

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

О. В. Григоренко, М. А. Петрова, М. С. Галлямова

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ОЦЕНКИ НЕДВИЖИМОСТИ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия для обучающихся по направлению подготовки
21.03.02 Землеустройство и кадастры (уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2022

УДК 51
Г831

Рецензенты: кандидат педагогических наук, доцент, СГУПС *Н. В. Миллер*
кандидат физико-математических наук, доцент, СГУГиТ
В. Л. Неклюдова

Григоренко, О. В.

Г831 Финансовая математика для оценки недвижимости : учебное пособие / О. В. Григоренко, М. А. Петрова, М. С. Галлямова. – Новосибирск : СГУГиТ, 2022. – 59 с. – Текст : непосредственный.
ISBN 978-5-907513-85-3

Учебное пособие подготовлено кандидатом физико-математических наук, доцентом О. В. Григоренко, кандидатом педагогических наук, доцентом М. А. Петровой и ассистентом М. С. Галлямовой на кафедре высшей математики СГУГиТ.

Учебное пособие по дисциплине «Финансовая математика для оценки недвижимости» предназначено для обучающихся по направлению подготовки 21.03.02. Землеустройство и кадастры (уровень бакалавриата).

Настоящее пособие состоит из разделов базового курса финансовой математики: теория процента, потоки платежей, рента, анализ инвестиционных процессов, методы оценки финансовых рисков, принятие решений.

Рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики, Ученым советом Института геодезии и менеджмента СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 51

ISBN 978-5-907513-85-3

© СГУГиТ, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Теория процента	6
1.1. Основные задачи и принципы финансовой математики	6
1.2. Движение денежных средств во времени	8
1.3. Простые и сложные проценты	10
1.4. Начисление процентов m раз в год	15
1.5. Математическое дисконтирование	18
1.6. Операции наращения с учетом инфляции	19
2. Потоки платежей	22
2.1. Виды потоков платежей и их параметры	22
2.2. Обыкновенный аннуитет (регулярная рента постнумерандо)	24
2.3. Периодические взносы на погашение кредита и в фонд накопления	26
2.4. Другие виды аннуитета	27
2.5. Кредитные расчеты и доходность кредитных операций	29
2.6. Льготные кредиты	32
3. Анализ инвестиционных процессов	34
3.1. Характеристики инвестиционных процессов	34
3.2. Аренда оборудования	39
3.3. Характеристики финансовых инструментов	42
4. Методы оценки финансовых рисков	46
4.1. Понятие риска	46
4.2. Оценка риска в условиях полной неопределенности	49
4.3. Оценка риска в условиях частичной неопределенности	51
4.4. Принятие решений	53
Заключение	57
Библиографический список	58

ВВЕДЕНИЕ

Понятие недвижимого имущества определяется Гражданским кодексом Российской Федерации и включает в себя «земельные участки, участки недр и все, что прочно связано с землей, то есть объекты, перемещение которых без несоразмерного ущерба их назначению невозможно, в том числе здания, сооружения, объекты незавершенного строительства» [2]. Важнейшей экономической характеристикой объекта недвижимости является его стоимость. В различных рыночных ситуациях, связанных с налогообложением, продажей, покупкой, обменом, наследованием, анализом эффективности использования, возникает потребность в определении стоимости недвижимого имущества для целей государства, собственника или иных заинтересованных лиц. Специалисты, проводящие оценку недвижимости, должны обладать знаниями, умениями и навыками в области финансовой математики, основ инвестиционного анализа, без которого невозможно развитие процесса инвестирования, занимающего важнейшее место во всей современной экономике.

В соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования бакалавры по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры должны обладать способностью принимать обоснованные экономические решения в различных областях профессиональной деятельности, в том числе связанной с определением стоимости недвижимости. Для обеспечения формирования универсальных и профессиональных компетенций будущих специалистов в области оценки недвижимости в учебный план образовательной программы по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры включена дисциплина «Финансовая математика для оценки недвижимости».

В рамках дисциплины «Финансовая математика для оценки недвижимости» изучаются основные понятия и методы математических расчетов, применяемых в различных операциях с финансовыми активами, в том числе с недвижимым имуществом, решаются задачи по определению результатов финансовых операций для каждой из участвующих в ней сторон,

выявления взаимосвязи параметров финансовой операции или сделки и их влияния на конечный результат, поиска параметров эквивалентного изменения условий сделки.

Настоящее учебное пособие соответствует рабочей программе дисциплины «Финансовая математика для оценки недвижимости» и содержит теоретический материал, необходимый для решения практических задач по анализу инвестиционных стратегий, расчету стоимости объектов недвижимости и основных экономических параметров, ее определяющих. В данном издании рассмотрены следующие вопросы: теория процента, формулы начисления простых и сложных процентов, анализ денежных потоков (платежей, рент), анализ инвестиционных процессов, методы оценки финансовых рисков, принятие решений в условиях экономической неопределенности.

Структура изложения, содержание теоретического материала и его иллюстрация в настоящем пособии на наглядных примерах обеспечивают формирование у обучающихся компетенции, выражающейся в способности принимать обоснованные экономические решения как при формировании личной финансовой стратегии, так и в профессиональной деятельности, связанной с оценкой стоимости объектов недвижимости.

1. ТЕОРИЯ ПРОЦЕНТА

1.1. Основные задачи и принципы финансовой математики

Финансовая математика – это раздел математики, изучающий основные понятия и методы, применяемые в расчетах эффективности операций с финансами. Объектом изучения финансовой математики являются различные кредитные или финансовые операции, которые проводятся при взаимном согласии участвующих сторон с условиями операции. Среди таких условий выделяются объем денежных средств, временные характеристики, ставки процента и некоторые другие дополнительные величины. Параметры этих условий образуют в рамках конкретной финансовой операции взаимосвязанную систему. Вариативность параметров этой системы обуславливает неоднозначность конечных результатов финансовых операций, а изменение числовой характеристики даже одного параметра в системе влияет на конечный финансовый результат соответствующей операции, что подтверждает актуальность изучения методов количественного анализа параметров финансовых операций.

Среди основных задач финансовой математики выделяются:

- 1) выявление зависимости между основными параметрами финансовой операции и ее конечным результатом;
- 2) расчет результатов финансовой операции, учитывая интересы всех участников сделки;
- 3) создание стратегии проведения финансовых операций, включая графики погашения задолженности;
- 4) вычисление числовых характеристик первоначальных условий операции для безубыточного равносильного изменения результатов [3].

При анализе долгосрочных финансовых операций необходимо учитывать изменение в различные промежутки времени стоимости денежной массы. Фактор времени оказывает влияние на конечный результат финансовой операции иногда даже сильнее, чем объем денежных сумм.

Первый принцип финансовой математики излагает суть операций финансирования, кредитования и инвестирования в предположении необходимости учета временного фактора, неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Две равные по абсолютной величине, но различные по времени денежные суммы имеют различную ценность, что объясняется как влиянием инфляции, так и способностью денег приносить их обладателю дополнительный доход.

Первый принцип подтверждает некорректность сравнения денежных объемов в различных временных моментах. Для корректного сравнения объемов денежных средств, приобретенных или затраченных в различные моменты времени, они приводятся к некоторой базовой дате (фиксированному моменту времени), что возможно с помощью наращения, если базовый момент времени фиксируется в будущем, или дисконтирования при ранней базовой дате.

Второй принцип финансовой математики – принцип финансовой равносильности, предполагающий эквивалентность (равносильность, равенство) финансовых обязательств всех сторон, участвующих в операции, что позволяет вносить изменения в условия контрактов, не нарушая договорных обязательств.

Общепринятым инструментом количественного анализа финансовых результатов инвестиций или кредитования является процент. Инвесторы приобретают активы различных видов с целью получения инвестиционного дохода, который выражается в процентах от объема вложенных инвестиций. Существует два способа получения инвестиционного дохода: от продажи акции компаний, облигаций или недвижимости по более высокой цене либо в виде рентных платежей, выплат по купонам или дивидендов. С целью получения дохода в виде процентных платежей за пользование своими денежными средствами кредитные организации выдают займы, предполагающие полное погашение кредита заемщиком. Конечным результатом финансовой деятельности кредиторов и инвесторов является получение дохода, или процента в качестве цели инвестиций или выдачи кредитов.

С необходимостью изучения условий получения заемных денежных средств сталкиваются не только физические лица, но и различные хозяйствующие субъекты. Для описания условий кредитования используется фи-

нансовый показатель, который называется процентной ставкой. При формировании личной финансовой стратегии большинство населения предпочитает разместить собственные денежные накопления на вкладе в банке и получать за это доход в виде процентных платежей по вкладу. Процентные ставки по депозитам и кредитам различаются не только численно, но и по методикам расчетов. Возможно применение постоянной процентной ставки на весь период действия договора либо возможно изменение ставки через заранее определенные промежутки времени.

Важнейшей функцией процентных выплат по банковским вкладам и кредитам является компенсация кредитным организациям или вкладчикам за потерю потенциальной полезности денег для приобретения товаров и услуг вместо инвестирования, потерю выгоды вследствие рисков.

1.2. Движение денежных средств во времени

Для сравнения денежных потоков между собой целесообразно перейти к одному временному значению независимо от того, что в разные временные промежутки их значимость может отличаться. На первый взгляд может показаться, что ценность денежных потоков напрямую зависит от инфляции, но такое мнение ошибочно. Различия в значимости в первую очередь определяются действиями объективных экономических законов. В экономических расчетах для учета инфляции таких изменяющихся денежных потоков применимы методы финансовой математики.

Капитализация и дисконтирование – это процессы изменения текущей и будущей стоимости. Процесс преобразования стоимости денежного потока от текущего к будущему значению называется капитализацией (наращением). Процесс преобразования стоимости денежного потока от будущего к текущему значению называется дисконтированием. К факторам, влияющим на изменение временной значимости денежного объема, можно отнести их текущую и будущую стоимость. Текущая стоимость, или сегодняшняя цена, дает гарантии на стоимость в определенное время в будущем. Будущая стоимость, или будущая цена, определяется стоимостью, взятой на сегодняшний день (текущей).

Для определения текущей стоимости необходимо дисконтировать каждый финансовый оборот на процент, который возможно было заработать,

при условии поступления платежей сегодня. В качестве примеров дисконтирования можно рассмотреть оценку акций по принципу использования модели дисконтирования дивидендов или оценку облигаций по средствам дисконтирования будущих купонных платежей [4].

Путем расчета текущей стоимости предполагаемых денежных потоков от этих активов можно оценить финансовые активы.

Для определения будущей стоимости необходимо увеличение процентных платежей, которые могут быть получены за эту сумму до определенного момента в будущем.

Путем умножения денежных потоков на коэффициент капитализации (дисконтирования) на текущий промежуток времени можно достичь капитализации (дисконтирования) этих потоков.

Два вида временной базы применимы для расчета простых процентов.

Временная база	
$K_1 = 365$ (366) дней	$K_2 = 360$ дней (12 месяцев по 30 дней)
⇓	⇓
точные проценты	обыкновенные проценты

Продолжительность операции в t днях может быть рассчитана точно или приближенно. Точный расчет предполагает подсчет дней строго по календарю. Приближенный расчет подразумевает, что все месяцы в году имеют одинаковую протяженность в 30 дней, в связи с чем расчет простых процентов на прямую зависит от выбора временной базы, метода расчета показателя t .

Возможны три случая:

- 1) германская методика (360/360) – обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды;
- 2) французская методика (360/365) – обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;
- 3) английская методика (365/365) – точные проценты с точным числом дней ссуды.

1.3. Простые и сложные проценты

Капиталом называются деньги, которые независимо от промежутка времени и различной стоимости в этот временной момент приносят доход.

От выбранного финансового инструмента зависит и тип процентной ставки, используемой в расчетах, который делится на две категории – простую и сложную.

Простые проценты. Повышение простых процентов по ставке r_s предполагает увеличение каждой последующей суммы на одну и ту же фиксированную величину $r_s \cdot PV$ – долю r_s от исходной суммы PV .

В банк под проценты $100r_s$ была положена исходная сумма PV . Тогда к концу первого промежутка начисления процентов сумма составит

$$FV_1 = PV + r_s PV = PV(1 + r_s).$$

К концу второго срока начисления эта сумма вырастет еще на величину $r_s \cdot PV$ и составит

$$FV_2 = FV_1 + r_s PV = PV + r_s PV + r_s PV = PV(1 + 2r_s).$$

Производя начисления указанным образом, к концу n -го периода начисления сумма составит

$$FV_n = FV_{n-1} + r_s PV = PV + \underbrace{r_s PV + r_s PV + \dots + r_s PV}_{n \text{ раз}} = PV(1 + nr_s).$$

Таким образом, для расчета по простой процентной ставке будущей стоимости применима формула (*наращения простых процентов*):

$$FV_n = PV(1 + r_s n),$$

где FV_n – будущая стоимость на конец n -го периода;

PV – первоначальная сумма;

n – количество периодов накоплений (число лет, в течение которых происходит накопление);

r_s – простая процентная ставка в долях единицы (s – simple – «простой»).

Последовательность наращенных сумм $FV_1, FV_2, FV_3, \dots, FV_n$ является арифметической прогрессией с начальным членом PV и разностью прогрессии $r_s PV$.

Формула наращивания простых процентов, полученная для целых положительных n , будет справедлива и для нецелых периодов времени.

Для расчета начисляемых депозитных процентов при условии простой процентной ставки следует найти произведение ставки в процентах на временной срок (или их соответствующих долей). Если депозит открыт на несколько лет, то процентная ставка умножается на количество лет, до срока окончания вклада. Например, в банк на депозит под 8 % годовых разместили 2 000 у. е. на срок 6 месяцев. Сумма начисляемых процентов по простой ставке: $0,08 \cdot 0,5 \cdot 2\,000 = 80$ у. е. Тогда сумма по окончании депозита составит: $2\,000 \cdot (1 + 0,08 \cdot 0,5) = 2\,080$ у. е.

Процентная ставка по вкладу r_s представляется как доля единицы, в данном случае 8 % – это $8/100 = 0,08$, то есть проценты необходимо представить в виде десятичной дроби.

Сложные проценты применимы, когда финансовый инструмент используется больше года. Соответственно, на определении сложных процентов основываются процессы капитализации и дисконтирования.

Сложные проценты. Наращивание сложных процентов осуществляется путем увеличения и основной суммы, и невыплаченных процентов, начисленных за прошедший период [5].

По процентной ставке r наращивание сложных процентов осуществляется посредством увеличения суммы на фиксированную величину $r \cdot FV_{n-1}$. То есть каждая последующая сумма FV_n больше на долю r предыдущей.

Если сумма PV положена в банк под r процентов, то при условии начисления процентов по схеме сложных процентов за первый период сумма составит

$$FV_1 = PV + rPV = PV(1 + r).$$

За второй период начисления сумма увеличится на $r \cdot FV_1$ и составит

$$FV_2 = FV_1 + rFV_1 = FV_1(1+r) = PV(1+r)(1+r) = PV(1+r)^2.$$

Производя начисления указанным образом, к концу n -го периода получится

$$FV_n = FV_{n-1}(1+r) = PV \underbrace{(1+r)(1+r)\dots(1+r)}_{n \text{ раз}} = PV(1+r)^n.$$

Таким образом, для расчета по сложной процентной ставке будущей стоимости применима формула (*формула наращивания сложных процентов*)

$$FV_n = PV(1+r)^n,$$

где FV_n – будущая стоимость на конец n -го периода;

PV – первоначальная сумма;

r – процентная ставка дохода в долях единицы;

n – количество периодов накоплений (число лет, в течение которых происходит накопление).

После n периодов коэффициент $k_n = (1+r)^n$ называется коэффициентом капитализации сложных процентов.

Последовательность наращивания суммы по средствам сложных процентов схожа с геометрической прогрессией, где PV – это первый член прогрессии, а $(1+r)$ – ее знаменатель. Тогда сама прогрессия имеет вид $FV_1, FV_2, FV_3, \dots, FV_n$.

В банке имеются различные виды вкладов, начисления осуществляются по простым и сложным процентам. В таблице представлены данные для сравнения, начисления вознаграждения по депозиту при условии 10 % годовых, на сумму 1 000 у. е. в течение трех лет. Из данных видно, что через три года сумма вклада составит 1 300 у. е. при условии начисления простых процентов и 1 331 у. е. при условии начисления сложных процентов.

Сравнительная стоимость денег во времени
при начислении простых и сложных процентов

Год	Вклад на начало года	Доход от вклада	Вклад на конец года	Вклад на начало года	Доход от вклада	Вклад на конец года
1-й	1 000	100	$1\,000 + 100 = 1\,100$	1 000	100	$1\,000 + 100 = 1\,100$
2-й	1 100	100	$1\,100 + 100 = 1\,200$	1 100	110	$1\,100 + 110 = 1\,210$
3-й	1 200	100	$1\,200 + 100 = 1\,300$	1 210	121	$1\,210 + 121 = 1\,331$
Итого			1 300			1 331
	$FV_n = PV(1 + r_s n)$, простые проценты			$FV_n = PV(1 + r)^n$, сложные проценты		

Из приведенных данных наглядно видно, что депозиты с процентами, начисляемыми по схеме сложных процентов, способствуют получению дохода не только от первоначальной суммы вклада, а также на ранее начисленные проценты. Такой процесс начисления процентов является отличительной характеристикой между простыми и сложными процентами. Однако процент не начисляется на снятые средства, а только на те, что находятся на данный момент на депозите.

Сравнивая коэффициенты капитализации (наращения), можно сделать вывод и о росте первоначальной суммы вклада по простым и сложным процентам, которые в свою очередь зависят от срока накопления при условии одинаковых процентных ставок.

Для ставок, срок накопления которых измеряется в годах, справедливы следующие утверждения:

- если $n < 1$, то сложные проценты будут меньше простых $(1 + r_s n) > (1 + r)^n$;
- если $n > 1$, то простые проценты будут меньше сложных $(1 + r_s n) < (1 + r)^n$;
- для $n = 1$ коэффициенты наращивания равны.

На период меньше года аналогичные соотношения также применимы. Пусть r – ставка за период, n – количество периодов начисления, тогда для ставки r за квартал начисления по схеме простых процентов будут больше, нежели по схеме сложных, при условии, что срок депозита меньше одного квартала.

Представим графически процесс роста первоначальной суммы по схеме простых и сложных процентов на рис. 1.

На оси абсцисс отложим срок начисления процентов, а на оси ординат – сумму первоначального вклада.

Из графика видно, что если срок начисления меньше года, то сложные проценты меньше простых. Для срока начисления один год доходы по двум видам процентов одинаковые. На срок больше года сложные проценты больше простых соответственно.

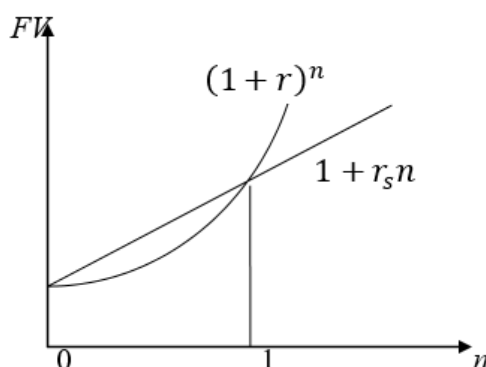


Рис. 1. Сравнение процесса роста по простым и сложным процентам

Проводя сравнительный анализ данных, представленных в таблице сравнительной стоимости денег во времени при начислении простых и сложных процентов, можно сделать вывод, что в случае накопления по схеме простых процентов рост вклада прямо пропорционален времени нахождения денег в банке. Тем не менее, если рассмотреть пример начисления процентов по схеме сложных процентов при условии, что депозит под 10 % годовых, сумма вклада через год будет эквивалентна 1,1, через два года 1,21, через 3 года 1,331 у. е. соответственно.

Для удобства начисления процентов и их расчетов часто используют мультиплицирующие и дисконтирующие множители.

Пусть n – временной срок вклада, r – ставка сложных годовых процентов. Тогда *мультиплицирующий множитель* указывает, во сколько раз увеличиться сумма вклада за время, нахождения ее в банке.

Мультиплицирующий множитель обозначается как $M(n, r)$ и равен коэффициенту капитализации:

$$M(n, r) = (1 + r)^n.$$

Будущая стоимость денежной массы при ставке r сложных процентов годовых через n промежутков начисления есть величина мультиплицирующего множителя.

Пусть n – временной срок вклада, r – ставка сложных годовых процентов. Тогда *дисконтирующий множитель* определяет долю, первоначальной суммы вклада, от наращенной суммы.

Дисконтирующий и мультиплицирующий множители обратно пропорциональные величины:

$$D(n, r) = \frac{1}{M(n, r)} = \frac{1}{(1 + r)^n} = (1 + r)^{-n}.$$

Текущая стоимость денежной массы при ставке r сложных процентов годовых через n промежутков начисления есть величина дисконтирующего множителя.

1.4. Начисление процентов m раз в год

Современные условия позволяют капитализировать проценты несколько раз в год (по кварталам, полугодиям и т. д.). Номинальная процентная ставка применяется для наращивания накоплений.

Номинальная ставка (j) – годовая ставка сложных процентов, позволяющая начислять доход m раз в год; тогда каждый прирост процентов составляет j / m , при этом $N = mn$ – общее количество периодов наращивания. Для расчета процентов по номинальной ставке будущую стоимость возможно вычислить по формуле

$$FV_N = PV \left(1 + \frac{j}{m} \right)^N,$$

где j – номинальная процентная ставка;

N – общее количество периодов начисления ($N = mn$);

m – количество раз начисления процентов в год.

Эквивалентная ставка – это ставка, дающая одинаковый доход в течение одного временного промежутка. Для двух ставок с равными множителями наращения можно получить соотношение эквивалентности, следовательно, для номинальной ставки возможно подобрать эквивалентную.

Эффективная ставка – это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и начисление процентов m раз в течение года по ставке j / m .

В финансовом отношении ставки номинальная и эффективная – эквивалентные, следовательно, в рамках одной операции они могут быть взаимозаменяемы. Соотношение эквивалентности для эффективной и номинальной ставки имеет следующий вид:

$$(1 + r)^n = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn}.$$

Отсюда по номинальной ставке определяется эквивалентная ей эффективная ставка следующим соотношением:

$$r = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m - 1,$$

и наоборот, по эффективной ставке вычисляется номинальная ставка при m -разовом начислении процентов в год по формуле

$$j = m \left(\sqrt[m]{1 + r} - 1 \right).$$

Если срок начисления процентов – число дробное, то его следует представить в виде смешанного числа, то есть представить в виде суммы целого

и дробного периода $n = n_1 + n_2$, где n_1 – количество целых периодов начисления; n_2 – дробная часть одного периода начисления.

Для случаев, когда период начисления представляет дробное число лет, применимы две схемы расчет накопленной суммы.

Схема сложного процента. Проценты начисления высчитываются по схеме сложных процентов за весь срок финансовой операции, а накопленная сумма рассчитывается по формуле

$$FV_n = PV \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{n_1 + n_2},$$

где r – сложная годовая процентная ставка;

m – количество раз начисления процентов в год.

Смешанная схема. Проценты начисления высчитываются по схеме сложных процентов за целое количество периодов, по схеме простых процентов – за дробную часть периода, а накопленная сумма рассчитывается по формуле

$$FV = PV \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{n_1} \left(1 + \frac{r}{m} n_2 \right).$$

Пусть номинальная процентная ставка равна j , при начислении процентов m раз в год при ставке $\frac{j}{m}$ эффективная годовая процентная ставка

составит $r = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m - 1$. Рассмотрим мультиплицирующий множитель

$M\left(m, \frac{j}{m}\right) = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m$. При более частом начислении процентов, то есть при

$m \rightarrow \infty$ получим $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m = e^j$.

Непрерывным наращиванием по ставке j называется увеличение исходной суммы в e^j раз за единичный промежуток начисления, а за t промежутков начисления сумма увеличится в e^{jt} .

Непрерывным дисконтированием называется операция, обратная непрерывному наращиванию, то есть уменьшение суммы в e^j раз за единичный промежуток начисления, а за t промежутков начисления сумма уменьшится в e^{jt} раз.

1.5. Математическое дисконтирование

Денежные суммы S_1, S_2 в момент времени t_1, t_2 соответственно называются эквивалентными по ставке сравнения r , если выполняются равенства $S_2 = S_1(1 + (t_2 - t_1) \cdot r)$ в случае простых процентов и $S_2 = S_1(1 + r)^{t_2 - t_1}$ в случае сложных процентов.

Если $t_2 > t_1$, то по ставке r наращиваемая сумма S_1 за промежуток времени t_2 перейдет в сумму S_2 . Такой процесс называется «движение денег в будущее».

Если $t_2 < t_1$, то по ставке r наращиваемая сумма S_2 за промежуток времени t_1 перейдет в сумму S_1 . Такой процесс называется «движение денег в прошлое».

Сумма уменьшается при движении «в прошлое» за каждый единичный промежуток в $(1 + r)$ раз и к моменту времени t_1 достигнет значения

$$S_1 = \frac{S_2}{(1 + (t_2 - t_1) \cdot r)} \text{ в случае простых процентов и } S_1 = \frac{S_2}{(1 + r)^{t_2 - t_1}} \text{ в случае}$$

сложных процентов.

Современная величина суммы предполагает перерасчет будущей суммы к настоящему моменту времени; тогда математическим дисконтированием называются формулы сравнения денежных сумм в любые моменты времени.

Операция *дисконтирование* предполагает расчет первоначальной денежной массы по заданной процентной ставке, полученной за время t , зная значение ее будущей стоимости.

В этом случае условие задачи звучит следующим образом: какую сумму необходимо положить на депозит с процентной ставкой r , чтобы в конце срока вклада получить сумму FV ?

Математическое дисконтирование по простым процентам. Данная формула основывается на формуле увеличения простых процентов $FV_n = PV(1 + r_s n)$ и имеет вид

$$PV = \frac{FV_n}{1 + r_s n},$$

где $\frac{1}{1 + r_s n}$ – *дисконтный множитель*, характеризующий отношение первоначальной суммы к конечной.

Математическое дисконтирование по сложным процентам. Такой процесс дисконтирования производится медленнее, так как процентная ставка применима к сумме, которая уже была дисконтирована на предшествующем этапе. Данная формула основывается на формуле увеличения сложных процентов $FV_n = PV(1 + r)^n$ и имеет вид

$$PV = \frac{FV_n}{(1 + r)^n},$$

где $\frac{1}{(1 + r)^n}$ – *дисконтный, учетный или дисконтирующий множитель* сложных процентов.

В случае если процент зачисляется в год m раз, формула математического дисконтирования будет иметь вид

$$PV = \frac{FV_N}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}}.$$

1.6. Операции наращивания с учетом инфляции

Процесс, основанный на повышении всеобщих цен в экономике за определенный промежуток времени t , называется *инфляцией*, то есть процессом увеличения средней цены на весь перечень товаров и услуг, отобранных в качестве инфляционной базы, а не на конкретно взятый объект.

Если один и тот же объект увеличился или уменьшился в цене за один год в $(1 + \alpha)$ раз, то говорят, что инфляция составила долю α в год или темп инфляции α в год. Также считается, что покупательная способность уменьшилась или увеличилась в $(1 + \alpha)$ раз.

Для расчета темпа инфляции за определенный период времени t применяют относительную величину уровня инфляции

$$\alpha = \frac{PV_{\alpha} - PV}{PV} \text{ или } \alpha = \frac{\Delta PV}{PV} \cdot 100\%,$$

где α – темп инфляции; PV_{α} – стоимость объекта через промежуток t , после инфляции; PV – первоначальная стоимость объекта, до инфляции; $\Delta PV = PV_{\alpha} - PV$ – сумма инфляционных денег.

Величина уровня инфляции также может быть рассчитана в процентах.

Стоимость объекта через промежуток t , после инфляции PV_{α} , или покупательская способность, рассчитывается следующим образом:

$$PV_{\alpha} = PV + \Delta PV = PV + PV \cdot \alpha = PV(1 + \alpha);$$

$$PV_{\alpha} = PV \cdot Ind,$$

где $Ind = (1 + \alpha)$ – индекс инфляции, указывающий, во сколько раз изменилась цена с учетом инфляции, то есть разницу между PV_{α} и PV .

Процесс инфляции при уровне α , или инфляционный прирост, аналогичен процессу начисления процентов по схеме сложных процентов

$$FV_{\alpha} = PV(1 + r)(1 + \alpha)$$

или

$$FV_{\alpha} = PV(1 + r_{\alpha}),$$

где r_{α} – процентная ставка с учетом инфляции.

Учитывая эквивалентность ставок, получается:

$$(1 + r_{\alpha}) = (1 + r)(1 + \alpha),$$

где

$$r_{\alpha} = r + \alpha + r\alpha,$$

или

$$r_{\alpha} = r + (\alpha + r\alpha) = r + \alpha(1 + r),$$

где $(\alpha + r\alpha)$ – сумма, которую следует добавить к текущей годовой ставке прибыли для компенсации инфляционных потерь.

Формула $r_{\alpha} = r + (\alpha + r\alpha) = r + \alpha(1 + r)$ в финансовых операциях носит название *формула Фишера*, а величина $(\alpha + r\alpha)$ – *инфляционная премия*.

2. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

2.1. Виды потоков платежей и их параметры

Поток платежей подразумевает ряд прибыли или выплат, возникающих в разные моменты времени. Следовательно, такой платеж может быть положительным, то есть входящим к инвестору. Как пример, прибыль от инвестиций. А также денежные потоки могут быть отрицательными, исходящие от инвестора. Как пример, выплаты по кредитной задолженности.

Денежные потоки можно подразделить на нерегулируемые и регулируемые. Платежи как положительные, так и отрицательные в различные промежутки времени, называются нерегулируемыми. Платежи с постоянным временным промежутком называются регулируемыми. Под *финансовой рентой*, или *аннуитетом*, подразумевается поток платежей с тождественными (равными) интервалами между платежами.

Основными характеристиками финансовой ренты являются: *член ренты* – объем единовременной выплаты; *процентная ставка* – сложная процентная ставка для вычисления текущей и будущей стоимости выплат; *период* – промежуток времени между последовательными выплатами; *срок* – временной промежуток от начала до окончания ее реализации.

Для потоков платежей можно выделить дополнительные характеристики. К ним относятся:

1) число выплат:

- *ограниченные ренты* включают в себя конечное число платежей;
- *бесконечные, или вечные, ренты* подразумевают срок выплат, не ограниченный датами;

2) начало начисления по ренте:

- *немедленные ренты*, ренты с выплатами, зачисляющимися с момента подписания договора;
- *отсроченные, или отложенные ренты*, ренты с выплатами, срок которых прописан в договоре;

3) количество выплат за год:

– *годовые ренты*, подразумевающие единовременную выплату один раз в год;

– *p-срочные ренты*, подразумевающие несколько выплат в год;

4) зачисление процентов:

– раз в год;

– *m* раз год;

– постоянно зачисляющиеся проценты;

5) срок выплат:

– в начале срока (*рента пренумерандо*);

– в середине срока;

– в конце срока (*обыкновенные ренты, или постнумерандо*);

6) сумма выплат:

– *постоянная рента* – с одинаковой суммой выплаты;

– *переменная рента* – с изменяющейся суммой выплаты.

7) возможность выплаты ренты:

– *верная рента*, подразумевающая безусловную выплату;

– *условная рента*, подразумевающая наступление форс-мажора.

Для потоков платежей выделяют пару обобщающих параметров.

Текущая (современная) стоимость потока платежей (PVA) – дисконтирование всех платежей в нулевой временной промежуток.

В большинстве случаев для начисления процентов используются сложные проценты.

Текущую стоимость можно вычислить, перемножив все выплаты на соответствующий дисконтированный множитель, что подразумевает дисконтирование всех платежей в нулевой временной промежуток.

Если стоимость текущей годовой ренты состоит из неравных выплат, то она рассчитывается по формуле

$$PVA = \frac{CF_1}{(1+r)^1} + \frac{CF_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{CF_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} + \frac{CF_n}{(1+r)^n},$$

где *PVA* – современная стоимость потока платежей;

CF_n – член ренты;

r – сложная годовая процентная ставка;

n – итоговый срок платежей.

Наращенная (будущая) стоимость потока платежей (FVA) – это общее число выплат, приведенных к этапу заключительного платежа, то есть с начисленными к ним процентами к концу срока.

Будущую стоимость можно вычислить, перемножив все выплаты на соответствующий множитель наращивания; для этого следует все выплаты привести к будущей дате.

Если стоимость будущей годовой ренты состоит из неравных выплат, то она рассчитывается по формуле

$$FVA = CF_1(1+r)^{n-1} + CF_2(1+r)^{n-2} + \dots + CF_{n-1}(1+r)^1 + CF_n.$$

2.2. Обыкновенный аннуитет (регулярная рента постнумерандо)

Обыкновенный аннуитет – это серия одинаково направленных, равнозначных выплат, которые происходят через равнозначные временные интервалы в конечный момент.

Обыкновенный аннуитет подразумевает, что все выплаты равнозначные, то есть между собой равны:

$$CF_1 = CF_2 = CF_3 = \dots = CF_{n-1} = CF_n.$$

С учетом этого текущая стоимость обыкновенного аннуитета PVA и будущая стоимость обыкновенного аннуитета FVA равны сумме членов соответствующей геометрической прогрессии

$$PVA = CF \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}; \quad FVA = CF \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Поток платежей называется *p -срочной рентой по процентной ставке j с начислением m раз в год*, если вычисление современной и наращенной стоимости осуществляется по процентной ставке $\frac{j}{m}$ при условии начисления процентов m раз в год. При этом выплаты возможно вносить равнозначными платежами несколько (p) раз в год.

При расчете p -срочной ренты необходимо разбить на p равнозначных частей годовую выплату, тогда каждый член ренты становится равным $\frac{CF}{p}$, при этом число интервалов наращения будет равно mn . Как следствие, изменяется и процентная ставка: вместо начисляемых r процентов начисление происходит по номинальной ставке $\frac{j}{m}$.

Из равенства соответствующих множителей наращения возможно рассчитать эффективную процентную ставку равносильной процентной ставке p -срочной ренты:

$$(1+r)^n = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Соответствие эквивалентности для подобных ставок можно вычислить с учетом замены количества лет на общее количество периодов платежей — np :

$$(1+r)^{np} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn},$$

откуда эффективная ставка:

$$r = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1.$$

Если $p \neq m$, то современная стоимость p -срочной ренты PVA и наращенная стоимость p -срочной ренты FVA вычисляются по формулам:

$$PVA = \frac{CF}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1};$$

$$FVA = \frac{CF}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1}.$$

2.3. Периодические взносы на погашение кредита и в фонд накопления

Если известна сумма предоставленного кредита, иначе говоря, тело кредита, количество взносов и ставка дохода, то можно рассчитать значение аннуитета, то есть платежа, используя формулу для современной стоимости обыкновенного аннуитета PVA , откуда выражается величина периодической годовой выплаты на погашение кредита

$$CF = \frac{PVA}{1 - (1 + r)^{-n}} r,$$

где PVA – сумма предоставленного кредита;

CF – периодическая годовая выплата;

n – число выплат.

Периодическая годовая выплата на погашение кредита вычисляется на основании формулы для современной (текущей) стоимости p -срочной ренты, если выплаты производятся более одного раза в год:

$$PVA = \frac{CF}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1},$$

откуда выражается величина периодического взноса по кредиту

$$\frac{CF}{p} = \frac{PVA}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}} \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right),$$

где p – количество взносов в год.

Если стоит задача накопления необходимой стоимости при определенной процентной ставке и заданном сроке накопления (при этом необходимо найти величину периодического взноса), то используется формула для наращенной стоимости обыкновенного аннуитета FVA , откуда выражается величина годового взноса в фонд накопления

$$CF = \frac{FVA}{(1+r)^n - 1} \cdot r,$$

где FVA – будущая стоимость потока платежей; CF – периодический годовой взнос в фонд накопления; n – число выплат.

Если взнос в фонд накопления осуществляется несколько раз в год, то для расчета величины периодической выплаты используется формула для наращенной (будущей) стоимости p -срочной ренты

$$FVA = \frac{CF}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1},$$

откуда выражается величина периодического взноса в фонд накопления

$$\frac{CF}{p} = \frac{FVA}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1} \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right),$$

где p – количество взносов в год.

2.4. Другие виды аннуитета

На практике используются и другие виды платежных потоков.

Рента пренумерандо – это рента, в которой выплаты осуществляются в начале платежного периода. По сравнению с рентой постнумерандо, в данной ренте каждый ее член задействован на один период больше.

Характеристики ренты пренумерандо рассчитываются по следующим формулам:

– текущая стоимость ренты пренумерандо

$$PVA' = PVA(1 + r),$$

$$PVA' = PVA \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{m/p},$$

где PVA' – текущая стоимость ренты с выплатами в начале периода;

PVA – текущая стоимость обыкновенного аннуитета;

– будущая стоимость ренты пренумерандо

$$FVA' = FVA(1 + r),$$

$$FVA' = FVA \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{m/p},$$

где FVA' – будущая стоимость ренты с выплатами в начале периода; FVA

– будущая стоимость обыкновенного аннуитета.

Отложенная рента – это рента со сдвинутым платежным моментом в отношении некоторого временного периода.

Современную стоимость отложенной ренты на t лет можно рассчитать, дисконтировав текущую стоимость немедленной ренты на заданный срок:

$$PVA_t = PVA \frac{1}{(1 + r)^t},$$

где PVA_t – текущая стоимость отложенной ренты; PVA – текущая стоимость обыкновенного аннуитета.

Для расчета будущей стоимости ренты, отложенной на t лет, возможно применять формулы для расчета обыкновенного аннуитета, так как для данной ренты сдвиг не влияет:

$$FVA_t = CF \frac{(1+r)^n - 1}{r};$$

$$FVA_t = \frac{CF}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1},$$

где FVA_t – будущая стоимость отложенной ренты.

Бесконечный аннуитет (вечная рента) – ряд неограниченных по количеству выплат, например, облигации с бессрочным погашением: при таких условиях доход начисляется через одинаковые моменты времени, а возврата основной суммы долга нет.

Для бесконечного аннуитета имеют место следующие формулы:

– современная стоимость вечной ренты:

$$PVA_{\infty} = \frac{CF}{r};$$

$$PVA_{\infty} = \frac{CF}{p \left(\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1 \right)};$$

– будущая стоимость бесконечной ренты равна бесконечности:

$$FVA_{\infty} = \infty.$$

2.5. Кредитные расчеты и доходность кредитных операций

Кредит – это предоставление денег или товаров в долг на условиях возвратности и, как правило, с уплатой процентов. Лицо, предоставляющее деньги или товары в долг, называется кредитор. Лицо, берущее кредит – дебитор или заемщик.

Сумма займа называется основным долгом, а наращиваемый добавок к сумме называется процентными деньгами. Для погашения кредитного долга выделяют различные способы.

1. Погашение *кредита единовременным платежом в конце срока займа*. Пусть выдан кредит D под r процентов годовых на n лет. Следовательно, проценты будут начисляться по схеме сложных процентов и на конец срока займа сумма увеличится до суммы $D_n = D(1+r)^n$.

2. Погашение *основного долга единовременным платежом в конце срока займа*. Пусть выдан кредит D под r процентов годовых на n лет. Тогда за первый год пользования кредитом сумма процентов составит rD . Следовательно, выплачиваются ежегодно процентные деньги, величина rD и только в конце срока выплачивается основной долг D и процентные деньги за последний год $D + rD$.

3. Погашение *основного долга равными годовыми выплатами*. Пусть выдан кредит D под r процентов годовых на n лет. Следовательно, ежегодная выплата одна и та же, фиксированная часть основного долга и проценты, начисленные на остаток суммы. Таким образом, сумма к выплате в конце первого года пользования кредитом составит часть основного долга $\frac{D}{n}$ и проценты со всей суммы долга, которой пользовались в течении года, то есть

$$D_1 = \frac{D}{n} + rD.$$

Сумма к выплате в конце второго года пользования кредитом составит

$$D_2 = \frac{D}{n} + r\left(D - \frac{D}{n}\right) = \frac{D}{n} + rD\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Сумма к выплате в конце k -го года пользования кредитом составит

$$D_k = \frac{D}{n} + r\left(D - \frac{D(k-1)}{n}\right) = \frac{D}{n} + rD\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Сумма к выплате в конце n -го года пользования кредитом составит

$$D_n = \frac{D}{n} + r\left(D - \frac{D(n-1)}{n}\right) = \frac{D}{n} + r\frac{D}{n}.$$

4. Погашение займа *равными годовыми выплатами*. Пусть выдан кредит D под r процентов годовых на n лет. Следовательно, ежегодно выплачивается фиксированная сумма. Платежи по кредиту образуют конечную годовую ренту с единичным платежом y , длительностью n лет и процентной ставкой r .

Из формулы для современной (текущей) стоимости обыкновенного аннуитета PVA , учитывая, что современная стоимость этой ренты PVA равна величине основного долга D , получается уравнение для определения еди-

ничного платежа $D = y \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$, откуда размер единичного платежа

$$y = \frac{Dr}{1 - (1 + r)^{-n}}.$$

5. Погашение займа *равными годовыми выплатами несколько раз в год*.

Пусть выплаты размером y производятся m раз в год, всего выплат за весь период mn , на эти выплаты начисляются проценты по ставке $\frac{r}{m}$. Выплаты

образуют ренту, современная стоимость которой равна величине основного долга D , следовательно, уравнение для определения единичного платежа

имеет вид $D = y \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mn}}{\frac{r}{m}}$, откуда размер единичного платежа

$$y = \frac{D \cdot \frac{r}{m}}{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mn}}.$$

Чтобы погасить кредит, у заемщика есть возможность создать фонд погашения, накапливая в нем средства для погашения кредита единовременным конечным платежом. Это целесообразно, если процентные ставки на деньги фонда погашения выше, чем кредитная ставка. Пусть кредит D выдан на n лет под r процентов годовых, тогда к концу n -го года его вели-

чина вырастет до значения $D(1+r)^n$. Платежи в погасительный фонд образуют ренту с годовым платежом R и годовой процентной ставкой $g > r$.

Наращенная величина такой ренты $S = R \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{g}$. Приравняв ее к наращенной величине долга, получим уравнение для определения единичного платежа в погасительный фонд $R \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{g} = D(1+r)^n$, откуда получается $R = \frac{Dg(1+r)^n}{(1+g)^n - 1}$.

2.6. Льготные кредиты

Льготным называется кредит с более низкой процентной ставкой. Иначе говоря, заемщик получает субсидию, расчет которой сводится к разнице соответствующих современных сумм. Пусть кредит D выдан на n лет по льготной ставке g меньше обычной ставки r и будет погашаться равными годовыми выплатами. Эти выплаты образуют конечную годовую ренту, современная стоимость которой равна телу кредита, откуда по формуле для современной (текущей) стоимости обыкновенного аннуитета определяется величина единичного платежа по льготному кредиту

$$y = \frac{Dg}{1 - (1+g)^{-n}}.$$

Каждая выплата за кредит по обыкновенной ставке r составляет

$$z = \frac{Dr}{1 - (1+r)^{-n}}.$$

Разность

$$z - y = \frac{Dr}{1 - (1+r)^{-n}} - \frac{Dg}{1 - (1+g)^{-n}}$$

называется *ежегодными потерями кредитора*.

Ежегодные потери также образуют ренту, современная стоимость которой по обычной ставке r является субсидией, предоставляемой кредитором заемщику, величина которой вычисляется по формуле

$$C = PVA = (z - y) \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} = \left(\frac{Dr}{1 - (1 + r)^{-n}} - \frac{Dg}{1 - (1 + g)^{-n}} \right) \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r};$$

$$C = D \left(1 - \frac{g(1 - (1 + r)^{-n})}{r(1 - (1 + g)^{-n})} \right).$$

Субсидия C называется *абсолютным грант-элементом*, а множитель $\left(1 - \frac{g(1 - (1 + r)^{-n})}{r(1 - (1 + g)^{-n})} \right)$ – *относительным грант-элементом*.

Наращенная сумма абсолютного грант-элемента или субсидии называется *общими потерями кредитора* (ОПК):

$$\text{ОПК} = D \left(1 - \frac{g(1 - (1 + r)^{-n})}{r(1 - (1 + g)^{-n})} \right) (1 + r)^n.$$

В связи с возникшими обстоятельствами взятый кредит может быть заменен другим кредитом при условии, что текущие значения потоков платежей по этим кредитам равны. Чтобы заменить его, находят текущее значение арендной платы за платежи по кредиту и рассчитывают новый ежегодный платеж или период погашения кредита на основе текущего значения.

Чтобы объединить кредиты, сначала находят текущие значения остатков по кредитам, складывают их, получают текущее значение ссудной ассоциации, в соответствии с которым выбираются параметры нового кредита.

3. АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Характеристики инвестиционных процессов

Потоки платежей, в которых инвестиции отрицательны, а доходы положительны, – это *инвестиционные процессы*.

Будем обозначать инвестиционный процесс $\{(R_k, t_k)\}$. R_k – платеж, t_k – момент осуществления этого платежа. Положительный знак платежа – это доход, отрицательным знаком обозначают инвестиции. Рассматриваемые платежи производятся на границе лет (годов), номер года (лет) принимает все положительные числа и нуль. При наличии последнего платежа процесс называется конечным, в ином случае – бесконечным.

Сумма всех платежей дисконтированных к моменту времени $T = 0$ называется *приведенной чистой стоимостью (доходом проекта)* по действующей ставке процента r . Обозначается NPV :

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}}.$$

Алгебраическая сумма всех платежей по ставке r , дисконтированных к моменту времени t_n последнего платежа для конечного процесса, называется *наращенной чистой стоимостью (доходом)*. Обозначается NFV :

$$NFV = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+r)^{t_k - t_n}}.$$

Правило взаимодействия приведенной чистой стоимости (дохода) проекта (NPV) и наращенной чистой стоимости (дохода) проекта (NFV):

$$NFV = NPV(1+r)^n.$$

Таким образом, если $NPV > 0$, то процесс считается окупающимся.

Опишем процессы, у которых отрицательные платежи – инвестиции производятся в момент времени $T = 0$, положительные платежи являются доходами.

Референцией таких процессов является *внутренняя доходность*, обозначаемая через q – наименьшее положительное число, где сумма всех платежей по ставке q дисконтированных к моменту времени $T = 0$ равна нулю, то есть

$$\sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+q)^{t_k}} = 0.$$

Внутренняя норма доходности говорит о предельном уровне ставки процента, при котором взятые по этой ставке инвестиции окупаются доходами процесса, взятыми по этой же ставке. При ставке $r \leq q$ процесс является окупающимся.

Пример. Пусть в начале года в проект вложены инвестиции $INV = 3\,000$, а затем в течение четырех лет получены доходы $R_1 = 1\,500$, $R_2 = 1\,100$, $R_3 = 1\,100$, $R_4 = 900$. Процентная ставка 8 % сложных годовых.

В таблице представлены параметры инвестиционного процесса в каждый момент времени.

Моменты времени	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
Проценты		–3 240	–1 879,2	–841,54	279,14
Инвестиции + доходы	–3 000	1 500	1 100	1 100	900
Сумма	–3 000	–1 740	–779,2	258,46	1 179,14

На период начала третьего года платеж отрицательный, в конце – положительный. Три года – срок окупаемости проекта. К концу четвертого года наращенная величина чистой прибыли в банке становится положительной. Рассчитаем величину приведенного чистого дохода проекта. С этой целью дисконтируем ее к моменту времени $T = 0$ по ставке 8 %, так

образом $NPV = \frac{1179,14}{(1+0,08)^4} = 866,7$.

Вычисляем рентабельность проекта (доходность). Соотнесем приведенный чистый доход проекта с абсолютной величиной инвестиций

$$\ddot{A} = \frac{866,7}{3\,000} = 0,288\,9 (28,89\%).$$

Расчет характеристик конечного проекта с начальными инвестициями и постоянными доходами.

Первый шаг: допустим, необходимо вложить в проект некоторую сумму INV , в течение года на протяжении некоторого периода времени n (лет) проект приносит доход, равный R . Ставка процента составляет r .

Второй шаг: констатируем, что поток доходов – это конечная годовая рента с годовым платежом R длительностью n лет. Вычисляем современную стоимость:

$$A = R \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}.$$

Третий шаг: приведенный чистый доход проекта

$$NPV = INV + A.$$

Четвертый шаг: доходность

$$d = \frac{NPV}{|INV|}.$$

Пятый шаг: пусть s – срок окупаемости проекта, тем самым $s = \min(i)$, где i характеризуется неравенством:

$$INV + R \frac{1 - (1 + r)^{-i}}{r} \geq 0,$$

$$\frac{1 - (1 + r)^{-i}}{r} \geq -\frac{INV}{R},$$

$$1 - (1 + r)^{-i} \geq -\frac{INV \cdot r}{R},$$

$$(1+r)^{-i} \leq \frac{INV \cdot r}{R} + 1,$$

$$\ln(1+r)^{-i} \leq \ln\left(\frac{INV \cdot r}{R} + 1\right),$$

$$-i \ln(1+r) \leq \ln\left(\frac{INV \cdot r}{R} + 1\right),$$

$$i \geq -\frac{\ln\left(\frac{INV \cdot r}{R} + 1\right)}{\ln(1+r)}.$$

Внутренняя доходность проекта удовлетворяет уравнению $INV + A = 0$. Если уравнение имеет несколько корней, то выбираем наименьший. Если $-INV \geq nR$, то уравнение решений не имеет.

Проведя анализ формулы современной величины потока доходов $A = R \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$, делается вывод: величина $A \rightarrow 0$ при возрастающем значении r . Таким образом, если процентная ставка будет увеличиваться, то приведенный чистый доход проекта

$$NPV = INV + R \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$

уменьшается, тем самым снижается и доходность процесса, а период окупаемости увеличивается. В силу того что внутренняя доходность процесса определяется размером инвестиций и потоком доходов, она не зависит от ставки процента. Итог: при меньшей ставке процента проект окупается, а при большей не окупается.

Пример. Рассматривается инвестиционный процесс, где $INV = -10\,000$, $R = 2\,000$, $n = 10$.

В таблице представлены характеристики инвестиционного процесса с учетом возможности различных процентных ставок.

Ставка процента r , %	6	8	10	12	14	16
NPV	4 720	3 420	2 289	1 300	432	–334
Срок окупаемости s	7	7	8	9	10	Не окупается
Доходность d	0,47	0,34	0,22	0,13	0,04	–0,03

Бесконечный проект с начальными инвестициями: расчет характеристик.

Пусть необходимо вложить в проект сумму INV , а затем бесконечный период времени проект будет приносить доход R в год. Если ставка процента r , то поток доходов – бесконечная рента, годовой платеж которой R , современная стоимость:

$$A = \frac{R}{r}.$$

Формулы характеристики бесконечного проекта с начальными инвестициями:

– приведенный чистый доход проекта $NPV = INV + \frac{R}{r}$;

– доходность проекта $d = \frac{NPV}{|INV|}$;

– внутренняя доходность проекта $q = \frac{R}{|INV|}$.

Пример. За шесть месяцев на строительство некоторого объекта было затрачено 20 000 у. е., в процессе его эксплуатации неограниченно долго объект давал доход 3 000 у. е. в год. Вычислите характеристики данного инвестиционного процесса, если процентная ставка 8 % годовых.

Инвестиционный процесс бесконечен. Начальные инвестиции $INV = 2\,000$, годовой доход $R = 3\,000$, процентная ставка $r = 0,08$. Приве-

денный чистый доход проекта $NPV = -20\,000 + \frac{3\,000}{0,08} = 17\,500$, доходность

$d = \frac{17\,500}{2\,000} = 0,875$, внутренняя доходность $q = \frac{3\,000}{20\,000} = 0,15$. Таким обра-

зом, если процентная ставка больше чем 15 %, проект не окупается.

Конечный проект: определение объема инвестиций.

Пусть срок окупаемости проекта и время разработки инвестиционного проекта совпадают. Проект должен обеспечить заданный годовой доход. Рассчитайте необходимый объем начальных инвестиций. Полученный будущий доход должен полностью покрывать вложенные в проект инвестиции, другими словами, $|INV| = R \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$. Доходность проекта $d = 0$, внутренняя доходность $q = r$ в силу того, что срок окупаемости конгруэнтен с периодом времени разработки инвестиционного проекта.

Расчет годового дохода проекта при заданной внутренней доходности.

Цель: разработать инвестиционный проект.

Зафиксирована необходимая величина инвестиций INV , длительность проекта n .

Задача: обеспечить большую доходность j вложения инвестиций, чем общепринятая ставка процента r . Определить минимальный ежегодный доход R .

В силу того, что ежегодный доход R должен удовлетворять уравнению

$$|INV| = R \cdot \frac{1 - (1 + j)^{-n}}{j}, \text{ получается}$$

$$R = \frac{|INV| \cdot j}{1 - (1 + j)^{-n}}.$$

3.2. Аренда оборудования

Форма имущественного договора, при которой собственность передается во временное владение и пользование (или только во временное пользование) арендатору за арендную плату другому собственнику (далее аренда оборудования), – это иной вид инвестиционного процесса. Основная цель собственника – обеспечить нужный уровень эффективности сдачи оборудования в аренду; арендатора – определить, что выгоднее: купить оборудование или арендовать.

Пусть оборудование стоимостью P сдается в аренду на n лет. Остаточная стоимость к концу срока аренды составит K . Таким образом, собственник теряет $P - \frac{K}{(1+j)^n}$, где $\frac{1}{(1+j)^n}$ – коэффициент дисконтирования, приведения суммы K к началу аренды. Величина j может быть отождествлена с доходностью от сдачи оборудования в аренду для собственника. Арендатору придется возместить потери владельцу оборудования. Таким образом, современная величина потока арендных платежей по ставке j должна быть не меньше $P - \frac{K}{(1+j)^n}$, поэтому размер разового годового арендного платежа R определим из неравенства

$$R \frac{1 - (1+j)^{-n}}{j} \geq P - \frac{K}{(1+j)^n},$$

$$R \geq \frac{(P(1+j)^n - K)j}{(1+j)^n - 1}.$$

Рассмотрим случай, когда оборудование стоимостью P сдается в аренду на n лет. Норма амортизации в год данного типа оборудования равна h , тогда остаточная стоимость оборудования по истечению n лет $K = P(1 - nh)$. Отсюда можно определить при необходимости норму амортизации $h = \frac{P - K}{nP}$ или первоначальную стоимость оборудования $P = \frac{K}{1 - nh}$.

Предположим, что R – арендный годовой платеж, тогда норма доходности от сдачи оборудования в аренду определяется по формуле

$$R \frac{1 - (1+j)^{-n}}{j} = P - \frac{K}{(1+j)^n}.$$

Величина арендного платежа определяется подстановкой в это уравнение значения K :

$$R = \frac{Pj}{1 - (1+j)^{-n}} \left(1 - \frac{1-nh}{(1+j)^n} \right).$$

Норма амортизации h должна быть меньше норматива доходности j . Гипотетически разность $j - h$ может быть одной из характеристик эффективности сделки.

Современная величина ренты арендных платежей при годовой процентной ставке r равна $A = R \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$, если выполняется условие годового арендного платежа, он равен R . При этом современная величина потерь, связанных с покупкой оборудования, равна $P - \frac{K}{(1+r)^n}$.

Вывод: если

$$R \frac{1 - (1+j)^{-n}}{j} < P - \frac{K}{(1+j)^n},$$

то выгоднее арендовать оборудование, чем покупать.

Аренда недвижимости – это то же самое, что и аренда оборудования. Сопоставим между собой современные величины затрат на покупку недвижимости и его аренду.

Для того чтобы определить, что выгоднее, покупка или аренда недвижимости, необходимо учитывать следующие характеристики: цену жилой недвижимости и ее динамику; фактор времени; условия ипотечного кредитования; динамику уровня инфляции.

Пример. Арендная плата за дом составляет 13 000 у. е. в год, этот же дом можно купить за 170 000 у. е. Процентная ставка по депозитам находится на уровне 10 % годовых. Что выгоднее: аренда или покупка дома?

Решение. В случае аренды дома в течение всей жизни (пока арендуется дом) придется выплачивать арендную плату, дисконтированная ценность которой составит 130 000 (13 000/0,1).

А так как 130 000 < 170 000, то при данной процентной ставке выгоднее снимать дом в аренду, чем покупать его.

3.3. Характеристики финансовых инструментов

Финансовый инструмент – это любой документ, который может участвовать в финансовых операциях: акции, облигации, депозитные сертификаты, векселя и т. д.

По виду источника финансирования средства субъектов бизнеса подразделяются на собственные, заемные, привлеченные и государственные. Помимо кредитных заемных средств возможен и облигационный заем, или облигации, выпускаемые эмитентом для заимствования денежных средств. В качестве эмитента могут выступать государство, муниципалитет, корпорации, финансовые или коммерческие учреждения.

Облигации обычно дают менее высокий, но более надежный и стабильный доход, чем дивиденды по акциям, в силу отсутствия зависимости от колебаний конъюнктуры. Инвестиции в облигации предпочитают начинающие инвесторы, а также пенсионные фонды, страховые компании, паевые инвестиционные фонды.

Облигации – это ценные бумаги, свидетельствующие о предоставлении их обладателем эмитенту заем на фиксированный, обычно длительный срок, и обеспечивающие их обладателю оговоренный доход [1]. Облигации обладают номинальной стоимостью, другими словами, имеют номинал N , который присваивается облигации в момент ее эмиссии. С течением времени цена облигации может меняться, но обычно говорят об отношении цены к номиналу, а не о цене облигации P . Это отношение, выраженное в процентах, называют курсом облигации $K = \frac{P}{N} \cdot 100 \%$.

Часто облигации имеют купон, который характеризуется купонной ставкой q , что дает владельцу купонный доход, равный доле q от номинала.

Например, если $q = 0,1$, или 10 % от номинала, а $N = 1\,000$ у. е., то разовый купонный доход равен 100 у. е.

Купонный доход может выплачиваться различными способами: периодически или только один раз, например, при погашении облигации. Купонный доход рассматривается как текущий.

Часто облигации имеют установленный период действия, после чего они могут быть погашены, то есть владелец получает их номинальную стоимость.

Курс и доходность облигации без погашения с периодической выплатой купонных процентов.

Доход от такой облигации получают только в виде купонных процентов.

Пусть ставка купона – это q , ставка процента – r , номинал облигации – N .

Тогда купонные выплаты qN образуют вечную ренту, современная величина которой $P = \frac{qN}{r}$ является теоретической ценой облигации P . Следовательно,

$K = \frac{q}{r} \cdot 100\%$ – курс облигации. Если выплата купонных денег

происходит m раз в год, то $K = \frac{q}{m \left((1+r)^{1/m} - 1 \right)} \cdot 100\%$.

Допустим, K – курс облигации, купонные выплаты производятся раз в год, за год облигация приносит доход qN , в нее вложено P , таким образом, доходность облигации равна

$$j = \frac{qN}{P}.$$

Курс и доходность бескупонной облигации с погашением по номиналу.

Дельта между номиналом N при погашении и ценой P облигации характеризует доход от такой облигации. Если облигация куплена до погашения за m лет, то, дисконтируя платеж N по ставке процента r к настоящему моменту времени, вычисляется теоретическая цена облигации

$$P = \frac{N}{(1+r)^m} \text{ и курс облигации } K = \frac{1}{(1+r)^m} \cdot 100\%.$$

Если известна цена P , наращиваемая по ставке доходности j , то через m лет она станет равной номиналу облигации. Получается уравнение

$$P(1+j)^m = N \text{ или } \frac{KN(1+j)^m}{100} = N, \text{ отсюда доходность облигации}$$

$$j = \left(\frac{100}{K} \right)^{1/m} - 1.$$

Курс и доходность бескупонной облигации с выплатой процентов при погашении.

Проценты выплачиваются в конце срока одновременно с погашением по такой облигации и начисляются с капитализацией по сложной купонной ставке q . Так как текущих выплат нет, то текущая доходность нулевая.

Пусть q – ставка купона, r – ставка процента, облигация будет погашена через n лет после выпуска. Таким образом, при погашении владельцу будет выплачена сумма $N(1+q)^n$.

Пусть облигация куплена за m лет до погашения. Дисконтируя к этому моменту сумму $N(1+q)^n$ по ставке процента r , получается теоретическая

$$\text{цена облигации } P = \frac{N(1+q)^n}{(1+r)^m} \text{ и курс облигации } K = \frac{100(1+q)^n}{(1+r)^m}.$$

Если известна цена P , наращиваемая по ставке доходности j , то через m лет цена должна вырасти до величины $N(1+q)^n$, то есть $P(1+j)^m = N(1+q)^n$, откуда $(1+j)^m = \frac{N}{P}(1+q)^n$. Так как $\frac{N}{P} = \frac{100}{K}$, получим $(1+j)^m = \frac{100}{K}(1+q)^n$, то доходность облигации

$$j = \left(\frac{100}{K} \right)^{1/m} \cdot (1+q)^{n/m} - 1.$$

Курс и доходность облигации с периодической выплатой процентов и погашением.

Суммарный доход такой облигации складывается из регулярных купонных выплат, роста курса, что дает доход при продаже или погашении облигации. Купонные выплаты формируют текущую доходность.

Пусть q – ставка купона, r – ставка процента. Если облигация куплена за m лет до погашения, то будущие купонные доходы Nq есть годовая

рента, а ее современная стоимость $A = Nq \frac{1-(1+r)^{-m}}{r}$. К этой сумме добав-

ляется современная величина номинала погашения $N(1+r)^{-m}$ и получается теоретическая цена облигации в настоящий момент времени

$$P = N(1+r)^{-m} + Nq \frac{1-(1+r)^{-m}}{r},$$

откуда курс облигации:

$$K = 100 \left((1+r)^{-m} + q \frac{1-(1+r)^{-m}}{r} \right).$$

Для определения доходности j такой облигации дисконтируется номинал облигации N и купонные платежи по неизвестной пока ставке процента j и приравнивается к цене облигации P .

$$N(1+j)^{-m} + qN \frac{1-(1+j)^{-m}}{j} = P;$$

$$(1+j)^{-m} + q \frac{1-(1+j)^{-m}}{j} = \frac{P}{N};$$

$$(1+j)^{-m} + q \frac{1-(1+j)^{-m}}{j} = \frac{K}{100}.$$

Подобрав значение доходности j , полученное уравнение можно будет решить приближенно.

4. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ РИСКОВ

4.1. Понятие риска

В экономических задачах часто приходится принимать решение в условиях, когда субъект, принимающий решение, имеет недостаточно информации об объективных условиях происходящего, при этом отсутствует сознательное целенаправленное противодействие противника. Причины таких условий неопределенности экономической ситуации обуславливаются изменением покупательского спроса на товары или услуги, увеличением или уменьшением объема поставок, уровнем инфляции, конъюнктурой рынка, ситуацией на фондовых биржах, политикой государства, налоговой политикой, надежностью партнеров, сбоями в работе технического оборудования, курсами валют, экологической обстановкой, стихийными бедствиями и т. д.

Математическая модель задач, в которых выбор и экономическое обоснование эффективности решения зависит от состояния объективной реальности, называется играми с природой.

В играх с природой только один игрок A принимает осознанные решения и действует в сложившейся ситуации. Вторым неактивным игроком является объективная реальность или природа Π , которая не преследует конкретной цели и безразлична к результату игры, поэтому активно не противодействует игроку A , а случайным образом входит в одно из своих возможных состояний.

Предполагается, что природа Π может находиться в одном из n возможных состояний $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n\}$, по сути являющихся стратегиями природы, игрок A обладает m -возможными стратегиями $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$.

При формировании совокупности стратегий природы $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n\}$ используется метод статистического анализа имеющегося опыта состояний природы или метод экспертных оценок, основанный на предположениях и интуиции экспертов. Сумма дохода, полученного игроком A при выбранной им стратегии A_i в состоянии природы Π_j , обозначается через a_{ij} и заносится в матрицу последствий игры для игрока A .

$A_i \setminus \Pi_j$	Π_1	Π_2	$\dots$	Π_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Недостаточность информации о возможных состояниях природы, то есть наличие неопределенности, осложняет выбор игроком A чистой или смешанной стратегии в игре с природой.

Выбирая нужную стратегию в игре с природой, игрок A анализирует матрицу последствий и учитывает не только размеры доходов, которые являются элементами матрицы игры, но и показатели удачности или неудачности выбора конкретной стратегии при фиксированном состоянии природы и предпочтение отдает состоянию, увеличивающему доход от игры.

Наибольший доход игрока A при фиксированном состоянии Π_j природы Π , то есть наибольший элемент в j -м столбце матрицы последствий игры

$$\beta_j = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$$

называется *показателем благоприятности состояния природы* Π_j для увеличения дохода игрока A .

Так как в игре с природой игроку A приходится принимать решение, когда ему неизвестно состояние природы, в котором она находится, то для характеристики уровня удачности применения игроком A стратегии A_i при Π_j состоянии природы Π используется понятие риска.

Риском r_{ij} игрока A при выборе им стратегии A_i называется разность между показателем благоприятности β_j состояния природы Π_j и доходом от игры a_{ij}

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}.$$

Для того чтобы оценить риск применения стратегии A_i в состоянии природы Π_j , нужно из потенциального дохода от игры, который игрок A мог бы получить, если бы владел информацией о том, что природа примет состояние Π_j , вычесть доход, который он реально получит при этом же состоянии природы Π_j , выбирая стратегию A_i при отсутствии априорной информации о природном состоянии.

Сутью риска r_{ij} игрока A при применении стратегии A_i в состоянии природы Π_j является упущенная возможность максимального дохода от игры β_j в фиксированном природном состоянии Π_j . Риск игрока A есть величина неотрицательная $r_{ij} \geq 0$.

Пусть ω_j – наименьший возможный доход игрока A в фиксированном природном состоянии Π_j , то есть $\omega_j = \min_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$. Тогда разность $\beta_j - \omega_j$ называется *колебанием доходов* игрока A в фиксированном природном состоянии Π_j . Таким образом устанавливается верхняя граница рисков для каждого состояния природы Π_j , так как $r_{ij} \leq \beta_j - \omega_j$.

Стратегия A_i игрока A в фиксированном природном состоянии Π_j является стратегией с нулевым риском, если $a_{ij} = \beta_j$ и $r_{ij} = 0$.

Стратегия A_i игрока A в фиксированном природном состоянии Π_j является наихудшей с максимальным риском, если $a_{ij} = \omega_j$.

Если все доходы игрока A в фиксированном природном состоянии Π_j одинаковы, то есть в j -м столбце матрицы последствий игры все элементы равны между собой, то $\omega_j = a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{mj} = \beta_j$ и риск $r_{ij} = 0$. В этом случае любая стратегия игрока A в фиксированном природном состоянии Π_j является стратегией с нулевым риском.

Используя матрицу последствий игры, составляется матрица рисков игры R , имеющая с матрицей игры одинаковую размерность.

$A_i \setminus \Pi_j$	Π_1	Π_2	...	Π_n
A_1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	...	r_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	r_{m1}	r_{m2}	...	r_{mn}

4.2. Оценка риска в условиях полной неопределенности

Известна матрица последствий игры с природой, в которой субъект, принимающий решение – игрок A , – имеет m возможных вариантов поведения (стратегий) $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, а природа Π находится в одном из n возможных состояний $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n\}$, которые рассматриваются как ее стратегии.

$A_i \setminus \Pi_j$	Π_1	Π_2		Π_n
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
.....				
A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

Так как субъект, принимающий решение, не имеет априорной информации о том, какое именно состояние примет природа, и отсутствует всякая возможность получения какой-либо информации о состояниях природы, то такая игра называется игрой в ситуации полной неопределенности. Существуют различные критерии поведения игрока A в условиях полной неопределенности.

Критерий крайнего пессимизма (критерий Вальда). Анализируя собственную стратегию A_i , игрок A предполагает, что он находится в наихудших условиях, то есть в ситуации, приносящей наименьший доход. Поэтому, анализируя каждую стратегию, игрок выбирает ситуации, приносящие минимальный доход $\alpha_i = \min_j a_{ij}$, затем находится наибольший из минимально возможных выигрышей, то есть

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right).$$

Стратегия игрока A , отвечающая доходу α , является оптимальной по критерию Вальда.

Критерий Вальда является критерием крайнего пессимизма, так как нацеливает игрока A на самое неблагоприятное природное состояние, следовательно, на крайне осторожное, осмотрительное поведение при выборе стратегий. Этот критерий уместно применять в случаях, когда игрок A не столько хочет получить доход, сколько хочет сохранить.

Критерий крайнего оптимизма (максимаксный критерий). Максимумный критерий является антагонистом критерию Вальда. В этом случае, рассматривая каждую свою стратегию A_i , игрок A предполагает, что складывается наилучшая ситуация, то есть ситуация, приносящая максимальный доход $\alpha_i = \max_j a_{ij}$, затем из максимально возможных доходов выбирается максимальный, то есть находится

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \left(\max_j a_{ij} \right).$$

Стратегия игрока A , соответствующая значению α , считается оптимальной по критерию максимаксной стратегии.

Максимаксный критерий является критерием крайнего оптимизма, так как нацеливает игрока A на самое благоприятное для него природное состояние и, как следствие, на неоправданно легкомысленное поведение при выборе стратегий. Однако в некоторых ситуациях этот критерий используют осознанно, например, когда перед игроком A стоит выбор либо получить максимальный доход, либо обанкротиться.

Критерий Сэвиджа. Критерий Сэвиджа относится к критериям крайнего пессимизма, но применяется к матрице рисков. Применяя критерий Сэвиджа, игрок A при анализе стратегии A_i предполагает, что складывается ситуация, приносящая максимальный риск; таким образом, сначала внутри каждой стратегии выбираются значения, приносящие максималь-

ный риск $b_i = \max_j r_{ij}$, потом из всех максимально возможных рисков выбирается минимальный

$$b = \min_i \left(\max_j r_{ij} \right).$$

Стратегия игрока A , соответствующая значению b , считается оптимальной по критерию Сэвиджа.

Критерий Гурвица. Критерий Гурвица является промежуточным между критерием крайнего оптимизма и критерием крайнего пессимизма. Критерий Гурвица рекомендует принимать решение, соответствующее показателю эффективности

$$G(\lambda) = \max_i \left[(1 - \lambda) \min_j a_{ij} + \lambda \max_j a_{ij} \right].$$

При $\lambda = 0$ из критерия Гурвица получается критерий Вальда, при $\lambda = 1$ получается максимаксный критерий. Критерий Гурвица позволяет взвешивать пессимистический и оптимистический подходы с показателем оптимизма λ .

4.3. Оценка риска в условиях частичной неопределенности

Предполагается, что в игре с природой имеется информация о возможности принятия природой того или иного состояния. Пусть p_j – вероятность того, что природа примет состояние Π_j , такое предположение называется частичной неопределенностью. Матрица последствий игры изменяет вид.

$A_i \setminus \Pi_j$	Π_1	Π_2	...	Π_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

p_j	p_1	p_2	$\dots$	p_n
-------	-------	-------	---------	-------

Очевидно, что $\sum_{j=1}^n p_j = 1$. Для принятия решения в условиях частичной

неопределенности можно использовать следующие правила.

Критерий Байеса относительно выигрышей. Рассматривается случайная величина Q_i – выигрыш, получаемый игроком A при принятии i -го решения, имеющая ряд распределения.

a_{ij}	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{in}
p_j	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Математическое ожидание $M(Q_i) = \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot p_j)$ и есть средний ожидае-

мый выигрыш при принятии i -го решения. Правило Байеса относительно выигрышей рекомендует использовать стратегию, приносящую максимальный средний выигрыш, то есть стратегия должна соответствовать значению

$$\bar{Q} = \max_i [M(Q_i)].$$

Критерий Байеса относительно рисков. При использовании критерия Байеса относительно рисков используется матрица рисков.

Дискретная случайная величина R_i – риск, получаемый при принятии i -го решения игроком A , имеет ряд распределения:

r_{ij}	r_{i1}	r_{i2}	$\dots$	r_{in}
p_j	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Математическое ожидание $M(R_i) = \sum_{j=1}^n (r_{ij} \cdot p_j)$ по сути является сред-

ним ожидаемым риском при принятии i -го решения. Критерий Байеса относительно рисков предполагает следование стратегии, приносящей минимальный средний риск, то есть стратегии, соответствующей значению

$$\bar{R} = \min_i [M(R_i)].$$

4.4. Принятие решений

Пример. Рассматривается классическая схема оценки финансовых операций в условиях неопределенности. Субъект, принимающий решения, – игрок A , имеет m различных стратегий, при этом рынок может находиться в одном из n состояний с различными последствиями для игрока A . Известна матрица последствий игры:

$$Q = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 12 & 12 \\ 17 & 11 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 13 & 13 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы Q соответствуют четырем различным состояниям финансового рынка, строки матрицы Q соответствуют четырем различным стратегиям игрока A .

1. Найти матрицу рисков R .
2. Определить выбор стратегии по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица при $\lambda = 0,5$.
3. Если известны вероятности состояний рынка $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,2$; $p_4 = 0,1$, определить оптимальную стратегию по критерию максимизации среднего ожидаемого дохода и минимизации среднего ожидаемого риска.

Для того чтобы записать матрицу рисков, анализируются столбцы матрицы последствий. Если рынок находится в первом состоянии, то по первому столбцу матрицы последствий получается, что доход игрока A в зависимости от выбранной им стратегии поведения может составить 14 (при первой), 5 (при второй), 17 (при третьей) или 6 (при четвертой). Элементами первого столбца матрицы рисков являются значения недобора до максимально возможного дохода $\beta_1 = 17$, соответственно 3, 12, 0 и 11 у. е. Аналогично анализируются остальные столбцы. Заметим, что матрица по-

следствий может иметь отрицательные элементы (убытки), при этом матрица рисков всегда неотрицательна и в каждом столбце имеется хотя бы один 0.

$$\text{Матрица рисков имеет вид } R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 10 & 7 \\ 12 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \\ 11 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если оценка финансовых операций происходит в условиях полной неопределенности рынка, то выбор оптимальной стратегии происходит с учетом характера субъекта, принимающего решения, решительности или нерешительности игрока A . Если он является крайним пессимистом, то применяет критерий Вальда. В предположении о наихудшем состоянии для каждой из стратегии находятся числа $\alpha_i = \min_j a_{ij}$, из этих чисел выбирается

максимальное $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$ и принимается соответствующее

решение. В нашем примере при анализе строк получается набор минимальных чисел 3; 5; 4; 6, из них выбирается наибольшее $\alpha = 6$, которое стоит в четвертой строке. Значит, по критерию Вальда оптимальным является четвертая стратегия игрока A .

Если субъект, принимающий решения, характеризуется крайним оптимизмом, то при выборе стратегии он использует принцип максимакса, по которому сравниваются элементы матрицы последствий, выбирается наибольший доход и принимается соответствующее решение. Игрок A , обладающий крайним оптимизмом, выберет третью стратегию, так как третьей строке соответствует наибольший доход 17.

В процессе принятия решений можно использовать матрицу рисков. Критерий Сэвиджа заключается в том, что для каждой стратегии в соответствующей строке матрицы рисков находится максимальный риск и выбирается наименьшее из этих чисел:

$$b_i = \min_i \left(\max_j r_{ij} \right).$$

Наибольшими рисками в соответствующих строках матрицы являются числа 10; 12; 9 и 11. Наименьшее из них – число 9 – соответствует третьему решению, которое принимает игрок A по критерию Сэвиджа.

При использовании критерия Гурвица решение принимается по вычисленному показателю $G(\lambda)$, совмещающему пессимистичный и оптимистичный подходы:

$$G(\lambda) = \max_i \left[(1-\lambda) \min_j a_{ij} + \lambda \max_j a_{ij} \right].$$

Параметр $0 \leq \lambda \leq 1$, при этом оптимистичному подходу соответствует $\lambda = 0$, пессимистичному – $\lambda = 1$. По условию $\lambda = 0,5$, поэтому выбирается наибольшее из чисел 8,5; 8,5; 10,5 и 9,5 и принимается третье решение, соответствующее числу 10,5.

Если оценка финансовых операций происходит в условиях частичной неопределенности, то известны вероятности состояний финансового рынка, то есть такие ситуации на рынке возникали и прежде, поэтому имеется предыдущий опыт. Доходы и риск, получающиеся при выборе одного из возможных решений, являются дискретными случайными величинами. По матрице последствий Q вычисляется наибольший средний ожидаемый доход как максимум математического ожидания случайной величины, по матрице R вычисляется наименьший средний ожидаемый риск как минимум математического ожидания случайной величины.

Учитывая известные вероятности состояний рынка $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,2$; $p_4 = 0,1$ и матрицу последствий Q , вычисляются математические ожидания дискретных случайных величин:

$$M(Q_1) = 14 \cdot 0,4 + 11 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,1 = 10,1;$$

$$M(Q_2) = 5 \cdot 0,4 + 7 \cdot 0,3 + 12 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0,1 = 7,7;$$

$$M(Q_3) = 17 \cdot 0,4 + 11 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 = 11,4;$$

$$M(Q_4) = 6 \cdot 0,4 + 7 \cdot 0,3 + 13 \cdot 0,2 + 13 \cdot 0,1 = 8,4.$$

Наибольшее среднее значение дохода 11,4 соответствует третьему решению, которое и будет принято игроком A по критерию Гурвица.

Средние ожидаемые риски вычисляются для соответствующих строк матрицы рисков:

$$M(R_1) = 3 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,1 = 3,9;$$

$$M(R_2) = 12 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 = 6,3;$$

$$M(R_3) = 0 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,1 = 2,6;$$

$$M(R_4) = 11 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 = 5,6.$$

Наименьший средний риск 2,6 соответствует третьему решению, которое и будет принято игроком A по критерию Гурвица.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем учебном пособии изложены основные понятия из разделов базового курса финансовой математики, такие как простые и сложные проценты, математическое дисконтирование, виды потоков платежей, виды аннуитетов, доходность кредитных операций, характеристики инвестиционных процессов, аренда оборудования, оценка финансовых рисков. Расчетные формулы, представленные в пособии, сопровождаются пояснениями и примерами, что дает возможность обучающимся как самостоятельно, так и под руководством преподавателя приобрести знания, умения и навыки решения задач финансовой математики, используемые в процессе дальнейшего обучения, а также в профессиональной деятельности, связанной с определением стоимости объектов недвижимости.

Теория изменения стоимости капитала в различные моменты времени является основополагающим математическим инструментом, обуславливающим содержание всех методов оценки стоимости имущества, в том числе недвижимости. В этом процессе деньги рассматриваются не как платежное средство, а как источник дохода, капитал, способный обеспечивать приобретение и преобразование недвижимости.

Навыки и умения, приобретаемые обучающимися в результате изучения дисциплины «Финансовая математика для оценки недвижимости» необходимы для дальнейшего формирования профессиональных компетенций бакалавров по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры при освоении таких специальных дисциплин, как «Кадастровая оценка земель населенных пунктов», «Оценка недвижимости», «Имущественный менеджмент».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Брусов П. Н., Филатова Т. В., Орехова Н. П. Справочник по финансовой математике : учеб. пособие. – М. : ИНФРА-М, 2019. – 239 с.
2. Гражданский кодекс Российской Федерации (часть первая) от 30.11.1994 № 51-ФЗ (ред. от 25.02.2022) [Электронный ресурс]. – Доступ из справ.-правовой системы «КонсультантПлюс».
3. Копнова Е. Д. Основы финансовой математики : учеб. пособие. – М. : Синергия, 2012. – 231 с. – (Университетская сер.).
4. Мелкумов Я. С. Экономическая оценка имущества и инвестиция : учеб. пособие. – М. : ИМПЭ, 1997. – 136 с.
5. Чуйко А. С., Шершнев В. Г. Финансовая математика : учеб. пособие. – М. : ИНФРА-М, 2020. – 160 с.

Учебное издание

Григоренко Ольга Викторовна

Петрова Марина Анатольевна

Галлямова Марина Сергеевна

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ОЦЕНКИ НЕДВИЖИМОСТИ

Редактор *О. В. Георгиевская*

Компьютерная верстка *О. И. Голиков*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 20.12.2022. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 3,42. Тираж 80 экз. Заказ 217.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.