\}$; **д)** $\{0;1;2;3;4;8;9\}$; **е)** $\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$; **ж)** $\{3;4;5;6;8;9\}$; **з)** $\{0;2;3;4;7;8;9\}$; **и)** $\{2;8\}$; **к)** $\{0;2;4;7\}$; **л)** $\varnothing$; **м)** $\{3;4\}$.

№ 9.



2. Комбинаторика

№ 1. 5. **№ 2.** 457. **№ 3.** 226. **№ 4. а)** 20; **б)** 96. **№ 5. а)** 60; **б)** 10. **№ 6.** 162.
№ 7. 24. **№ 8. а)** 500; **б)** 300; **в)** 200; **г)** 96; **д)** 60; **е)** 42. **№ 9.** 12 180.
№ 10. 5 040; 3 600. **№ 11. а)** 120; **б)** 180; **в)** 151 200. **№ 12.** 77 597 520.
№ 13. а) $1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$; **б)** $x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$; **в)** $32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$.
№ 14. $12a^4b^2 + 24a^4bc + 12a^4c^2$.

3. Теория отношений

№ 1. $A\times B=\{(a,p),(a,q),(a,s),(b,p),(b,q),(b,s),(c,p),(c,q),(c,s)\}$.

№ 2. $\mathrm{Dom}(\mathbf{R})=\{1\}$; $\mathrm{Im}(\mathbf{R})=\{4;\ 5;\ 6\}$; $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}=\{(4;1),(5;1),(6;1)\}$.

№ 3. а) не рефлексивно, не антирефлексивно, симметрично, не антисимметрично, транзитивно; **б)** не рефлексивно, антирефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно; **в)** не рефлексивно, антирефлексивно, не симметрично, антисимметрично, не транзитивно; **г)** не рефлексивно, не антирефлексивно, симметрично, антисимметрично, не транзитивно; **д)** рефлексивно, не антирефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно.
№ 4. а) да; $\{a,b\}$, $\{c\}$; **б)** нет; **в)** да; **г)** да; **д)** нет; **е)** да; **ж)** нет.

№ 6. а) нестрогий; не линейный, b не сравним с a, c и d; **б)** нестрогий; не сравнимы все пары чисел кроме пар вида (m,mk), где $m,k\in\mathbb{N}$; **в)** строгий; не сравнимы I_1, I_2 такие, что $I_1\setminus I_2\neq\varnothing$ и $I_2\setminus I_1\neq\varnothing$; **г)** нет; **д)** нестрогий, нелинейный.
№ 7. а) нет; **б)** да; **в)** да; **г)** да; **д)** нет.
№ 8. а) да, нет, нет, нет, нет; **б)** да, нет, да, нет, нет; **в)** нет, да, да, да, нет; **г)** да, да, да, да, да; **д)** нет, нет, да, нет, да; **е)** да, да, да, да, да; **ж)** нет, да, да, да, нет.
№ 9. а) да; **б)** нет; **в)** нет, да; **г)** да, да; **д)** да, нет; **е)** да, да; **ж)** нет, да; **з)** да, да; **и)** нет, да; **к)** да, нет.

4. Алгебраические системы

4.1. Группы, кольца, поля. Группа подстановок

№ 1. а) да; **б)** нет; **в)** нет; **г)** нет; **д)** да.

№ 2. а) нет; **б)** коммутативное кольцо с единицей; **в)** поле; **г)** коммутативное кольцо с единицей; **д)** поле; **е)** поле; **ж)** нет.

№ 3. $\sigma\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.2. Кольцо многочленов

№ 1. а) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 3x + 11) + 35x - 5$;

б) $x^3 - 3x^2 - x - 1 = (3x^2 - 2x + 1)\dfrac{3x-7}{9} - \dfrac{26x+2}{9}$.

№2. а) $x + 1$; **б)** $x^3 - x + 1$;

№ 3. а) $2x^4 + 4x^2 - x - 6$; **б)** $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

№ 4. а) $x^3 + x^2 + 10x + 30$, 136; **б)** $x^3 + x^2 - 4x$, 1.

№ 5. а) 3; **б)** 3; **в)** 4.

№ 6. а) $x^3(x-1)(x+2)$, 0, 0, 0, 1, – 2; **б)** $\mathbb{R}$: $(x-1)(x+2)(x-2)(x^2+4)$, 1, 2, –2, $\mathbb{C}$: $(x-1)(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$, 1, 2, –2, $2i$, $-2i$;

в) $\mathbb{R}$: $(x+1)^2(x+3)(x^2+x+1)$, –1, –1, –3, $\mathbb{C}$: $(x+1)^2(x+3)\left(x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times$

$\times \left(x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, –1, –1, –3, $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

№ 7. а) 0; **б)** $7 + 5i$; **в)** $-1 - 44i$.

№ 8. а) $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24$;

б) $x^4 + (3-i)x^3 + (3-3i)x^2 + (1-3i)x - i$;

в) $x^4 - (6+2i)x^3 + (12+10i)x^2 - (8+16i)x + 8i$.

№ 9. а) 2/3 и – 2/3; **б)** $-4 - 4i$ и $3 + i$.

4.3. Кольцо вычетов

№ 1. 2, 3, 4, 6, 12. **№ 2. а)** 6; **б)** 2. **№ 3. а)** 7; **б)** 1; **в)** 2; **г)** 8. **№ 4. а)** $\overline{4}$; **б)** $\overline{6}$. **№ 5. а)** $\overline{7}$; **б)** $\overline{2}$. **№ 6. а)** нет решений; **б)** $x = 11k + 7$; **в)** $x = 13k + 9$; **г)** $x = 9k + 5$; **д)** $x = 6k + 1$.

5. Теория графов

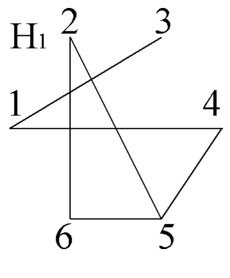
5.1. Неориентированные графы и операции над ними

№ 1. G_1: вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6, ребра [1; 3], [2; 5], [2; 6], [4; 5], [5; 6]; G_6: вершины x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, ребра $[x_1, x_2]$, $[x_1, x_3]$, $[x_1, x_4]$, $[x_4, x_5]$, $[x_4, x_6]$, $[x_5, x_6]$.

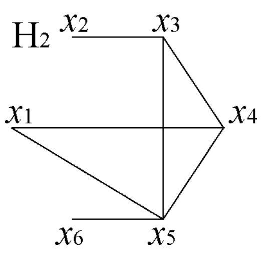
№ 2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

№ 3. $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

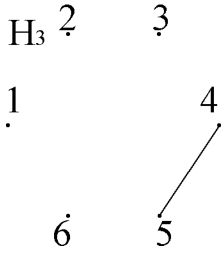
№ 4. а)



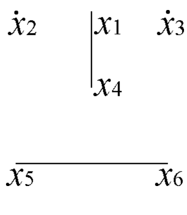
б)



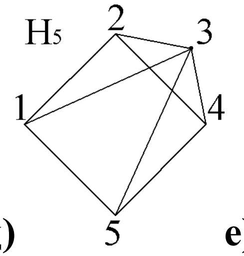
в)



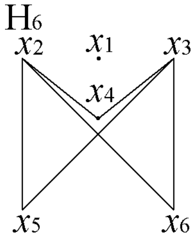
г)



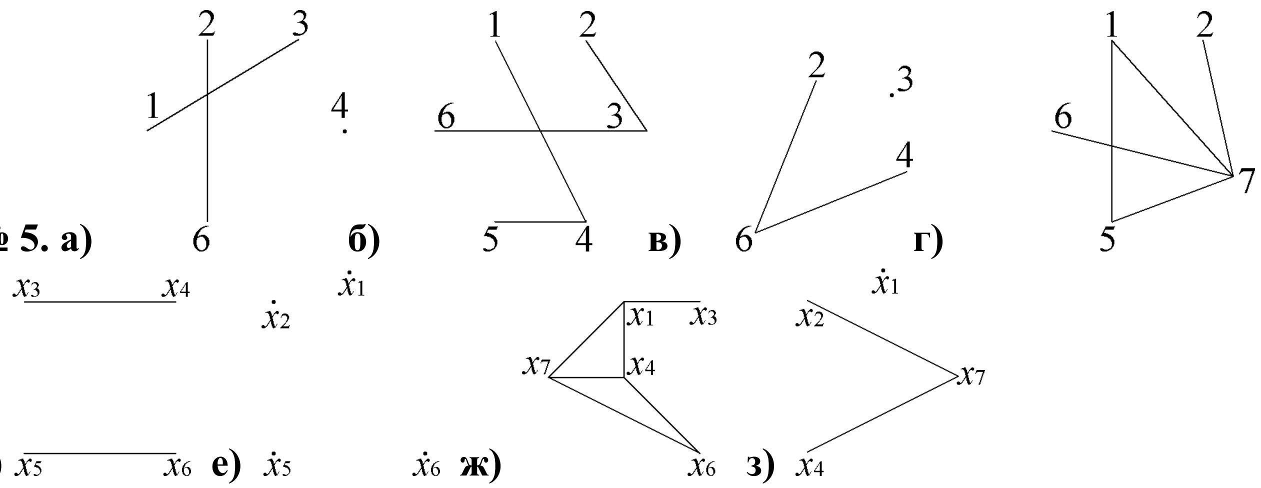
д)



е)



№ 5. **а)** **б)** **в)** **г)** **д)** **е)** **ж)** **з)**

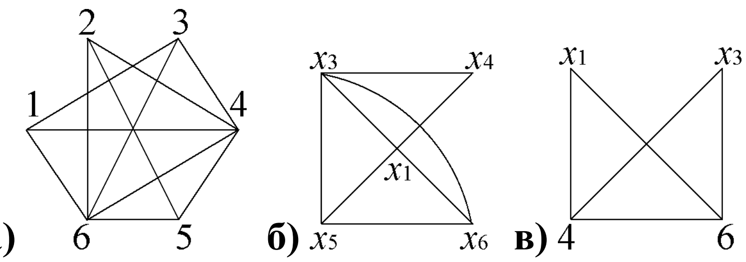


№ 6. G_2 и G_6.

№ 7. а) удаление ребра $[x_3; x_5]$; **б)** добавление одного из ребер [1; 2], [2; 4], [4; 5] или [1; 5]; **в)** удаление одного ребра $[x_3; x_4]$ или $[x_5; x_6]$.

№ 8. $$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

№ 9. а) **б)** **в)**



5.2. Маршруты в графе. Ориентированные графы. Некоторые задачи теории графов

№ 1. а) ни одно из перечисленного; **б)** простая цепь; **в)** цепь; **г)** простой цикл; **д)** цикл; **е)** простой цикл; **ж)** цепь; **з)** ни одно из перечисленного; **и)** простая цепь; **к)** простой цикл.

№ 2. Q_3: простой цикл: 3 – 2 – 1 – 3 (длины 3), цикл: 3 – 2 – 4 – 5 – 2 – 1 – 3 (6); Q_4: простые циклы: 3 – 2 – 1 – 3 (3), 3 – 2 – 4 – 5 – 3 (4), 3 – 1 – 2 – 4 – 5 – 3 (5); 3 – 2 – 3 (2); циклы: 3 – 5 – 4 – 2 – 3 – 1 – 2 – 3 (7).

№ 3. а) 3; **б)** 2.

№ 4. Q_1: да, 3; Q_2: нет; Q_3: да, 2; Q_4: нет.

$$\textbf{№ 5. } C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$Q5: \{1;4\}, \{3\}, \{2;5;6;7\};$

$Q6: \{1;3;5;7\}, \{2;4;6\}.$

№ 6. R_1: (1; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 2);

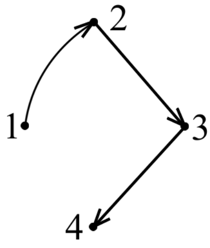
R_2: (1; 2), (2; 1), (2; 3), (3; 4), (4; 1), (2; 5), (5; 1).

$$\textbf{№ 7. } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

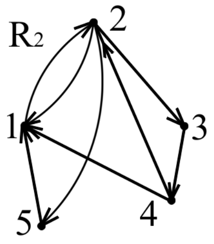
$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ R_1 слабо связный; R_2 сильно связный.

№ 8. а)



б)



№ 9. Q_1: полуэйлеров 5 – 3 – 2 – 1 – 3 – 4 – 6 – 7 – 3;

Q_2: гамильтонов; 1 – 2 – 4 – 7 – 6 – 5 – 3 – 1;

Q_3: эйлеров; 2 – 4 – 5 – 2 – 1 – 3 – 2; полугамильтонов; 1 – 3 – 2 – 4 – 5;

Q_4: эйлеров; 3 – 2 – 1 – 3 – 2 – 4 – – 5 – 3; гамильтонов; 1 – 2 – 4 – 5 – 3 – 1.

№ 10. $P=\begin{pmatrix} 0 & 4 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 3 & \infty \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 1 & \infty & 0 & 5 & \infty \\ \infty & 3 & \infty & 5 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

№ 11. $L(\text{V}) = 9$; $L(\text{W}) = 37$.

№ 12. $\chi(P_1) = 3$, $\chi(P_2) = 4$, $\chi(P_3) = 3$, $\chi(P_4) = 2$.

6. Логика высказываний

№ 1.

x	y	z	**а)**	**б)**	**в)**	**г)**	**д)**	**е)**	**ж)**
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1

№ 2. а) (1) тождественно ложная, (2) ни то, ни другое, (3) тождественно истинная; **б)** (1) ни то, ни другое, (2) тождественно истинная, (3) тождественно ложная.

№ 3. а) $x \leftrightarrow y$; **б)** $x \vee y$; **в)** $y \to x$; **г)** $x \downarrow y$.

№ 4. φ_1 и φ_3.

№ 5. а) да; **б)** нет; **в)** да.

№ 6. а) $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xyz$; **б)** $x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$;

в) $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz$; **г)** $(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

д) $(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$; **е)** $\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$.

№ 7. а) $xy \vee y\bar{z}$, $y \wedge (x \vee \bar{z})$, $xyz \oplus yz \oplus y$,

$f_1^+(1,0,1) = f_1^+(0,0,1) = f_1^+(0,0,0) = 0$;

б) $\bar{x} \vee z$, $\bar{x} \vee z$, $xz \oplus z$, $f_2^{+}(0,0,1) = f_2^{+}(0,0,1) = 1$;

в) $xy \vee xz \vee yz$, $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$, $xy \oplus xz \oplus yz$, $f_3^{+} = f_3$;

г) $\bar{x}\,\bar{y} \vee xy \vee xz$ или $\bar{x}\,\bar{y} \vee xy \vee \bar{y}z$, $(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)$, $xyz \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus 1$, $f_4(0,1,1) = f_4(1,0,0) = f_4(1,0,1) = 1$.

№ 8. а) $(a \wedge b) \vee \bar{a} \vee c$; **б)** $x \vee (y \wedge z \wedge 1)$; **в)** $\bar{x} \wedge y$.

№ 9. $\oplus$, $\downarrow$, $|$, $\leftrightarrow$.

№ 10. а) $f_1 \in P_0$, $f_1 \in P_1$, $f_1 \notin S$, $f_1 \notin M$, $f_1 \notin L$; **б)** $f_2 \notin P_0$, $f_2 \in P_1$, $f_2 \notin S$, $f_2 \notin M$, $f_2 \notin L$; **в)** $f_3 \in P_0$, $f_3 \in P_1$, $f_3 \in S$, $f_3 \in M$, $f_3 \notin L$; **г)** $f_4 \notin P_0$, $f_4 \in P_1$, $f_4 \notin S$, $f_4 \notin M$, $f_4 \notin L$.

7. Логика предикатов

№ 1. а) $[3;+\infty)$; **б)** $(-\infty;2] \cup (8;+\infty)$; **в)** $(2;3)$; **г)** $(-\infty;8]$; **д)** $(2;+\infty)$; **е)** $(2;3) \cup (8;+\infty)$.

№ 2. а) $\{f, b, g, h, a, c, o, l, u\}$; **б)** $\{e, d, o, u, l, h, b, a\}$; **в)** $\{e, d, a, h, b\}$; **г)** $\{b,\ h,\ a\}$.

№ 3. а) $I_P = \left\{\begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y \le 2 - \dfrac{2}{3}x \end{matrix}\right\}$; **б)** $I_Q = \left\{\begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ \dfrac{x}{2} < y < \infty \end{matrix}\right\}$;

в) $I_{\overline{P}} = \left\{\begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ 2 - \dfrac{2}{3}x < y < \infty \end{matrix}\right\}$; **г)** $I_{\overline{Q}} = \left\{\begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \dfrac{x}{2} \end{matrix}\right\}$; **д)** $I_{P \wedge Q} = \left\{\begin{matrix} -\infty < x < \dfrac{12}{7} \\ \dfrac{x}{2} < y \le 2 - \dfrac{2}{3}x \end{matrix}\right\}$;

е) $I_{P \vee Q} = \left\{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{12}{7} < x < \infty,\ x < y \le \dfrac{x}{2}\right)\right\}$;

ж) $I_{P \to Q} = I_{\overline{P} \vee Q} = \left\{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \left(-\infty < y < \dfrac{6}{7},\ 2y < x < y\right)\right\}$;

з) $I_{P \leftrightarrow Q} = \left\{\left(\begin{matrix} -\infty < x < \dfrac{6}{7} \\ \dfrac{x}{2} < y \le 2 - \dfrac{2}{3}x \end{matrix}\right) \cup \left(\begin{matrix} \dfrac{6}{7} < x < \infty \\ 2 - \dfrac{2}{3}x < y \le \dfrac{x}{2} \end{matrix}\right)\right\}$.

№ 4. а) $\forall X\ \Lambda(X,X)$; **б)** $\exists X\,\forall Y\ \Lambda(X,Y)$; **в)** $\exists X\,\exists Y\ \overline{\Lambda(X,Y)}$;

г) $\forall X\,\exists Y\ \Lambda(X,Y)$; **д)** $\forall Y\,\exists X\ \Lambda(X,Y)$, **е)** $\forall X\,\forall Y\ \Lambda(X,Y)\to\Lambda(Y,X)$.

№ 5. а) $S(X,Y)=m(X)\wedge\big(F(Y,X)\vee M(Y,X)\big)$;

б) $D(X,Y)=f(X)\wedge\big(F(Y,X)\vee M(Y,X)\big)$;

в) $B(X,Y)=$

$=m(X)\wedge\Big(\exists Z\big(F(Z,X)\vee F(Z,Y)\big)\vee\exists T\big(M(T,X)\vee M(T,Y)\big)\Big)$;

г) $C(X,Y)=$

$=f(X)\wedge\Big(\exists Z\big(F(Z,X)\vee F(Z,Y)\big)\vee\exists T\big(M(T,X)\vee M(T,Y)\big)\Big)$

д) $L(X,Y)=f(X)\wedge f(Y)\wedge\exists Z\big(m(Z)\wedge W(Y,Z)\wedge M(X,Z)\big)$;

е) $N(X,Y)=f(X)\wedge\exists Z\big(B(Z,Y)\wedge F(Z,X)\vee C(Z,Y)\wedge M(Z,X)\big)$;

ж) $\forall X\forall Y\,B(X,Y)\wedge B(Y,X)$; **з)** $\forall X\exists Y\exists Z\,F(Y,X)\wedge M(Z,X)$;

и) $\exists X\forall Y\,\overline{H(X,Y)}\wedge\overline{W(X,Y)}$.

№ 6. а) $\forall Y\forall Z\exists X\Big(\overline{P(Z,Y)}\wedge Q(X,Y)\Big)$; **б)** $\exists Z\forall Y\forall X\exists V\Big(\overline{P(Z,Y)}\vee Q(X,V)\Big)$.

№ 7. $R(z)=\Big(\Big(\overline{P(a,a)}\wedge\overline{P(b,a)}\wedge\overline{P(c,a)}\Big)\vee\Big(\overline{P(a,b)}\wedge\overline{P(b,b)}\wedge\overline{P(c,b)}\Big)\vee$

$\vee\Big(\overline{P(a,c)}\wedge\overline{P(b,c)}\wedge\overline{P(c,c)}\Big)\Big)\wedge\overline{Q(x,z)}\vee\Big(\big(P(a,a)\vee P(b,a)\vee P(c,a)\big)\wedge$

$\wedge\big(P(a,b)\vee P(b,b)\vee P(c,b)\big)\wedge\big(P(a,c)\vee P(b,c)\vee P(c,c)\big)\Big)\wedge Q(x,z)$.

№ 8. б) и **в)**, **г)** и **д)**.

8. Конечные автоматы

№ 1. $\alpha_1\notin L(K)$, $\alpha_2\in L(K)$, $\alpha_3\in L(K)$, $\alpha_4\notin L(K)$, $\alpha_5\in L(K)$, $\alpha_6\notin L(K)$.

№ 2 . а) q_1; **б)** q_0; **в)** q_1; **г)** q_3.

№ 3. $L(M)=\{aa,ba,aba,bba,abb,bbb\}$.

№ 4. $g_K:\ q_0\,a\to q_1,\ q_0\,b\to q_0\ \ q_0\,c\to q_1,\ q_1\,a\to q_2,\ q_1\,b\to q_3\ \ q_1\,c\to q_2,$
$q_2\,a\to q_0,\quad q_2\,b\to q_0,\quad q_2\,c\to q_1,\quad q_3\,a\to q_0,\quad q_3\,b\to q_0\quad q_3\,c\to q_3;$
$g_M:\ q_0\,a\to q_1,\ q_0\,b\to q_1,\ q_1\,a\to q_3,\ q_1\,b\to q_2,\ q_2\,a\to q_3,\ q_2\,b\to q_3.$

№ 5.
$L(D)=\{a,ab,ba,bab,abaa,abba,abaab,abbab,ababa,abbba,babba,babbb\}$.

№ 6. a – сделать заказ с самовывозом, b – сделать заказ с доставкой, c – ехать в магазин, d – ехать в ресторан, e – ехать домой; $q_0\,a\to q_1$, $q_0\,b\to q_2$, $q_0\,c\to q_3$, $q_1\,d\to q_4$, $q_2\,d\to q_5$, $q_3\,d\to q_5$, $q_4\,d\to q_5$; $L=\{ade,be,ce\}$.

9. Теория алгоритмов

№ 1. $1\mathbf{X}2$, $2\to 3$, $3?4;5$, $4\mathbf{V}5$, $5!$.

№ 2. $1\to 2$, $2?3;1$, $3\mathbf{V}4$, $4\leftarrow 5$, $5\mathbf{X}6$, $6!$.

№ 3. $1\leftarrow 2$, $2\mathbf{V}3$, $3?4;5$, $4\leftarrow 6$, $5\to 3$, $6\mathbf{X}7$, $7?8;9$, $8\to 7$, $9\mathbf{X}10$, $10\to 11$, $11?15;12$, $12\leftarrow 13$, $13?14;6$, $14\leftarrow 12$, $15!$.

№ 4. $q_1 1\to q_1 1R$, $q_1 0\to q_2 1L$, $q_2 0\to q_2 1R$, $q_2 1\to q_3 1R$, $q_3 1\to q_3 1R$, $q_3 0\to q_0 0L$.

№ 5. $q_1 1\to q_1 0R$, $q_1 0\to q_1 1R$, $q_1 \_\to q_1 \_L$, $q_2 0\to q_2 0L$, $q_2 1\to q_2 1L$, $q_2 \_\to q_0 \_R$.

№ 6. $q_1 1\to q_2 \_R$, $q_1 2\to q_3 \_R$, $q_1 3\to q_4 \_R$, $q_2 1\to q_2 1R$, $q_2 2\to q_2 2R$, $q_2 3\to q_2 3R$, $q_2 \_\to q_0 1S$, $q_3 1\to q_3 1R$, $q_3 2\to q_3 2R$, $q_3 3\to q_3 3R$, $q_3 \_\to q_0 2S$, $q_4 1\to q_4 1R$, $q_4 2\to q_4 2R$, $q_4 3\to q_4 3R$, $q_4 \_\to q_0 3S$.

№ 7. $q_1 0\to q_1 0R$, $q_1 1\to q_2 0R$, $q_1 \_\to q_0 \_R$, $q_2 0\to q_2 0R$, $q_2 1\to q_2 1R$, $q_2 \_\to q_3 \_R$, $q_3 1\to q_3 1R$, $q_3 \_\to q_4 1S$, $q_4 1\to q_4 1L$, $q_4 \_\to q_5 \_L$, $q_5 0\to q_5 0L$, $q_5 1\to q_5 1L$, $q_5 \_\to q_6 \_R$, $q_6 0\to q_1 \_R$.

№ 8. а) $7n^2+4n+2=O\left(n^2\right)$; **б)** $7n-4=O(n)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данный сборник задач дает возможность обучающимся как самостоятельно, так и под руководством преподавателя приобрести знания, умения и навыки решения задач по дисциплинам «Дискретная математика» и «Математическая логика и теория алгоритмов», без освоения которых невозможно понимание сути работы современных компьютеров.

Знания, навыки и умения, приобретаемые обучающимися в результате изучения дисциплины «Дискретная математика» и «Математическая логика и теория алгоритмов», необходимы для дальнейшего формирования профессиональных компетенций при освоении таких специализированных дисциплин, как «Криптографические методы защиты информации», «Основы сетевых технологий», «Моделирование процессов и систем защиты информации», «Проектирование и техническое сопровождение компьютерных систем» и др.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дискретная математика : учеб. пособие / В. Л. Неклюдова, О. В. Григоренко, О. Г. Павловская, В. П. Вербная. – Новосибирск : СГУГиТ, 2020. – 109 с.

2. Неклюдова В. Л., Григоренко О. В. Дискретная математика : учеб.-метод. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2021. – 100 с.

3. Неклюдова В. Л., Вербная В. П. Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2022. – 70 с.

4. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов : учебник для вузов. – СПб. : Питер, 2009. – 384 с.

5. Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В. Дискретная математика : учебник. – Новосибирск : НГТУ, 2010. – 256 с.

Учебное издание

Неклюдова Вера Леонидовна
Вербная Валентина Павловна
Павловская Ольга Геннадьевна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор *Е. К. Деханова*

Компьютерная верстка *О. И. Голиков*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.
Подписано в печать 30.06.202. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 2,44. Тираж 115 экз. Заказ 118.
Гигиеническое заключение
№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.