

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

А. Г. Барлиани, Е. М. Крылова

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия для обучающихся
по направлению подготовки
09.04.02 Информационные системы и технологии (уровень магистратуры)

Новосибирск
СГУГиТ
2023

УДК 519.86 (075.8)

Б253

Рецензенты: кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН
А. В. Логачёв

кандидат физико-математических наук, доцент, СГУГиТ
О. В. Григоренко

Барлиани, А. Г.

Б253 Экономико-математические модели управления : учебно-методическое пособие / А. Г. Барлиани, Е. М. Крылова. – Новосибирск : СГУГиТ, 2023. – 93 с. – Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-907711-21-1

Учебно-методическое пособие подготовлено кандидатами технических наук, доцентами А. Г. Барлиани и Е. М. Крыловой на кафедре прикладной информатики и информационных систем Сибирского государственного университета геосистем и технологий.

Настоящее пособие по дисциплине «Экономико-математические модели управления» состоит из разделов: «Основные понятия математического моделирования социально-экономических систем», «Оптимальные экономико-математические модели», «Модель межотраслевого баланса Леонтьева», «Модели прогнозирования экономических процессов». В каждом разделе приведены примеры, раскрывающие смысл основных понятий.

Предназначено для обучающихся по направлению подготовки 09.04.02 Информационные системы и технологии (уровень магистратуры).

Рекомендовано к изданию кафедрой прикладной информатики и информационных систем, Ученым советом Института геодезии и менеджмента СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 519.86 (075.8)

ISBN 978-5-907711-21-1

© СГУГиТ, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Основные понятия математического моделирования соци- ально-экономических систем	6
1.1. Социально-экономические системы, методы их исследования и моделирования	6
1.2. Этапы экономико-математического моделирования	8
1.3. Классификация экономико-математических моделей	9
1.4. Производственные множества и их свойства	11
1.5. «Кривая» производственных возможностей и вмененные из- держки	13
1.6. Корреляционно-регрессионный анализ	14
1.7. Производственные функции и их свойства	16
1.8. Производственная функция Кобба – Дугласа	17
1.9. Теория фирмы	18
1.10. Типовые примеры и задачи для самостоятельного решения	19
2. Оптимальные экономико-математические модели	28
2.1. Основы математического программирования	28
2.2. Экономико-математическая модель оптимизации производ- ственной программы предприятия	29
2.3. Модель определения производственной мощности промыш- ленного предприятия	31
2.4. Модель оптимизации рецептуры смеси	31
2.5. Модель оптимизации раскроя материалов	32
2.6. Модель оперативно-календарного планирования производства на предприятии	34
2.7. Модели управления запасами	35
2.8. Основы динамического программирования	36
2.9. Оптимальное распределение инвестиций	40
2.10. Типовые примеры и задачи для самостоятельного решения	41
3. Модель межотраслевого баланса Леонтьева	55
3.1. Описание модели межотраслевого баланса	55
3.2. Продуктивность модели Леонтьева	56

3.3. Прямые и полные затраты в модели Леонтьева	57
3.4. Цены в системе межотраслевых связей	57
3.5. Простейшая модель экспорта-импорта модели Леонтьева	58
3.6. Матричная модель на уровне предприятий	59
3.7. Типовые примеры и задачи для самостоятельного решения	61
4. Модели прогнозирования экономических процессов	70
4.1. Понятие экономических рядов динамики.....	70
4.2. Тренд-сезонные экономические процессы и их анализ.....	71
4.3. Трендовые модели на основе кривых роста	72
4.4. Оценка адекватности и точности трендовых моделей	74
4.5. Прогнозирование экономической динамики на основе трендо- вых моделей.....	75
4.6. Типовые примеры и задачи для самостоятельного решения	75
Заключение.....	90
Библиографический список	91

ВВЕДЕНИЕ

Пособие посвящено экономико-математическим моделям управления, которые широко применяют при решении прикладных задач и обосновании эффективности управленческих решений. Умение моделировать процессы и системы в различных предметных областях является неотъемлемой частью подготовки будущего специалиста в сфере информационных систем и технологий.

Содержание пособия соответствует содержанию рабочей программы дисциплины «Экономико-математические модели управления» направления подготовки 09.04.02 Информационные системы и технологии (уровень магистратуры) и состоит из четырех разделов. В конце каждого раздела приведены задачи, решение которых способствует практическому освоению дисциплины, каждый тип задач снабжен примером решения.

Структура изложения и содержание материала обеспечивают формирование у обучающихся общепрофессиональных компетенций, выражающихся способностью самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, социально-научные и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте; разрабатывать и применять математические модели процессов и объектов при решении задач анализа и синтеза распределенных информационных систем и систем поддержки принятия решений.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1. Социально-экономические системы, методы их исследования и моделирования

Под *системой* понимают нечто целое, единое, состоящее из взаимосвязанных частей – *элементов системы*. Социально-экономическими назовем системы, присущие социально-экономическим явлениям и процессам.

При изучении явлений, процессов и систем (в том числе социально-экономических) проводят теоретические и эмпирические исследования. К эмпирическим методам исследования относят наблюдение, сравнение, измерение, эксперимент; к теоретическим – абстрагирование, анализ и синтез, индукцию и дедукцию и др.

Моделирование – это метод изучения объектов на их заменителях – *моделях*, которые в достаточной мере воспроизводят интересующие исследователя свойства изучаемых объектов, называемых также *объектами-оригиналами*. Моделирование довольно часто сочетает в себе элементы как теоретических, так и эмпирических методов исследования.

Математическая модель – это система математических объектов (функций, уравнений, неравенств, матриц и других), описывающих реальный объект, присущие ему характеристики и взаимосвязи.

Математическим моделированием называют процесс построения математической модели, ее исследования и / или решения, интерпретации полученных результатов.

В процессе моделирования задействованы: субъект исследования (исследователь), объект исследования (объект-оригинал) и модель (объект-заменитель), которая служит связующим звеном между познающим субъектом и познаваемым объектом.

Схема, представленная на рис. 1, демонстрирует, что процесс моделирования состоит из четырех шагов.

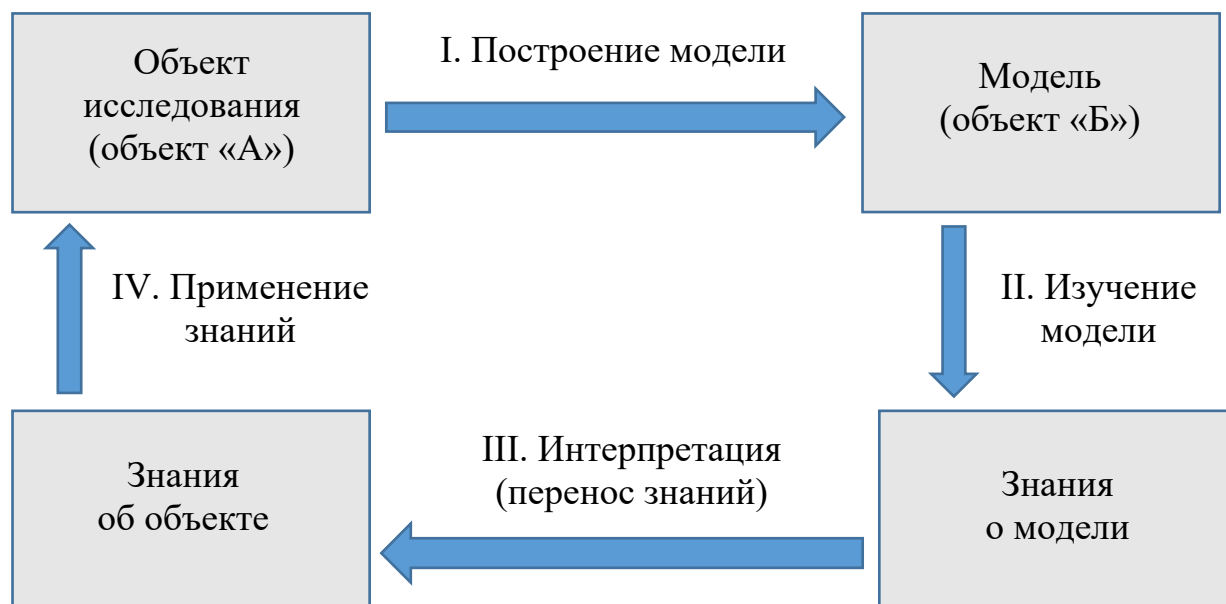


Рис. 1. Процесс моделирования

Исследователь некоторого объекта «А» материально или мысленно создает в реальном мире другой объект «Б» – модель объекта «А».

Первый шаг, построение модели – переход от объекта «А» к объекту «Б» – предполагает наличие некоторых начальных сведений об объекте-оригинале. Существенные свойства объекта-оригинала должны быть отражены в модели после того, как решен вопрос о необходимой и достаточной степени сходства модели с оригиналом.

На втором шаге происходит изучение модели как самостоятельного объекта «Б», в результате чего исследователь получает знания о модели, которые относятся только к модели и не касаются объекта-оригинала.

Третий шаг, интерпретация полученных знаний, представляет собой перенос знаний с модели на оригинал, тем самым появляются знания об объекте «А».

На четвертом шаге знания, полученные об объекте «А», проверяются на практике, используются для принятия решений, управления или изменения объекта «А».

Моделирование – циклический процесс, в котором после первого четырехшагового цикла может следовать второй, третий и так далее, что позволяет модели развиваться и совершенствоваться, приводит к более глубо-

кому пониманию природы объекта исследования и принятию оптимальных решений.

Следует отметить, что любое решение, полученное с помощью математической модели, может быть оптимальным по одному или нескольким критериям, установленным постановщиком задачи либо исследователем.

1.2. Этапы экономико-математического моделирования

Экономико-математическое моделирование можно представить несколько шире, чем на рис. 1, если перечислить этапы моделирования.

1. Постановка экономической проблемы и ее качественный анализ.

На этом этапе формулируют суть проблемы; учитывают предпосылки и допущения; выделяют основные характеристики и свойства моделируемого объекта, изучают его структуру и взаимосвязь элементов; формулируют гипотезы, объясняющие поведение и развитие объекта.

2. Построение математической модели.

Данный этап необходим для формализации экономической проблемы, которую записывают, используя математические объекты: функции, уравнения, неравенства, матрицы и др. Прежде всего определяют тип экономико-математической модели, рассматривают возможности ее применения для решения поставленной экономической проблемы, уточняют количество переменных и параметров, формы связей.

3. Математический анализ модели.

Речь идет об этапе, на котором математическими методами исследования выявляют общие свойства модели и ее решений: доказывают существование решения сформулированной задачи, аналитически выясняют, единственно ли решение, какие переменные могут в него входить, в каких пределах они изменяются, каковы тенденции их изменения и т. д. При моделировании сложных экономических объектов совместно с аналитическим исследованием могут быть применены численные и имитационные методы.

4. Подготовка исходной информации.

В экономических задачах данный этап моделирования, как правило, наиболее трудоемкий (поскольку недостаточно просто собрать данные); математическое моделирование предъявляет жесткие требования к инфор-

мации. Необходимо учитывать не только принципиальную возможность подготовки информации требуемого качества, но и затраты на подготовку информационных массивов. В процессе подготовки информации применяют методы теории вероятностей, теоретической и математической статистики для организации выборочных обследований, оценки достоверности данных и т. д.

5. Численное решение.

Этот этап включает разработку алгоритмов численного решения задачи и непосредственное проведение расчетов. Многочисленные модельные эксперименты, изучение поведения модели при различных условиях можно проводить благодаря высокому быстродействию современной вычислительной техники. Численное решение существенно дополняет результаты аналитического исследования, а для многих моделей является единственно возможным.

6. Анализ численных результатов и их применение.

Этап определения правильности и полноты результатов моделирования, их применимости как в практической деятельности, так и в целях совершенствования модели. На данном этапе проводят проверку адекватности модели тем свойствам, которые были выбраны в качестве существенных.

Этапы экономико-математического моделирования, как и шаги процесса моделирования, носят циклический характер; более того, могут иметь место возвратные связи этапов. При этом результаты каждого цикла имеют самостоятельное значение. Начав исследование с построения простой модели, можно получить необходимые результаты, а затем перейти к созданию более сложной и более совершенной модели, включающей в себя новые условия и более точные математические зависимости.

1.3. Классификация экономико-математических моделей

Классификация экономико-математических моделей может быть различной и условной в зависимости от того, на основе каких критериев строят модель.

Экономико-математические модели можно разделить на *поведенческие* – модели, построенные на основе наблюдений за поведением объекта и описы-

вающие его без какой-либо информации о внутренней структуре объекта (модель «черного ящика»), и *феноменологические* – модели, представляющие собой математическое описание внутренней структуры объекта.

Далее приведены классификации по различным признакам.

По целевому назначению:

- а) теоретико-аналитические, применяемые для исследования наиболее общих свойств и закономерностей развития экономических процессов;
- б) прикладные, используемые для решения конкретных задач.

По уровням исследуемых экономических процессов:

- а) производственно-технологические;
- б) социально-экономические.

По характеру отражения причинно-следственных связей:

- а) детерминированные;
- б) недетерминированные (вероятностные, стохастические), учитывающие фактор неопределенности.

По способу отражения фактора времени:

- а) статические (все зависимости относятся к одному моменту или периоду времени);
- б) динамические, характеризующие изменения процессов во времени.

По форме математических зависимостей:

- а) линейные (наиболее удобны для анализа и вычислений, вследствие чего получили широкое распространение);
- б) нелинейные.

По размерности:

- а) макромоделли (агрегированные);
- б) локальные модели;
- в) микромоделли (детализированные).

Среди экономико-математических моделей можно выделить:

– *статистические модели*, в которых описывают корреляционно-регрессионные зависимости результата от одного или нескольких независимых факторов. Данные модели широко используют для построения производственных функций, при анализе экономических систем;

– *балансовые модели*, представляющие систему балансов производства и распределения продукции, их записывают в форме квадратных мат-

риц. Эти модели применяют для установления пропорций и взаимосвязей при планировании различных отраслей народного хозяйства;

– *оптимизационные модели*, записанные в виде систем математических уравнений, линейных или нелинейных, подчиненных определенной целевой функции и служащих для поиска наилучших (оптимальных) решений экономической задачи; описывающие условия оптимального функционирования экономической системы. Оптимизационные модели могут носить детерминированный и стохастический характер. В детерминированных моделях результат решения однозначно зависит от входных данных. В стохастических моделях определенному набору входных данных соответствует некоторое распределение вероятностей результата.

1.4. Производственные множества и их свойства

В широком смысле *производство* – это деятельность общества, направленная на удовлетворение своих потребностей.

Выделяют четыре этапа производства, первым из которых будет выступать производство в узком смысле, как процесс создания экономических благ и услуг, которые выступают исходным пунктом экономической деятельности. Далее следует распределение, обмен и потребление. Сферы производства, распределения, обмена и потребления как фазы единого процесса производства не только следуют друг за другом, но и взаимно проникают друг в друга, за потреблением снова следует производство. Такой замкнутый цикл называют *круговоротом экономических благ*.

Любой производственный процесс можно представить с помощью *вектора затрат-выпуска* $t = (x; y)$, являющегося совокупностью двух векторов: вектора затрат $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ с неположительными компонентами и вектора выпуска $y = (y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n)$ с неотрицательными. Каждая компонента вектора является количеством некоего продукта. Вектор $t = (x; y)$, который называют *технологией*, характеризует количество продуктов с *ресурсами* $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, которые необходимо затратить / потребить для выпуска определенного количества продуктов $y = (y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n)$. Равенство компоненты нулю означает, что соответствующий продукт в условиях данной

технологии не затрачивается (для компонент вектора затрат) или не производится (для компонент вектора выпуска).

Множество $T = \{t\}$ всех доступных для данного производителя технологий называют *производственным множеством*.

Производственные множества обладают свойствами:

– *не пустоты* ($T \neq \emptyset$) – производителю доступен хотя бы один технологический процесс;

– *замкнутости* – если вектор t сколь угодно точно приближается к векторам из T , то и t принадлежит T ($t \in T$);

– *отсутствия «рога изобилия»* – невозможно произвести что-то, не затратив ничего ($x = 0 \Rightarrow y = 0$);

– *возможности бездействия (ликвидации)* – в реальности могут существовать невозвратные издержки ($t = (x; 0) \in T$);

– *свободы расходования* – производственному множеству принадлежат технологии, позволяющие производить тот же самый объем выпуска, но посредством больших затрат, или меньший выпуск при тех же затратах;

– *необратимости* – невозможно поменять местами затраты и выпуск, производство – необратимый процесс ($t = (x; y) \in T \Rightarrow t = (-y; -x) \notin T$);

– *выпуклости* – в экономической интерпретации данное свойство означает, что, комбинируя технологии, можно получить другие доступные технологии;

– *отдачи от масштаба* – если в процентном соотношении объем затрат изменился на Δx , а соответствующее изменение выпуска составило Δy , то имеют место следующие ситуации:

1) $\Delta x = \Delta y$: пропорциональная отдача, рост количества затрат повлек соответствующий рост выпуска;

2) $\Delta x < \Delta y$: возрастающая отдача (положительный эффект масштаба) сопровождается увеличением производительности труда, выпуск увеличился в большей пропорции, чем увеличились затраты;

3) $\Delta x > \Delta y$: убывающая отдача (отрицательный эффект масштаба) сопровождается снижением производительности труда, увеличение затрат приводит к меньшему в процентном выражении росту выпуска.

1.5. «Кривая» производственных возможностей и вмененные издержки

Следствием ограниченности ресурсов является конкуренция за их использование; таким образом, возникает проблема выбора. Простейшей экономической моделью выбора является модель кривой производственных возможностей, позволяющей выбрать объем производства каждого из двух товаров (продуктов), создаваемых из одних и тех же ограниченных ресурсов, при условии их полного использования. Производственные возможности – это максимально возможный объем производства при полном и эффективном использовании ресурсов и доступной технологии.

Очевидно, что если одни и те же объемы ресурсов используют для производства двух товаров, то увеличение производства одного из них влечет уменьшение производства другого и наоборот. Таким образом, речь идет об обратной зависимости между объемами двух товаров, представляемой графически в виде линии на плоскости (рис. 2), которую называют «кривой» производственных возможностей.

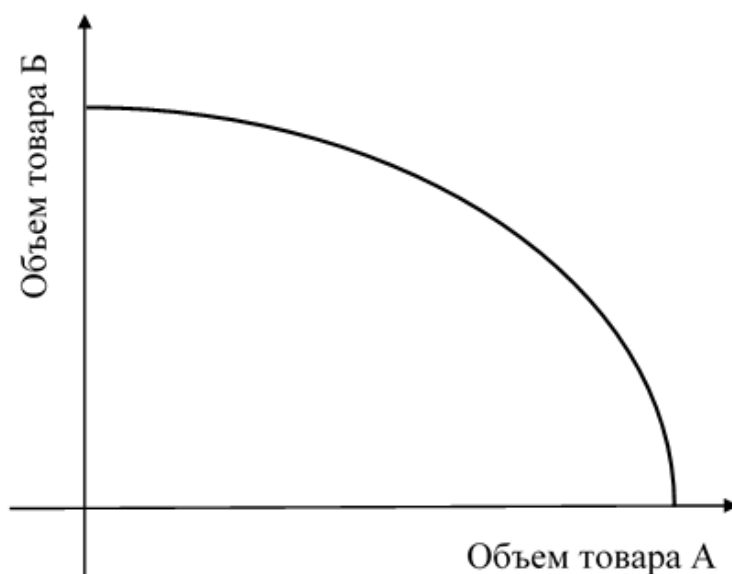


Рис. 2. «Кривая» производственных возможностей

Все точки на «кривой» производственных возможностей показывают полное и эффективное использование ресурсов. Точки ниже кривой соответствуют значениям объемов товаров при неэффективном использовании ресурсов; в этом случае может быть увеличено производство и товара А, и товара Б. Точки над кривой соответствуют значениям объемов товаров, которые не могут быть произведены из-за нехватки ресурсов для их производства [1].

Вмененные (альтернативные) издержки – это количество одного товара, которым пришлось пожертвовать ради получения дополнительной единицы другого товара.

Слово «кривая» взято в кавычки, поскольку данное понятие можно обобщить на большее количество товаров, при этом, если количество товаров больше трех, то геометрическая визуализация невозможна, с точки зрения математики речь будет идти о гиперповерхности.

1.6. Корреляционно-регрессионный анализ

Корреляционно-регрессионный анализ – широко распространенный метод стохастического моделирования социально-экономических процессов и явлений. Регрессионные модели позволяют на основе имеющихся статистических данных, как правило (но необязательно), количественных, аналитически (в виде формулы) выразить зависимость результирующей величины от одной или нескольких факторных.

Случай, когда модель ограничивают двумя исследуемыми величинами – зависимой (результирующей) и независимой (факторной), – называют парной корреляционно-регрессионной моделью. Если же при построении модели рассматривают несколько факторов (более одного), то речь идет о множественном корреляционном анализе и множественной регрессии.

Методы корреляционно-регрессионного анализа позволяют моделировать взаимосвязи показателей хозяйственной деятельности, когда зависимость между ними не является строго функциональной в силу искажения влиянием посторонних, случайных, неучтенных факторов.

Основным показателем наличия или отсутствия линейной стохастической зависимости между двумя величинами x и y является *парный линей-*

ный коэффициент корреляции r , который может быть вычислен при наличии данных о парах значений x и y . Для нахождения парного линейного коэффициента корреляции по упрощенной формуле разность средней произведения xy и произведения средних $\bar{x}$ и $\bar{y}$ делят на произведение средних квадратических отклонений x и y :

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad (1)$$

где n – количество пар значений x и y ;

$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum xy$ – средняя арифметическая произведений значений x и y ;

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x$ – средняя арифметическая значений x ;

$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y$ – средняя арифметическая значений y ;

$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$ – среднее квадратическое отклонение значений x ;

$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}$ – среднее квадратическое отклонение значений y ;

$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum x^2$ – средняя арифметическая квадратов значений x ;

$\overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum y^2$ – средняя арифметическая квадратов значений y .

Значения парного линейного коэффициента корреляции ограничены по абсолютной величине единицей. Чем ближе абсолютная величина r к единице, тем теснее линейная связь между x и y . Равенство $|r| = 1$ указывает на то, что между x и y существует линейная строго функциональная зависимость.

Отрицательные значения r указывают на обратную линейную зависимость между x и y , т. е. с увеличением значений одной переменной значения другой уменьшаются. Положительные значения r указывают на прямую линейную зависимость между x и y , т. е. с увеличением значений одной переменной значения другой также увеличиваются.

Равенство парного линейного коэффициента корреляции нулю означает, что между x и y отсутствует линейная зависимость, что не влечет за собой отсутствие какого-либо другого вида зависимости. В этом случае величины x и y называют *некоррелированными*.

Парная регрессионная модель имеет вид $y = f(x) + \varepsilon$, где $f(x)$ – функция регрессии, ε – стохастическая составляющая (случайная ошибка, обусловленная влиянием посторонних, неучтенных факторов).

Если $f(x) = a + bx$ – линейная функция, то мы имеем дело с парной линейной регрессионной моделью

$$y = a + bx + \varepsilon, \quad (2)$$

где a и b – *параметры парной линейной регрессии*.

Параметр $b = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называют *коэффициентом парной линейной регрессии*. Величина этого коэффициента показывает среднее изменение (увеличение при $b > 0$ или уменьшение при $b < 0$) результата y при увеличении фактора x на одну единицу. Величина параметра $a = \bar{y} - b\bar{x}$ показывает теоретическое значение результата y при нулевом значении фактора x .

Моделирование с использованием методов множественного корреляционно-регрессионного анализа начинают с расчетов парных линейных коэффициентов корреляции для каждой пары исследуемых величин.

Более подробно применение методов корреляционно-регрессионного анализа для моделирования социально-экономических процессов рассматривают в эконометрике.

1.7. Производственные функции и их свойства

Производственные функции – регрессионные модели, демонстрирующие зависимости между объемом произведенной продукции и основными факторами производства (трудом, капиталом и другими) и при данном уровне технологического развития общества [2].

Поскольку вид зависимости необязательно может быть установлен методами регрессионного анализа, приведем еще одно определение.

Производственная функция представляет собой зависимость между некоторым набором факторов производства и объемом продукции, производимым из этого набора факторов, записанную математически, то есть в виде аналитической функции.

Производственные функции различны для разных видов производства, при этом все они имеют следующие общие свойства:

- существует предел для роста объема выпуска, который может быть достигнут ростом затрат одного ресурса при прочих равных условиях;
- ресурсы дополняют друг друга, но в определенных пределах возможна и их взаимозаменяемость без сокращения выпуска;
- объем выпускаемой продукции зависит только от факторов производства – ресурсов.

1.8. Производственная функция Кобба – Дугласа

Первый успешный опыт построения производственной функции как уравнения регрессии на базе статистических данных был получен американскими учеными: математиком Д. Коббом и экономистом П. Дугласом в 1928 г. Предложенная ими функция изначально имела вид

$$Q = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}, \quad (3)$$

где Q – объем выпуска;

K – величина производственных фондов (капитал);

L – затраты труда;

$A > 0$ и $\alpha > 0$ – числовые параметры (масштабное число и показатель эластичности).

Как правило, в микроэкономике анализируют двухфакторную производственную функцию, отражающую зависимость объема выпуска продукции Q от количества используемого труда L , измеряемого в человеко-часах или количестве людей, вовлеченных в процесс производства, и привлеченного капитала K , под которым понимают средства производства – количество машин и оборудования, используемого в производстве и измеряемого в машино-часах или денежном выражении

$$Q = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}, \quad (4)$$

где A , α и β – заданные параметры.

Параметр A – коэффициент совокупной производительности факторов производства, отражающий влияние технического прогресса на производство: если производитель внедряет передовые технологии, величина A возрастает, то есть выпуск увеличивается при прежних количествах труда и капитала. Параметры α и β – коэффициенты эластичности выпуска по капиталу и по труду соответственно: они показывают, на сколько процентов изменяется выпуск при изменении капитала / труда на один процент. Коэффициенты эти положительны, но меньше единицы. Последнее означает, что при росте труда при постоянном капитале (либо капитала при постоянном труде) на один процент производство возрастает в меньшей степени.

1.9. Теория фирмы

Фирмой называют субъект рынка, деятельность которого направлена на получение прибыли, обладающий обособленным имуществом, самостоятельно принимающий решения, касающиеся привлечения (мобилизации) ресурсов, определения объема выпуска продукции и установления цен на нее [3].

В экономической теории сформировалось два подхода к изучению природы фирмы, к трактовке сущности фирмы: технологический, который появился на основе неоклассических взглядов на микроэкономические процессы, и институциональный.

С точки зрения первого подхода фирма – это целостный самостоятельный субъект, интерес которого состоит в максимизации прибыли путем выбора оптимального размера производства, когда разница между общей выручкой и затратами фирмы достигает наибольшей величины.

В основе этого подхода лежит предположение о том, что всегда имеется возможность определить производственную функцию, которая выражает максимальный объем выпуска продукции при определенном уровне развития техники и технологии, а также при всех возможных комбинациях факторов производства, имеющихся в наличии. С помощью указанной про-

изводственной функции можно определить, в какой пропорции между определенными ресурсами достигается оптимальный объем производства с точки зрения соотношения затрат и выпуска.

При технологическом подходе к природе фирмы проблема определения ее оптимального размера является центральной; используется эффект возрастающей отдачи от масштаба, существующий положительный эффект экономии на масштабе производства используют полностью.

С неоклассической точки зрения фирму сравнивают с «черным ящиком», на входе которого определенные порции ресурсов, а на выходе – произведенные блага. Технологический подход не объясняет, откуда взялся этот «ящик» и что происходит внутри него.

С точки зрения второго подхода фирма – это коалиция владельцев факторов производства, связанных между собой системой контрактов, в результате чего происходит минимизация транзакционных издержек.

При институциональном подходе центральной проблемой анализа фирмы становится не оптимизация размера фирмы, а объяснение феномена возникновения фирмы, условий ее дальнейшего развития и исчезновения.

1.10. Типовые примеры и задачи для самостоятельного решения

Пример 1. В табл. 1 приведены условные данные о среднедушевом прожиточном минимуме в день на одного трудоспособного, x (в рублях), и среднедневной заработной плате, y (в рублях), по территориям региона за определенный период.

Таблица 1

Условные данные о прожиточном минимуме и заработной плате

Номер региона, n	Среднедушевой прожиточный минимум в день на одного трудоспособного, x , руб.	Среднедневная заработная плата, y , руб.
1	510	920
2	770	1 240
3	850	1 260

Номер региона, n	Среднедушевой прожиточный минимум в день на одного трудоспособного, x , руб.	Среднедневная заработная плата, y , руб.
4	790	1 250
5	930	1 200
6	1 000	1 270
7	720	1 250
8	900	1 480
9	710	980
10	890	1 570
11	820	1 440
12	1 110	1 650
13	740	930
14	810	1 120
15	900	1 400

По имеющимся в табл. 1 данным рассчитать парный линейный коэффициент корреляции и параметры регрессии. Сделать выводы. На одном чертеже построить исходные данные и теоретическую линию регрессии.

Решение. Для вычисления парного линейного коэффициента корреляции воспользуемся формулой (1), которая содержит средние величины.

Для расчетов воспользуемся электронными таблицами¹. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Таблица вспомогательных вычислений в примере 1

n	x	y	xy	x^2	y^2
1	510	920	469 200	260 100	846 400
2	770	1 240	954 800	592 900	1 537 600
3	850	1 260	1 071 000	722 500	1 587 600
4	790	1 250	987 500	624 100	1 562 500
5	930	1 200	1 116 000	864 900	1 440 000

¹ Для решения задачи были использованы электронные таблицы Excel, при этом приведенные в табл. 2 расчеты могут быть выполнены вручную. В электронных таблицах Excel для расчета средних арифметических, средних квадратических отклонений, коэффициента корреляции, параметров регрессии и многих других величин можно использовать встроенные функции.

n	x	y	xy	x^2	y^2
6	1 000	1 270	1 270 000	1 000 000	1 612 900
7	720	1 250	900 000	518 400	1 562 500
8	900	1 480	1 332 000	810 000	2 190 400
9	710	980	695 800	504 100	960 400
10	890	1 570	1 397 300	792 100	2 464 900
11	820	1 440	1 180 800	672 400	2 073 600
12	1 110	1 650	1 831 500	1 232 100	2 722 500
13	740	930	688 200	547 600	864 900
14	810	1 120	907 200	656 100	1 254 400
15	900	1 400	1 260 000	810 000	1 960 000
Сред- няя	$\bar{x} \approx 830$	$\bar{y} \approx 1\,264$	$\overline{xy} \approx 1\,070\,753$	$\overline{x^2} \approx 707\,153$	$\overline{y^2} \approx 1\,642\,707$

Подставив средние величины из табл. 2 в формулу (1), получим

$$r = \frac{1\,070\,753 - 830 \cdot 1\,264}{\sqrt{707\,153 - 830^2} \cdot \sqrt{1\,642\,707 - 1\,264^2}} \approx 0,75. \quad (5)$$

Параметры регрессии:

$$b = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \approx 0,75 \cdot \frac{\sqrt{1\,642\,707 - 1\,264^2}}{\sqrt{707\,153 - 830^2}} \approx 1,19; \quad (6)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \approx 1\,264 - 1,19 \cdot 830 = 280,31. \quad (7)$$

Значение парного линейного коэффициента корреляции $r \approx 0,75$ положительно и достаточно близко к единице для того, чтобы утверждать, что между среднедушевым прожиточным минимумом в день на одного трудоспособного и среднедневной заработной платой существует прямая линейная зависимость.

Значение коэффициента парной линейной регрессии $b \approx 1,19$ свидетельствует о том, что при увеличении среднедушевого прожиточного минимума в день на одного трудоспособного на один рубль среднедневная заработная плата возрастает в среднем на один рубль и девятнадцать копеек.

Множество точек с координатами $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (n – количество пар значений экономических величин) называют *корреляционным полем* или *полем корреляции* экономических величин.

Теоретическая линия регрессии $y = 280,31 + 1,19x$ и корреляционное поле среднедушевого прожиточного минимума в день на одного трудоспособного и среднедневной заработной платой изображены на рис. 3.

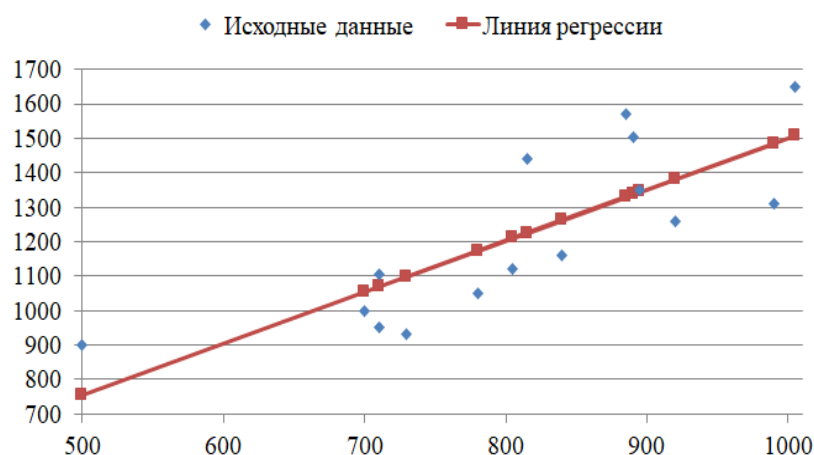


Рис. 3. Исходные данные и теоретическая линия регрессии

Пример 2. В табл. 3 по данным Росстата [4, 5] приведены значения следующих показателей:

- валовая добавленная стоимость промышленного производства Y , трлн руб.;
- основные фонды в промышленном производстве K , трлн руб.;
- среднегодовая численность занятых в промышленном производстве L , млн человек.

Таблица 3

Показатели экономики Российской Федерации
(промышленное производство)

Год	Y , трлн руб.	K , трлн руб.	L , млн человек
2010	11,3	23,8	13,3
2011	13,5	28	13,3
2012	15,1	31,9	13,2

Год	Y , трлн руб.	K , трлн руб.	L , млн человек
2013	16	36,2	13,1
2014	17,3	41,1	12,8
2015	19,3	46,6	12,8
2017	23,2	48,7	13,7
2018	28,7	53,9	13,6
2019	30	58,9	13,4
2020	26,6	66	13,1

На основании представленных в табл. 3 данных построить производственную функцию типа Кобба – Дугласа. Сделать прогноз валовой добавленной стоимости промышленного производства на 2021 г., если планируется увеличение основных фондов на 5 % и одновременное уменьшение среднегодовой численности занятых на 2 %.

Решение.

Функция Кобба – Дугласа (3) в нашем примере примет вид

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}. \quad (8)$$

Функция (8) содержит два неизвестных параметра A и α , которые можно оценить по имеющимся статистическим данным (см. табл. 3) методами регрессионного анализа, в частности, применяя формулы для оценки параметров уравнения (2), полученные методом наименьших квадратов. Функция (8) является нелинейной, но может быть приведена к линейной путем *линеаризации*.

Перепишем равенство (8), используя свойства степени

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot \frac{L}{L^{\alpha}}. \quad (9)$$

Поделим обе части уравнения (9) на L

$$\frac{Y}{L} = A \cdot \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha}. \quad (10)$$

Прологарифмируем обе части равенства (10)

$$\ln \frac{Y}{L} = \ln A + \alpha \ln \left(\frac{K}{L} \right). \quad (11)$$

Обозначим $\ln \left(\frac{Y}{L} \right) = y$, $\ln A = a$, $\alpha = b$, $\ln \left(\frac{K}{L} \right) = x$, тогда уравнение (11) примет вид линейной функции $y = a + bx$ из равенства (2), для которого, как было указано в подразд. 1.6,

$$b = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad (12)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}. \quad (13)$$

Для расчетов воспользуемся электронными таблицами². Результаты расчетов приведены в табл. 4.

Таблица 4

Таблица вспомогательных вычислений в примере 2

Год	Y	K	L	$x = \ln \left(\frac{K}{L} \right)$	$y = \ln \left(\frac{Y}{L} \right)$	x^2	xy
2010	11,3	23,8	13,3	0,582	-0,163	0,339	-0,095
2011	13,5	28	13,3	0,744	0,015	0,554	0,011
2012	15,1	31,9	13,2	0,882	0,134	0,779	0,119
2013	16	36,2	13,1	1,016	0,200	1,033	0,203
2014	17,3	41,1	12,8	1,167	0,301	1,361	0,351
2015	19,3	46,6	12,8	1,292	0,411	1,670	0,531
2017	23,2	48,7	13,7	1,268	0,527	1,609	0,668
2018	28,7	53,9	13,6	1,377	0,747	1,896	1,028
2019	30	58,9	13,4	1,481	0,806	2,192	1,193
2020	26,6	66	13,1	1,617	0,708	2,615	1,145
средняя				$\bar{x} \approx 1,143$	$\bar{y} \approx 0,369$	$\overline{x^2} \approx 1,405$	$\overline{xy} \approx 0,516$

² Для решения задачи были использованы электронные таблицы Excel, при этом приведенные в табл. 4 расчеты могут быть выполнены вручную.

Подставив средние величины из табл. 4 в формулы (12), (13), найдем оценки параметров.

$$b = \frac{0,516 - 1,143 \cdot 0,369}{1,405 - 1,143^2} \approx 0,953, \quad (14)$$

$$a \approx 0,369 - 0,953 \cdot 1,143 \approx -0,721. \quad (15)$$

С учетом того, что $\ln A = a$, $\alpha = b$, получим $A = e^a \approx 0,486$, $\alpha = 0,953$. Подставив найденные оценки параметров в формулу (8), получим вид искомой функции

$$Y = 0,486 \cdot K^{0,953} \cdot L^{0,047}. \quad (16)$$

Воспользуемся равенством (16) для того, чтобы сделать прогноз валовой добавленной стоимости промышленного производства на 2021 г., если планируется увеличение основных фондов на 5 % и одновременное уменьшение среднегодовой численности занятых на 2 %.

Планируемые значения:

$$\hat{K}_{2021} = 66 \cdot 1,05 = 69,3;$$

$$\hat{L}_{2021} = 13,1 \cdot 1,02 = 13,362.$$

Прогнозируемое значение валовой добавленной стоимости промышленного производства на 2021 г.:

$$\hat{Y}_{2021} = 0,486 \cdot 69,3^{0,953} \cdot 13,362^{0,047} \approx 31,213.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В табл. 5 приведены данные о некотором показателе x (в условных единицах) и некотором показателе y (в условных единицах) по территориям региона за определенный период. Необходимо решить задачу по данным своего варианта N – целое число от 1 до 30, $S = N - 15$.

Числовые данные к задаче 1

Номер региона, n	x	y
1	$500 + S$	$900 + S$
2	$710 + S$	$950 + S$
3	$840 + S$	$1\,160 + S$
4	$780 + S$	$1\,050 + S$
5	$920 + S$	$1\,260 + S$
6	$990 + S$	$1\,310 + S$
7	$710 + S$	$1\,105 + S$
8	$890 + S$	$1\,505 + S$
9	$700 + S$	$1\,000 + S$
10	$885 + S$	$1\,570 + S$
11	$815 + S$	$1\,440 + S$
12	$1\,005 + S$	$1\,650 + S$
13	$730 + S$	$930 + S$
14	$805 + S$	$1\,120 + S$
15	895	$1\,350 + S$

По имеющимся в табл. 5 данным рассчитать парный линейный коэффициент корреляции и параметры регрессии. Сделать выводы. На одном чертеже построить исходные данные и теоретическую линию регрессии.

Задача 2. В табл. 6 приведены значения следующих показателей:

- объем производства некоторой отрасли Y , условных денежных единиц;
- основные фонды K , условных денежных единиц;
- трудовые ресурсы L , тыс. человек.

На основании представленных в табл. 6 данных построить производственную функцию типа Кобба – Дугласа. Сделать прогноз объема производства на 2023 г., если планируется увеличение основных фондов на $0,5 \cdot N$ % и одновременное уменьшение трудовых ресурсов на $0,1 \cdot N$ %.

Необходимо решить задачу по данным своего варианта N – целое число от 1 до 30, $S = |N - 15|$ (модуль разности числа 15 и N).

Числовые данные к задаче 2

Год	Y	K	L
2016	$431 + S$	$650 - S$	$91 - 0,1 \cdot S$
2017	$440 + S$	$710 - S$	$93 - 0,1 \cdot S$
2018	$462 + S$	$772 - S$	$94 - 0,1 \cdot S$
2019	$483 + S$	$835 - S$	$94 - 0,1 \cdot S$
2020	$504 + S$	$887 - S$	$95 - 0,1 \cdot S$
2021	$509 + S$	$890 - S$	$96 - 0,1 \cdot S$
2022	$531 + S$	$912 - S$	$96 - 0,1 \cdot S$

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

2.1. Основы математического программирования

Математическое программирование – раздел математики, в котором изучают методы нахождения экстремумов (максимальных или минимальных значений) функции, аргументы которой связаны некоторыми ограничениями [6].

В общем случае модель задачи математического программирования имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min). \quad (17)$$

Функцию в левой части выражения (17) называют *целевой*.

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, & i = 1, \dots, k; \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_i, & i = k + 1, \dots, l; \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, & i = l + 1, \dots, m; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (18)$$

Систему (18) называют *системой ограничений*. Ограничения в системе (18) могут быть заданы равенствами (первая строка) и / или неравенствами (вторая и третья строки, неравенства могут быть строгими). В системе ограничений (18), как правило, присутствуют условия неотрицательности всех переменных (четвертая строка). Таким образом, система (18) содержит $m + n$ ограничений. Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют *управляющими переменными*.

Вектор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – упорядоченную совокупность чисел, удовлетворяющих каждому ограничению системы (18), – называют *допустимым решением (допустимым планом)* задачи математического программирования.

Множество всех допустимых решений (допустимых планов) называют *областью допустимых решений (областью допустимых планов)*. Допустимое решение (допустимый план), при котором целевая функция достигает своего экстремального значения, называют *оптимальным решением (оптимальным планом)*.

В случае, когда функции f и g – линейные, речь идет о задачах *линейного математического программирования*. Если же хотя бы одна из этих функций нелинейна, то мы имеем дело с задачами *нелинейного математического программирования*. В ряде экономических задач, для решения которых применяют методы математического программирования, переменные не могут принимать отрицательные значения, отсюда требование неотрицательности переменных – четвертая строка в системе ограничений (18). Кроме того, к переменным может быть предъявлено требование целочисленности, в этом случае ведут речь о задачах *целочисленного математического программирования*.

Применительно к управлению экономическими системами, *допустимый план* – это некоторое планово-управленческое решение, учитывающее внутренние возможности и внешние условия, выраженные в виде системы ограничений, а *целевая функция* есть некий критерий эффективности (оптимальности) этих решений, например, максимизация прибыли или минимизация издержек. В этом контексте оптимальный план – это наилучшее с точки зрения критерия эффективности планово-управленческое решение.

Далее рассмотрим ряд моделей, являющихся примером применения математического программирования для решения экономических задач.

2.2. Экономико-математическая модель оптимизации производственной программы предприятия

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ и $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ – линей-

ные функции, то есть будем вести речь о задаче линейного математического программирования. В задаче оптимизации производственной программы предприятия рассматривают следующую интерпретацию величин [7].

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – план выпуска продукции n наименований (программа предприятия по выпуску продукции), x_j – количество единиц продукции наименования j . Если речь идет о целом количестве единиц продукции каждого наименования, то имеем дело с задачей целочисленного линейного программирования.

c_j – оценка единицы продукции j -го наименования в соответствии с критерием оптимальности. Например, если c_j – это прибыль от реализации единицы продукции j -го наименования, то целевая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ выражает суммарную прибыль предприятия, соответствующую плану выпуска $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, и необходимо найти оптимальный план, при котором целевая функция, то есть прибыль, будет максимальной.

При этом для производства необходимо m типов ресурсов, a_{ij} – затраты ресурса i -го типа на производство единицы продукции j -го наименования, b_i – величина ресурса i -го типа, которой располагает предприятие.

Требования неотрицательности $x_j \geq 0$ могут быть заменены на более жесткие условия: $x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}$, где $x_j^{\min}$ и $x_j^{\max}$ – допустимые пределы выпуска продукции j -го наименования.

Математическая формулировка примет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max; \quad (19)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \dots, m; \\ x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, & j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (20)$$

2.3. Модель определения производственной мощности промышленного предприятия

Математическая формулировка для модели определения производственной мощности предприятия будет иметь тот же вид (19), (20), что и для модели оптимизации производственной программы предприятия с той лишь разницей, что в модели определения производственной мощности предприятия в качестве ресурсов рассматривают m групп оборудования, поэтому a_{ij} – это трудоемкость изготовления единицы продукции j -го наименования на i -й группе оборудования, b_i – действующий годовой фонд времени работы i -й группы оборудования [8].

2.4. Модель оптимизации рецептуры смеси

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ и $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ – линей-

ные функции, то есть мы продолжаем рассматривать задачу линейного математического программирования [9].

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – набор n компонентов, из которых составляют смесь, x_j – количество единиц компонента j .

c_j – параметр, который характеризует стоимость, массу или калорийность единицы j -го наименования. Следовательно, целевая функция

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ выражает суммарную стоимость, массу или ка-

лорийность, соответствующую смеси с набором $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ компонентов. Как правило, стоимость или массу стремятся минимизировать, калорийность в зависимости от целеполагания требуется либо минимизировать, либо, наоборот, максимизировать. Обычно модель оптимизации рецептуры смеси применяют для решения группы задач по определению наиболее дешевого набора из определенных компонентов, обеспечивающего получение смеси с заданными свойствами. В указанном контексте c_j характеризует стоимость единицы j -го компонента и необходимо найти такой набор

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ компонентов, при котором целевая функция, т. е. стоимость смеси, будет минимальной.

При этом необходимо, чтобы смесь содержала m веществ, a_{ij} – количество i -го вещества, входящего в j -й компонент, b_i – количество i -го вещества, входящего в состав смеси.

Математическая формулировка примет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (21)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, \dots, m; \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (22)$$

Первые m ограничений в системе (22) могут быть как равенствами, так и неравенствами. Если необходимо точное количество вещества в смеси, то мы имеем дело с уравнением. Если требуется, чтобы в смеси присутствовал необходимый минимум вещества, то записывают неравенство, в котором сумма слева не меньше ($\geq$) этого минимального значения.

2.5. Модель оптимизации раскроя материалов

Задачу оптимизации раскроя материалов можно рассматривать в двух вариантах, одним из которых является задача максимизации комплектов, другим – задача минимизации отходов [10].

Задача максимизации комплектов. Пусть в раскрой поступает m различных материалов, из которых требуется изготовить k разных комплектующих изделий (комплектов) в количествах, пропорциональных величинам $b_1, b_2, \dots, b_k$ (условия комплектности). Пусть каждую единицу i -го материала ($i = 1, \dots, m$) можно раскроить n различными способами, так что при использовании j -го способа раскроя ($j = 1, \dots, n$) получим a_{ij}^l единиц l -го изделия ($l = 1, \dots, k$). Необходимо определить такой план раскроя материа-

лов, при котором количество комплектов будет максимальным, если имеющийся запас i -го материала составляет a_i единиц.

Математическая формулировка примет вид

$$x \rightarrow \max; \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} a_{ij}^l = b_l x; \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_{ij}; \quad (25)$$

где x_{ij} – количество единиц i -го материала, раскраиваемых j -м способом;

x – общее количество изготавливаемых комплектов.

Равенства (24) называют условиями комплектности, а неравенства (25) – ограничениями на запас материалов.

Очевидно, что формулировка задачи (23)–(25) отличается от стандартной формулировки задачи математического программирования (17), (18).

Задача минимизации отходов. Пусть имеются заготовки в виде полос (досок, листов проката и тому подобных) длиной L каждая, из которых требуется получить b_i частей длиной l_i ($i = 1, \dots, m$). Имеется несколько вариантов раскроя V_j ($j=1, \dots, n$) каждой полосы (план раскроя). При каждом j -м варианте раскроя получается a_{ij} частей длиной l_i . (При этом $\sum_{i=1}^m a_{ij} l_i \leq L$

. Это условие, наложенное на коэффициенты, содержится в определении «вариант раскроя» и не является условием оптимизации.) Требуется так раскроить (распилить, разрезать) полосы, чтобы количество отходов было минимальным (если задано количество отходов c_i для каждого варианта раскроя V_j ($j = 1, \dots, n$)) или требуемое количество частей могло быть получено из минимального количества заготовок. Обозначим через x_j количество заготовок, раскроенное по j -му варианту.

В случае минимизации количества отходов математическая модель задачи имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (26)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, \dots, m; \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (27)$$

В случае минимизации количества раскроенных заготовок математическая модель задачи имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min, \quad (28)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, \dots, m; \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (29)$$

2.6. Модель оперативно-календарного планирования производства на предприятии

Оперативно-календарным планированием называют обеспечение синхронной работы взаимодействующих участков для надежного функционирования всего экономического объекта (цеха, предприятия) в целом.

Оперативно-календарное планирование является довольно сложной и объемной задачей, для решения которой применяют модели математического программирования, в том числе рассмотренные выше, и динамическое программирование, речь о котором пойдет далее, модели теории расписаний и управления запасами, имитационное моделирование.

В процессе оперативно-календарного планирования выполняют расчеты и устанавливают:

- задачи цехам, производственным участками и рабочим местам по выпуску конкретных изделий, узлов и заготовок;
- нормативы движения предметов работы в производстве (нормативы запасов, размеры партий, периоды их запуска-выпуска и другое);

- календарные графики, которыми устанавливается последовательность и сроки изготовления продукции на каждой стадии производства;
- создание условий для развития передовых форм организации работы, а также для автоматизации объемных и календарных расчетов на основе использования современной вычислительной техники.

2.7. Модели управления запасами

Модели управления запасами применяют для решения задач логистики, оперативно-календарного планирования и др.

В моделировании управления запасами выделяют структуризацию запасов, статические модели управления запасами, динамические модели управления запасами, многопродуктовые модели, вероятностные модели управления запасами [11].

В качестве примера оптимальной экономико-математической модели приведем классическую модель экономического размера заказа.

Экономическим размером заказа называется величина партии товаров, которая позволяет минимизировать общие переменные издержки, связанные с заказом и хранением запасов.

Средние общие издержки в единицу времени можно представить как функцию $C(Q)$ от величины заказа

$$C(Q) = \frac{kd}{Q} + \frac{hQ}{2}, \quad (30)$$

где Q – величина заказа;

k – затраты на поставку единицы продукта;

d – потребность в продукте (единиц продукта в единицу времени);

h – затраты на хранение (на каждую единицу товара в единицу времени).

Чем меньше размер заказа, тем меньше стоимость хранения и средний уровень запаса, но чаще необходимо размещать новые заказы; таким образом возрастают затраты на поставку. Оптимальное значение объема заказа можно определить как точку минимума функции (30)

$$Q_{\text{опт.}} = \sqrt{\frac{2kd}{h}}. \quad (31)$$

2.8. Основы динамического программирования

Рассмотренные выше задачи математического программирования получили название *одноэтапных (одношаговых)*. Задачи динамического программирования отличаются тем, что являются *многоэтапными (многошаговыми)* [12].

Примерами таких задач являются: планирование деятельности предприятия на несколько лет, поэтапное планирование инвестиций, управление производственными мощностями в течение длительного срока. Как отмечено выше, задачи оперативно-календарного планирования также являются многоэтапными.

При реализации метода динамического программирования одновременный выбор значений большого числа переменных решаемой экстремальной задачи заменяют поочередным определением каждой из них в зависимости от возможных обстоятельств. Процедуру выбора значений переменных трактуют как многоэтапный процесс управления некоторой системой [13].

Пусть имеется задача, решение которой состоит из нескольких этапов. Показатель эффективности задачи в целом обозначим через W , а показатели эффективности на отдельных этапах – через φ_i ($i = 1, \dots, m$). Если W обладает свойством аддитивности, то есть

$$W = \sum_{i=1}^m \varphi_i, \quad (32)$$

то можно найти оптимальное решение задачи методом динамического программирования.

Динамическим программированием называют метод оптимизации многоэтапных процессов, критерий эффективности которых обладает свойством аддитивности (32). В задачах динамического программирования критерий эффективности называют *выигрышем* (в случае максимизации) или

проигрышем (в случае минимизации). Величина выигрыша (проигрыша) зависит от правильного выбора управления.

Шаговым управлением называют переменную x_i , от которой зависят выигрыш (проигрыш) ϕ_i на i -м этапе ($i = 1, \dots, m$) и выигрыш (проигрыш) в целом W .

Последовательность шаговых управлений $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ называют *управлением процессом (системой)* в целом.

Множество X допустимых управлений x называют *областью допустимых управлений*.

Оптимальным управлением x^* называют значение управления x , при котором оптимально (максимально или минимально) значение $W(x^*)$. Оптимальное управление можно задать последовательностью оптимальных шаговых управлений: $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$.

При решении задачи динамического программирования на каждом этапе необходимо выбрать управление, которое должно привести к оптимальному выигрышу (проигрышу). Если считать все этапы независимыми друг от друга, то оптимальным шаговым управлением будет то управление, которое приносит максимальный выигрыш (проигрыш) именно на данном этапе. В многоэтапных процессах все шаги зависят друг от друга, следовательно, при выборе шагового управления необходимо учитывать, во-первых, возможные исходы предыдущего этапа, во-вторых, влияние управления на все оставшиеся до конца процесса этапы.

Пусть $w_i = \sum_{k=i}^m \phi_k$ – выигрыш (проигрыш) с i -го этапа до конца процесса ($i = 1, \dots, m$), s – состояние процесса, S_i – множество возможных состояний процесса перед i -м этапом.

Алгоритм составления математической модели задачи динамического программирования:

1) разделение задачи на этапы. Этап не должен быть слишком мелким, чтобы не проводить лишних расчетов, и не должен быть слишком большим, усложняющим процесс поэтапной оптимизации;

2) выбор переменных, характеризующих состояние s моделируемого процесса перед каждым этапом, и выявление налагаемых на них ограничений;

3) определение множества шаговых управлений x_i ($i = 1, \dots, m$) и налагаемых на них ограничений, то есть области допустимых управлений X ;

4) определение выигрыша (проигрыша) $\phi_i(s, x_i)$, который принесет на i -м этапе управление x_i , если система перед этим находилась в состоянии s ;

5) определение состояния s' , в которое переходит система из состояния s под влиянием управления x_i :

$$s' = f_i(s, x_i), \quad (33)$$

где f_i – функция перехода на i -м шаге из состояния s в состояние s' . Состояние s' однозначно определяется функцией перехода, поэтому в данном пункте определяют (задают) вид функции перехода f_i ;

6) составление уравнения, определяющего условный оптимальный выигрыш (проигрыш) на последнем шаге, для состояния s моделируемого процесса

$$W_m(s) = \max_{x_m \in X} \{ \phi_m(s, x_m) \} \left(W_m(s) = \min_{x_m \in X} \{ \phi_m(s, x_m) \} \right); \quad (34)$$

7) составление основного функционального уравнения динамического программирования, определяющего условный оптимальный выигрыш (проигрыш) для состояния s с i -го шага и до конца процесса через уже известный условный оптимальный выигрыш с $(i + 1)$ -го шага до конца:

$$W_i(s) = \max_{x_m \in X} \{ \phi_m(s, x_m) + W_{i+1}(f_i(s, x_i)) \};$$

$$\left(W_i(s) = \min_{x_m \in X} \{ \phi_m(s, x_m) + W_{i+1}(f_i(s, x_i)) \} \right). \quad (35)$$

В уравнении (35) в уже известную функцию $W_{i+1}(s)$, характеризующую условный оптимальный выигрыш с $(i + 1)$ -го шага до конца процесса, вместо состояния s подставлено новое состояние $s' = f_i(s, x_i)$, в которое система переходит на i -м шаге под влиянием управления x_i .

Структура модели динамического программирования отличается от статической модели тем, что в моделях линейного программирования управляющие переменные являются одновременно и переменными состояния моделируемого процесса, в динамических моделях отдельно вводятся переменные управления x_i и переменные, характеризующие изменение состояния процесса s под влиянием управления. Такой подход позволяет учитывать фактор времени в динамических моделях, что делает их структуру более сложной.

После того как выполнены пп. 1–7, изложенные выше, и математическая модель составлена, приступают к ее расчету.

Основные этапы решения задачи динамического программирования.

1. Определение множества возможных состояний S_m для последнего шага.

2. Проведение условной оптимизации для каждого состояния $s \in S_m$ на последнем m -м шаге по формуле (34) и определение условного оптимального управления $x(s)$, $s \in S_m$.

3. Определение множества возможных состояний S_i для i -го шага, $i = 2, 3, \dots, m - 1$.

4. Проведение условной оптимизации i -го шага, $i = 2, 3, \dots, m - 1$ для каждого состояния $s \in S_i$ по формуле (35) и определение условного оптимального управления $x_i(s)$, $s \in S_i$, $i = 2, 3, \dots, m - 1$.

5. Определение начального состояния системы s_1 , оптимального выигрыша (проигрыша) $W_1(s_1)$ и оптимального управления $x_1(s_1)$ по формуле (35) при $i = 1$. Это есть оптимальный выигрыш (проигрыш) для всей задачи $W^* = W_1(x_1^*)$.

6. Проведение безусловной оптимизации управления. Для проведения безусловной оптимизации необходимо найденное на первом шаге оптимальное управление $x_1^* = x_1(s_1)$ подставить в формулу (33) и определить следующее состояние системы $s_2 = f_2(s_1, x_1^*)$. Для измененного состояния найти оптимальное управление $x_2^* = x_2(s_2)$, подставить в формулу (33) и так далее. Для i -го состояния s_i найти $s_{i+1} = f_{i+1}(s_i, x_i^*)$ и $x_{i+1}(s_{i+1})$ и т. д.

2.9. Оптимальное распределение инвестиций

Инвестор выделяет средства в размере D условных единиц, которые должны быть распределены между m предприятиями. Каждое i -е предприятие при инвестировании в него средств x_i приносит прибыль $\varphi_i(x_i)$ условных единиц ($i = 1, \dots, m$). Необходимо выбрать оптимальное распределение инвестиций между предприятиями, обеспечивающее максимальную прибыль.

Выигрышем W в данной задаче является прибыль, приносимая m предприятиями.

Построение математической модели.

1. *Разделение на этапы.* Число этапов равно числу предприятий m , в которые осуществляется инвестирование.

2. *Выбор переменных, характеризующих состояния системы.* Состояние системы на каждом этапе характеризуется количеством средств s , имеющихся в наличии перед данным этапом, $s \leq D$.

3. *Определение множества шаговых управлений.* Управлением x_i на i -м этапе ($i = 1, \dots, m$) является количество средств, инвестируемых в i -е предприятие.

4. *Определение выигрыша.* Функция выигрыша на i -м этапе – это прибыль $\varphi_i(x_i)$, которую приносит i -е предприятие при инвестировании в него

средств x_i , при этом выигрыш $W = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x_i)$, из чего следует, что данная

задача может быть решена методом динамического программирования.

5. *Определение функции перехода в новое состояние.* Если в наличии имеются средства в размере s условных единиц и в i -е предприятие инвестируется x_i условных единиц, то для дальнейшего инвестирования остается $s - x_i$ условных единиц. В наших терминах это означает, что если на i -м этапе система находилась в состоянии s , при этом выбрано управление x_i , то на $(I + 1)$ -м этапе система будет находиться в состоянии $s - x_i$. Функция перехода имеет вид $f_i(s, x_i) = s - x_i$.

6. *Составление уравнения, определяющего условный оптимальный выигрыш для $i = m$.* На последнем этапе, то есть перед инвестированием средств в последнее предприятие, условное оптимальное управление соответствует количеству средств, имеющихся в наличии; то есть, сколько средств осталось, столько их необходимо вложить в последнее предприятие $x_m(s) = s$. Условный оптимальный выигрыш равен доходу, приносимому последним предприятием $W_m(s) = \varphi_m(s)$.

7. *Составление основного функционального уравнения.* Подставив в формулу (34) выражение функции выигрыша на i -м этапе из п. 4 и выражение функции перехода из п. 5, получим функциональное уравнение

$$W_i(s) = \max_{x_i \leq s} \{ \varphi_i(x_i) + W_{i+1}(s - x_i) \}. \quad (36)$$

Суть уравнения (36) такова: пусть перед i -м этапом у инвестора остались средства в размере s условных единиц. Тогда x_i условных единиц он может вложить в i -е предприятие, при этом оно принесет прибыль $\varphi_i(x_i)$, а оставшиеся $s - x_i$ условных единиц он вкладывает в остальные предприятия с $(i + 1)$ -го до m -го. Условный оптимальный выигрыш от такого вложения $W_{i+1}(s - x_i)$. Оптимальным будет то условное управление x_i , при котором сумма $\varphi_i(x_i)$ и $W_{i+1}(s - x_i)$ максимальна.

2.10. Типовые примеры и задачи для самостоятельного решения

Пример 3. Предприятие производит продукцию двух видов – А и Б. Данные о производстве представлены в табл. 7.

Данные о производстве предприятия

	Показатели по продуктам		Максимально возможная загрузка в неделю, часов
	А	Б	
Сборочный цех	2 единицы в час	4 единицы в час	100
Отделочный цех	3 единицы в час	2 единицы в час	90
Валовая прибыль	25 тыс. руб. за единицу	40 тыс. руб. за единицу	

Руководство предприятия ставит своей целью наиболее прибыльное сочетание этих двух видов продукции.

Решение. Пусть x_1 – количество единиц продукции вида А, x_2 – количество единиц продукции вида Б.

Целевая функция – валовая прибыль $f(x_1, x_2) = 25x_1 + 40x_2$.

Ограничения:

1) по производительности и загрузке сборочного цеха:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 100;$$

2) по производительности и загрузке отделочного цеха:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 90;$$

3) требование неотрицательности количества продукции:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Математическая формулировка задачи:

$$25x_1 + 40x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 100; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 90; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Методы решения задач линейного программирования были рассмотрены в рамках изучения дисциплины «Математическое программирование». Данная задача содержит две переменные, следовательно, может быть решена графическим методом, также рассматриваемую задачу можно решить аналитически.

При решении практических задач прежде всего внимание уделяют переходу от экономической постановки проблемы к математической формулировке, далее вычисления проводят с использованием специального программного обеспечения. Широко распространенным средством решения задач линейного программирования является надстройка «Поиск решения» электронных таблиц Excel. Кроме того, существуют онлайн-сервисы, предназначенные для решения задач линейного программирования, например, калькулятор симплекс-метода [14], которым воспользуемся далее.

Ввод данных представлен на рис. 4.

Ответ представлен на рис. 5.

Получили, что максимальное значение валовой прибыли, составляющее 1 100 тыс. руб., то есть 1,1 млн руб., может быть получено при производстве 20 единиц продукции вида А и 15 единиц продукции вида Б.

The image shows a web-based calculator for the Simplex method. The title is 'Калькулятор симплекс-метода'. It includes input fields for the number of variables (set to 2) and constraints (set to 2). The objective function is defined as $25x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$. There are two constraints: $2x_1 + 4x_2 \leq 100$ and $3x_1 + 2x_2 \leq 90$. Below these, it states $x_1, x_2 \geq 0$. There are two radio buttons: 'В виде дробей' (unchecked) and 'С решением' (checked). A dropdown menu is set to 'Базовый симплекс-метод'. At the bottom are three buttons: 'Очистить', 'Решить', and 'В двойственную'.

Рис. 4. Ввод данных в калькулятор симплекс-метода

Введённые данные

$$25 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 100$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 90$$

Ответ

$$x_1 = 20, x_2 = 15, F = 1100$$

Решение базовым симплекс-методом

Для каждого ограничения с неравенством **добавляем дополнительные переменные** x_3 и x_4 .

Перепишем ограничения в каноническом виде:

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_3 = 100$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 90$$

Ищем начальное базисное решение:

Ограничение 1 содержит неравенство, базисной будет добавленная дополнительная переменная x_3

Ограничение 2 содержит неравенство, базисной будет добавленная дополнительная переменная x_4

Начальная симплекс-таблица

С	25	40	0	0	0
базис	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	2	4	1	0	100
x_4	3	2	0	1	90

Рис. 5. Решение примера 3

Пример 4. Условие задачи сформулировано в методическом пособии [15].

Строительная организация планирует сооружение домов типа Д-1, Д-2, Д-3 с одно-, двух- и трехкомнатными квартирами. Данные приведены в табл. 8.

Таблица 8

Данные о типах домов и квартир

Типы квартир	Тип дома			Годовой план ввода жилой площади
	Д-1	Д-2	Д-3	
Однокомнатная	10	20	15	700
Двухкомнатная	50	60	30	2 000
Трехкомнатная	35	10	5	600
Плановая себестоимость, млн условных единиц	7	4	3	—

Требуется составить годовой план строительства домов так, чтобы выполнить план с наименьшей себестоимостью.

Решение.

Пусть x_1, x_2, x_3 – количество домов Д-1, Д-2, Д-3 соответственно.

Целевая функция – себестоимость $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 + 4x_2 + 3x_3$.

Ограничения:

1) по годовому плану ввода жилой площади однокомнатных квартир:

$$10x_1 + 20x_2 + 15x_3 = 700;$$

2) по годовому плану ввода жилой площади двухкомнатных квартир:

$$50x_1 + 60x_2 + 30x_3 = 2\,000;$$

3) по годовому плану ввода жилой площади трехкомнатных квартир:

$$35x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 600;$$

4) требование неотрицательности количества домов:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Математическая формулировка задачи:

$$7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 = 700; \\ 50x_1 + 60x_2 + 30x_3 = 2\,000; \\ 35x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 600; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Для решения данной задачи снова воспользуемся калькулятором симплекс-метода [14].

Ввод данных представлен на рис. 6.

Калькулятор симплекс-метода

Количество переменных:

Количество ограничений:

Целевая функция:
 x_1 + x_2 + $x_3 \rightarrow$

Ограничения:

x_1 + x_2 + $x_3 =$

x_1 + x_2 + $x_3 =$

x_1 + x_2 + $x_3 =$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

☐ В виде дробей
☒ С решением

Базовый симплекс-метод

Рис. 6. Ввод данных в калькулятор симплекс-метода

Ответ представлен на рис. 7.

Введённые данные

$$7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \rightarrow \min$$

$$10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 = 700$$

$$50 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 = 2000$$

$$35 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 600$$

Ответ

$$x_1 = 10, x_2 = 15, x_3 = 20, F = 190$$

Решение базовым симплекс-методом

Ищем начальное базисное решение:
 Ограничение 1 содержит равенство. Базисная переменная для этого ограничения будет определена позднее.
 Ограничение 2 содержит равенство. Базисная переменная для этого ограничения будет определена позднее.
 Ограничение 3 содержит равенство. Базисная переменная для этого ограничения будет определена позднее.

Начальная симплекс-таблица

	C	7	4	3	0
базис	x_1	x_2	x_3	b	
$?_1$	10	20	15	700	
$?_2$	50	60	30	2000	
$?_3$	35	10	5	600	

Ищем базис
 В качестве базисной переменной $?_1$ берём x_1 .

Рис. 7. Решение примера 4

Получили, что минимальное значение себестоимости, составляющее 190 млн руб., может быть получено при возведении 10 домов Д-1, 15 домов Д-2 и 20 домов Д-3.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3. Условие задачи сформулировано в методическом пособии [15].

С помощью трех технологических способов выпускают три вида продукции. При использовании I технологического способа в течение всего рассматриваемого периода выпускается одновременно 3 единицы продукции первого вида, 4 единицы – второго, 5 единиц – третьего вида, а затраты труда при этом составляют 20 человеко-дней. Аналогичные данные для II и III технологических способов указаны в соответствующих строчках таблицы согласно номеру варианта (табл. 9–23).

Найдите продолжительность использования технологических способов так, чтобы выполнить или перевыполнить план при наименьших затратах труда.

Варианты 1, 16

Таблица 9

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	2	3	1	12
III	1	6	3	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 0, f(3, 3, 0) = 96$.

Варианты 2, 17

Таблица 10

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	2	3	1	12
III	3	6	3	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 6, f(0, 0, 6) = 48$.

Варианты 3, 18

Таблица 11

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	2	3	1	12
III	2	4	1	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 3, f(3, 0, 3) = 84$.

Таблица 12

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	2	3	1	12
III	1	1	1	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 0, f(3, 3, 0) = 96$.

Таблица 13

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	2	3	2	12
III	3	6	3	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 6, f(0, 0, 6) = 48$.

Варианты 6, 21

Таблица 14

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	2	1	1	12
III	2	4	1	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 3, f(3, 0, 3) = 84$.

Варианты 7, 22

Таблица 15

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	2	3	1	12
III	1	4	1	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 0, f(3, 3, 0) = 96$.

Таблица 16

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	1	3	2	12
III	3	6	3	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 6, f(0, 0, 6) = 48$.

Таблица 17

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	2	1	2	12
III	2	4	1	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 3, f(3, 0, 3) = 84$.

Таблица 18

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	2	3	1	12
III	1	2	2	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 0, f(3, 3, 0) = 96$.

Таблица 19

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	1	5	2	12
III	3	6	3	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 6, f(0, 0, 6) = 48$.

Таблица 20

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	2	2	2	12
III	2	4	1	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 3, f(3, 0, 3) = 84$.

Таблица 21

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	2	3	1	12
III	1	5	2	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 0, f(3, 3, 0) = 96$.

Таблица 22

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	3	4	2	12
III	3	6	3	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 6, f(0, 0, 6) = 48$.

Таблица 23

Данные о технологических способах выпуска продукции

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	Первого вида	Второго вида	Третьего вида	
I	3	4	5	20
II	1	2	2	12
III	2	4	1	8
Плановый выпуск продукции, единиц	15	20	18	—

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 3, f(3, 0, 3) = 84$.

3. МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА ЛЕОНТЬЕВА

3.1. Описание модели межотраслевого баланса

Для удовлетворения конечного спроса требуется затратить часть произведенной продукции внутри производственной сферы.

Межотраслевым балансом называют модель (*модель Леонтьева*), которая отражает связи между выпуском продукции в одной отрасли и затратами продукции, необходимыми для обеспечения этого выпуска, всех участвующих отраслей.

В межотраслевых балансовых моделях предполагается, что производственный сектор экономики разделен на несколько отраслей. Каждая отрасль производит один продукт, часть продуктов потребляют отрасли, в том числе и производитель, а остальное – конечный потребитель [16].

В динамической модели Леонтьева часть конечного продукта тратят на инвестиции.

Каноническая (структурная) форма статической модели Леонтьева имеет вид

$$AX + C = X, \quad (37)$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – произведенные продукты (эндогенные переменные); *вектор выпуска* – промежуточный спрос, выражающий потребление производством; $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ – конечный спрос (экзогенные переменные), *вектор потребления*. $A = (a_{ij})$ – матрица технологических коэффициентов (структурная матрица экономики, *матрица прямых затрат*), элемент a_{ij} (*коэффициент прямых затрат*) которой показывает долю произведенного i -й отраслью продукта, потребленного j -й отраслью.

Приведенная форма модели Леонтьева имеет вид

$$X = BC, \quad (38)$$

где $B = (E - A)^{-1}$ – мультипликатор Леонтьева – матрица, обратная разности единичной матрицы и матрицы A .

Систему межотраслевых связей, в которой вся произведенная продукция состоит из двух частей: одна часть продукции (промежуточный продукт) идет на потребление в сфере производства, а другая часть (конечный продукт) потребляется вне производственной сферы – конечный спрос, называют *открытой*.

Межотраслевой баланс можно назвать основой плановой экономики. Применение модели межотраслевого баланса позволяет избежать как дефицита, так и перепроизводства продукции.

3.2. Продуктивность модели Леонтьева

Одна из основных задач межотраслевого баланса – найти при заданной матрице прямых затрат A экономической системы в условиях баланса совокупный выпуск X , необходимый для удовлетворения заданного спроса C .

Равенство (38) позволяет найти вектор X по известным матрицам A и C (в случае если матрица $E - A$ обратима). Учитывая экономическую интерпретацию, очевидно, что вектор конечного спроса C неотрицателен. Исходя из тех же соображений, вектор выпуска X также должен быть неотрицателен.

Поэтому говорят, что модель Леонтьева *продуктивна*, если уравнение (37) имеет неотрицательное решение для любого неотрицательного вектора C , то есть матрица A позволяет произвести любой неотрицательный вектор потребления. Матрицу A в этом случае также называют *продуктивной*.

В силу равенства (38) и неотрицательности вектора C можно утверждать, что модель Леонтьева с матрицей A продуктивна тогда и только тогда, когда существует неотрицательная матрица, обратная к $E - A$.

Можно также доказать, что модель Леонтьева с матрицей A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица имеет собственное число $\lambda_A < 1$, которое к тому же является наибольшим по модулю из всех собственных чисел матрицы A .

единицу продукции произведенной i -й отраслью; $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ – вектор цен, компоненты которого p_i представляют собой цены за единицу продукции произведенной i -й отраслью.

Цены в открытой системе межотраслевых связей могут быть определены из системы уравнений, каждое из которых устанавливает, что цена единицы продукции производящей отрасли должна быть равна совокупным издержкам производства в расчете на единицу выпущенной в этой отрасли продукции. В издержки входит не только плата за ресурсы, приобретенные в данной отрасли и других отраслях, но и добавленная стоимость (зарплата, прибыль предпринимателей, правительственные налоги и др.).

В матричной форме указанная система уравнений имеет вид

$$(E - A)^T P = V. \quad (40)$$

Из уравнения (40) получим выражение для вектора цен

$$P = \left((E - A)^T \right)^{-1} V. \quad (41)$$

3.5. Простейшая модель экспорта-импорта модели Леонтьева

Открытую систему межотраслевых связей можно рассматривать не только на уровне экономики одного государства, но и распространить на случай, когда государство начинает импортировать и экспортировать продукцию производственных отраслей, в то время как конечный спрос остается на прежнем уровне. В описанной ситуации устанавливается новый баланс между затратами и выпуском. Структурная матрица экономики A и мультипликатор Леонтьева $B = (E - A)^{-1}$ остаются прежними, изменяется конечный спрос.

В вектор конечного спроса по каждой отрасли необходимо добавить объем экспорта и вычесть из него объем импорта:

$$c_i^{EI} = c_i + EI_i, \quad (42)$$

где c_i^{EI} – объем конечного продукта i -й отрасли при наличии экспорта-импорта; c_i – неизменившийся конечный спрос на продукцию i -й отрасли; EI_i – объем экспорта ($EI_i > 0$) или импорта ($EI_i < 0$) продукции i -й отрасли.

С учетом указанных изменений вектор выпуска X вычисляется по формуле

$$X = (E - A)^{-1} C^{EL}, \quad (43)$$

где $C^{EI} = C + EI$; C – неизменившийся конечный спрос; EI – объем экспорта-импорта.

Вычислив вектор выпуска X , можно найти элементы матрицы нового межотраслевого баланса.

3.6. Матричная модель на уровне предприятий

Пусть производственный кластер состоит из n предприятий, каждое из которых имеет совокупный производственный потенциал U_i [17]. Предполагается, что этот потенциал изменяется со временем.

Будем считать, что часть потенциала каждого из объектов кластера расходуется либо на взаимодействие в процессе производства с каждым из других объектов кластера, либо остается в резерве, а другая часть направлена на сторонние взаимодействия. Обозначим сторонний потенциал i -го предприятия через Y_i ; предполагается, что этот потенциал также будет зависеть от времени. Предполагается, что сторонний потенциал может быть задан определенной величиной.

Совокупный производственный потенциал объекта принимают равным сумме всех его потенциалов, направленных на производственные взаимодействия внутри кластера и стороннего потенциала.

Тогда имеет место система уравнений вида

$$U_i = \sum_{j=1}^n U_{ij} + Y_i, \quad (44)$$

где U_{ij} – величина производственного взаимодействия i -го предприятия с j -м. Отношения

$$v_{ij} = \frac{U_{ij}}{U_i} \quad (45)$$

называют *коэффициентами собственных потенциалов*. Коэффициент v_{ij} показывает затраты потенциала i -го предприятия кластера на производство единицы продукции j -го предприятия. Полагают, что v_{ij} существенно изменяется во времени в период установления кластера, а после завершения переходного процесса может считаться постоянной величиной.

Из равенства (45) следует, что

$$U_{ij} = v_{ij} \cdot U_i, \quad (46)$$

таким образом, уравнения (44) примут вид

$$U_i = \sum_{j=1}^n v_{ij} \cdot U_i + Y_i \quad (47)$$

или в матричном виде

$$U = V \cdot U + Y, \quad (48)$$

где $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)^T$ – вектор совокупных производственных потенциалов предприятий кластера;

$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ – вектор сторонних потенциалов;

$V = (v_{ij})$ – матрица затрат потенциала кластера на производство.

Уравнение (48) называют уравнением линейного баланса потенциалов внутри кластера.

Путем преобразований уравнение (48) можно переписать в виде

$$Y = (E - V) \cdot U \quad (49)$$

или в виде

$$U = (E - V)^{-1} \cdot Y. \quad (50)$$

Равенство (49) позволяет определить вектор сторонних потенциалов, исходя из известной матрицы затрат потенциала кластера на производство и известного вектора совокупных производственных потенциалов предприятий кластера. Равенство (50) позволяет определить вектор совокупных производственных потенциалов предприятий кластера, исходя из известной матрицы затрат потенциала кластера на производство и известного вектора сторонних потенциалов.

3.7. Типовые примеры и задачи для самостоятельного решения

Пример 5. На основании заданных коэффициентов прямых материальных затрат и объемов конечной продукции в межотраслевом балансе для трех отраслей (табл. 24) требуется: определить, является ли матрица коэффициентов прямых материальных затрат продуктивной; рассчитать коэффициенты полных материальных затрат; найти объемы валовой продукции отраслей.

Таблица 24

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,2	0,05	0,48	135
II	0,12	0,03	0,72	70
III	0,06	0,04	0,56	35

Решение. Для определения продуктивности матрицы коэффициентов прямых материальных затрат воспользуемся утверждением из подразд. 3.2 о продуктивности модели Леонтьева, а, следовательно, и о продуктивности матрицы этой модели. Согласно указанному утверждению, модель Леонть-

ева с матрицей A продуктивна тогда и только тогда, когда существует неотрицательная матрица, обратная к $E - A$. Другими словами, необходимо найти матрицу, обратную к матрице $E - A$, если она существует, и убедиться в неотрицательности ее коэффициентов.

Обратную матрицу $B = (E - A)^{-1}$ можно найти одним из методов, которые были рассмотрены при изучении дисциплины «Высшая математика», например, методом элементарных преобразований или методом присоединенной матрицы; при этом существуют также онлайн-калькуляторы, позволяющие обращаться матрицы. Операция обращения матриц присутствует в системах компьютерной алгебры, кроме того, в виде встроенной функции в электронных таблицах. Воспользуемся встроенной функцией МОБР(массив) электронных таблиц Excel.

Результаты вычислений представлены на рис. 8.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			0,2	0,05	0,48		
3		A=	0,12	0,03	0,72		
4			0,06	0,04	0,56		
5							
6			1,2	-0,05	-0,48		
7		E-A=	-0,12	0,97	-0,72		
8			-0,06	-0,04	0,44		
9							
10			0,899	0,093	1,133		
11		B=	0,217	1,128	2,082		
12			0,142	0,115	2,617		
13							
14							

Рис. 8. Вычисление матрицы, обратной к $E - A$

На рис. 8 видно, что все элементы матрицы $B = (E - A)^{-1}$ неотрицательны, следовательно матрица A продуктивна. Элементы матрицы $B = (E - A)^{-1}$ являются коэффициентами полных материальных затрат.

Объемы валовой продукции отраслей – это компоненты вектора $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, которые можно найти по формуле (38). Расчеты объемов валовой продукции отраслей в электронной таблице Excel представлены на рис. 9. Для умножения матриц воспользовались встроенной функцией МУМНОЖ(массив1; массив2).

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3			0,899	0,093	1,133		
4		B=	0,217	1,128	2,082		
5			0,142	0,115	2,617		
6							
7							
8			135				
9		C=	70				
10			35				
11							
12			167,6				
13		X=	181,1				
14			118,9				
15							
16							

Рис. 9. Вычисление вектора $X = (x_1, x_2, x_3)^T$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4. На основании заданных коэффициентов прямых материальных затрат и объемов конечной продукции в межотраслевом балансе для трех отраслей (табл. 25–39, согласно номеру варианта) требуется определить, является ли матрица коэффициентов прямых материальных затрат продуктивной.

Задача 5. На основании заданных коэффициентов прямых материальных затрат и объемов конечной продукции в межотраслевом балансе для трех отраслей (см. табл. 25–39, согласно номеру варианта) требуется рассчитать коэффициенты полных материальных затрат и найти объемы валовой продукции отраслей.

Варианты 1, 16

Таблица 25

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,3	0,2	0,1	330
II	0,1	0,3	0,2	90
III	0,2	0,1	0,3	65

Варианты 2, 17

Таблица 26

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,1	0,3	0,2	120
II	0,3	0,2	0,1	230
III	0,2	0,1	0,3	350

Варианты 3, 18

Таблица 27

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,3	0,1	0,2	240
II	0,2	0,3	0,1	325
III	0,1	0,2	0,3	480

Варианты 4, 19

Таблица 28

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,3	0,1	0,2	162
II	0,1	0,2	0,3	70
III	0,2	0,3	0,1	21

Варианты 5, 20

Таблица 29

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,2	0,1	0,3	186
II	0,1	0,3	0,2	130
III	0,3	0,2	0,1	48

Варианты 6, 21

Таблица 30

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,1	0,2	0,4	310
II	0,2	0,3	0,1	90
III	0,1	0,1	0,2	70

Варианты 7, 22

Таблица 31

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,2	0,1	0,3	135
II	0,1	0,3	0,2	105
III	0,3	0,2	0,1	40

Варианты 8, 23

Таблица 32

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,1	0,2	0,4	210
II	0,2	0,3	0,1	90
III	0,1	0,1	0,2	80

Варианты 9, 24

Таблица 33

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,1	0,2	0,1	160
II	0,3	0,1	0,2	75
III	0,2	0,3	0,3	45

Варианты 10, 25

Таблица 34

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,3	0,01	0,2	170
II	0,1	0,2	0,3	115
III	0,2	0,3	0,1	35

Варианты 11, 26

Таблица 35

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,3	0,2	0,1	120
II	0,2	0,1	0,3	85
III	0,1	0,3	0,2	35

Варианты 12, 27

Таблица 36

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,2	0,3	0,1	240
II	0,3	0,1	0,2	20
III	0,1	0,2	0,3	60

Варианты 13, 28

Таблица 37

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,2	0,1	0,3	230
II	0,1	0,3	0,2	70
III	0,3	0,2	0,2	80

Варианты 14, 29

Таблица 38

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,2	0,1	0,3	160
II	0,3	0,2	0,1	70
III	0,1	0,3	0,2	25

Таблица межотраслевого баланса для трех отраслей

Отрасль	Коэффициенты затрат			Конечный спрос
	I	II	III	C_i
I	0,1	0,2	0,3	150
II	0,2	0,3	0,1	40
III	0,3	0,1	0,1	35

4. МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Понятие экономических рядов динамики

Рядом динамики (временным рядом) называют последовательность значений экономического показателя в определенные моменты или за определенные периоды времени, представленную в хронологическом порядке:

$$y_1, y_2, \dots, y_t, \dots \quad (51)$$

Значения y_t экономического показателя Y в момент (за период) времени t , составляющие ряд динамики, называют *уровнями ряда* (уровнями временного ряда, уровнями ряда динамики).

Каждый уровень ряда формируется под воздействием множества различных факторов, среди которых особо выделяют три группы:

- факторы, формирующие тенденцию ряда;
- факторы, формирующие периодические колебания ряда;
- случайные факторы [18].

Долговременное влияние факторов на динамику показателя Y во многих случаях формирует некоторую тенденцию, которая с определенной степенью приближения может быть выражена некоторой аналитической функцией. Функцию $T = f(t)$, которая аналитически, то есть в виде формулы, описывает тенденцию ряда динамики (51), называют *трендом*.

Существует множество экономических показателей, которые подвержены более или менее регулярным колебаниям. Периодические колебания, связанные со сменой времен года и имеющие выраженную годовую периодичность, называют *сезонностью*. Колебания с периодом, длящимся более года, как правило, несколько лет, принято называть *циклическими колебаниями* или *циклом*.

Тренд, сезонность (и / или цикл) принято называть *систематическими компонентами* ряда динамики, а факторы, под воздействием которых формируются систематические компоненты, – *систематическими факторами*.

Отклонения уровней ряда динамики экономического показателя от значений, сформированных под действием систематических факторов, являются следствием влияния многочисленных случайных и / или неучтенных факторов, суммарное воздействие которых называют *случайностью* (*случайной ошибкой*) или *случайной компонентой*.

4.2. Тренд-сезонные экономические процессы и их анализ

Модели экономических процессов, которые можно представить в виде ряда динамики, уровни которого сформированы под действием систематических компонент тренда T и сезонности S , а также случайной компоненты E , будем называть *тренд-сезонными моделями рядов динамики*.

Построение тренд-сезонной модели возможно на основе одного из двух предположений:

– каждый уровень временного ряда представлен как сумма трендовой, сезонной и случайной компонент – *аддитивная модель*:

$$Y = T + S + E ; \quad (52)$$

– каждый уровень временного ряда представлен как произведение трендовой, сезонной и случайной компонент – *мультипликативная модель*:

$$Y = T \cdot S \cdot E . \quad (53)$$

Выбор одной из двух моделей обусловлен амплитудой сезонных колебаний. Аддитивная модель (52) предпочтительна, если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, мультипликативная модель (53) – если амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается.

Если в ряде динамики присутствует тренд и сезонность, то значения каждого уровня ряда зависят от предыдущих значений. Корреляционную зависимость между последовательными уровнями ряда называют *автокорреляцией уровней ряда*.

Количественно автокорреляцию уровней ряда можно измерить с помощью парного линейного коэффициента корреляции (1) между уровнями исходного ряда и уровнями этого же ряда, сдвинутыми на несколько моментов (периодов) времени. Количество сдвинутых моментов (периодов) времени называют *лагом*. Рассчитанный указанным способом коэффициент корреляции при лаге, равном k , называется коэффициентом *автокорреляции* k -го порядка (коэффициентом автокорреляции порядка k).

Последовательность коэффициентов автокорреляции первого, второго и следующих порядков называют *автокорреляционной функцией* ряда динамики. График зависимости значений коэффициентов автокорреляции от величины лага (порядка коэффициента автокорреляции) называется *коррелограммой*.

Наибольшему по абсолютной величине значению коэффициента автокорреляции соответствует лаг, при котором связь между текущими и предыдущими уровнями ряда наиболее тесная, что позволяет сделать вывод о наличии или отсутствии сезонной компоненты. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, то ряд содержит только тренд и случайную компоненту. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка p , то ряд содержит сезонные колебания длительностью p моментов (периодов) времени. Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым (значения коэффициента автокорреляции незначимо отличаются от нуля), то либо ряд не содержит трендовой и сезонной компоненты, либо ряд содержит нелинейный тренд, для выявления которого необходимо провести дополнительный анализ.

4.3. Трендовые модели на основе кривых роста

Первичный анализ ряда динамики возможно провести по его графику, который представляет собой ломаную линию с узловыми точками, имеющими координаты $(t; y_t)$. График ряда динамики отражает влияние всех компонент, поэтому для выделения трендовой компоненты и нивелирования сезонной и случайной компонент проводят *сглаживание уровней ряда*.

Одним из способов сглаживания является *метод скользящей средней*. *Скользящая средняя* – это средняя арифметическая нескольких последовательных уровней ряда. Суть метода скользящей средней состоит в том, что на графике ряда в качестве ординат точек рассматривают не исходные уровни ряда, а соответствующие им скользящие средние. Таким образом, получают сглаженную линию более близкую к линии тренда, чем исходный график ряда. При этом сглаживание будет оптимальным, если количество слагаемых при расчете скользящей средней будет равно длительности периода.

Визуально по сглаженному графику ряда динамики можно выдвинуть гипотезу о наличии линейного тренда $T = a + bt$, если ординаты изменяются прямо пропорционально абсциссам (увеличиваются при $b > 0$ – линейный рост, уменьшаются при $b < 0$ – линейное снижение). В этом случае сглаженная линия близка к прямой, а оценки параметров a и b могут быть найдены методами регрессионного анализа (см. подразд. 1.6).

Горизонтальная линия свидетельствует об отсутствии тренда ($b = 0$), точнее, о наличии постоянного тренда. В данном случае уровни ряда формируются за счет некоторой постоянной a – среднего значения уровней, сезонной (при наличии) компоненты и случайной компоненты.

Случай, когда сглаженный график ряда динамики является кривой линией, свидетельствует о наличии нелинейного тренда. При этом, если с ростом абсциссы ордината возрастает, речь идет о *кривых роста*.

Трендовую модель на основе кривой роста выбирают, сравнивая вид сглаженной кривой с видом графика одной из известных функций: показательной, в частности, экспоненциальной; логарифмической; степенной; полиномиальной, чаще второй или третьей степени, и т. д. В соответствии с видом выбранной функции можно вести речь о показательном (экспоненциальном), логарифмическом, степенном, полиномиальном (второй степени, третьей степени и т. д.) росте значений ряда динамики.

При моделировании трендовой компоненты ряда динамики применяют методы регрессионного анализа. В ряде случаев нелинейные функции могут быть приведены к линейным путем линеаризации. Под *линеаризацией* понимают различные приемы, среди которых тождественные преобразования, логарифмирование, замена переменных и другие, позволяющие преоб-

разовать нелинейную функцию в линейную. Пример линеаризации приведен в подразд. 1.10.

4.4. Оценка адекватности и точности трендовых моделей

Оценку адекватности и точности как трендовых моделей, так и тренд-сезонных, проводят на основе значений случайных ошибок E_t – наблюдаемых значений случайной компоненты E , которые вычисляют после определения тренда и расчета значений сезонной компоненты (в случае ее наличия).

Одним из показателей качества построенной модели является коэффициент детерминации R^2 , который можно вычислить по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^n E_t^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2}, \quad (54)$$

где $E_t = y_t - \hat{y}_t$ – значения случайных ошибок;

y_t – уровни ряда (фактические значения показателя);

$\hat{y}_t$ – расчетные значения уровней ряда (значения показателя, вычисленные по модели);

$\bar{y}_t = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t$ – средняя арифметическая уровней ряда.

Числитель дроби в правой части равенства (54) называют суммой квадратов отклонений фактических значений уровня ряда от расчетных, вычисленных по модели; знаменатель – суммой квадратов отклонений уровней ряда от среднего значения.

Коэффициент детерминации R^2 численно выражает долю изменчивости уровней ряда, объясняемую изменчивостью системных компонент (трендовой и / или сезонной). Другими словами, коэффициент детерминации является показателем того, насколько точно и адекватно выбранная модель описывает закономерность изменения уровней ряда.

4.5. Прогнозирование экономической динамики на основе трендовых моделей

Прогнозирование экономической динамики на основе трендовых (или тренд-сезонных) моделей – это расчет будущих значений показателя с применением моделей, построенных на основе имеющихся значений показателя, представленных временным рядом.

Например, если нам известны значения показателя за четыре года, поквартально, то есть в нашем распоряжении шестнадцать значений: $y_1, y_2, \dots, y_{16}$, при этом нам удалось по этим значениям построить достаточно качественную трендовую модель $T = f(t)$, то прогнозируемое значение показателя на первый квартал пятого года мы можем найти как расчетное значение уровня ряда, соответствующее семнадцатому периоду: $\hat{y}_{17} = f(17)$.

Если построена тренд-сезонная модель, к примеру, помимо тренда $T = f(t)$ имеется сезонность и нам удалось рассчитать значение сезонной компоненты каждого квартала: S_1, S_2, S_3, S_4 , тогда прогнозируемое значение показателя, например, на второй квартал пятого года мы можем найти, как расчетное значение уровня ряда, соответствующее восемнадцатому периоду: $\hat{y}_{18} = f(18) + S_2$ для аддитивной модели или $\hat{y}_{18} = f(18) \cdot S_2$ для мультипликативной.

Существуют формулы для расчета интервальных прогнозов, но они в большей степени применимы для регрессионных зависимостей с некоррелируемыми значениями переменных, в то время как рядам динамики свойственна автокорреляция.

4.6. Типовые примеры и задачи для самостоятельного решения

Пример 6. По данным об объеме ввода жилья в Новосибирской области [19] составлен ряд динамики ежемесячного объема ввода жилья y_t , млн м², за период с 2015 по 2021 гг. (табл. 40).

Первый номер периода ($t = 1$) соответствует январю 2015 г., последний ($t = 84$) – декабрю 2021 г.

Таблица 40

Динамика ежемесячного объема ввода жилья, млн м²

Номер периода, t	y_t , млн м ²	Номер периода, t	y_t , млн м ²	Номер периода, t	y_t , млн м ²
1	213981	29	71936	57	123588
2	263076	30	232473	58	128185
3	183155	31	57150	59	75437
4	76966	32	116130	60	532844
5	102139	33	235364	61	128089
6	285093	34	119904	62	239940
7	194539	35	125364	63	111580
8	90011	36	455427	64	71499
9	369906	37	117536	65	52362
10	186182	38	207607	66	148847
11	240506	39	117208	67	126533
12	379418	40	85432	68	207887
13	118870	41	53091	69	205658
14	217836	42	161601	70	202196
15	136842	43	34832	71	143492
16	122647	44	102721	72	434455
17	80161	45	175731	73	92897
18	227383	46	81725	74	99904
19	155390	47	201240	75	210909
20	102960	48	517184	76	95007
21	310290	49	75942	77	103989
22	110581	50	47805	78	135266
23	147005	51	122832	79	108107
24	598667	52	73632	80	192459
25	71775	53	103145	81	285926
26	33123	54	231620	82	331904
27	175379	55	159665	83	181893
28	31874	56	81850	84	166739

По данным табл. 40 построить тренд-сезонную модель динамики ежемесячного объема ввода жилья y_t .

На графике ряда видно, что имеют место колебания значений показателя. Необходимо определить, являются ли они сезонными или носят несистематический характер.

Файл Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование

Вставить Вырезать Копировать Формат по образцу

Буфер обмена Шрифт

H13 =КОРРЕЛ(E2:E73;E14:E85)

	D	E	F	G	H	I
	t	y(t)		лаг	коэффициент автокорреляции	
1						
2	1	213981		1	-0,08	
3	2	263076		2	-0,09	
4	3	183155		3	0,20	
5	4	76966		4	-0,27	
6	5	102139		5	-0,25	
7	6	285093		6	0,21	
8	7	194539		7	-0,23	
9	8	90011		8	-0,18	
10	9	369906		9	0,18	
11	10	186182		10	-0,01	
12	11	240506		11	-0,13	
13	12	379418		12	0,74	
14	13	118870		13	-0,06	
15	14	217826		14	-0,06	

77

Для обеспечения статистической достоверности коэффициентов автокорреляции считают целесообразным использовать правило: максимальный лаг не должен превышать $\frac{n}{4} = \frac{84}{4} = 21$ [18].

В результате расчетов получили автокорреляционную функцию, представленную в табл. 41.

Таблица 41

Автокорреляционная функция динамики ежемесячного
объема ввода жилья

Лаг	Коэффициент автокорреляции
1	–0,08
2	–0,09
3	0,20
4	–0,27
5	–0,25
6	0,21
7	–0,23
8	–0,18
9	0,18
10	–0,01
11	–0,13
12	0,74
13	–0,06
14	–0,06
15	0,27
16	–0,29
17	–0,26
18	0,19
19	–0,30
20	–0,18
21	0,17

Анализ графика ряда динамики ежемесячного объема ввода жилья и автокорреляционной функции позволяет сделать вывод о наличии в изучаемом ряде сезонных колебаний периодичностью в двенадцать месяцев (наибольший по абсолютной величине коэффициент автокорреля-

ции имеет порядок равный двенадцати), т. е. мы имеем дело с годовым циклом.

Проведем сглаживание уровней ряда методом скользящей средней, которую рассчитаем по двенадцати значениям. При этом значения скользящей средней для первых пяти и последних шести значений уровня ряда не могут быть найдены в силу отсутствия соответствующих данных. Результаты расчетов представлены в табл. 42³. Кроме того, в четвертом столбце табл. 42 представлена центрированная скользящая средняя – полусумма двух последовательных скользящих средних, а в пятом столбце – оценка сезонной компоненты, найденная как разность между уровнем ряда и соответствующей ему центрированной скользящей средней.

Таблица 42

Значения скользящей средней и оценка сезонной компоненты

t	y_t	Скользящая средняя за год	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	213981	-	-	-
2	263076	-	-	-
3	183155	-	-	-
4	76966	-	-	-
5	102139	-	-	-
6	285093	215414	-	-
7	194539	207488	211451	-16912
8	90011	203718	205603	-115592
9	369906	199859	201789	168117
10	186182	203666	201762	-15580
11	240506	201834	202750	37756
12	379418	197025	199430	179988
13	118870	193763	195394	-76524
14	217836	194842	194302	23534
15	136842	189874	192358	-55516
16	122647	183574	186724	-64077
17	80161	175782	179678	-99517
18	227383	194053	184917	42466

³ Значения в табл. 42, 43 вычислены в электронной таблице Excel и округлены до целых.

Продолжение табл. 42

t	y_t	Скользящая средняя за год	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
19	155390	190128	192090	–36700
20	102960	174735	182432	–79472
21	310290	177947	176341	133949
22	110581	170382	174165	–63584
23	147005	169697	170040	–23035
24	598667	170121	169909	428758
25	71775	161934	166028	–76524
26	33123	163032	162483	23534
27	175379	156788	159910	–55516
28	31874	157565	157177	–64077
29	71936	155762	156663	–99517
30	232473	143825	149793	42466
31	57150	147638	145732	–36700
32	116130	162179	154909	–79472
33	235364	157331	159755	133949
34	119904	161794	159563	–63584
35	125364	160224	161009	–23035
36	455427	154318	157271	428758
37	117536	152458	153388	–35852
38	207607	151341	151899	55708
39	117208	146371	148856	–31648
40	85432	143190	144780	–59348
41	53091	149513	146351	–93260
42	161601	154659	152086	9515
43	34832	151193	152926	–118094
44	102721	137876	144534	–41813
45	175731	138345	138110	37621
46	81725	137361	137853	–56128
47	201240	141533	139447	61793
48	517184	147367	144450	372734
49	75942	157770	152569	–76627
50	47805	156031	156901	–109096
51	122832	151686	153858	–31026
52	73632	155557	153622	–79990

Продолжение табл. 42

t	y_t	Скользящая средняя за год	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
53	103145	145074	150316	–47171
54	231620	146379	145726	85894
55	159665	150724	148552	11113
56	81850	166736	158730	–76880
57	123588	165798	166267	–42679
58	128185	165620	165709	–37524
59	75437	161388	163504	–88067
60	532844	154491	157939	374905
61	128089	151730	153110	–25021
62	239940	162233	156981	82959
63	111580	169072	165652	–54072
64	71499	175239	172156	–100657
65	52362	180911	178075	–125713
66	148847	172712	176811	–27964
67	126533	169779	171245	–44712
68	207887	158109	163944	43943
69	205658	166387	162248	43410
70	202196	168346	167366	34830
71	143492	172648	170497	–27005
72	434455	171516	172082	262373
73	92897	169981	170748	–77851
74	99904	168695	169338	–69434
75	210909	175384	172039	38870
76	95007	186193	180788	–85781
77	103989	189393	187793	–83804
78	135266	167083	178238	–42972
79	108107	–	–	–
80	192459	–	–	–
81	285926	–	–	–

t	y_t	Скользящая средняя за год	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
82	331904	—	—	—
83	181893	—	—	—
84	166739	—	—	—

На рис. 12 представлен график динамики исходных уровней ряда и скользящих средних, рассчитанных по двенадцати значениям.



Рис. 12. Исходные данные и скользящие средние

График скользящих средних, изображенный на рис. 12, позволяет выдвинуть гипотезу о наличии линейного тренда.

В моделях с сезонной компонентой предполагают, что все сезонные воздействия за период погашают друг друга, что означает для аддитивной модели:

$$S_1 + S_2 + \dots + S_p = 0, \quad (55)$$

для мультипликативной модели:

$$S_1 + S_2 + \dots + S_p = p, \quad (56)$$

где p – длительность сезонных колебаний.

Если равенство (55) для аддитивной модели или равенство (56) для мультипликативной верно, то значение сезонной компоненты $S_i = \overline{S_i}$, $i = 1, 2, \dots, p$. В противном случае вычисляют корректирующий коэффициент

$$k = \frac{\sum_{i=1}^p \overline{S_i}}{4} \quad (57)$$

для аддитивной модели или

$$k = \frac{p}{\sum_{i=1}^p \overline{S_i}} \quad (58)$$

для мультипликативной. Скорректированное значение сезонной компоненты для аддитивной модели $S_i = \overline{S_i} - k$, для мультипликативной – $S_i = k \cdot \overline{S_i}$.

Для расчета значений S_i – скорректированных оценок сезонной компоненты (десятый столбец табл. 43) – оценки четвертого столбца табл. 42 переписали по месяцам в табл. 43, вычислили среднюю оценку сезонной компоненты $\overline{S_i}$ за каждый месяц $i = 1, 2, \dots, 12$, вычисли корректирующий коэффициент.

Таблица 43

Расчет значений сезонной компоненты

Месяц	2015 г.	2016 г.	2017 г.	2018 г.	2019 г.	2020 г.	2021 г.	$\overline{S_i}$	S_i
1	-	-76524	-76524	-35852	-76627	-25021	-77851	-61400	-64508
2	-	23534	23534	55708	-109096	82959	-69434	1201	-1908
3	-	-55516	-55516	-31648	-31026	-54072	38870	-31485	-34593
4	-	-64077	-64077	-59348	-79990	-100657	-85781	-75655	-78764
5	-	-99517	-99517	-93260	-47171	-125713	-83804	-91497	-94605
6	-	42466	42466	9515	85894	-27964	-42972	18234	15125
7	-16912	-36700	-36700	-118094	11113	-44712	-	-40334	-43443
8	-115592	-79472	-79472	-41813	-76880	43943	-	-58214	-61323
9	168117	133949	133949	37621	-42679	43410	-	79061	75953
10	-15580	-63584	-63584	-56128	-37524	34830	-	-33595	-36704
11	37756	-23035	-23035	61793	-88067	-27005	-	-10265	-13374
12	179988	428758	428758	372734	374905	262373	-	341253	338144
Сумма								37304	0

Корректирующий коэффициент $k \approx \frac{37304}{12} \approx 3108,67$ вычислен по формуле (57).

Вычитая из каждого уровня ряда y_t найденное значение S_i , получим последовательность статистических значений $T + E$ (табл. 44), по которой аналогично примеру 1 подразд. 1.10 можно определить параметры линейной регрессионной зависимости T от t и записать уравнение тренда (регрессии T от t)

$$T_t = 195272 - 581t. \quad (59)$$

Таблица 44

Таблица значений уровня ряда и составляющих его компонент

t	y_t	S_i	$y_t - S_i = T + E$	T_t	E_t
1	213981	-64508	278489	194691	83798
2	263076	-1908	264984	194110	70873
3	183155	-34593	217748	193530	24219
4	76966	-78764	155730	192949	-37219
5	102139	-94605	196744	192368	4376
6	285093	15125	269968	191787	78180
7	194539	-43443	237982	191207	46775
8	90011	-61323	151334	190626	-39292
9	369906	75953	293953	190045	103908
10	186182	-36704	222886	189464	33421
11	240506	-13374	253880	188883	64997
12	379418	338144	41274	188303	-147029
13	118870	-64508	183378	187722	-4343
14	217836	-1908	219744	187141	32603
15	136842	-34593	171435	186560	-15125
16	122647	-78764	201411	185980	15431
17	80161	-94605	174766	185399	-10632
18	227383	15125	212258	184818	27440
19	155390	-43443	198833	184237	14596
20	102960	-61323	164283	183657	-19374
21	310290	75953	234337	183076	51262
22	110581	-36704	147285	182495	-35210
23	147005	-13374	160379	181914	-21535
24	598667	338144	260523	181333	79190

Продолжение табл. 44

t	y_t	S_i	$y_t - S_i = T + E$	T_t	E_t
25	71775	-64508	136283	180753	-44469
26	33123	-1908	35031	180172	-145141
27	175379	-34593	209972	179591	30381
28	31874	-78764	110638	179010	-68373
29	71936	-94605	166541	178430	-11888
30	232473	15125	217348	177849	39499
31	57150	-43443	100593	177268	-76675
32	116130	-61323	177453	176687	766
33	235364	75953	159411	176107	-16695
34	119904	-36704	156608	175526	-18918
35	125364	-13374	138738	174945	-36207
36	455427	338144	117283	174364	-57081
37	117536	-64508	182044	173783	8261
38	207607	-1908	209515	173203	36312
39	117208	-34593	151801	172622	-20821
40	85432	-78764	164196	172041	-7846
41	53091	-94605	147696	171460	-23764
42	161601	15125	146476	170880	-24404
43	34832	-43443	78275	170299	-92024
44	102721	-61323	164044	169718	-5674
45	175731	75953	99778	169137	-69359
46	81725	-36704	118429	168557	-50128
47	201240	-13374	214614	167976	46638
48	517184	338144	179040	167395	11645
49	75942	-64508	140450	166814	-26364
50	47805	-1908	49713	166233	-116521
51	122832	-34593	157425	165653	-8227
52	73632	-78764	152396	165072	-12676
53	103145	-94605	197750	164491	33259
54	231620	15125	216495	163910	52584
55	159665	-43443	203108	163330	39778

t	y_t	S_i	$y_t - S_i = T + E$	T_t	E_t
56	81850	-61323	143173	162749	-19576
57	123588	75953	47635	162168	-114533
58	128185	-36704	164889	161587	3301
59	75437	-13374	88811	161007	-72196
60	532844	338144	194700	160426	34274
61	128089	-64508	192597	159845	32752
62	239940	-1908	241848	159264	82584
63	111580	-34593	146173	158683	-12510
64	71499	-78764	150263	158103	-7840
65	52362	-94605	146967	157522	-10554
66	148847	15125	133722	156941	-23220
67	126533	-43443	169976	156360	13616
68	207887	-61323	269210	155780	113430
69	205658	75953	129705	155199	-25493
70	202196	-36704	238900	154618	84282
71	143492	-13374	156866	154037	2829
72	434455	338144	96311	153457	-57146
73	92897	-64508	157405	152876	4530
74	99904	-1908	101812	152295	-50483
75	210909	-34593	245502	151714	93788
76	95007	-78764	173771	151133	22637
77	103989	-94605	198594	150553	48042
78	135266	15125	120141	149972	-29831
79	108107	-43443	151550	149391	2159
80	192459	-61323	253782	148810	104972
81	285926	75953	209973	148230	61744
82	331904	-36704	368608	147649	220959
83	181893	-13374	195267	147068	48199
84	166739	338144	-171405	146487	-317892

Значения трендовой компоненты T_t в пятом столбце табл. 44 вычислены по уравнению (59), значения случайной компоненты $E_t = y_t - (T + S_i)$ представлены в шестом столбце табл. 44.

Тренд-сезонная модель динамики ежемесячного объема ввода жилья y_t , построенная по данным табл. 40, состоит из уравнения тренда (59), значений S_i , $i = 1, 2, \dots, 12$ – скорректированных оценок сезонной компоненты (десятый столбец табл. 43) и значений случайной компоненты (шестой столбец табл. 44).

Пример 7. Оценить качество модели динамики ежемесячного объема ввода жилья y_t , млн м², за период с 2015 по 2021 гг., построенной в примере 6, и сделать прогноз объема ввода жилья в январе 2022 г.

Решение. На рис. 13 представлен ряд фактических значений уровня ряда и ряд соответствующих им значений, вычисленных по модели, построенной в примере 6.



Рис. 13. Ряд динамики ежемесячного объема ввода жилья

По рис. 13 можно визуально оценить, насколько модель отличается от фактического ряда динамики. Для аналитической оценки качества модели рассчитаем коэффициент детерминации по формуле (54), в которой $\hat{y}_t = T_t + S_i$ – расчетные значения уровней ряда (значения показателя, вычисленные по модели, T_t найдено по формуле (59)); $E_t = y_t - \hat{y}_t$ – значения случайных ошибок, записанные в шестом столбце табл. 44; y_t – уровни ряда

(фактические значения показателя, записанные во втором столбце табл. 44);

$\bar{y}_t = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t$ – средняя арифметическая уровней ряда.

В нашем примере:

$$\bar{y}_t = \frac{1}{84} \sum_{t=1}^{84} y_t \approx 170589,$$

$$\sum_{t=1}^n e_t^2 = \sum_{t=1}^{84} E_t^2 \approx 392652541511,$$

$$\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2 \approx \sum_{t=1}^{84} (y_t - 170589)^2 \approx 1086096040574,$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2} \approx 1 - \frac{392652541511}{1086096040574} \approx 0,64. \quad (60)$$

Равенство (60) означает, что 64 % изменчивости ежемесячного объема ввода жилья объясняет построенная модель, представленная суммой трендовой и сезонной компонент.

Прогнозируемое значение объема ввода жилья в январе 2022 г. равно $\hat{y}_{85} = T_{85} + S_1 \approx 195272 - 581 \cdot 85 + (-64508) = 81379$ (млн м²).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6. В табл. 45 представлены условные данные о значениях некоторого показателя за 2019–2022 гг.

Первый номер периода ($t = 1$) соответствует первому кварталу 2019 г., последний ($t = 16$) – четвертому кварталу 2021 г.

Необходимо решить задачу по данным своего варианта N – целое число от 1 до 30.

Числовые данные к задаче 6

Номер периода, t	y_t , условных единиц	Номер периода, t	y_t , условных единиц
1	$375 + N$	9	$390 + N$
2	$370 + N$	10	$365 + N$
3	$870 + N$	11	$995 + N$
4	$1005 + N$	12	$905 + N$
5	$360 + N$	13	$460 + N$
6	$470 + N$	14	$455 + N$
7	$990 + N$	15	$920 + N$
8	$1010 + N$	16	$950 + N$

По данным табл. 45 построить тренд-сезонную модель динамики показателя y_t , оценить качество построенной модели и сделать прогноз значения показателя во втором квартале 2023 г.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое позволяет обучающимися самостоятельно либо под руководством преподавателя освоить дисциплину «Экономико-математические модели управления» и проявить при решении задач компетенции, приобретенные ранее при изучении таких дисциплин, как «Высшая математика», «Дискретная математика», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Информатика», «Основы теории оптимизации», «Математическое программирование», «Математические основы теории систем», «Моделирование систем».

Освоение понятийного аппарата, изложенного в пособии, компетенции, приобретаемые обучающимися в результате изучения дисциплины «Экономико-математические модели управления», необходимы для дальнейшего осуществления научно-исследовательской и профессиональной деятельности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Раева Т. Д. Экономика : учеб. пособие. – Иваново : ИГЭУ, 2021. – 100 с.
2. Баранов С. В. Производственные функции: об истории, свойствах, проблемах и возможностях использования в региональных исследованиях // Экономический анализ: теория и практика. – 2012. – № 47. – С. 11–15.
3. Тумашев А. Р., Котенкова С. Н., Тумашева М. В. Экономическая теория. В 2 ч. Ч. 1: Введение в экономическую науку. Микроэкономика. – Казань : Казанский ун-т, 2011. – 203 с.
4. Промышленное производство в России. 2016 : стат. сб. / Росстат. – М., 2016. – 347 с.
5. Промышленное производство в России. 2021 : стат. сб. / Росстат. – М., 2021. – 305 с.
6. Шелехова Л. В. Методы оптимальных решений : учеб. пособие. – 2-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2022. – 304 с.
7. Волощук С. А., Гулакова С. А. Оптимизация производственной программы промышленного предприятия // ГВУЗ «Приазовский государственный технический университет». – 2008. – № 18-1. – С. 304–308.
8. Дятлов Ю. В. Производственная мощность: некоторые аспекты ее роли и методов расчета в условиях рынка // Вестник КузГТУ. – 2012. – № 4 (92). – С. 155–157.
9. Мижидон А. Д., Гармаев В. Д. Методы оптимизации: одномерная минимизация. Линейное программирование : учеб. пособие. – Улан-Удэ : ВСГУТУ, 2016. – 192 с.
10. Кашеварова Г. Г., Пермякова Т. Б., Лайщева М. Е. Численные методы решения задач строительства. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие. – Пермь : ПНИПУ, 2015. – 161 с.
11. Тюхтина А. А. Модели управления запасами : учеб.-метод. пособие. – Н. Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2017. – 84 с.

12. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2011. – 352 с.
13. Коган Д. И. Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация : учеб. пособие. – Н. Новгород : ННГУ, 2018. – 258 с.
14. Калькулятор симплекс-метода [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://programforyou.ru/calculators/simplex-method> (дата обращения: 15.04.2023).
15. Корзинников А. Д., Павлов В. В. Задачи математического программирования : метод. пособие для студ. инженерно-технических и экономических специальностей. – Минск : БНТУ, 2017. – 47 с.
16. Катаргин Н. В., Ларин О. Н., Венде Ф. Д. Анализ и моделирование логистических систем : учеб. для вузов. – Изд. 2-е, стер. – СПб. : Лань, 2021. – 248 с.
17. Модификация модели Леонтьева для описания региональных промышленных кластеров / С. О. Крамаров, Н. В. Пелихов, Л. В. Сахарова, В. В. Храмов // Вестник ГУУ. – 2019. – № 12. – С. 78–86.
18. Шалабанов А. К., Роганов Д. А. Эконометрика : учеб.-метод. пособие. – Казань : ТИСБИ, 2008. – 198 с.
19. Министерство строительства Новосибирской области [Электронный ресурс] : официальный сайт. – Режим доступа: <https://minstroy.nso.ru/page/>.

Учебное издание

Барлиани Амридон Гемзаевич

Крылова Елена Михайловна

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ

Редактор *О. В. Георгиевская*

Компьютерная верстка *О. И. Голиков*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 07.11.2023. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 5,41. Тираж 80 экз. Заказ 152.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 8.