

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»  
(СГУГиТ)

**АНАЛИЗ НАПРАВЛЕНИЙ РАЗВИТИЯ  
МЕТОДОВ ИЗУЧЕНИЯ ВНЕШНЕГО  
ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ**

Монография

*Под научной редакцией  
Е. М. Мазуровой*

Новосибирск  
СГУГиТ  
2025

УДК 528.24  
А64

Авторский коллектив:

*Е. М. Мазурова, Ю. М. Нейман, Л. С. Сугаипова,  
В. Ф. Канушин, Д. Н. Голдобин, И. Г. Ганагина, А. В. Мареев*

Рецензенты: доктор технических наук, профессор, научный руководитель  
университета МосГУГиК (МИИГАиК) *В. Б. Непоклонов*

доктор физико-математических наук, главный научный со-  
трудник ИНГГ СО РАН *В. Ю. Тимофеев*

- А64      Анализ направлений развития методов изучения внешнего гравита-  
ционного поля Земли** : монография / Е. М. Мазурова, Ю. М. Нейман,  
Л. С. Сугаипова, В. Ф. Канушин, Д. Н. Голдобин, И. Г. Ганагина, А. В. Ма-  
реев; под научной редакцией Е. М. Мазуровой. – Новосибирск : СГУГиТ,  
2025. – 272 с. – Текст : непосредственный.  
ISBN 978-5-907998-43-8

В монографии изложены основные результаты анализа классических и современных направлений развития методов изучения внешнего гравитационного поля Земли, а также рассмотрены технологический процесс предварительной обработки и анализ данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных как по результатам наземных гравиметрических, спутниковых и нивелирных измерений, так и по результатам работы космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GRACE-FO, GOCE.

Для научных работников, инженеров, аспирантов, студентов старших курсов геодезических специальностей. Может быть полезна преподавателям вузов по направлениям высшей и физической геодезии.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 528.24

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Сокращения и обозначения.....	6
Введение.....	8
1. Анализ классических методов представления гравитационного поля Земли .....	14
1.1. Классическая постановка краевой задачи геодезии .....	14
1.2. Условия существования и единственности решения краевой задачи Молоденского .....	19
1.3. О корректности краевой задачи Молоденского.....	24
1.4. Решение краевых задач геодезии с использованием рядов по шаровым функциям .....	28
1.5. Решение краевых задач для дифференциального уравнения Лапласа с помощью функций Грина.....	36
1.6. Другие решения краевой задачи Молоденского.....	40
1.6.1. Решение молоденского методом интегральных уравнений.....	40
1.6.2. Решение Бровара .....	45
1.6.3. Решение с помощью аналитического продолжения.....	50
1.6.4. Сходимость рядов Молоденского .....	52
1.7. О существовании и единственности решения нелинейной задачи Молоденского .....	58
1.8. Современные формулировки краевой задачи физической геодезии.....	69
1.9. Линейная краевая задача на эллипсоиде .....	74
1.10. Заключение по главе 1 .....	76
1.11.Список использованных источников к главе 1 .....	81
2. Анализ современных подходов к представлению гравитационного поля Земли, включая: коллокацию (статистический и функциональный подходы), вариационный метод регуляризации, метод оптимальных интегральных ядер, мультипольное представление потенциала, метод линейных и сферических дискретных преобразований, метод разномасштабной аппроксимации геопотенциала и другие альтернативные методы .....	86
2.1. Необходимые сведения о гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром .....	86
2.2. Критический анализ традиционного моделирования ГПЗ рядами Фурье по шаровым функциям .....	95

2.3. Разномасштабное моделирование сигналов с помощью сферических радиальных базисных функций .....	102
2.3.1. От сферических гармоник к сферическим масштабирующим функциям и линейным вейвлетам.....	102
2.3.2. Оценивание коэффициентов разложения свёртки по СРБФ методом наименьших квадратов .....	109
2.3.3. Численное интегрирование .....	114
2.3.4. Виды сферических масштабирующих функций и соответствующих вейвлетов .....	115
2.4. Среднеквадратическая коллокация .....	117
2.4.1. Чистая коллокация как обобщенная задача интерполяции.....	117
2.4.2. Обобщение на случай наличия ошибок в исходных измерениях.....	135
2.4.3. О выборе воспроизводящего ядра .....	139
2.4.4. Изоморфизм между гильбертовым пространством и случайным полем .....	140
2.4.5. Заключительные замечания .....	145
2.5. Вариационный метод регуляризации.....	146
2.6. Оптимизация основных операторов физической геодезии .....	150
2.6.1. Вероятностная оптимизация интегральных операторов .....	150
2.6.2. Устойчивое суммирование рядов по шаровым функциям..	153
2.7. Методы, основанные на быстрых преобразованиях Фурье и Хартли.....	155
2.7.1. Непрерывные преобразования Фурье и Хартли.....	155
2.7.2. Дискретные преобразования и быстрые алгоритмы.....	157
2.7.3. Приложение к численным методам теории Молоденского..	159
2.8. Вейвлетный анализ .....	163
2.8.1. От классического преобразования Фурье к оконному преобразованию Фурье.....	163
2.8.2. От оконного преобразования Фурье к Вейвлет-преобразованию.....	165
2.8.3. Некоторые геодезические приложения.....	172
2.9. Искусственные нейронные сети .....	174
2.9.1. Общие сведения об ИНС .....	174
2.9.2. Примеры успешного решения задач геодезии с помощью ИНС.....	178
2.10. Мультипольное представление потенциала .....	180
2.11. Заключение по главе 2 .....	182
2.12. Список использованных источников к главе 2 .....	186
3. Чистые и смешанные аномалии силы тяжести, полученные по результатам наземных измерений и по результатам работы космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GRACE-FO, GOCE ...	194

3.1. Анализ данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам наземных измерений .....	194
3.1.1. Актуальность исследования .....	194
3.1.2. Подготовка и анализ данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам наземных гравиметрических измерений .....	199
3.1.3. Подготовка материала для выполнения анализа данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам наземных, спутниковых и нивелирных измерений ..	215
3.1.4. Предварительная обработка архивов гравиметрической информации .....	218
3.1.4.1. Методологические аспекты обработки и согласования гравиметрических данных в единой информационной системе .....	218
3.1.4.2. Преобразование смешанных аномалий силы тяжести в чистые .....	221
3.1.5. Исследование изменений аномалии силы тяжести с изменением высоты во внешнем гравитационном поле Земли .....	226
3.1.5.1. Общие замечания по поводу решения задач физической геодезии при помощи применения аналитически продолженных аномалий .....	226
3.1.5.2. Теоретические основы применения гармонических функций для аналитического продолжения аномалий силы тяжести в исследовании их изменений с изменением высоты .....	230
3.1.5.3. Исследование изменений аномалий силы тяжести с изменением высоты во внешнем гравитационном поле Земли .....	235
3.1.6. Список использованных источников к параграфу 3.1 .....	239
3.2. Анализ данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам работы космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GRACE-FO и GOCE .....	243
3.2.1. Введение .....	243
3.2.2. Анализ получения чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам работы космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GOCE .....	247
3.2.3. Опыт определения изменения аномалий силы тяжести по данным миссии GRACE и GRACE FO на территории Новосибирской области .....	262
3.2.4. Выводы по параграфу 3.2. ....	267
3.2.5. Список использованных источников к параграфу 3.2 .....	267
Приложение А (обязательное) Картограммы результатов гравиметрических съемок на территорию Сибирского федерального округа .....	270

## СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

АСТ – аномалия силы тяжести  
БВП – быстрое вейвлет-преобразование  
БД – базы данных  
ВГС – высокоточная геодезическая сеть  
ГА – генетический алгоритм  
ГГС – государственная геодезическая сеть  
ГЛОНАСС – Глобальная навигационная спутниковая система (Россия)  
ГНС – государственная нивелирная сеть  
ГНСС – Глобальная навигационная спутниковая система  
ГПЗ – гравитационное поле Земли  
ГСК-2011 – Геодезическая система координат 2011 года  
ДПХ – дискретное преобразование Хартли  
ЕФГИ – Единый фонд геологической информации  
ИБД – информационный банк данных  
ИНС – искусственная нейронная сеть  
КА – космический аппарат  
КВНО – координатно-временное и навигационное обеспечение  
ЛЧМ – линейная частотная модуляция  
МИУ – метод интегральных уравнений  
МКЭ – метод конечных элементов  
МФГ – метод функций Грина  
МРШФ – метод, использующий аппарат рядов по шаровым функциям  
НВП – непрерывное вейвлет-преобразование  
НСТ – нормальная сила тяжести  
НСО – Новосибирская область  
ОПФ – оконное преобразование Фурье  
ПВ – вейвлет-преобразование  
ПФ – преобразование Фурье  
РБНС – радиальная базисная нейронная сеть  
РБФ – радиальные базисные функции  
РММ – методы разномасштабного моделирования  
СГС АБС – спутниковая геодезическая сеть активных базовых станций  
СК-42, СК-95 – системы координат 1942 года и 1995 года соответственно  
СКвК – среднеквадратическая коллокация  
СРБФ – сферические радиальные базисные функции

ТМОГИ – теория математической обработки геодезических измерений  
ТФГИ – Территориальный фонд геологической информации  
ФФПД – Федеральный фонд пространственных данных  
ФППД – Федеральный портал пространственных данных  
IAG – Международная ассоциация геодезистов  
МСВЗ – Международная служба вращения Земли  
ФГИС – Федеральная государственная информационная система  
ЭВМ – электронно-вычислительная машина  
BGI – Bureau International Gravimetric (Международное гравиметрическое бюро)  
CHAMP – CHAllenging Mini-satellite Payload (космическая гравиметрическая миссия)  
DFHRS (Digital Finite Element Height Reference Surface) – программный комплекс  
GGOS – Global Geodetic Observing System (Глобальная система геодезических наблюдений)  
GNSS – Global Navigation Satellite System (собираемый термин для всех спутниковых систем глобального позиционирования, таких как GPS, ГЛОНАСС, Galileo и Beidou)  
GOCE – Gravity Field and Steady State Ocean Circulation Explorer Payload – «исследователь гравитационного поля и установившихся океанских течений» (космическая гравиметрическая миссия)  
GOCO – Gravity Observation Combination  
GRACE – Gravity Recovery and Climate Experiment  
GRACE-FO (GRACE Follow-On) – спутниковые миссии, предназначенные для измерения изменений гравитационного поля Земли  
IHRM – International Height Reference System (международная система высот)  
IUGG – International Union of Geodesy and Geophysics (Международный союз геодезии и геофизики)  
NCEI – National Centers for Environmental Information (Национальный центр атмосферных исследований)  
NGA – National Geospatial-Intelligence Agency (Национальное агентство геопространственной разведки)  
NOAA – National Oceanic and Atmospheric Administration (Национальное управление океанических и атмосферных исследований)  
PPP – Precise Point Positioning (метод точного точечного позиционирования)

## ВВЕДЕНИЕ

При решении современных задач геодезии, геофизики, геодинамики, океанографии и климатологии становится очевидной возрастающая потребность в точном определении гравитационного поля Земли.

В настоящее время глобальная навигационная спутниковая система *GNSS* не только многократно увеличила объем и качество геоинформационных измерений, но и предоставила возможность получить новую измерительную информацию (например, чистые аномалии силы тяжести), что позволило принципиально изменить подходы к решению задач физической геодезии, в основе которых лежит теория М. С. Молоденского также претерпевшая значительные изменения с развитием *GNSS*. Так как *GNSS*-измерения позволяют создать трехмерную систему пространственных координат на всей поверхности Земли, то можно считать её поверхность известной. То есть от решения краевой задачи с неизвестной краевой поверхностью, на которой известны смешанные аномалии силы тяжести, мы можем перейти к рассмотрению концепции краевой задачи с фиксированной границей, то есть полагать, что поверхность Земли известна, и на ней известны чистые аномалии силы тяжести.

Целью данной монографии является не только изложение классических методов решения задач физической геодезии, которые не потеряли своей актуальности, но также и современных теоретических подходов и методов решения задач физической геодезии, основанных на современных достижениях математики.

Глава 1 посвящена анализу классических методов представления гравитационного поля Земли, включая классическую постановку краевой задачи геодезии, условия её существования и единственности, а также корректности.

В данной главе изложены следующие основные классические методы решения этой задачи: метод, использующий аппарат рядов по шаровым функциям (МРШФ), метод интегральных уравнений (МИУ) и метод функций Грина (МФГ). Подробно рассмотрены достоинства и недостатки каждого метода.

Поскольку часто при решении краевых задач используется сферическая аппроксимация краевой поверхности, то, естественно, стало классикой представление потенциала в виде рядов по шаровым/эллипсоидальным функциям (МРШФ). Это очень удобный аппарат для аналитических и численных исследований. Каждый член такого ряда



содержит коэффициент, характеризующий вклад соответствующей шаровой функции в общее поле, и саму шаровую функцию, зависящую от угловых координат. Однако такое разложение медленно сходится, вследствие чего при точных исследованиях необходимо учитывать достаточно большое число членов ряда. Также важно отметить, что данный метод предъявляет высокие требования к исходной информации, которая должна быть известна по всей Земле и распределена равномерно. Отмечено, что ряды по шаровым функциям не способны отражать локальные особенности гравитационного поля, то есть ряды по шаровым функциям не подходят для отображения тонкой структуры поля. Но для моделирования низких и средних частот этот аппарат приспособлен очень хорошо.

Методом интегральных уравнений получают классические ряды Молоденского и Бровара, которые дают теоретически неограниченное повышение точности определения возмущающего потенциала и его трансформант. Данный метод хорошо зарекомендовал себя в решении краевых задач со сложной краевой поверхностью, отметим, что МРШФ и МФГ в этом случае дают плохие результаты. В последнее время для решения интегральных уравнений широко используются метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ), которые позволяют моделировать с высокой разрешающей способностью гравитационное поле Земли, учитывая реальную геометрически сложную топографию её поверхности.

Мощным инструментом для решения краевых задач в теории потенциала является МФГ, который позволяет представить решение краевой задачи в виде интегрального уравнения, что упрощает анализ и поиск решения. Функция Грина специально строится для конкретных граничных условий, а это гарантирует, что решение, полученное через функцию Грина, будет удовлетворять заданным условиям. Каждой замкнутой поверхности соответствует своя функция Грина для данной краевой задачи. Отметим, что построение функции Грина является очень сложной задачей для поверхностей, отличающихся от сферы. Даже для эллипсоида функция Грина имеет очень сложную структуру. Но если она найдена, то данную краевую задачу можно решать независимо от полноты гравиметрической информации.

В данной главе также представлены ряды Молоденского в решении краевой задачи *GNSS*. Рассмотрена постановка скалярной краевой задачи физической геодезии, идея которой состоит в рассмотрении задачи, промежуточной между задачей со свободной границей и задачей с фиксированной границей.

В двух постановках представлена задача альтиметрии и гравиметрии (altimetry-gravimetry problem).

В связи с тем, что на современном этапе накопился большой объем информации и на одну и ту же территорию, известны различные типы геодезической информации, возникает ситуация, при которой исходных данных больше, чем требуется для однозначного решения задачи. В связи с этим получила распространение переопределённая (overdetermined) краевая задача геодезии, постановка которой также рассмотрена в данной главе.

В главе 2 выполнен анализ современных подходов к представлению гравитационного поля Земли, включая: коллокацию (статистический и функциональный подходы), вариационный метод регуляризации, метод оптимальных интегральных ядер, мультипольное представление потенциала, метод линейных и сферических дискретных преобразований, метод разномасштабной аппроксимации геопотенциала и другие альтернативные методы.

В начале главы даны сведения о гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром, которые необходимы для последующих теоретических выводов. Для геодезических целей гильбертово пространство выбирается таким образом, чтобы оно непременно содержало в себе возмущающий потенциал Земли, поскольку любые геодезические измерения представляют собой линейные или линеаризованные функционалы на потенциале.

Представлен критический анализ традиционного моделирования ГПЗ в виде рядов по шаровым функциям.

Чистая коллокация рассматривается как обобщенная задача интерполяции.

Поскольку в реальности приходится иметь дело с измерениями, содержащими неизбежные ошибки, то практический интерес представляет среднеквадратическая коллокация.

В данной главе подробно рассмотрены вопросы решения задач коллокации в любом заданном гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром. Отметим, что как разномасштабное моделирование, так и среднеквадратическая коллокация основаны на линейной аппроксимации с использованием воспроизводящего ядра, которое связывает искомые параметры с исходными данными. Приведены основные положения о точности решения задач коллокации, обсуждаются вопросы выбора воспроизводящего ядра. В принципе, можно работать с любым воспроизводящим ядром, так как по форме ничего не меняется: и критерии оптимальности, и характеристики точности представляют собой нормы избранного пространства, а задача решается под условием минимизации этих норм. Однако разные гильбертовы пространства придают разный смысл норме и, следовательно, разный смысл мере аппроксимации. Поэтому желательно так выбрать гильбертово пространство, чтобы упомянутые критерии

совпадали (или почти совпадали) с вероятностно-статистическим понятием среднеквадратических ошибок.

Подробно рассмотрен вариационный метод регуляризации, так как одной из общих черт разномасштабного анализа и коллокации является тот факт, что те системы линейных алгебраических уравнений, к решению которых сводятся основные алгоритмы этих методов, по разным причинам оказываются плохо обусловленными. Это вызывает необходимость регуляризации.

Те же идеи регуляризации лежат в основе методов оптимизации основных операторов физической геодезии. Смысл оптимизации состоит в том, что при использовании операторов удаётся отфильтровывать неизбежные помехи исходной функции непосредственно в процессе интегрирования. Если помехи отсутствуют, то выведенные обобщения совпадают с известными классическими вариантами.

Обоснована возможность использования разномасштабного моделирования цифровой информации с помощью сферических радиальных базисных функций для моделирования ГПЗ. Описаны виды сферических масштабирующих функций и соответствующих вейвлетов. Поскольку хорошо известные интегралы Стокса, Неймана, Венинг-Мейнеса, модифицированный интеграл Венинг-Мейнеса, а также члены классических рядов Молоденского являются интегралами двумерной свёртки, то очень эффективно использовать для их вычисления быстрые дискретные преобразования, такие как Фурье, Хартли,  $z$  – преобразования и ряд других быстрых преобразований. В данной главе описаны основные свойства одномерных и двумерных, непрерывных и дискретных преобразований, быстрые алгоритмы.

Здесь же рассмотрен вейвлет-анализ, под которым понимается специальный вид спектрального анализа, позволяющий, в отличие от классического спектрального анализа Фурье, получать распределение амплитуд (мощности) анализируемого сигнала и по частоте, и по времени (пространству). Описаны основные свойства вейвлет-анализа и некоторые геодезические приложения.

Заключительный параграф данной главы посвящен искусственным нейронным сетям (ИНС). Рассмотрены общие сведения об ИНС и примеры решения задач геодезии на базе ИНС.

Глава 3 состоит из двух параграфов: в первом изложен технологический процесс предварительной обработки и анализ данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам наземных измерений, во втором – полученных по результатам работы космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GRACE-FO, GOCE.

В настоящее время большую роль в геодезии играют модели гравитационного поля Земли, для построения которых используется разнородная

измерительная информация. Процесс ее подготовки является технологически сложным, поскольку требует учёта большого числа различных факторов. Сравнительные исследования показывают, что различные комбинации процедур предварительной обработки приводят к существенно различающимся результатам моделирования ГПЗ на одних и тех же территориях. То есть, уровень расхождений зависит от степени гравиметрической изученности региона, характера рельефа и типа измерительной информации. В связи с этим Международной ассоциацией геодезистов (IAG) в рамках Комиссии 2 «Гравитационное поле» (Commission 2. Gravity Field) создана рабочая группа, одной из задач которой является разработка и стандартизация эффективных методик предварительной обработки разнородной информации и моделирования гравитационного поля Земли. Деятельность по данному направлению координируется специализированными подкомиссиями IAG, в частности SC 2.2 «Geoid, Physical Height Systems and Vertical Datum Unification» и SC 2.4 «Gravity and Geoid» а также её региональными подразделениями (SC 2.4a–2.4e).

В первой части данной главы подробно рассмотрены потенциальные проблемы обработки гравиметрической информации, а также технологический процесс подготовки данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам наземных гравиметрических, спутниковых и нивелирных измерений. Представлены исследования изменений аномалии силы тяжести с изменением высоты во внешнем гравитационном поле Земли. Подробно представлен метод аналитического продолжения аномалий силы тяжести в нижнее полупространство, который представляет собой сложную проблему. Принципиальная сложность заключается в неустойчивости (некорректности) решения этой задачи. Исследования подтвердили, что в процессе аналитического продолжения в верхнее полупространство влияние региональных аномалий растёт, а влияния локальных ослабевает.

Во второй части данной главы подробно рассмотрен технологический процесс подготовки данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам работы космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GRACE-FO и GOCE. Эти миссии имеют различные характеристики, различаются между собой как по составу исходной информации, так и по методикам их обработки и удовлетворяют разным аспектам определения высокоточного гравитационного поля. В связи с этим представлен анализ чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам работы космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GRACE-FO и GOCE.

Особый интерес представляют модели геопотенциала, полученные на основе спутниковых наблюдений, охватывающих всю поверхность Земли. В отличие от наземных наблюдений, которые, как правило, немногочис-

ленны и получены различными инструментальными средствами с разным уровнем качества и выборками, спутниковые измерения производятся с помощью одной и той же сенсорной платформы, глобальный уровень точности наблюдений более стабилен по сравнению с наземными наблюдениями. Это упрощает адекватное стохастическое моделирование на уровне наблюдений. В монографии представлены результаты вычисления чистых и смешанных аномалий силы тяжести по данным последних глобальных моделей геопотенциала: GOCO2025s и XGM2019e\_2159.

*О структуре данной монографии:* она состоит из введения и трех глав основного текста с нумерацией формул, рисунков и таблиц по каждой главе. Библиография использованных источников также представлена отдельно по каждой главе.

Авторы выражают глубокую благодарность доктору технических наук В. Б. Непоклонову и доктору физико-математических наук В. Ю. Тимофееву, чьи рецензии способствовали улучшению содержания данной монографии.

К глубокому сожалению, авторы уже не могут лично выразить благодарность безвременно ушедшему выдающемуся ученому, ректору СГУГиТ, профессору, доктору технических наук А. П. Карпику, творческое влияние которого мотивировало авторов на проведение данных исследований.

*Монография подготовлена в рамках Федерального проекта “Поддержка, развитие и использование системы ГЛОНАСС” Государственной программы Российской Федерации “Космическая деятельность России” на 2021–2030 гг., регистрационный номер ЕГИСУ № 1210806000081-5.*

# 1. АНАЛИЗ КЛАССИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

## 1.1. Классическая постановка краевой задачи геодезии

Основная задача геодезии, как известно, состоит в определении физической поверхности  $S$  Земли и ее внешнего потенциала  $W$  силы тяжести в единой системе координат. Исходными данными служат геопотенциальные числа или приращения потенциала  $C(P) = W(P) - W_0$ ,  $P \in S$ , относительно некоторой начальной точки  $O$ ; значения величины силы тяжести  $g(P)$ , астрономические широта  $\varphi$  и долгота  $\lambda$  точки  $P$ .

Поскольку астрономические координаты определяют направление отвесной линии в точке  $P$ , то измерения  $g(P)$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  определяют собой, фактически, вектор силы тяжести

$$\vec{g}(P) = \begin{pmatrix} g \cos \varphi \cos \lambda \\ g \cos \varphi \sin \lambda \\ g \sin \varphi \end{pmatrix} = \text{grad } W(P). \quad (1.1)$$

Потенциал  $W$  состоит из двух слагаемых – ньютоновского потенциала  $V$  и потенциала центробежной силы  $\Phi$ , возникающей за счёт вращения Земли с угловой скоростью  $\omega$ :

$$W(x, y, z) = V + \Phi = G \iiint_{\text{Земля}} \frac{\varrho}{r} dS + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2), \quad (1.2)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная;

$\varrho$  – плотность распределения масс Земли;

$r$  – расстояние между точкой вычисления и точкой интегрирования;

$x, y, z$  – геоцентрические прямоугольные координаты точки вычисления.

Полагаем, что значения  $W - W_0$  и  $\vec{g}$  известны во всех точках Земли.

При рассмотрении основной задачи геодезии естественно опираться на традиционную идею численных методов: сначала для  $S$  и  $W$  определить некоторые приближенные значения – главные части, соответственно,  $\Sigma$

и  $U$ , а затем малые поправки к ним. Поэтому примем, что известен некоторый нормальный потенциал  $U$ , при котором квадратом возмущающего потенциала  $T = W - U$  можно пренебречь в любой точке на поверхности  $S$  и вне ее [1].

Практически нормальный потенциал  $U$  задается с помощью уровенного эллипсоида вращения [2, 3]

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (1.3)$$

значение  $U$  на поверхности которого постоянно и равно  $U_0$ ;

$a, b, a > b$  – полуоси эллипсоида (малая полуось всегда предполагается параллельной оси вращения Земли).

Нормальный потенциал определяется различными эквивалентными наборами из 7 параметров [2, 3]. Следующие параметры

$$GM^\vartheta, A^\vartheta - C^\vartheta, U_0, \omega^\vartheta, x_0, y_0, z_0, \quad (1.4)$$

где  $M^\vartheta$  – масса эллипсоида;

$A^\vartheta$  – главный экваториальный момент инерции относительно оси  $x$ ;

$C^\vartheta$  – главный полярный момент инерции относительно оси  $z$ ;

$\omega^\vartheta$  – угловая скорость вращения эллипсоида;

$x_0, y_0, z_0$  – координаты центра эллипсоида, интересны с той точки зрения, что они имеют реальный физический смысл.

Для общего земного эллипсоида параметры (1.4) определяются следующими значениями:

$$GM, A_{cp} - C, W_0, \omega, 0, 0, 0, \quad (1.5)$$

здесь  $M$  – масса Земли;

$A_{cp} = (A + B)/2$ ,  $A, B, C$  – главные моменты инерции Земли.

Теперь определим поверхность  $\Sigma$ , приближенно отражающую искомую поверхность  $S$ . Пусть  $P$  – точка физической поверхности Земли  $S$  с известными значениями  $W(P)$  и  $\vec{g}(P)$ . Поставим ей в соответствие некоторую другую точку  $Q$  так, чтобы [2]

$$U_0 - U(Q) = W_0 - W(P), \quad (1.6)$$

$$\frac{\text{grad}U(Q)}{\gamma(Q)} = \frac{\text{grad}W(P)}{g(P)}, \quad (1.7)$$

здесь  $\gamma = |\text{grad}U|$  – нормальная сила тяжести, поэтому левая часть уравнения (1.7) есть единичный вектор нормали к уровенной поверхности нормального поля. Соотношения (1.6), (1.7) полностью определяют точку  $Q$  в системе координат нормального поля.

Множество всех таких точек  $Q$  образует некоторую поверхность  $\Sigma$ , называемую теллуroidом.

Дальнейшему определению подлежат возмущающий потенциал  $T = W - U + (U_0 - W_0)$  и векторное поле векторов  $\overline{QP}$  на поверхности теллуroidа. Искомые  $T$  и  $[\overline{QP}]$  суть малые величины, квадратами и произведениями которых можно пренебречь в линейной постановке задачи.

Будем пользоваться прямоугольной системой координат такой, что её ось  $Z$  задаётся малой осью  $2b$  эллипсоида вращения, а начало координат  $O$  находится в центре эллипсоида. Если система при этом является геоцентрической, то есть её начало  $O$  совпадает с центром масс Земли, а ось  $Z$  – с осью вращения Земли, то это позволяет считать потенциал  $\Phi$  центробежной силы одинаковым для реального  $W$  и нормального  $U$  потенциалов силы тяжести. Это, в свою очередь, означает, что возмущающий потенциал  $T = W - U$  есть гармоническая функция, регулярная на бесконечности. Таким образом, задача сводится к решению уравнения Лапласа  $\Delta T = 0$  вне Земли.

Необходимо сформулировать краевое условие этой задачи. Если опираться на линеаризацию условий (1.6), (1.7) с последующим исключением  $\overline{QP}$ , полагая при этом, для простоты,  $W_0 = U_0$ , получим следующий вид [4]:

$$(\text{grad} U)^T \Pi^{-1} \text{grad} T - T = \frac{\Delta g}{\gamma} (\text{grad} U)^T \Pi^{-1} \text{grad} U, \quad (1.8)$$

здесь

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$



– это квадратная матрица вторых производных нормального потенциала  $U$  в точке  $Q$ ;

$\Delta g = g_P - \gamma_Q$  – смешанная аномалия силы тяжести.

Соотношение (1.8) представляет собой точную форму краевого условия на поверхности теллуроида  $\Sigma$  для искомого возмущающего потенциала  $T$  в линейной постановке задачи Молоденского. Оно справедливо при любом нормальном поле  $U$ , допускающем линеаризацию. Но оно не даёт в явном виде направление дифференцирования  $T$  на краевой поверхности. В этом смысле более удобной является локальная прямоугольная система координат с центром в точке  $Q \in \Sigma$  [5]. Ось  $z$  этой системы направим вверх по касательной к векторной линии нормального поля, ось  $x$  – в плоскости горизонта нормального поля по касательной к меридиану (на север), а ось  $y$  – на восток. В этой системе координат условие (1.8) примет вид

$$\left. \frac{\partial T}{\partial H} \right|_{\Sigma} - \frac{T}{\gamma} \left. \frac{\partial \gamma}{\partial H} \right|_{\Sigma} = -\Delta g. \quad (1.10)$$

В общем случае  $W_0 \neq U_0$ , поэтому

$$\left. \frac{\partial T}{\partial H} \right|_{\Sigma} - \frac{T}{\gamma} \left. \frac{\partial \gamma}{\partial H} \right|_{\Sigma} = -\Delta g - \frac{1}{\gamma} \left. \frac{\partial \gamma}{\partial H} \right|_{\Sigma} (W_0 - U_0). \quad (1.11)$$

Это краевое условие на теллуроиде для возмущающего потенциала соответствует нормальному полю, создаваемому уровенным эллипсоидом. Оно записано в топоцентрической горизонтальной системе координат этого поля. Производная  $\partial T / \partial H$  вычисляется по направлению (вверх) векторной линии нормального поля. Оно практически совпадает с направлением отвесной линии и с направлением нормали к уровенному эллипсоиду. Однако, это направление существенно отличается от направления нормали к краевой поверхности. Поэтому решение дифференциального уравнения Лапласа с краевым условием (1.11) существенно отличается от классической третьей краевой задачи теории потенциала и представляет собой краевую задачу с косою производной, известную как краевая задача Молоденского. Предполагается, что теллуرويد  $\Sigma$  – замкнутая непрерывно дифференцируемая по координатам поверхность, имеющая звёздную форму, т. е. всякий луч, исходящий из начала координат, пересекает  $\Sigma$  только в одной точке.

Краевое условие (1.11) можно упростить за счёт того, что в реальных условиях производная  $\partial\gamma/\partial H$  практически постоянна [6]:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial H} \approx -0,3086 \text{ мГал/м.} \quad (1.12)$$

Следовательно, коэффициент  $-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial H}$  в (1.11), по существу, зависит лишь от удаления от уровенного эллипсоида, задающего нормальное поле. А это означает, что векторные линии нормального поля мало отличаются от лучей, исходящих из одной точки, и потому урвенную поверхность в указанном смысле можно считать сферой, а дифференцирование  $\gamma$  по  $H$  практически равносильно дифференцированию  $\gamma$  по радиусу-вектору  $\rho$  точки  $Q \in \Sigma$ . Радиус этой сферы  $R_{cp} \approx 6371$  км; он получен из условия равенства объема сферы объему эллипсоида [7].

С учётом описанных упрощений условие (1.11) приобретает вид

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\Sigma} + \frac{2}{\rho} T \Big|_{\Sigma} = -\Delta g + \frac{2}{\rho_Q} (W_0 - U_0), \quad (1.13)$$

или, в эквивалентной форме,

$$(\bar{\rho} \text{grad} T)_{\Sigma} + 2T \Big|_{\Sigma} = -\rho_Q \Delta g + 2(W_0 - U_0). \quad (1.14)$$

Краевые условия (1.13), (1.14) соответствуют нормальному полю, создаваемому урвенным эллипсоидом, но записаны в упрощенной системе координат сферического нормального поля.

Для дальнейшего будем использовать операторную форму краевых условий [4]

$$M_i T \Big|_{\Sigma} = f_i, \quad (1.15)$$

где  $M_i$  – оператор левой части, называемый оператором Молоденского;

$f_i$  – известная правая часть;

$i=1,2,3,4$  обозначают краевые условия (1.8), (1.11), (1.13) и (1.14), соответственно. Областью определения оператора  $M_i$  является множество  $X$  функций, гармонических во внешнем относительно теллуоида пространстве:

$$M_i \Big|_{\Sigma} : T \mapsto f_i.$$

## 1.2. Условия существования и единственности решения краевой задачи Молоденского

Для того, чтобы сформулировать условия существования и единственности решения краевой задачи Молоденского, нам понадобятся некоторые сведения из функционального анализа [8, 9–11].

Пусть требуется решить уравнение

$$Ax = y, x \in X, y \in Y, \quad (1.16)$$

где  $A$  – замкнутый линейный оператор (например, оператор Молоденского  $M_i$  из (1.15));

$y$  – заданная функция (например, функция  $f_i$  из (1.15));

$x$  – искомое решение (в нашем случае, возмущающий потенциал  $T$ );

$X, Y$  – некоторые гильбертовы пространства (в нашей задаче  $X$  заполняют функции, гармонические в  $\Theta$  – внешности  $\Sigma$ , а  $Y$  – множество возможных исходных данных).

Для существования и единственности решения задачи (1.16) необходимо и достаточно, чтобы оператор  $A$  был обратимым, причем область определения обратного оператора  $A^{-1}$  должна совпадать со всем пространством  $Y$ .

В общем случае решение уравнения (1.16) обычно существует лишь при условии, что правая часть удовлетворяет некоторым дополнительным ограничениям. Для определения количества этих ограничений и их вида введем в рассмотрение соответствующее (1.16) однородное (приведенное) уравнение

$$Ax = 0. \quad (1.17)$$

Решения этого уравнения образует подпространство, называемое ядром оператора и обозначаемое  $Ker A$ . Обозначим количество линейно независимых решений уравнения (1.17) через  $\beta_1(A)$ . Ясно, что  $Ker A \subset X$ , и  $\beta_1(A)$  есть размерность ядра. Пусть далее  $A^*$  – оператор  $Y \mapsto X$ , сопряженный к  $A$  в том смысле, что

$$(y, Ax)_Y = (x, A^* y)_X, \forall x \in X, \forall y \in Y,$$

здесь  $(.,.)$  – скалярное произведение в соответствующем пространстве.

Обозначим через  $\beta_2(A)$  размерность  $Ker A^*$ , то есть количество линейно независимых решений сопряжённого однородного уравнения

$$A^* z = 0. \quad (1.18)$$

Очевидно,  $Ker A^* \in Y$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Для того чтобы уравнение (1.16) имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы свободный член был ортогонален ко всем решениям уравнения (1.18):*

$$y \perp Ker A^* \Leftrightarrow y \in Ker^\perp A^*, \quad (1.19)$$

где  $Ker^\perp A^*$  есть ортогональное дополнение ядра сопряжённого оператора  $A^*$  до всего пространства  $Y$ :

$$Y = Ker A^* \oplus Ker^\perp A^*.$$

Если хотя бы одно из чисел  $\beta_1(A)$  и  $\beta_2(A)$  конечно, то их разность называется индексом оператора  $A$ :

$$Ind A = \beta_1(A) - \beta_2(A).$$

Известно, что условия (1.19) в общем случае лишь необходимы для разрешимости уравнения (1.16). Если эти же условия и достаточны, то оператор  $A$  называется нормально разрешимым.

Краевая задача с косой производной в том случае, когда направление дифференцирования нигде не касается краевой поверхности, нормально разрешима и ее индекс равен нулю. Условием разрешимости для краевой задачи Молоденского служит неравенство [11]

$$\cos(H, n) > 0, \quad (1.20)$$

где  $H$  – направление дифференцирования;

$n$  – направление внешней нормали к регулярной поверхности телурида.

Итак, для нормально разрешимых задач с нулевым индексом справедлива следующая теорема [11].

**Теорема 2.** *Для разрешимости уравнения (1.16) необходимо и достаточно, чтобы свободный член отвечал  $\beta_1(A)$  условиям ортогональности*

в метрике пространства  $Y$ . Вид этих условий определяется требованиями (1.19). Общее решение имеет вид

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{\beta_1(A)} c_i x_i, \quad (1.21)$$

где  $x_0$  – частное решение неоднородного уравнения (1.16);

$c$  – произвольные постоянные;

$x_i$  – линейно независимые решения однородного уравнения (1.18), т. е. базисные элементы  $\text{Ker} A$ .

Решение будет единственным, если существует способ однозначного определения участвующих там констант.

Можно показать, что для операторных уравнений (1.16) на исходные измерения  $f_i$  задачи необходимо наложить не менее трёх ограничительных условий типа (1.19). Это связано с тем, что по имеющейся информации невозможно определить положение центра эллипсоида в геоцентрической системе координат [6, 12]. Хёрмандер доказал, что их ровно три даже в общем случае линейной задачи Молоденского [7]. Для краевого условия, записанного в системе координат сферического нормального поля (1.13), (1.14), трудами М. С. Молоденского, В. Ф. Еремеева и М. И. Юркиной [12, 13] получено не только число необходимых и достаточных ограничений, но и вид этих ограничений.

**Лемма 1.** Собственными функциями оператора  $M_4$  в (1.16) служат шаровые функции вида

$$T_n(P) = \frac{1}{\rho^{n+1}} S_n(\theta, \lambda),$$

где  $S_n(\theta, \lambda)$  – сферическая функция  $n$ -ой степени;

$(\rho, \theta, \lambda)$  – сферические координаты текущей точки  $P \in \Theta$ . Других собственных функций нет. Соответствующие собственные числа  $\lambda_n = 1 - n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  [14].

**Следствие 1.** Задача с однородным краевым условием  $M_4 T|_{\Sigma} = 0$ , имеет единственное решение

$$T_1(P) = \frac{S_1(\theta, \lambda)}{\rho^2},$$

где  $S_1(\theta, \lambda)$  – сферическая функция 1-ой степени. Поэтому если исходная неоднородная задача  $M_4 T|_{\Sigma} = f_4$ , имеет частное решение  $T_0$ , то, в соответствии с (1.21), общее решение запишется [12]:

$$T = T_0 + \frac{S_1(\theta, \lambda)}{\rho^2} + (U_0 - W_0) \quad (1.22)$$

Три коэффициента сферической функции первой степени определяются положением центра  $O$  используемого эллипсоида в геоцентрической системе координат.

Выясним условия существования частного решения  $T_0$  неоднородной задачи.

Пусть

$$F = M_4 T, T \in X. \quad (1.23)$$

Можно показать, что функция  $F$  является гармонической в  $\Theta$  и регулярной на бесконечности. Из этого следует, что она также является решением задачи Дирихле [4]

$$\Delta F = 0 \text{ в } \Theta, F|_{\Sigma} = f_4, \quad (1.24)$$

где в соответствии с (1.14),  $f_4 = -\rho \Delta g + 2(U_0 - W_0)$ .

Имеет место следующая теорема [12, 14–17].

**Теорема 3.** Для существования решения задачи Молоденского с краевым условием (1.14) необходимо и достаточно, чтобы функция  $F$ , определяемая выражением (1.23), не содержала шаровой функции первой степени.

Теорема 3 дает условия разрешимости задачи Молоденского с краевым условием (1.13), (1.14) в виде ограничений на функцию  $F$ . Следующая теорема даёт ответ на вопрос о том, каким требованиям должна удовлетворять полученная из измерений аномалия силы тяжести  $\Delta g$ , чтобы указанные ограничения на  $F$  выполнялись.

**Теорема 4.** Пусть  $S_i$  – значение какой-нибудь шаровой функции первой степени на поверхности теллуриоида, т. е.  $S_i = (\rho S_1)_{\Sigma}$ , а  $S_e$  – решение внешней задачи Дирихле, соответствующее граничным значениям  $S_i$ . Для существования решения задачи Молоденского с краевым условием (1.14)

необходимо и достаточно, чтобы измеренные значения смешанных аномалий силы тяжести  $\Delta g$  удовлетворяли следующему условию

$$\int_{\Sigma} \left( \frac{\partial S_i}{\partial n} - \frac{\partial S_e}{\partial n} \right) f_4 d\Sigma = 0, \quad (1.25)$$

где  $\frac{\partial S_i}{\partial n}$  и  $\frac{\partial S_e}{\partial n}$  – соответственно, внутренняя и внешняя производные по нормали к теллуroidу.

Если положить  $U_0 = W_0$ , то его можно переписать в виде [12]

$$\int_{\Sigma} \left( \frac{\partial S_e}{\partial n} - \frac{\partial S_i}{\partial n} \right) \rho \Delta g d\Sigma = 0. \quad (1.26)$$

Поскольку шаровая функция  $\rho S_1$  есть линейная комбинация трех линейно независимых функций, то условие (1.25) представляет собой, по существу, три линейно независимые условия, которым обязаны удовлетворять исходные измерения. Эти ограничения на  $\Delta g$  выполняются автоматически лишь в предположении, что измерения проделаны совершенно безошибочно.

Итак, три условия (1.25), (1.26) есть конкретный вид ограничений (1.19) на исходные данные в задаче Молоденского с краевым условием (1.14) при решении краевой задачи в сферической аппроксимации. Однако они слишком сложны для практики. Так как референц-эллипсоид рассматривается как сфера, то

$$\rho = R_{cp} + H = R_{cp} \left( 1 + \frac{H}{R_{cp}} \right). \quad (1.27)$$

Под решением задачи Молоденского в плоской аппроксимации будем понимать решение с относительной ошибкой порядка  $H/R_{cp}$  где  $H$  – нормальная высота,  $R_{cp}$  – средний радиус Земли. При этом функции, отличающиеся друг от друга менее относительной разности порядка  $H/R_{cp}$ , считаются тождественными.

Следующая теорема дает упрощенный вид условий, соответствующий плоской аппроксимации.

**Теорема 5.** Для существования решения задачи Молоденского с краевым условием (1.14) в плоской аппроксимации необходимо и достаточно,

чтобы измеренные значения смешанных аномалий силы тяжести  $\Delta g$  удовлетворяли следующему условию [18]

$$\int_{\Omega_R} \left( \Delta g - \frac{H}{\cos \beta} \frac{\partial \Delta g}{\partial n} \right) S_1 d\Omega_R = 0, \quad (1.28)$$

где  $\beta$  – угол наклона поверхности теллуроида в текущей точке;

$\frac{\partial}{\partial n}$  – производная по нормали к теллуroidу;

$\Omega_R$  – геосфера радиуса  $R$ .

Итак, если краевое условие представлено в форме (1.13), (1.14), то для существования решения на исходные аномалии  $\Delta g$  необходимо и достаточно наложить ровно три условия (1.25), (1.26). Общее решение в этом случае имеет вид (1.22). Для единственности решения три коэффициента сферической функции первой степени и константа  $U_0 = W_0$  должны определяться по дополнительным данным.

### 1.3. О корректности краевой задачи Молоденского

Задача, состоящая в решении уравнения (1.16), называется корректной по Адамару в паре метрических пространств  $X, Y$ , если имеют место условия [8–11]:

- 1) для любых исходных данных  $y \in Y$  существует решение  $x \in X$ ;
- 2) это решение единственное;
- 3) это решение устойчивое в том смысле, что достаточно малому (в метрике  $Y$ ) изменению  $y$  соответствует сколь угодно малое (в метрике  $X$ ) изменение  $x$ .

Исходные данные задачи приобретаются, как правило, в процессе измерений и, следовательно, содержат неизбежные погрешности разного рода. Поэтому важно, чтобы задача имела вполне определенное решение при, вообще говоря, любых разумных (скажем, непрерывных) исходных данных. В этом и состоит суть первых двух условий. Предположим, что они выполнены, и некоторой исходной информации  $y$ , точность которой характеризуется критерием  $d_y$ , соответствует решение  $x$ , точность которого характеризуется критерием  $d_x$  (в соответствии с метриками пространств  $X$  и  $Y$ ).



Обычно предполагается, что повышение точности исходных измерений повышает и точность решения, то есть

$$\text{если } d_y \rightarrow 0, \text{ то } d_x \rightarrow 0. \quad (1.29)$$

Именно это и обеспечивает третье условие корректности. Однако в общем случае предположение (1.29) рискованно: в широком классе практически встречающихся задач из близости функций  $y_1$  и  $y_2$  не следует безоговорочная близость соответствующих решений  $x_1$  и  $x_2$ .

**Теорема 6.** *Для того, чтобы линейная задача (1.16) была корректной в паре банаховых пространств  $X, Y$ , необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *существовал обратный оператор  $A^{-1}$ , действующий из  $Y$  в  $X$ , причем область его определения совпадает с  $Y$ ;*

2) *оператор  $A^{-1}$  ограничен, то есть существует такая константа  $\alpha > 0$ , что*

$$\|x_y\|_X \leq \alpha \|y\|_Y, \quad (1.30)$$

где  $x_y = A^{-1}y$ , а нижний индекс указывает пространство, в метрике которого вычисляется норма.

Доказательство можно найти, например, в [10].

Теорема 6 означает, что из существования и единственности решения уравнения (1.16) с линейным ограниченным оператором следует непрерывная зависимость решения  $x_y = A^{-1}y$  от правой части  $y$ .

Отметим, что корректность или некорректность задачи зависит от того, в каком пространстве определяется решение и какому пространству принадлежат ожидаемые исходные данные. Одна и та же задача может оказаться корректной в одной паре пространств  $X, Y$  и некорректной в другой.

Для успешного применения численных методов формальное выполнение условий корректности может оказаться недостаточным [4]. Надо, чтобы задача была хорошо обусловлена, то есть малые изменения исходных данных приводили бы к достаточно малому изменению конечных результатов. Таким образом, важно не только существование константы, обеспечивающей неравенство (1.30), но важна и величина этой константы. Чем меньшее число  $\alpha$  обеспечивает (1.30), тем более благоприятное соотношение скоростей сходимости последовательностей (1.29) гарантировано. При больших  $\alpha$  малые изменения исходных данных или эквивалентные

этим изменениям малые погрешности численного метода могут сильно исказить решение. В подобных ситуациях говорят, что задача плохо обусловлена, или слабо устойчива. Следовательно, желательно, оценить ни вообще какую-нибудь константу, обеспечивающую неравенство (1.30), а нижнюю грань всевозможных таких констант, то есть, желательно, получить то, что называется нормой  $\|A^{-1}\|$  обратного оператора, разрешающего рассматриваемую задачу. Однако практически удается лишь оценить норму сверху, так как вычисление норм конкретных операторов часто затруднительно.

В параграфе 1.2. рассмотрен вопрос об обратимости и нормальной разрешимости оператора Молоденского, имеющий отношение к первому требованию теоремы 6. Для ответа на вопрос о том, выполняется ли второе требование теоремы 6 и третье условие корректности, полезно следующее утверждение [8].

**Теорема 7.** Пусть  $A$  – линейный непрерывный взаимно однозначный оператор с областью определения  $D(A) = X$  и множеством значений  $E(A) \subseteq Y$ , где  $X, Y$  – банаховы пространства. Для ограниченности обратного оператора необходима и достаточна замкнутость множества значений оператора, т. е.  $\|A^{-1}\| < \infty \Leftrightarrow \overline{E(A)} = E(A)$ .

Черта сверху означает замыкание множества.

Заметим, что множество значений нормально разрешимого оператора замкнуто и определяется выражением [8]

$$E(A) = \text{Ker}^\perp A^*.$$

Следовательно, оператор  $A^{-1}$ , действующий на множестве допустимых исходных данных  $Y^\perp = \text{Ker}^\perp A^*$ , ограничен.

Из проведенных рассуждений и результатов параграфа 1.2. можно сделать вывод об устойчивости решения линейной задачи Молоденского (относительно возмущений правой части краевого условия) в паре пространств, обеспечивающих непрерывность и нормальную разрешимость оператора левой части краевого условия. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Поскольку аномалия силы тяжести  $\Delta g$  получается из измерений, то в качестве правой части  $f$  в краевом условии следует ожидать произвольную непрерывную (или даже разрывную) функцию. Пусть  $C(\Sigma)$  – банахово пространство функций, непрерывных на  $\Sigma$  с чебышевской нормой  $\|f\| = \sup |f(P)|, P \in \Sigma$ ;  $\Gamma(\bar{\Theta})$  – подпространство пространства  $C(\Theta)$ , об-

разованное функциями, гармоническими в  $\Theta$  и непрерывными в  $\bar{\Theta} : \bar{\Theta} = \Theta \cup \Sigma$ . Будем, для определенности, полагать  $f \in Y$ , где  $Y = C(\Sigma)$ . Множество  $X$ , которому принадлежит искомый потенциал  $T$ , есть множество всех функций, гармонических, по крайней мере, в  $\Theta$  и регулярных на бесконечности. В силу последнего практически можно рассматривать  $\Theta$  как конечную область, граница которой не хуже кусочно гладкой. Поэтому будем полагать  $X$  банаховым пространством  $\Gamma(\bar{\Theta})$ .

Таким образом, решение краевой задачи Молоденского рассматривается в паре пространств  $X = \Gamma(\bar{\Theta})$ ,  $Y = C(\Sigma)$ .

Начнем с краевого условия в (квази)геоцентрической системе координат (1.8). Согласно анализу, проведенному в параграфе 1.2., эта задача является некорректной, так как она не всегда разрешима (исходные данные обязаны удовлетворять некоторым условиям), а решение, если оно существует, не единственно. Аналогичная ситуация имеет место и для краевой задачи (1.11). Некорректной является и задача с краевым условием (1.13), (1.14), записанным в системе координат сферического нормального поля. Причины те же: решение существует лишь при выполнении трех ограничений на исходные измерения (теорема 3) и не является единственным, а содержит произвольные постоянные. Отличие от случая, изложенного выше, состоит в том, что число ограничений и вид их точно известны. Поэтому можем сузить множество  $Y$  до подмножества  $Y^\perp = C^\perp(\Sigma)$ , к которому будем относить лишь те элементы пространства  $C(\Sigma)$ , которые удовлетворяют условиям разрешимости задачи (1.25), (1.26). В паре пространств  $\Gamma(\bar{\Theta})$ ,  $C^\perp(\Sigma)$ , первое условие корректности выполняется. Второе условие корректности также можно считать выполненным, поскольку, как уже говорилось выше, в общем решении (1.22) координаты начала используемой системы координат в геоцентрической системе и константа  $U_0 - W_0$  определяются по дополнительным измерениям [6] и, во всяком случае, являются фиксированными постоянными [13].

Это означает существование оператора, разрешающего задачу в сферическом отсечном поле. Этот обратный оператор действует из  $Y^\perp = C^\perp(\Sigma)$  в  $X = \Gamma(\bar{\Theta})$ , причем область его определения совпадает с  $Y^\perp$ . Таким образом, первое требование теоремы 5.1 выполнено. Перейдём теперь ко второму требованию этой теоремы, связанному с третьим условием корректности.

**Теорема 8.** *Справедливо неравенство, показывающее ограниченность оператора, разрешающего задачу Молоденского (1.14) в паре пространств  $\Gamma(\bar{\Theta})$ ,  $C^\perp(\Sigma)$ :*

$$\|T\|_{\Gamma(\bar{\Theta})} \leq \frac{1}{2} \|f\|_{C^\perp(\Sigma)}. \quad (1.31)$$

Таким образом, задача в сферическом отсчетном поле корректна в уточненной паре пространств  $\Gamma(\bar{\Theta})$ ,  $C^\perp(\Sigma)$ , но некорректна в исходной паре пространств  $\Gamma(\bar{\Theta})$ ,  $C(\Sigma)$ .

Однако, условия (1.25), (1.26), выделяющие множество  $Y^\perp$  из  $Y$ , слишком сложны для того, чтобы их можно было эффективно проверить на практике. К тому же постановка краевой задачи предполагает наличие непрерывных исходных данных на всей поверхности планеты. В действительности же имеются данные, причем неравномерные, лишь в дискретных точках. Таким образом, в действительности речь идет, по существу, о восстановлении решения задачи (возмущающего потенциала) по некоторым функционалам от решения.

Перейдём к рассмотрению решения линейной краевой задачи Молоденского. При этом можно выделить три основных классических подхода:

- метод, использующий аппарат рядов по сферическим (шаровым) или эллипсоидальным функциям;
- метод, использующий построение функций Грина;
- метод, опирающийся на составление интегральных уравнений.

#### 1.4. Решение краевых задач геодезии с использованием рядов по шаровым функциям

Поверхность Земли имеет очень сложную структуру, и часто при решении краевых задач физической геодезии для упрощения используют сферу в качестве краевой поверхности. При этом, для описания внешнего потенциала Земли удобно применять аппарат рядов Лапласа по сферическим функциям, поскольку эти функции образуют полный ортогональный базис на сфере.

Как известно, широкий класс функций  $f(\theta, \lambda)$ , заданных на поверхности единичной сферы  $\Sigma$ , допускает представление в виде разложения в ряд по сферическим функциям [19]

$$\begin{aligned} f(\theta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n P_{nk}(\cos \theta) [c_{nk} \cos k\lambda + s_{nk} \sin k\lambda] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2n} a_{nl} \Phi_{nl}(\theta, \lambda), \end{aligned} \quad (1.32)$$

где  $P_{nk}$  – полиномы ( $k=0$ ) или присоединённые функции ( $k>0$ ) Лежандра степени  $n$  и порядка  $k$ .

Коэффициенты  $C_{nk}$  и  $S_{nk}$  определяются формулами

$$a_{nl} = \frac{(f, \Phi_{nl})}{\|\Phi_{nl}\|^2} =$$

$$= \begin{cases} c_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi \cdot \delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) P_{nk}(\cos \theta) \cos k\lambda \cdot \sin \theta d\lambda d\theta, \\ l \leq n, k = l \\ s_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi \cdot \delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) P_{nk}(\cos \theta) \sin k\lambda \cdot \sin \theta d\lambda d\theta, \\ l > n, k = n-l \end{cases} \quad (1.33)$$

В геодезической практике удобнее пользоваться такой нормировкой, при которой среднее интегральное по единичной сфере значение квадрата основной сферической функции равно единице, то есть

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \bar{\Phi}_{nl}^2(P) \cdot d\Omega = 1.$$

Соответствующие полностью нормированные основные сферические функции имеют вид

$$\bar{\Phi}_{nl}(P) = \sqrt{\frac{2 \cdot (2n+1)}{\delta_k} \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!}} \cdot \Phi_{nl}(P), \quad (1.34)$$

где  $\delta_k = 1$  при  $k > 0$ ,  $\delta_0 = 2$  при  $k = 0$ .

Тогда в терминах полностью нормированных функций выражение (1.32) примет вид

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Y}_n(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2n} \bar{a}_{nl} \bar{\Phi}_{nl}(\theta, \lambda), \quad (1.35)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{a}_{nl} &= \sqrt{\frac{\delta_k}{2(2n+1)}} \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!} a_{nl} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\sigma} f(\theta, \lambda) \cdot \bar{\varphi}_{nl}(\theta, \lambda) d\Omega = \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \cdot \bar{\varphi}_{nl}(\theta, \lambda) \cdot \sin \theta \cdot d\lambda d\theta.\end{aligned}\quad (1.36)$$

Разложение внешнего потенциала притяжения Земли в ряд по шаровым функциям выглядит следующим образом:

$$V(P) = \frac{\mu}{\rho} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n (c_{nk} \cos k\lambda + s_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\cos \theta) \right], \quad (1.37)$$

или

$$V(P) = \frac{\mu}{a} \left[ \frac{a}{\rho} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{\rho} \right)^{n+1} \sum_{k=0}^n (c_{nk} \cos k\lambda + s_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\cos \theta) \right], \quad (1.38)$$

где  $a$  – большая полуось общеземного эллипсоида.

Здесь

$$c_{nk} = \frac{A_{nk}}{a^n M}, \quad s_{nk} = \frac{B_{nk}}{a^n M}, \quad (1.39)$$

с

$$\left. \begin{matrix} A_{nk} \\ B_{nk} \end{matrix} \right\} = \frac{2(n-k)!}{\delta_k (n+k)!} \iiint_{\Omega} \rho'^n P_{nk}(\cos \theta') \left\{ \begin{matrix} \cos k\lambda' \\ \sin k\lambda' \end{matrix} \right\} dm, \quad (1.40)$$

где  $\Omega$  – тело Земли;

$dm = \varrho(P') d\Omega$  – дифференциал массы, где  $P'$  – текущая точка  $\Omega$ , а  $\varrho(P')$  – плотность масс внутри Земли.

На практике удобнее пользоваться полностью нормированными сферическими функциями (1.34). В таком случае соответствующие нормированные коэффициенты связаны с  $c_{nk}$  и  $s_{nk}$  соотношениями (1.36)

$$\left. \begin{matrix} \bar{c}_{nk} \\ \bar{s}_{nk} \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{\delta_k}{2(2n+1)}} \cdot \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \cdot \left\{ \begin{matrix} c_{nk} \\ s_{nk} \end{matrix} \right\}. \quad (1.41)$$

Рассмотрим внешние краевые задачи теории потенциала, поскольку они тесно связаны с задачами физической геодезии. В том случае, когда краевая поверхность представляет собой сферу, их удобно решать с помощью сферических функций.

Начнём с первой краевой задачи – задачи Дирихле.

На сфере радиуса  $R$  с центром в начале координат  $O$  задана функция  $f(\theta, \lambda)$ . Требуется найти вне сферы такую функцию  $V(P)$  пространственной точки  $P(\rho, \theta, \lambda)$ , которая удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0; \quad (1.42)$$

совпадает с заданной функцией  $f(\theta, \lambda)$  на поверхности сферы в том смысле, что

$$\lim_{\rho \rightarrow R} V(\rho, \theta, \lambda) = f(\theta, \lambda); \quad (1.43)$$

является регулярной на бесконечности в том смысле, что

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V(\rho, \theta, \lambda) = 0. \quad (1.44)$$

Решением внешней задачи Дирихле является ряд

$$V(\rho, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} Y_n(\theta, \lambda) \text{ при } \rho > R. \quad (1.45)$$

В замкнутом виде решение внешней задачи Дирихле может быть выражено интегралом Пуассона

$$V(\rho, \theta, \lambda) = \frac{\rho^2 - R^2}{4\pi R} \cdot \int_{\Omega} \frac{f(\theta, \lambda)}{r^3} d\Omega, \quad (1.46)$$

где  $r = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi}$ .

Постановка второй краевой задачи – задачи Нейманна – отличается краевым условием для искомой функции  $V = V(\rho, \theta, \lambda)$ . Она, по-прежнему, должна удовлетворять уравнению Лапласа и обращаться в ноль на бесконечности. Но теперь теперь значения  $f(\theta, \lambda)$ , заданной на сфере,

доставляют не значения самой искомой функции  $V$  на сфере, а значения её производной  $\frac{\partial V}{\partial n}$  по направлению внешней нормали к  $\Omega$ .

Поскольку для сферы  $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial \rho}$ , то краевое условие в задаче Неймана

выглядит так

$$\lim_{\rho \rightarrow R} \frac{\partial V}{\partial \rho} = f(\theta, \lambda). \quad (1.47)$$

Решением внешней задачи Неймана служит следующий ряд

$$V(\rho, \theta, \lambda) = -R \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \cdot \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{n+1} \text{ при } \rho > R. \quad (1.48)$$

В замкнутом виде решение внешней задачи Неймана может быть выражено интегралом

$$V(\rho, \theta, \lambda) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} f(\theta, \lambda) \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{R} \ln \frac{R+r-\rho \cos \psi}{\rho(1-\cos \psi)} \right] d\Omega. \quad (1.49)$$

Заметим, что, если точка  $P$  находится на самой сфере, то

$$\rho = R, \quad r = 2R \cdot \sin \frac{\psi}{2},$$

и после преобразований формула (1.49) принимает вид

$$V(R, \theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\Omega} f(\theta, \lambda) \left[ \ln \left( 1 + \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} \right) - \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} \right] d\Omega. \quad (1.50)$$

Если исходной информацией служит чистая аномалия силы тяжести, представляющая собой в сферической аппроксимации радиальную производную возмущающего потенциала

$$f(\theta, \lambda) = \frac{\partial T}{\partial \rho} = -\delta g,$$

то получим формулу, известную под именем Хотина-Коха



$$\begin{aligned}
V(R, \theta, \lambda) &= \frac{R}{4\pi} \int_{\Omega} \delta g \left[ \operatorname{cosec} \frac{\Psi}{2} - \ln \left( 1 + \operatorname{cosec} \frac{\Psi}{2} \right) \right] d\Omega = \\
&= \frac{R}{4\pi} \int_{\Omega} \delta g K(\Psi) d\Omega,
\end{aligned} \tag{1.51}$$

здесь

$$K(\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \cdot P_n(\cos \Psi) = \left[ \operatorname{cosec} \frac{\Psi}{2} - \ln \left( 1 + \operatorname{cosec} \frac{\Psi}{2} \right) \right], \tag{1.52}$$

– ядро Хотина-Коха, которое совпадает с соответствующей функцией Грина, см. (1.67).

Перейдём к рассмотрению внешней третьей краевой задачи, которая исторически представляла наибольший интерес для физической геодезии.

Итак, требуется найти гармоническую и регулярную на бесконечности функцию  $V(P)$ . В качестве краевого условия на сфере  $\Omega$  задана непрерывная функция  $f(\theta, \lambda)$ , представляющая линейную комбинацию значений искомой функции  $V = V(R, \theta, \lambda)$  и значений ее нормальной производной  $\frac{\partial V(R, \theta, \lambda)}{\partial \rho}$  на сфере, то есть

$$f(\theta, \lambda) = \lim_{\rho \rightarrow R} \left[ \alpha \cdot V(\rho, \theta, \lambda) + \beta \cdot \frac{\partial V(\rho, \theta, \lambda)}{\partial \rho} \right], \tag{1.53}$$

где  $\alpha, \beta$  – определенные константы.

Если для всех целых  $n$  соблюдается условие

$$\alpha R - \beta(n+1) \neq 0, \tag{1.54}$$

то решение внешней третьей краевой задачи может быть описано рядом шаровых функций вида

$$V(\rho, \theta, \lambda) = R \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \cdot \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{\alpha R - \beta(n+1)}. \tag{1.55}$$

Для геодезии особый интерес представляют значения  $\alpha = \frac{2}{R}$  и  $\beta = 1$ .

При этих значениях констант  $\alpha R - \beta(n+1) = 2 - n - 1 = 1 - n$  и формула (1.55) принимает вид

$$V(\rho, \theta, \lambda) = R \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \cdot \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{1-n}. \quad (1.56)$$

Поэтому найти однозначно сферическую функцию 1-ой степени не удастся. Формула (1.56) при  $n = 1$  может иметь какой-либо смысл лишь при условии

$$Y_1(\theta, \lambda) \equiv 0.$$

При этом, разумеется, сферическая функция 1-ой степени может быть любой и, стало быть, решение задачи становится неоднозначным.

Таким образом, если в (1.53)  $\alpha = \frac{2}{R}$  и  $\beta = 1$ , то третья внешняя краевая задача может быть решена лишь с точностью до произвольной сферической функции первой степени  $X_1(\theta, \lambda)$ . Для этого необходимо выполнение следующего дополнительного условия на заданную функцию  $f(\theta, \lambda)$

$$\int_{\Omega} f(\theta, \lambda) \cos \psi d\Omega = 0, \quad (1.57)$$

для всякой точки вычисления  $P$ .

Само решение может быть записано так:

$$V(\rho, \theta, \lambda) = \frac{R^2}{\rho} u_0(\theta, \lambda) - R \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{1-n} + \left( \frac{R}{\rho} \right)^2 X_1(\theta, \lambda). \quad (1.58)$$

здесь  $X_1(\theta, \lambda)$  – произвольная сферическая функция 1-ой степени, а коэффициент перед ней написан из соображений единообразия структуры формулы.

В замкнутом виде решение внешней третьей краевой задачи при  $\alpha = \frac{2}{R}$  и  $\beta = 1$  может быть выражено следующей интегральной формулой, которую называют обобщенной формулой Стокса:

$$V(\rho, \theta, \lambda) = -\frac{R^2}{4\pi} \int_{\Omega} f(\theta, \lambda) \left[ S(\rho, \psi) - \frac{1}{\rho} \right] d\Omega + \frac{R^2}{\rho^2} X_1(\theta, \lambda), \quad (1.59)$$

где

$$S(\rho, \psi) = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \left( \frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \cdot P_n(\cos \psi) =$$

$$= \frac{2}{r} + \frac{1}{\rho} - \frac{3r}{\rho^2} - \frac{5R}{\rho^2} \cos \psi - \frac{3R}{\rho^2} \cos \psi \cdot \ln \frac{r + \rho - R \cdot \cos \psi}{2\rho}. \quad (1.60)$$

Если точка  $P$  находится на сфере, то получим формулу Стокса

$$V(R, \theta, \lambda) = -\frac{R^2}{4\pi} \int_{\Omega} f(\theta, \lambda) [S(\rho, \psi) - 1] d\Omega + X_1(\theta, \lambda), \quad (1.61)$$

где функция Стокса

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) =$$

$$= \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \cdot \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right). \quad (1.62)$$

Как отмечалось выше, внешняя третья краевая задача исторически представляла наибольший интерес для физической геодезии. Связано это с тем, что наземная гравиметрическая информация обычно представлена в виде измеренных значений аномалии силы тяжести  $\Delta g$ , являющихся линейной комбинацией значений искомого возмущающего потенциала  $T$  и значений его радиальной производной

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{2}{R} T. \quad (1.63)$$

Но в последние десятилетия, благодаря спутниковым технологиям, стали доступны значения чистой аномалии силы тяжести  $\delta g$ , представляющей собой радиальную производную  $-\frac{\partial T}{\partial \rho}$  искомой функции  $T$ . По-

этому внешняя задача Неймана представляет сейчас не меньший интерес, нежели внешняя третья краевая задача, а со временем может и полностью вытеснить её.

Аппарат рядов Лапласа по сферическим и шаровым функциям широко и успешно используется при решении задач физической геодезии. Это наиболее распространённая форма представления потенциала притяжения Земли. На данный момент существует, по меньшей мере, около 200 моделей геопотенциала в виде коэффициентов разложения  $c_{nk}$  и  $s_{nk}$  в ряд по

шаровым функциям, различающихся точностью своих коэффициентов и длиной разложения, то есть наибольшей степенью  $N$  гармонических коэффициентов. Наибольшая степень  $N$ , по сути, определяет пространственное разрешение на поверхности Земли (разрешающая способность модели).

В параграфе 2.2. выполнен критический анализ традиционного представления гравитационного потенциала Земли рядами по шаровым функциям. Показано, что шаровые функции лучше всего подходят для описания низко- и среднечастотной частей гравитационного поля Земли. Однако, при описании высокочастотной составляющей лучше использовать другой базис, например, частотно и пространственно локализованные сферические радиальные базисные функции.

### 1.5. Решение краевых задач для дифференциального уравнения Лапласа с помощью функций Грина

Известно, что в теории физической геодезии фундаментальную роль играют формулы Грина, позволяющие при определённых условиях определять внешний потенциал материального тела только по значениям потенциала и его первой производной на поверхности этого тела. При этом нет необходимости знать плотность распределения масс внутри тела – в этом суть.

Пусть, например,  $S$  обозначает поверхность материального тела, а  $V$  – ньютоновский потенциал (потенциал сил притяжения) этого тела.

Фундаментальная формула Грина имеет вид

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS = V(P), \quad (1.64)$$

где  $V(P)$  – функция точки  $P(x, y, z)$ , гармоническая во внешнем пространстве и регулярная на бесконечности;

$r$  – расстояние между точкой вычисления  $P$  и точкой интегрирования;

$\frac{\partial}{\partial n}$  – производная по направлению нормали к  $S$ .

Однако, непосредственное применение эта формула, как правило, не находит, поскольку в классе задач, возникающих в физической геодезии, на краевой поверхности обычно известны значения только одной какой-нибудь функции: или только значения потенциала  $V$  (первая краевая за-

дача) или только значения производной по нормали  $\frac{\partial V}{\partial n}$  (вторая краевая задача) или значения линейной комбинации потенциала и производной (третья краевая задача). Поэтому формулу (1.64) приходится преобразовывать так, чтобы можно было обойтись только одной из трёх перечисленных функций. Для этого вводится некоторая вспомогательная функция  $U(P, Q)$  координат двух точек  $P$  и  $Q$ , гармоническая во всём внешнем пространстве и регулярная на бесконечности. Применим к гармоническим во всём внешнем пространстве функциям  $V$  и  $u$  ещё одну известную формулу Грина

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS = V(P),$$

и почленно сложим это равенство с предыдущим равенством:

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \left( \frac{1}{r} + U \right) \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} + U \right) \right] dS.$$

Обозначая  $\left( \frac{1}{r} + U \right) = \Gamma(P, Q)$ , приходим к равенству

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) dS. \quad (1.65)$$

Функция  $\Gamma(P, Q)$  называется *функцией Грина*.

Пользуясь полученным соотношением, рассмотрим решение внешних краевых задач с помощью функций Грина. Постановки задач можно найти в параграфе 1.4.

Для решения *внешней первой краевой задачи* достаточно в правой части формулы (1.65) исключить влияние нормальной производной. Для этого надо потребовать, чтобы на поверхности  $S$  функция  $U(P, Q) = -\frac{1}{r}$ , то есть при  $Q \in S$ ,  $\Gamma(P, Q)|_S = 0$ . Тогда первое слагаемое подынтегральной функции в (1.65) обращается в нуль, и мы получаем искомое решение внешней первой краевой задачи в виде:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S V \frac{\partial \Gamma}{\partial n} dS = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(Q) \frac{\partial \Gamma}{\partial n} dS, \quad (1.66)$$

где  $f(Q)$  – известное значение потенциала на краевой поверхности  $S$ .

Заметим, что функция  $U$  не может быть равной  $-\frac{1}{r}$  и во всём внешнем пространстве, ибо в этом случае она потеряет гармоничность в точке  $P$  (при совпадении  $Q$  с  $P$ ), что противоречит условию.

Но для того, чтобы воспользоваться интегральным преобразованием (1.66), надо, конечно, предварительно найти соответствующую функцию Грина  $\Gamma$  такую, что:

- на краевой поверхности  $S$  функция Грина равна нулю, т. е.  $\Gamma|_S = 0$ ;
- вне поверхности  $S$  функция Грина гармонична всюду, за исключением точки  $P$  (причиной нарушения гармоничности служит поведение слагаемого  $-\frac{1}{r}$ , а не  $U$ );
- функция Грина на бесконечности регулярна.

Для решение внешней второй краевой задачи воспользуемся выведенной выше формулой (1.65), в которой теперь необходимо исключить второе слагаемое подынтегральной функции, содержащее неизвестные значения искомой функции  $V(P)$  на краевой поверхности  $S$ , оставив только заданные на  $S$  по условию второй краевой задачи значения нормальной производной  $\frac{\partial V}{\partial n}$ . Для этого необходимо наложить очевидное условие

на функцию Грина  $\Gamma$ , а именно:  $\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right)_S = 0$ .

Второе и третье условия остаются теми же, что и для функции Грина, решающей внешнюю первую краевую задачу. При этом решение внешней второй краевой задачи имеет вид:

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma \frac{\partial V}{\partial n} dS = -\frac{1}{4\pi} \iint_S f(Q) \Gamma dS. \quad (1.67)$$

Заметим, что внутренняя вторая краевая задача может быть решена только с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Единственность решения внешней задачи обеспечивается условием стремления искомой функции  $V(P)$  к нулю при удалении точки  $P$  в бесконечность.

Решение *внешней смешанной краевой задачи* будем искать, добавляя и одновременно вычитая из подынтегрального выражения формулы (1.65) величину  $\alpha \Gamma V$ , где  $\alpha$  – константа краевого условия:

$$\begin{aligned}
V(P) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial n} + \alpha \Gamma V - \alpha \Gamma V - V \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) dS = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \Gamma \left( \frac{\partial V}{\partial n} + \alpha V \right) - V \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial n} + \alpha \Gamma \right) \right] dS.
\end{aligned}$$

Остается перечислить свойства функции Грина  $\Gamma$ , решающей внешнюю смешанную краевую задачу:

– на краевой поверхности  $S$  функция Грина  $\Gamma$  удовлетворяет условию

$$\left( \frac{\partial \Gamma}{\partial n} + \alpha \Gamma \right)_S = 0;$$

– вне поверхности  $S$  функция Грина  $\Gamma$  гармонична всюду, за исключением точки  $P$ , причем нарушение гармоничности в  $P$  обусловлено поведением слагаемого  $\frac{1}{r}$ , (а не  $U$ );

– функция Грина  $\Gamma$  на бесконечности регулярна.

Само же решение третьей краевой задачи будет при этом иметь вид:

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma \left( \frac{\partial V}{\partial n} + \alpha V \right) dS = -\frac{1}{4\pi} \iint_S f(Q) \Gamma(P, Q) dS. \quad (1.68)$$

Таким образом, решения краевых задач могут быть сведены к отысканию соответствующих функций Грина. Для определения функции Грина надо решать, по существу, ту же краевую задачу, но однородную, то есть искомая функция Грина на краевой поверхности должна обращаться в нуль-функцию. Поэтому функция Грина никак не зависит от результатов каких-либо геодезических измерений, а зависит только от вида краевой поверхности  $S$  и решаемой краевой задачи. Окончательное решение краевой задачи с помощью предварительно найденной функции Грина и выполненных на краевой поверхности результатов измерений при необходимости можно сравнительно просто корректировать в случае, например, уточнения измерений и т. п. Однако достаточно просто вычислить функцию Грина для оператора Лапласа удаётся только для таких простых краевых поверхностей, как плоскость и сфера. Результаты таких вычислений описаны в учебниках, см., например, [20].

Для геодезических целей полезно иметь функцию Грина для внешних краевых задач уравнения Лапласа на эллипсоиде. Хотя эллипсоид, казалось бы, несущественно отличается от сферы, определить соответствующую

щую функцию Грина оказывается очень непросто, см. например, [21–26]. Эффективное использование функций Грина для определения возмущающего потенциала и стоксовых постоянных Земли описано в работе [27]. В работе [28] функции Грина построены для так называемых градиентометрических краевых задач на средне орбитальной сфере. Известными считаются вторые производные геопотенциала, а искомым – потенциал на этой сфере и вне её. Вторые производные разбиты на 3 независимые группы, для каждой из которых решается своя краевая задача на упомянутой сфере. Эта работа может послужить подтверждением того, что метод функций Грина остаётся актуальным и находит применение при решении краевых задач геодезии в новых постановках и с новыми исходными данными.

## 1.6. Другие решения краевой задачи Молоденского

### 1.6.1. Решение Молоденского методом интегральных уравнений

Метод интегральных уравнений состоит в преобразовании краевого условия в эквивалентное интегральное уравнение. Возмущающий потенциал представляют в виде потенциала простого или двойного слоя, распределённого по краевой поверхности. Плотность слоя подлежит определению.

Задача состоит в решении уравнения Лапласа

$$\Delta T = 0, \quad (1.69)$$

для возмущающего потенциала  $T$  во внешности  $\Theta$  теллуроида  $\Sigma$  с краевым условием (1.13) на теллуроиде  $\Sigma$ ; будем полагать  $U_0 = W_0$  для простоты:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho} T = -\Delta g. \quad (1.70)$$

Молоденский [12] решил эту задачу, представив  $T$  как потенциал простого слоя

$$T(P) = \iint_{\Sigma} \frac{\Phi}{r} d\Sigma = \iint_{\Sigma} \Phi r^{-1} d\Sigma, \quad (1.71)$$

где  $P$  – точка вычисления;



$\varphi$  – плотность простого слоя, определённая на теллуоиде,

$$r = \sqrt{\rho_P^2 + \rho^2 - 2\rho_P \rho \cos \psi} \quad (1.72)$$

– расстояние между точкой  $P$  и точкой интегрирования (дифференциалом поверхности  $d\Sigma$ ), где  $\psi$  – угол между радиус-векторами этих двух точек.

Тогда краевое условие (1.70), с учётом того, что производные потенциала простого слоя терпят разрыв на поверхности этого слоя, запишется в виде интегрального уравнения

$$2\pi\varphi \cos \beta - \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial r^{-1}}{\partial \rho_P} + \frac{2r^{-1}}{\rho_P} \right) \varphi d\Sigma = \Delta g, \quad (1.73)$$

где  $\beta$  – угол между радиус-вектором точки  $P$  и внешней нормалью к поверхности теллуоида в этой точке.

Заметим, что дифференциал поверхности  $d\Sigma$  может быть выражен через дифференциал единичной сферы  $d\sigma$ :

$$d\Sigma = \rho^2 \sec \beta d\sigma. \quad (1.74)$$

С учётом соотношения (1.74) интегральное уравнение (1.73) можно записать следующим образом

$$2\pi\varphi \cos \beta - \iint_{\sigma} \left( \frac{3}{2r} + \frac{\rho^2 - \rho_P^2}{2r^3} \right) \frac{\rho^2}{\rho_P} \sec \beta \cdot \varphi d\sigma = \Delta g. \quad (1.75)$$

Это интегральное уравнение Молоденского.

В плоской аппроксимации (см. (1.27)) (1.75) принимает более простой вид [7]

$$2\pi\varphi \cos \beta - \iint_{\sigma} \left[ \frac{3R}{2r} + \frac{R^2(H - H_P)}{r^3} \right] \sec \beta \cdot \varphi d\sigma = \Delta g. \quad (1.76)$$

Выражение для расстояния также может быть упрощено:

$$r^2 = r_0^2 + (H - H_P)^2, \text{ где } r_0 = 2R \sin \frac{\Psi}{2}. \quad (1.77)$$

Для решения основного интегрального уравнения используется искусственный приём, называемый стягиванием по Молоденскому. Суть его состоит в том, что функции, участвующие в уравнении (1.75), разлагаются в ряд по параметру  $k$ .

Ниже кратко описана эта процедура, подробности можно найти в [7, 12].

Для начала введём вспомогательную функцию

$$\chi = \varphi \sec \beta. \quad (1.78)$$

Тогда (1.76) примет вид

$$2\pi\chi(1+\operatorname{tg}^2\beta)^{-1} - \iint_{\sigma} \left[ \frac{3R}{2r} + \frac{R^2(H-H_P)}{r^3} \right] \chi d\sigma = \Delta g. \quad (1.79)$$

Заменим  $H$  на  $kH$ ,  $\operatorname{tg}\beta$  на  $k\operatorname{tg}\beta$ , где  $0 \leq k \leq 1$ :

$$2\pi\chi(1+k^2\operatorname{tg}^2\beta) - \frac{3}{2}R \iint_{\sigma} \frac{\chi}{r_k} d\sigma - R^2 \iint_{\sigma} \frac{k(H-H_P)}{r_k^3} \chi d\sigma = \Delta g, \quad (1.80)$$

Здесь

$$r_k^2 = r_0^2 + k^2(H-H_P)^2 = r_0^2 \left[ 1 + k^2 \left( \frac{H-H_P}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (1.81)$$

Далее функции  $\frac{1}{r_k}$ ,  $\frac{1}{r_k^3}$ ,  $(1+k^2\operatorname{tg}^2\beta)$  разлагаются в ряд по степеням параметра  $k$ , а функция  $\chi$  записывается в виде

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \chi_n. \quad (1.82)$$

Подставляя эти ряды в уравнение (1.80), выполняя затем перемножение и приведение подобных членов, получим

$$2\pi\chi_0 - \frac{3}{2} \iint_{\sigma} \frac{\chi_0}{r_0} d\sigma - \Delta g +$$

$$\begin{aligned}
& +k \left( 2\pi\chi_1 - \frac{3}{2} R \iint_{\sigma} \frac{\chi_1}{r_0} d\sigma - R^2 \iint_{\sigma} \frac{\eta}{r_0^2} \chi_0 d\sigma \right) + \\
& +k^2 \left( 2\pi\chi_2 - \frac{3}{2} R \iint_{\sigma} \frac{\chi_2}{r_0} d\sigma - R^2 \iint_{\sigma} \frac{\eta}{r_0^2} \chi_1 d\sigma + \right. \\
& \left. + \frac{3R}{4} \iint_{\sigma} \frac{\eta^2}{r_0} \chi_0 d\sigma - 2\pi\chi_0 \operatorname{tg}^2 \beta \right) + \dots = , \tag{1.83}
\end{aligned}$$

где  $\eta = \frac{H - H_P}{r_0}$ .

Так как уравнение (1.83) обращается в тождество только, когда коэффициенты при  $k^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  равны нулю, то отсюда вытекает следующая система интегральных уравнений:

$$2\pi\chi_n - \frac{3}{2} R \iint_{\sigma} \frac{\chi_n}{r_0} d\sigma = G_n, \tag{1.84}$$

где

$$\begin{aligned}
G_0 &= \Delta g, \\
G_1 &= R^2 \iint_{\sigma} \frac{H - H_P}{r_0^3} \chi_0 d\sigma, \\
G_2 &= R^2 \iint_{\sigma} \frac{H - H_P}{r_0^3} \chi_1 d\sigma - \frac{3R}{4} \iint_{\sigma} \frac{(H - H_P)^2}{r_0^3} \chi_0 d\sigma + 2\pi\chi_0 \operatorname{tg}^2 \beta, \tag{1.85} \\
G_3 &= R^2 \iint_{\sigma} \frac{H - H_P}{r_0^3} \chi_2 d\sigma - \frac{3R}{4} \iint_{\sigma} \frac{(H - H_P)^2}{r_0^3} \chi_1 d\sigma - \\
& - \frac{3}{2} R^2 \iint_{\sigma} \frac{(H - H_P)^3}{r_0^5} \chi_0 d\sigma + 2\pi\chi_0 \operatorname{tg}^2 \beta, \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

При  $n = 0, H = 0$ , то есть теллуroid совпадает со сферой, и формулы (1.84) и (1.71) принимают, соответственно, вид

$$2\pi\chi_0 - \frac{3}{2} R \iint_{\sigma} \frac{\chi_0}{r_0} d\sigma = \Delta g, \tag{1.86}$$

и

$$T_0 = \iint_{\sigma} \frac{\Phi_0}{r_0} R^2 d\sigma = R^2 \iint_{\sigma} \frac{\chi_0}{r_0} d\sigma. \quad (1.87)$$

Подставляя (1.87) в (1.86), получим

$$\chi_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \Delta g + \frac{3}{2R} T_0 \right). \quad (1.88)$$

Выразим здесь  $T_0$  по формуле Стокса

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g [S_t(\psi) - 1] d\sigma, \quad (1.89)$$

где  $S_t(\psi)$  – известная функция Стокса

$$S_t(\psi) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right). \quad (1.90)$$

Тогда

$$\chi_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \Delta g + \frac{3}{16\pi^2} \iint \Delta g [S_t(\psi) - 1] d\sigma \right), \quad (1.91)$$

$$R^2 \iint_{\sigma} \frac{\chi_0}{r_0} d\sigma = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_0 [S_t(\psi) - 1] d\sigma.$$

Если полагать, что массы референц-эллипсоида и Земли совпадают, то функцию  $S_t(\psi) - 1$  нужно заменить на  $S_t(\psi)$ . Эти формулы верны и в общем случае

$$\chi_n = \frac{1}{2\pi} G_n + \frac{3}{16\pi^2} \iint G_n [S_t(\psi) - 1] d\sigma, \quad (1.92)$$

$$R^2 \iint_{\sigma} \frac{\chi_n}{l_0} d\sigma = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_n [S_t(\psi) - 1] d\sigma.$$

Теперь можно приступить к вычислению возмущающего потенциала с помощью выражения (1.71) и формул (1.74), (1.78), (1.82), а также разложения функции  $\frac{1}{r_k}$  в ряд по степеням  $k$

$$T = R^2 \iint_{\sigma} \chi r^{-1} d\sigma = T_0 + kT_1 + k^2T_2 + \dots \quad (1.93)$$

Используя формулы (1.92), получим

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_0 [S_t(\psi) - 1] d\sigma, \\ T_1 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_1 [S_t(\psi) - 1] d\sigma, \\ T_2 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_2 [S_t(\psi) - 1] d\sigma - \frac{R^2}{2} \iint_{\sigma} \frac{(H - H_P)^2}{r_0^3} \chi_0 d\sigma, \\ T_3 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_3 [S_t(\psi) - 1] d\sigma - \frac{R^2}{2} \iint_{\sigma} \frac{H - H_P}{r_0^3} \chi_1 d\sigma, \end{aligned} \quad (1.94)$$

.....

Геометрический смысл использованного вспомогательного параметра  $k$  состоит в сжатии топографии пропорционально этому параметру. Реальной земной поверхности соответствует значение  $k = 1$ . С учётом этого, окончательно имеем

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} T_n. \quad (1.95)$$

Совокупность выражений (1.95), (1.85), (1.92) и (1.95) составляет решение задачи (1.69), (1.70), известное как ряды Молоденского [12].

### 1.6.2. Решение Бровара

В. В. Бровар, в некотором смысле, обобщил идею Молоденского и представил  $T$  как потенциал обобщенного поверхностного слоя [17]:

$$T = \iint_{\Sigma} \lambda E d\Sigma, \quad (1.96)$$

где  $E$  – некоторая гармоническая функция,

$\lambda$  – обобщенная поверхностная плотность, определённая на теллуroidе  $\Sigma$ ;

Подстановка (1.96) в (1.70) даёт следующее соотношение:

$$\Delta g_P = -\frac{\partial T}{\partial \rho_P} - \frac{2}{\rho_P} T = \iint_{\Sigma} \lambda \left( -\frac{\partial E}{\partial \rho_P} - \frac{2}{\rho_P} E \right) d\Sigma. \quad (1.97)$$

Функцию  $E$ , входящую в ядро интеграла,

$$K = -\frac{\partial E}{\partial \rho_P} - \frac{2}{\rho_P} E, \quad (1.98)$$

удобно представить в виде ряда

$$E = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \frac{\rho^n}{\rho_P^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (1.99)$$

где эта сумма не включает слагаемое  $n = 1$ ;

$E$  – функция двух точек  $P$  и  $Q$ , где  $P$  – точка вычисления,  $Q$  – точка интегрирования;

$\psi$  – угол между их радиус-векторами  $\rho_P$  и  $\rho$ , соответственно.

Сумму этого ряда можно выразить через обобщённую функцию Стокса

$$S_t(\rho_P, \psi, \rho) = \frac{2}{r} + \frac{1}{\rho_P} - \frac{3r}{\rho_P^2} - \frac{5\rho}{\rho_P^2} \cos \psi - \frac{3\rho}{\rho_P^2} \cos \psi \ln \frac{\rho_P - \rho \cos \psi + r}{2\rho_P}, \quad (1.100)$$

разложение в ряд которой имеет вид

$$S_t(\rho_P, \psi, \rho) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \frac{\rho^n}{\rho_P^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (1.101)$$

Тогда (1.99) принимает вид

$$E = \frac{1}{4\pi} \left[ S_t(\rho_P, \psi, \rho) - \frac{1}{\rho_P} \right], \quad (1.102)$$

а (1.96) выглядит так:

$$T = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \lambda \left[ S_t(\rho_P, \psi, \rho) - \frac{1}{\rho_P} \right] d\Sigma. \quad (1.103)$$

Подставив (1.99) и (1.101) в (1.98), получим вид ядра

$$K(\rho_P, \psi, \rho) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\rho^2 - \rho_P^2}{\rho_P r^3} - \frac{3}{4\pi} \frac{\rho}{\rho_P^3} \cos \psi. \quad (1.104)$$

Дальнейшие преобразования с учётом того, что радиальная производная  $T$  терпит разрыв на теллуриоиде, приводят к интегральному уравнению Бровара

$$\lambda \cos \beta - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\rho^2 - \rho_P^2}{\rho_P r^3} \lambda d\Sigma = \Delta g. \quad (1.105)$$

Это уравнение гораздо проще уравнения (1.75), полученного Молоденским, поскольку оно обращается в нуль при  $\rho = \rho_P = R$  (теллуриод совпадает со сферой) в отличие от (1.75).

Дальнейшая процедура аналогична описанной в пункте 1.6.1. В (1.105) осуществляется переход от интегрирования по теллуриоду к интегрированию по единичной сфере

$$\lambda \cos \beta - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{\rho^2 - \rho_P^2}{\rho_P r^3} \rho^2 \sec \beta \lambda d\sigma = \Delta g. \quad (1.106)$$

Затем вводится новая вспомогательная функция

$$\mu = \lambda \sec \beta, \quad (1.107)$$

с которой (1.106) принимает вид

$$\mu \cos^2 \beta - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{\rho^2 - \rho_P^2}{\rho_P r^3} \rho^2 \mu d\sigma = \Delta g. \quad (1.108)$$

Плоская аппроксимация позволяет упростить это уравнение [7]

$$\mu \cos^2 \beta - \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{H - H_P}{r^3} \mu d\sigma = \Delta g. \quad (1.109)$$

Далее применяется стягивание по Молоденскому. При этом неизвестная функция  $\mu$  представлена в виде ряда

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \mu_n.$$

Приходим к интегральному уравнению:

– при  $n = 0$

$$\mu_0 = \Delta g;$$

– при  $n > 0$

$$\sum_{r=0}^M (-1)^r \mu_{n-2r} \operatorname{tg}^{2r} \beta - \sum_{r=0}^N b_r \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \mu_{n-2r-1} \frac{\eta^{2r+1}}{r_0^2} d\sigma = 0. \quad (1.110)$$

Решая это уравнение относительно  $\mu_n$ , получим

$$\mu_n = \sum_{r=0}^N b_r \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{(H - H_P)^{2r+1}}{r_0^{2r+3}} \mu_{n-2r-1} d\sigma - \sum_{r=1}^M (-1)^r \mu_{n-2r} \operatorname{tg}^{2r} \beta, \quad (1.111)$$

где

$$b_r = (-1)^r \frac{(2r+1)!}{2^{2r} (r!)^2}. \quad (1.112)$$

Формула (1.111) выражает  $\mu_n$  через  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ , что позволяет последовательно вычислять  $\mu_n$ , начиная с  $\mu_0 = \Delta g$ .

Наконец, приступим к вычислению потенциала  $T$ . Опускаем здесь подробности вывода последующих соотношений; их можно найти в [7, 17, 29].

Выражение (1.103) может быть представлено в виде ряда по степеням вспомогательного параметра  $k$ ,  $0 \leq k \leq 1$ ,

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} k^n T_n, \quad (1.113)$$

где



$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_0 [S_t(\psi) - 1] d\sigma, \quad (1.114)$$

$$T_n = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_n [S_t(\psi) - 1] d\sigma + \sum_{r=1}^M a_r \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{(H - H_P)^{2r}}{t_0^{2r+1}} \mu_{n-2r} d\sigma, \quad (1.115)$$

$$a_r = (-1)^r \frac{(2r)!}{2^{2r} (r!)^2}. \quad (1.116)$$

При  $k = 1$ , что соответствует реальной поверхности Земли, имеем

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n. \quad (1.117)$$

Итак, алгоритм решения следующий: сначала необходимо вычислить  $\mu_n$ , применяя (1.111), (1.112); затем определить  $T_n$  по формулам (1.114)–(1.116); и, наконец, вычислить  $T$  по формуле (1.117).

Эта процедура проще, чем решение Молоденского, так как здесь задействован только один набор неизвестных  $\mu_n$ , тогда как в решении Молоденского участвует два набора  $-\chi_n$  и  $G_n$ .

Для наглядности выпишем выражения для  $\mu_n$  и  $T_n$  при  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\mu_0 = \Delta g,$$

$$\mu_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{H - H_P}{r_0^3} \mu_0 d\sigma,$$

$$\mu_2 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{H - H_P}{r_0^3} \mu_1 d\sigma + \mu_0 \operatorname{tg}^2 \beta, \quad (1.118)$$

$$\mu_3 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{H - H_P}{r_0^3} \mu_2 d\sigma - \frac{3R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{(H - H_P)^3}{r_0^5} \mu_0 d\sigma + \mu_1 \operatorname{tg}^2 \beta$$

...

и

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_0 [S_t(\psi) - 1] d\sigma,$$

$$T_1 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_1 [S_t(\psi) - 1] d\sigma, \quad (1.119)$$

$$T_2 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_2 [S_t(\psi) - 1] d\sigma - \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{(H - H_P)^2}{r_0^3} \mu_0 d\sigma,$$

$$T_3 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_3 [S_t(\psi) - 1] d\sigma - \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{(H - H_P)^2}{r_0^3} \mu_1 d\sigma$$

...

Отметим, что в работе [30] выведены ряды Молоденского, а в работе [31] – ряды Бровара для чистых аномалий силы тяжести и интегрального преобразования Хотина-Коха. В наше время эти ряды представляют больший практический интерес, чем рассмотренные выше. Причиной этого является тот факт, что, благодаря ГНСС, поверхность Земли можно считать известной, и, следовательно, исходная гравиметрическая информация представлена в виде чистых аномалий силы тяжести.

### 1.6.3. Решение с помощью аналитического продолжения

В пунктах 1.6.1., 1.6.2. описана методика решения основной задачи геодезии, использующая представление возмущающего потенциала  $T$  потенциалом простого или обобщенного слоя с последующим решением возникающих интегральных уравнений. В работах М. И. Марыча [32] и Х. Морица [18, 33] использован иной подход, опирающийся на формальное аналитическое продолжение потенциала с помощью рядов Тейлора. Тем не менее, мы отнесли это решение в раздел интегральных уравнений, поскольку оно представлено в виде ряда, эквивалентного рядам Молоденского и Бровара [34].

Пусть  $\Delta g$  обозначает аномалию силы тяжести на теллуриоде, а  $\Delta g'$  – аномалию на уровне фиксированной точки  $A$  теллуроида. Показана справедливость следующего ряда Тейлора

$$\Delta g(B) = \Delta g'(B') + \left( \frac{\partial \Delta g'}{\partial h} \right)_{B'} h + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \left( \frac{\partial^n \Delta g'}{\partial h^n} \right)_{B'}, \quad (1.120)$$

где  $h = H(B) - H(B')$  – высота текущей точки  $B$  теллуроида над отсчетной сферой радиуса  $R$ . Отсчетная сфера есть либо геосфера  $R = R_{cp}$  (и тогда  $H(B') = 0$ ), либо сфера радиуса  $R = R_{cp} + H(A)$ , проходящая через точку  $A$  теллуроида, в которой предполагается в дальнейшем вычислять какие-либо характеристики гравитационного поля. В этом случае  $H(B') = H(A)$ . Преобразование от  $\Delta g'$  к  $\Delta g$  обозначим с помощью оператора  $U$ :

$$\Delta g(B) = U \Delta g'(B'). \quad (1.121)$$

Обратный оператор  $U^{-1}$  запишем в виде [35]:

$$\Delta g' = U^{-1} \Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n = \Delta g + \sum_{n=1}^{\infty} g_n, \quad (1.122)$$

где

$$g_0 = \Delta g, \quad g_n = - \sum_{k=1}^n \frac{h^k L^k (g_{n-k})}{k!} \quad n \geq 1, \quad (1.123)$$

здесь

$$L^k f = \frac{\partial^k f}{\partial \rho^k}$$

обозначает  $k$ -кратное применение оператора

$$Lf(B) = \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)_B \approx \frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{f - f(B)}{r_0^3} d\sigma, \quad (1.124)$$

где  $\sigma$  – единичная сфера,

$r_0 = 2R \sin \frac{\Psi}{2}$  – расстояние между проекциями фиксированной точки  $B$

и текущей точки интегрирования на отсчетную сферу. Формула получена впервые М. С. Молоденским [36] и позволяет практически посчитать с от-

носительной погрешностью порядка  $h/R$  вертикальную производную гармонической функции по ее значениям на поверхности  $\Sigma$ .

Так как  $\Delta g'$  относится к уровенной поверхности, то можно применить формулу Стокса

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g' [S_t(\psi) - 1] d\sigma. \quad (1.125)$$

В итоге получим

$$T = S^{-1}(\Delta g') = \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \quad (1.126)$$

где

$$T_n = S^{-1}(g_n), \quad (1.127)$$

а  $S^{-1}$  – обратный оператор Стокса.

Все решения, рассмотренные нами выше, а именно, – решение Молоденского, решение Бровара и решение Марыча-Морица – представляют собой формальные ряды по степеням параметра  $k$ . Возникает естественный вопрос о связи между собой этих трёх рядов. Л. П. Пеллинен [34] показал, что решение Марыча-Морица идентично решению Бровара. А эквивалентность решений Бровара и Молоденского доказана в [7]. Таким образом, все эти ряды эквивалентны несмотря на то, что получены принципиально разными методами.

#### **1.6.4. Сходимость рядов Молоденского**

В работе [37] предложена дальнейшая формализация оператора Молоденского

$$M(T) = \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho} T, \quad (1.128)$$

и последующее разложение его в степенной ряд Тейлора по малому параметру с начальным приближением в виде оператора Стокса. Такой подход позволяет рассмотреть вопрос о сходимости рядов Молоденского с позиции общей теории линейных операторов в банаховых пространствах.

Пусть  $B(\rho, \theta, \lambda)$  – текущая точка теллуроида  $\Sigma$  со своими сферическими координатами, причем

$$\rho_B = R + h(\theta_{B'}, \lambda_{B'}),$$

где  $R$  – радиус отсчетной сферы  $S$  наибольшего радиуса, целиком расположенной в теле Земли;

$B'$  – точка отсчетной сферы, лежащая с точкой  $B$  на одном и том же радиус-векторе;

$h_B = h(\theta_{B'}, \lambda_{B'})$  – известная достаточно гладкая функция высоты  $h_B$  точки  $B$  над отсчетной сферой. Полагая, что поверхность теллуроида имеет звездную форму, можно говорить о взаимно однозначном соответствии между точками  $B$  и  $B'$

$$B'(R, \theta, \lambda) \leftrightarrow B(R + h(\theta, \lambda), \theta, \lambda).$$

Введем в рассмотрение более общее отображение

$$B'(R, \theta, \lambda) \leftrightarrow B_\chi(R + \chi \cdot h(\theta, \lambda), \theta, \lambda), \quad (1.129)$$

задающее семейство  $\Sigma_\chi$  замкнутых поверхностей, возмущенных относительно отсчетной сферы и зависящих от числового параметра возмущения  $\chi$  таким образом, что при  $\chi = 1$  поверхность  $\Sigma_1$  совпадает с теллуroidом  $\Sigma$ , а при  $\chi = 0$  поверхность совпадает с отсчетной сферой  $S$ . Пусть  $X_\chi$  – множество потенциалов  $T$ , гармонических вне поверхности  $\Sigma_\chi$  и регулярных на бесконечности. Чтобы снабдить это множество метрикой, выделим в нем подмножество

$$\Gamma_{2,\chi}^q = X_\chi \cap W_{2,\chi}^q, \quad (1.130)$$

где  $W_{2,\chi}^q$  – соболевское пространство  $q$ -го порядка функций, определенных во внешности поверхности  $\Sigma_\chi$ .

В таком случае (1.130) есть гильбертово пространство гармонических вне  $\Sigma_\chi$  и регулярных на бесконечности функций, скалярное произведение

в котором принимает во внимание производные всех порядков до  $q$  включительно, при этом  $q$  не обязательно целое. Известно, что

$$\Gamma_{2,\chi_1}^q \subset \Gamma_{2,\chi_2}^q, \quad \chi_1 < \chi_2, \quad (1.131)$$

так что

$$\Gamma_{2,0}^q = \Gamma_2^q \subset \Gamma_{2,\chi}^q \quad \forall \chi > 0,$$

причем вложение плотно. Определим на множестве  $\Gamma_{2,\chi}^q$  линейный оператор, действующий по правилу

$$\left( -\frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho} T \right) \Big|_{\Sigma_\chi} = \Delta g_\chi, \quad (1.132)$$

в гильбертово пространство  $L_2 \Sigma_\chi$  аномалий силы тяжести  $\Delta g_\chi$  на поверхности  $\Sigma_\chi$ . Для его ограниченности необходимо полагать  $q > \frac{3}{2}$ , поскольку (1.132) содержит операции дифференцирования (порядок 1) и сужения (порядок  $\frac{1}{2}$ ). При  $\chi = 0$  формула (1.132) определяет собой известный оператор краевого условия Стокса  $S$ . При  $\chi = 1$  получается оператор краевого условия Молоденского  $M$  (1.128). Область определения и множество значений операторов (1.132) различны при различных  $\chi$ . Для удобства рассуждений об использовании рядов Тейлора мы будем иметь в виду лишь такие операторы (1.132), область определения которых сужена до  $\Gamma_2^q$ , а множество значений составляют всевозможные функции  $\Delta g_\chi$ , отнесенные без изменений к поверхности сферы  $S$  по правилу

$$L_2(s) \ni \Delta g(B') \equiv \Delta g(B) \in L_2(\Sigma_\chi), \quad (1.133)$$

где точки  $B \in S$  и  $B' \in \Sigma_\chi$  связаны соотношением (1.129).

Заметим, что при этом правило (1.132) по-прежнему зависит от  $\chi$  как от параметра, и потому введенные операторы мы будем обозначать  $M_\chi$ . Таким образом,

$$M_\chi : \Gamma_2^q \rightarrow L_2(s), \quad (1.134)$$

представляет собой абстрактную [9] операторнозначную функцию  $\chi \rightarrow M_\chi$  числового параметра  $\chi$ .

Предположим, что функция (1.132) на промежутке  $\chi \in [0, c]$ , где  $c \geq 0$ , непрерывно дифференцируема  $n$  раз. Тогда ее можно представить рядом Тейлора:

$$M_\chi = (M_\chi)_0 + (M_\chi)'_0 \chi + \dots + \frac{1}{(n-1)!} (M_\chi)^{(n-1)}_0 \chi^{(n-1)} + r_n \chi^{(n)}, \quad (1.135)$$

где  $\chi^n = (\chi, \chi, \dots, \chi)$  и абстрактная функция  $r_n$  такова, что  $\|r_n\| = O(\chi^n)$ .

Нижний индекс 0 указывает на то, что речь идет о значении соответствующих производных в точке  $\chi = 0$ . В частности,  $(M_\chi)_0 = M_0 = S$  есть оператор Стокса.

Рассмотрим смысл первой производной. Производная абстрактной функции  $(M_\chi)'$  есть так же, как и сама абстрактная функция  $(M_\chi)$ , некоторый оператор, отображающий числовой промежуток  $[0, c]$  на линейное пространство операторов, действующих из  $\Gamma_2^q$  в  $L_2(s)$ . Так что  $(M_\chi)'_0$  представляет собой конкретный оператор, отображающий  $\Gamma_2^q$  в  $L_2(s)$ .

Второе слагаемое в правой части (1.135) можно записать в виде

$$(M_\chi)'_0 \chi = \left( \frac{dM_\chi}{d\chi} \right)_0 \chi = \left( \frac{dM_\chi}{d\rho} \frac{d\rho}{d\chi} \right)_0 \chi = \chi^h \frac{\partial S}{\partial h}, \quad (1.136)$$

поскольку  $\rho = R + \chi^h$ .

Таким образом,  $(M_\chi)'_0$  есть оператор обобщенного дифференцирования по  $h$  аномалии силы тяжести на поверхности сферы и умножения на  $h$ . Аналогичные рассуждения для производных более высокого порядка в (1.135) приводят к следующему ряду Тейлора для возмущенного оператора  $M_\chi$ :

$$M_\chi = S + \chi^h \frac{\partial S}{\partial h} + \frac{(\chi^h)^2}{2!} \frac{\partial^2 S}{\partial h^2} + \dots + \frac{(\chi^h)^n}{n!} \frac{\partial^n S}{\partial h^n}. \quad (1.137)$$

Результат действия операторов обеих частей равенства (1.137) на возмущающий потенциал  $T$  дает ряд

$$\Delta g_\chi = \Delta g_0 + \chi^h \frac{\partial \Delta g_0}{\partial h} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\chi^h)^n}{n!} \frac{\partial^n \Delta g_0}{\partial h^n}, \quad (1.138)$$

что совпадает при  $\chi = 1$  с равенством (1.119), так как  $\Delta g'$  есть исходная аномалия силы тяжести  $\Delta g$  на поверхности теллурида, а  $\Delta g_0$  в (1.138) и  $\Delta g'$  в (1.119) обозначают одно и то же.

Для существования первой производной аномалии силы тяжести на сфере необходимо, чтобы  $\Delta g_0 \in W_2^1(s)$ , что выполняется лишь в том случае, когда  $T \in \Gamma_2^q$  с  $q \geq 3/2 + 1 = 5/2$ . Аналогично, для существования  $n$ -ой производной в (1.138) необходимо, чтобы  $T \in \Gamma_2^q$  с  $q \geq 3/2 + k$ .

Таким образом, для сходимости рядов (1.137), (1.138) необходимо, чтобы сужение потенциала на отсчетную сферу и значения на этой сфере аномалии силы тяжести были аналитическими функциями. Если  $M_\chi$  – аналитическая функция, то обратный оператор  $M_\chi^{-1}$ , разрешающий задачу Молоденского с краевым условием (1.132), также является аналитической функцией возмущения и потому справедливо разложение:

$$M_\chi^{-1} = (M_\chi^{-1})_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (M_\chi^{-1})_0^{(n)} \chi^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{n,\chi}, \quad (1.139)$$

где  $(M_\chi^{-1})_0 = S^{-1}$  – обратный оператор Стокса, разрешающий краевую задачу Молоденского в нулевом приближении.

С использованием правил дифференцирования обратного оператора и с учётом (1.136) для общего члена ряда получается следующая формула:

$$\frac{1}{n!} (M_\chi^{-1})_0^{(n)} \chi^{(n)} = S^{-1} g_{n,\chi}, \quad (1.140)$$

где

$$g_{n,\chi} = - \sum_{l=1}^n \frac{(\chi^h)^l}{l!} \frac{\partial^l g_{n-l,\chi}}{\partial h^l}. \quad (1.141)$$



При  $\chi = 1$  ряд (1.141) совпадает с рядом (1.126). Таким образом, операторы Молоденского (прямой  $M_\chi$  и обратный  $M_\chi^{-1}$ ) удобно трактовать как возмущенные операторы Стокса (соответственно прямой  $S$  и обратный  $S^{-1}$ ), а ряды Молоденского (1.137)–(1.139) непосредственно получаются как ряды Тейлора для операторнозначных функций малого параметра возмущения в окрестности оператора Стокса.

Обсудим теперь условия сходимости рядов Молоденского. Мы уже видели, что необходимым условием сходимости является аналитичность аномалии силы тяжести  $\Delta g$  на сфере. Тот факт, что функция  $\Delta g$  аналитична во внешней относительно сферы области (поскольку произведение  $\rho \Delta g$  гармонично там же, где гармоничен потенциал) не гарантирует нужное поведение аномалии силы тяжести на границе области, в частности, на сфере. Если полагать, что реальный возмущающий потенциал аппроксимируется элементами пространства  $\Gamma_2^q$  с  $q = 5/2$ , то в рядах (1.137)–(1.139) целесообразно удерживать только нулевое и первое приближения. Сходимость последующих итераций гарантировать не удастся, так как порядок операторов – производных типа  $M_\chi^{(n)}$  и  $(M_\chi^{-1})^{(n)}$  – равен  $3/2 + n$ , и потому их ограниченность при  $q = 5/2$  имеет место лишь при  $n \leq 1$ . Таким образом, с увеличением номера приближения в задаче Молоденского происходит потеря гладкости решения. Аналогичные явления подчеркивались в работе [38].

Расходящийся ряд, используемый для аппроксимации некоторого элемента  $T$ , называется *полусходящимся* или *асимптотическим*, если погрешность аппроксимации  $n$ -ой частичной суммой, прежде чем вновь начнет возрастать, убывает до некоторого минимума, достигаемого при определенном значении  $n_0$  номера  $n$  [39].

Пользуясь этим определением, можно считать ряды Молоденского для потенциалов из гильбертова пространства  $\Gamma_2^{5/2}$  полусходящимися с  $n_0 = 1$ . Другими словами, при наличии непрерывных исходных данных по всей Земле имеет смысл ориентироваться только на нулевое (стоксово) и первое приближения. При этом наиболее важное значение возмущающего параметра  $\chi = 1$  допустимо.

Однако достаточно, используя оператор сглаживания с бесконечно дифференцируемым ядром, осуществить скользящее сглаживание реального поля по любым, как угодно, малым ячейкам сферы, и мы получим

бесконечно дифференцируемую аномалию силы тяжести. Поэтому практически целесообразно вслед за автором работы [18] полагать аномалию силы тяжести аналитической функцией на сфере и попытаться оценить допустимые значения возмущающего параметра в рядах (1.137)–(1.139). В связи с этим представляет интерес следующее утверждение.

**Теорема 9.** [4] Пусть существуют такие положительные числа  $c$  и  $B$ , что, начиная с некоторого номера  $N$ , выполняется неравенство

$$\left\| H^n \frac{\partial^n}{\partial H^n} \right\|_{L_2} \leq cn!B \quad \forall n > N. \quad (1.142)$$

Тогда ряды Молоденского сходятся при любом  $\chi < \frac{1}{c}$ .

**Следствие 2.** Если при  $n > N$  норма  $\left\| H^n \frac{\partial^n}{\partial H^n} \right\|_{L_2}$  с увеличением  $n$  на единицу возрастает не более чем в  $c(n+1)$  раз, то ряды Молоденского сходятся при любом  $\chi < \frac{1}{c}$ .

**Следствие 3.** Если неравенство (1.142) справедливо при  $c < 1$  для  $\forall n > N$ , то ряды Молоденского сходятся на поверхности теллурида.

Таким образом, сходимость рядов Молоденского существенно зависит от гладкости изучаемого гравитационного поля и гладкости изучаемой поверхности Земли.

Аналогичные выводы приводятся и в [7].

### 1.7. О существовании и единственности решения нелинейной задачи Молоденского

Для практики линейная задача Молоденского достаточна в подавляющем большинстве случаев. Но нелинейная постановка играет важную роль при изучении вопросов существования и единственности решения.

Хёрмандер предложил итерационное решение нелинейной задачи Молоденского [38]. Для рассмотрения его результатов нам понадобятся некоторые сведения о банаховых пространствах и нормах.

Пространство действительных непрерывных функций  $f$ , определённых на некотором компактном множестве  $B \subset R^n$  с нормой

$$\|f\|_0 = \max_{\vec{x} \in B} |f(\vec{x})|, \quad (1.143)$$

будем в дальнейшем обозначать  $H^0$ ;  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Множество непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, обладающих конечной нормой вида

$$\|f\|_1 = \sup_{\vec{x} \in B} |f(\vec{x})| + \sup_{\vec{x} \in B} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|, \quad (1.144)$$

образуют банахово пространство  $H^1$ .

Для задач теории потенциала важное значение имеют пространства  $H^\alpha$ , промежуточные между  $H^0$  и  $H^1$ . Множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем  $0 < \alpha < 1$

$$\sup_{\vec{x}, \vec{y} \in B} \frac{|f(\vec{x}) - f(\vec{y})|}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha}, \quad (1.145)$$

образуют банахово пространство  $H^\alpha$ . Для этих функций величина (1.145) конечна. Нормой в пространстве  $H^\alpha$  служит

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\vec{x} \in B} |f(\vec{x})| + \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in B} \frac{|f(\vec{x}) - f(\vec{y})|}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha}. \quad (1.146)$$

Это множество функций, промежуточных между непрерывными и непрерывно дифференцируемыми. В дальнейшем под  $H^1$  будем понимать пространство функций, удовлетворяющих условию Гёльдера при  $\alpha = 1$ . Обобщим норму (1.146) для случая  $\alpha > 1$  следующим образом

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\vec{x} \in B} |f(\vec{x})| + \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in B} \frac{|D^k f(\vec{x}) - D^k f(\vec{y})|}{|\vec{x} - \vec{y}|^{\alpha-k}}, \quad (1.147)$$

где  $D^k f(\vec{x})$  обозначает любую производную  $k$ -ого порядка функции  $f$ .

Пространство  $H^\alpha$  состоит из непрерывных функций, которые  $k$  раз дифференцируемы, а их производные  $k$ -ого порядка удовлетворяют условию Гёльдера с показателем  $\alpha - k \leq 0$ .

Вернёмся теперь к задаче Молоденского. Хёрмандер изменил её формулировку таким образом, что возможно единственное решение [7].

Определить в  $R^3$  замкнутую поверхность  $S$ , представляющую собой взаимно однозначное отображение единичной сферы, по заданным значениям  $\bar{\vec{g}}$  и  $\bar{W}$ , представляющим собой значения вектора силы тяжести  $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$  и потенциала  $W$  на поверхности  $S$ , так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\bar{W} = W|_S + \sum_1^3 a_i A_i, \quad (1.148)$$

$$\bar{\vec{g}} = \vec{g}|_S = (\text{grad } W)|_S, \quad (1.149)$$

$$W(\vec{x}) = V(\vec{x}) + \frac{1}{2} \omega^2 (x_1^2 + x_2^2), \quad (1.150)$$

$$\Delta V = 0 \text{ вне } S, \quad (1.151)$$

$$V(\vec{x}) = \frac{\text{const}}{|\vec{x}|} + O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right). \quad (1.152)$$

Условие (1.152), означающее, что внешний потенциал силы притяжения  $V(\vec{x})$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , не содержит шаровой функции первой степени, обеспечивает единственность решения.

В новой формулировке задачи отличается условие (1.148). Оно содержит дополнительное слагаемое

$$\sum_{i=1}^3 a_i A_i, \quad (1.153)$$

представляющее собой линейную комбинацию трёх подлежащих определению констант  $a_i$  и трёх соответствующим образом подобранных функций  $A_i$ . Это слагаемое обеспечивает разрешимость задачи Молоденского при любых краевых условиях  $\bar{\vec{g}}$  и  $\bar{W}$ .

Линеаризация модифицированной задачи Молоденского выполняется стандартным образом. Единственное отличие соответствующего краевого условия состоит в появлении дополнительного слагаемого типа (1.153).

Используя итерационную процедуру, Хёрмандер доказал следующую теорему существования и единственности решения задачи Молоденского [7].

**Теорема 10.** *Зададимся произвольным  $\varepsilon > 0$ . Тогда:*

1) для всех  $\bar{W}$  и  $\bar{\vec{g}}$  из  $H^{2+\varepsilon}$  в окрестности  $\bar{W}_0$  и  $\bar{\vec{g}}_0$  модифицированная задача Молоденского (1.148)–(1.152) имеет решение  $S$ , близкое к  $S_0 = \Sigma$  в  $H^{2+\varepsilon}$ , и  $(a_1, a_2, a_3)$ , близкий к 0 в  $R^3$ ;

2) если  $\bar{W}$  и  $\bar{\vec{g}}$  принадлежат  $H^\alpha$  при некотором  $\alpha > 2 + \varepsilon$ , не являющемся целым числом, то  $S \in H^\alpha$ ;

3) существует некоторая окрестность  $S_0$  в  $H^{3+\varepsilon}$ , которая не может содержать двух решений задачи.

Здесь  $W_0$  и  $\vec{g}_0$  представляют собой начальные значения  $W$  и  $\vec{g}$  в итерационной процедуре решения задачи Молоденского, а  $\bar{W}_0$  и  $\bar{\vec{g}}_0$  – их значения на поверхности  $S_0$ . В качестве  $W_0$  и  $\vec{g}_0$  можно взять нормальный потенциал  $U$  и вектор нормальной силы тяжести  $\vec{\gamma}$ , а роль  $S_0$  может играть теллуroid.

Эта теорема накладывает очень жёсткие условия на искомые поверхность  $S$  и потенциал  $W$ ; реальная поверхность Земли и реальный потенциал вряд ли будут удовлетворять таким требованиям гладкости.

Совершенно иной подход к нелинейной задаче был предложен Сансо [40, 41]. Здесь следуем изложению, представленному в [7].

Решение Сансо состоит в использовании компонент вектора силы тяжести  $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$  в качестве прямоугольных координат точки во вспомогательном пространстве, называемом *гравитационным*. Потенциал  $W$  становится функцией  $g_i$

$$W = W(\vec{g}) = W(g_1, g_2, g_3). \quad (1.154)$$

В постановке краевой задачи предполагается, что на поверхности  $\mathcal{S}$  известны компоненты  $g_i$  вектора силы тяжести. Если описать  $\mathcal{S}$  в терминах новых координат  $g_i$ , то она преобразуется в известную поверхность  $S_g$  в гравитационном пространстве, а краевая задача со свободной границей преобразуется в задачу с фиксированной границей.

Основной недостаток такого подхода состоит в том, что взаимно одно-

значное соответствие между прямоугольными координатами  $x_i$  и  $g_i$  на поверхности  $S$  и во внешнем пространстве возможно только для невращающейся Земли. Однако, слагаемое, соответствующее центробежной силе

$$\vec{g} = \text{grad } W(\vec{x}) = \text{grad } V + \omega^2 \vec{x}_e, \quad (1.155)$$

мало по сравнению с членом, отражающим вклад силы притяжения; здесь  $\vec{x}_e = (x_1, x_2, 0)$ . Например,  $|\omega^2 \vec{x}_e| \approx 3$  Гал в отличие от  $|\text{grad } V| \approx 10^3$  Гал.

К тому же, влияние центробежного потенциала и его градиента можно вычислить, используя референц-фигуру, например, общеземной эллипсоид, и удалить это влияние из доступных для непосредственного измерения  $W$  и  $\text{grad } W$ . Остаточные значения имеют порядок произведения  $10^{-5} - 10^{-6}$  на соответствующие главные члены [42].

Для сохранения терминологии автора идеи, в дальнейшем под  $\vec{g}$  будем понимать

$$\vec{g} = \text{grad } V. \quad (1.156)$$

Пространство  $\Omega$ , внешнее относительно  $S$ , отобразится в пространство  $\Omega_g$ , внутреннее относительно  $S_g$ ; соответственно, бесконечно удалённая точка в обычном пространстве перейдёт в начало координат в гравитационном.

Теперь переформулируем задачу Молоденского в рамках концепции гравитационного пространства: найти функцию  $V(\vec{x})$ , гармоническую в области  $\Omega$ , внешней относительно неизвестной поверхности  $S$ ,

$$\Delta V = 0, \quad (1.157)$$

и удовлетворяющую на  $S$  следующему краевому условию

$$V|_S = \bar{V}(u), \quad (1.158)$$

$$(\text{grad } V)|_S = \bar{\vec{g}}(u), \quad (1.159)$$

где  $u = (\varphi, \lambda)$  – двумерный параметр,  $\varphi, \lambda$  – астрономические широта и долгота, соответственно.

Новые координаты  $g_i$  являются функциями прямоугольных координат  $x_i$

$$g_i = g_i(x_j). \quad (1.160)$$

Для существования обратного преобразования

$$x_j = x_j(g_k), \quad (1.161)$$

необходимо, чтобы якобиан  $\det\left(\frac{dg_i}{dx_j}\right)$  был отличен от нуля на поверхности  $S$  и вне её. Так как

$$g_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (1.162)$$

то это условие равносильно следующему

$$\det\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0, \quad (1.163)$$

называемому условием Марусси. В дальнейшем будем полагать, что оно выполняется там, где это необходимо.

Итак, задача Молоденского сводится к задаче с фиксированной границей в гравитационном пространстве. Но проблема состоит в том, что неизвестна форма того линейного дифференциального уравнения в частных производных, в которое преобразуется уравнение Лапласа в гравитационном пространстве, так как неизвестно преобразование (1.160).

Чтобы обойти эту проблему, Сансо ввёл сопряжённый потенциал

$$\psi = \vec{x} \cdot \vec{g} - V = x_k g_k - V. \quad (1.164)$$

В результате дифференцирования выражения (1.164) получим

$$x_i = \frac{\partial \psi}{\partial g_i}, \quad (1.165)$$

или

$$\vec{x} = grad_g \psi. \quad (1.166)$$

Величины  $g_i$  и  $\psi$  связывают такие же соотношения, что и  $x_i$  и  $V$ ,

а формула (1.164) позволяет выразить один потенциал через другой

$$\Psi = x_k \frac{\partial V}{\partial x_k} - V, \quad (1.167)$$

$$V = g_k \frac{\partial \Psi}{\partial g_k} - \Psi. \quad (1.168)$$

Такая же замечательная связь видна между матрицами вторых производных этих потенциалов:

$$M_{\Psi} = \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial g_i \partial g_j} \right) = \left( \frac{\partial x_i}{\partial g_j} \right), \quad (1.169)$$

$$M_V = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right), \quad (1.170)$$

то есть

$$M_V = M_{\Psi}^{-1}. \quad (1.171)$$

Оператор Лапласа

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}, \quad (1.172)$$

представляет собой теперь след матрицы

$$Tr M_V = 0. \quad (1.173)$$

Это значит, что мы можем записать соответствующее уравнение для сопряженного потенциала. Из (1.171) и (1.173), получим

$$Tr(M_{\Psi}^{-1}) = 0. \quad (1.174)$$

Для сокращения записи введём обозначение

$$\Psi_{ij} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial g_i \partial g_j}, \quad (1.175)$$

тогда матрица (1.169) запишется так



$$M_{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.176)$$

Обращая её и вычисляя затем след, получим

$$\Psi_{11}\Psi_{22} - \Psi_{12}^2 + \Psi_{22}\Psi_{33} - \Psi_{23}^2 + \Psi_{11}\Psi_{33} - \Psi_{13}^2 = 0. \quad (1.177)$$

Это и есть то уравнение, которому удовлетворяет сопряжённый потенциал в гравитационном пространстве. Однако, это уравнение нелинейное.

Так как в гравитационном пространстве  $\vec{g}$  является вектором местоположения, то величина силы тяжести  $g$  играет роль модуля радиус-вектора, см. (1.1). Тогда производная по  $g$  представляет собой радиальную производную:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial g} = \frac{\partial \Psi}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial g} = \frac{\partial \Psi}{\partial g_k} \frac{g_k}{g}. \quad (1.178)$$

Отсюда

$$g \frac{\partial \Psi}{\partial g} = g_k \frac{\partial \Psi}{\partial g_k}. \quad (1.179)$$

Поэтому уравнение (1.168) принимает вид

$$V = g \frac{\partial \Psi}{\partial g} - \Psi, \quad (1.180)$$

а краевое условие в гравитационном пространстве выглядит так

$$\left( g \frac{\partial \Psi}{\partial g} - \Psi \right) \Big|_{S_g} = \bar{V}(u). \quad (1.181)$$

При  $\rho \rightarrow \infty$  в обычном пространстве

$$V = \frac{\mu}{\rho} + 0 \left( \frac{1}{\rho^3} \right), \quad (1.182)$$

$$V = \frac{\mu}{\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right), \quad (1.183)$$

где

$$\mu = GM \quad (1.184)$$

– произведение гравитационной постоянной на массу Земли.

При  $\rho \rightarrow \infty$   $g \rightarrow 0$ ; решая (1.182) относительно  $\frac{1}{\rho}$  и подставляя результат в (1.183), получим

$$V = \mu^{1/2} g^{1/2} + O(g^{3/2}). \quad (1.185)$$

Это соотношение описывает поведение  $V$  при  $g \rightarrow 0$ . Так же имеет место следующее соотношение для  $\psi$

$$\psi = -2\mu^{1/2} g^{1/2} + O(g^{3/2}). \quad (1.186)$$

Теперь формулировка краевой задачи геодезии в гравитационном пространстве будет выглядеть следующим образом: найти решение дифференциального уравнения (1.177) в области  $\Omega_g$  с краевым условием (1.181) на  $S_g$ .

Поверхность Земли  $S$  определяется из уравнения

$$\vec{x}|_S = (grad_g \psi)|_{S_g}. \quad (1.187)$$

Так как направление дифференцирования  $\partial/\partial g$  по радиус-вектору в гравитационном пространстве в общем случае отличается от направления нормали к  $S_g$ , то имеем задачу с косой производной, известной поверхностью  $S_g$  и линейным краевым условием (1.181), но для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (1.177).

Пусть теперь  $\psi$  – какое-нибудь решение сформулированной краевой задачи. Можно показать, что тогда функция

$$\hat{\psi} = \psi + c_i g_i,$$

где  $c_i$  – произвольные константы, тоже является решением этой задачи.

В обычном пространстве добавление к  $\psi$  члена  $c_i g_i$  означает смещение на вектор  $c_i$

$$\hat{x}_i = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial g_i} = x_i + c_i.$$

Для единственности решения на  $\psi$  необходимо наложить ограничение (1.186), означающее, что начало координат  $X$  расположено в центре масс Земли.

Для существования решения при любых краевых значениях необходимо изменить краевое условие (1.181) следующим образом

$$g_k \frac{\partial \psi}{\partial g_k} - \psi = \bar{V}(u) + a_i g_i \text{ на } S_g \quad (1.188)$$

то есть появляется слагаемое, представляющее собой линейную комбинацию  $g_i$  с тремя константами  $a_i$ , подлежащими определению.

Для доказательства теоремы существования и единственности краевой задачи в новой постановке Сансо, также как и Хёрмандер, использовал итерационную процедуру. Основную трудность при этом представляет уравнение (1.177). Для того, чтобы иметь возможность решить это уравнение итерационно, пришлось прибегнуть к довольно сложным преобразованиям с введением в рассмотрение новых функций и потенциалов. Подробности можно найти, например, в [7].

Сансо удалось ослабить ограничения, накладываемые на исходные данные в теореме Хёрмандер 10. Он показал, что для существования и единственности решения достаточна близость искомого и начального потенциалов в метрике пространства  $H^{1+\varepsilon}$  тогда, как в теореме Хёрмандера требовалась близость в пространстве  $H^{2+\varepsilon}$  для существования решения и даже в  $H^{3+\varepsilon}$  для его единственности. Но результаты Хёрмандера получены для поля силы тяжести, тогда как Сансо работал с полем силы притяжения.

Позже Сансо показал [43], что взаимно однозначное соответствие между  $\vec{x}$  и  $\vec{g}$  в случае, когда под  $\vec{g}$  понимается сила тяжести, а не сила притяжения, имеет место, по меньшей мере, в шаровом слое до  $6,6R$  (вне масс), где  $R = a$ , то есть экваториальному радиусу Земли. А значит, идея гравитационного пространства может быть применена и к потенциалу си-

лы тяжести. Но в работе [43] рассматривается конкретно шаровой слой от  $R$  до  $2R$  в предположении, что дополнительно известны значения потенциала силы тяжести  $W$  и вектора силы тяжести  $\vec{g}$  на сфере радиуса  $2R$ . Таким образом, Сансо приходит к новой формулировке краевой задачи.

Пусть известны значения  $W$  и  $\vec{g}$  на двух поверхностях  $S_1$  и  $S_2$ , где  $S_1$  – физическая поверхность Земли,  $S_2$  – замкнутая поверхность, охватывающая  $S_1$ . Пусть, далее,

$$W|_{S_1} = w_1(u), \quad W|_{S_2} = w_2(u); \quad (1.189)$$

$$\vec{g}|_{S_1} = \vec{g}_1(u), \quad \vec{g}|_{S_2} = \vec{g}_2(u).$$

Требуется найти сопряжённый потенциал  $\psi(\vec{g})$ , удовлетворяющий уравнению

$$Tr(M_\psi^{-1}) = \omega^2, \quad (1.190)$$

и краевым условиям

$$g \frac{\partial \psi}{\partial g} - \psi|_{G_1} = w_1(u) + \vec{c} \cdot \vec{g}_1(u), \quad (1.191)$$

$$g \frac{\partial \psi}{\partial g} - \psi|_{G_2} = w_2(u) + \vec{c} \cdot \vec{g}_2(u),$$

где  $G_1$  и  $G_2$  – те поверхности в гравитационном пространстве, в которые отображаются  $S_1$  и  $S_2$ ;

$\vec{c}$  – вектор неизвестных постоянных.

Вторые слагаемые в правых частях (1.191) обеспечивают существование решения при любых исходных данных. Кроме того, для обеспечения единственности решения дополнительно накладывается условие

$$\int_{G_3} \psi \vec{g} dG = 0, \quad (1.192)$$

где  $G_3$  – сфера, расположенная между поверхностями  $G_1$  и  $G_2$  вместе с некоторой своей окрестностью. Тогда поверхность  $S$  определяется следующим образом

$$\bar{x}_1(u) = grad \psi|_{\bar{g}_1(u)}. \quad (1.193)$$

Для задачи (1.189)–(1.192) доказана следующая теорема существования и единственности:

*Если  $G_1, G_2$  имеют звёздную форму, а функции, их определяющие, принадлежат пространству  $H^{2+\varepsilon}$ ,  $w_1(u), w_2(u) \in H^{1+\varepsilon}$ ; кроме того,  $w_1(u), w_2(u)$  находятся в малой окрестности (в  $H^{1+\varepsilon}$ )  $w_{01}(u) = M^{1/2} g_1^{1/2}(u)$ ,  $w_{02}(u) = M^{1/2} g_2^{1/2}(u)$ ;  $\omega^2$  находится в малой окрестности 0, то задача (1.189)–(1.192) имеет единственное решение  $\psi(g) \in H^{2+\varepsilon}$  в малой окрестности  $\psi_0 = -2M^{1/2} g^{1/2}$ .*

Вследствие этой теоремы функция (1.193), определяющая поверхность Земли, является единственным решением краевой задачи в классе  $H^{1+\varepsilon}$  в окрестности сферы.

Линеаризация задачи Сансо приводит к тем же результатам, что и при обычном подходе. Так что, с практической точки зрения, концепция гравитационного пространства не даёт ничего нового. Но эта идея оказалась очень плодотворной для изучения краевой задачи геодезии с теоретической точки зрения. Она позволила глубже понять краевую задачу геодезии и снабдила науку новыми методами изучения этой задачи с математической точки зрения.

## **1.8. Современные формулировки краевой задачи физической геодезии**

Помимо классической формулировки задачи со свободной границей в литературе предложено большое количество иных формулировок краевой задачи физической геодезии. Сильное влияние на развитие этого направления оказало появление глобальных спутниковых систем навигации, позволяющих определять координаты точек поверхности Земли. Это позволяет, с одной стороны, рассматривать концепцию краевой задачи с фиксированной границей, поскольку можно полагать поверхность Земли известной. С другой стороны, в качестве исходной информации можно рассматривать чистую аномалию силы тяжести вместо смешанной и, соответственно, работать с интегральным преобразованием Хотина-Коха

вместо интегрального преобразования Стокса. Мы здесь кратко рассмотрим лишь те из них, которые чаще всего встречаются в геодезических публикациях, а именно, задачу с фиксированной границей, скалярную задачу, альтиметро-гравиметрическую задачу и переопределённую задачу.

**Задача с фиксированной границей.** Начнём с задачи, которая, на наш взгляд, представляет наибольший интерес в современных условиях. Такое мнение опирается на тот факт, что использование ГНСС позволяет определять координаты непосредственно точек поверхности Земли в единой системе координат. Вследствие этого, можно полагать, что поверхность Земли известна, и на ней известны чистые аномалии силы тяжести.

Наиболее интересный результат, касающийся этой задачи, по-видимому, получен в работе Sanso and Venuti [44]. Формулировка линеаризованной задачи с фиксированной границей даётся в следующем виде.

Известны:

– земная поверхность  $S$ , то есть функции

$$r = R(\sigma), \sigma = (\theta, \lambda), \quad (1.194)$$

где  $(r, \theta, \lambda)$  – сферические координаты точек;

– возмущение силы тяжести (чистая аномалия силы тяжести) на  $S$

$$\frac{\partial T(P)}{\partial h} = -\delta g(\sigma). \quad (1.195)$$

Требуется найти возмущающий потенциал  $T$  вне  $S$ .

Предполагается, что  $S$  имеет звёздную форму, а функция  $R(\sigma)$  ограничена вместе со своими производными первого и второго порядков относительно  $(\theta, \lambda)$ .

Доказана следующая теорема:

*Пусть  $F(P) = -R(\sigma)\delta g(\sigma)$  принадлежит  $H_0$  – пространству интегрируемых с квадратом функций  $L^2(S)$  с нормой*

$$\|F\|_0^2 = \int_{\sigma} F^2(\sigma) R(\sigma) d\sigma, \quad (1.196)$$

*и, кроме того,*

$$C_1 \varepsilon_+ < 1. \quad (1.197)$$

Тогда  $T$  принадлежит  $H_1$  – пространству гармонических функций, след которых содержится в  $L^2(\sigma)$  с нормой

$$\|T\|_1^2 = \int_{\sigma} \left| \text{grad} T(R(\sigma), \sigma) \right|^2 R^3(\sigma) d\sigma, \quad (1.198)$$

и удовлетворяет неравенству

$$\|T\|_1 \leq C_2 \|F\|_0, \quad (1.199)$$

с

$$C_2 = \frac{C_1}{1 - C_1 \varepsilon_+}, \quad (1.200)$$

где  $d\sigma$  – проекция элемента  $dS$  поверхности  $S$  на единичную сферу  $\sigma$ ;  
 $\vec{\varepsilon} = \vec{v} - \vec{e}_r$ , где  $\vec{v}$  – единичный вектор нормали к референц-эллипсоиду,  
 $\vec{e}_r$  – единичный радиус-вектор точки  $P$ .

В [44] показано, что  $\varepsilon_+ = \max |\vec{\varepsilon}(\sigma)| \approx \frac{e^2}{2}$ , где  $e$  – эксцентриситет эллипсоида.

Теорема означает, что из выполнения условия (1.197) следует существование единственного и устойчивого решения задачи.

В геометрическом смысле условие (1.197) выполняется, если наклон поверхности  $S$  относительно  $\vec{e}_r$  не превышает

$$I_+ = \arccos e^2 \approx 89,6^\circ. \quad (1.201)$$

$I(\sigma)$  – угол между единичным нормальным к поверхности  $S$  вектором  $\vec{n}$  и  $\vec{e}_r$  в точке  $P$ ,  $I_+ = \max I(\sigma)$ .

Таким образом, единственность и устойчивость решения линеаризованной задачи с фиксированной границей имеет место практически для любой, в разумных пределах, поверхности  $S$ , имеющей звёздную форму.

**Скалярная краевая задача физической геодезии.** Скалярная постановка была предложена впервые Sacerdote и Sanso [45] в 1985 году. Идея состоит в рассмотрении задачи, промежуточной между задачей со свободной границей и задачей с фиксированной границей. В первом случае известны значения потенциала и силы тяжести на поверхности, требуется

определить саму поверхность и потенциал силы тяжести вне этой поверхности. Во втором случае, известна поверхность и сила тяжести на ней, требуется определить потенциал вне этой поверхности.

Промежуточная формулировка предполагает, что известны плановые координаты точек поверхности, то есть широта и долгота (геодезические или астрономические), а также потенциал и сила тяжести на поверхности, а определению подлежит только третья координата – геодезическая высота точки, а также потенциал вне поверхности. Таким образом, получается новая формулировка задачи со свободной границей, но свободной она является только в «вертикальном» направлении; а скалярная – поскольку определению подлежит только одна координата вместо трёх.

Отметим, что в связи с появлением понятия «скалярной краевой задачи геодезии» задачу в классической формулировке, где искомыми являются все три координаты точек поверхности, в геодезической литературе принято называть «векторной краевой задачей геодезии».

В [46] доказана теорема о существовании и единственности решения нелинейной скалярной краевой задачи при условии, что центробежная компонента потенциала рассматривается как возмущение. При этом на исходные данные, а именно, силу тяжести  $g$  и потенциал  $W$ , накладываются естественные ограничения гладкости  $-g \in H^\varepsilon$ ,  $W \in H^{1+\varepsilon}$ .

**Задача альтиметрии-гравиметрии.** Задача альтиметрии и гравиметрии (altimetry-gravimetry problem) рассматривается в двух постановках [47]. В обоих случаях предполагается, что центробежная составляющая хорошо известна и удалена. Кроме того, известна та часть поверхности  $S$ , которая соответствует морям. Отличает эти две задачи то, что в одном случае полагаем, что известен потенциал на всей поверхности  $S$ , а в другом случае – сила притяжения (т. к. из измерений удалена центробежная часть). Обозначим их AGP1 и AGP2, соответственно.

Далее введём следующие обозначения. Пусть  $P_0$  – точка на эллипсоиде с известными координатами  $\sigma = (\theta, \lambda)$  на нём, соответствующая точке  $P$  на поверхности  $S$ ,  $h$  – геодезическая высота точки  $P$ ,  $\vec{v}$  – нормаль к эллипсоиду в точке  $P_0$ ;  $G$  – геоид,  $h_G$  – высота геоида (временно используем это обозначение для единообразия),  $W_0$  – значение потенциала на геоиде,  $\gamma(P_0)$  – значение нормальной силы притяжения в точке  $P_0$ . Следующее соотношение означает, что нам известна поверхность  $S$  на море

$$h_P = h(P_0) = h_0(P_0). \quad (1.202)$$



В рамках задачи AGP1 предполагается, что известна топография морской поверхности, то есть высота морской поверхности над геоидом  $G$  :

$$\delta h(P_0) = h_0(P_0) - h_G(P_0), \quad (1.203)$$

что, собственно, и позволило нам вычислить значения потенциала на всей поверхности  $S$  с достаточным уровнем приближения

$$V_P = W_0 - \gamma(P_0)\delta h(P_0) = v_0(P_0). \quad (1.204)$$

Напротив, как мы уже отметили выше, в задаче AGP2 известна сила притяжения  $g$  (сохраняем обозначения [47]) на всей поверхности  $S$ , при этом над морской поверхностью выполняется соотношение

$$|\nabla V(P_0 + h\vec{v})| = g_0(\sigma). \quad (1.205)$$

Таким образом, формулировки этих задач выглядят так:

– AGP1

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & \text{вне } S, \\ V(P_0 + h\vec{v}) = v_0(\sigma) & \text{на } S, \\ |\nabla V(P_0 + h\vec{v})| = g_0(\sigma) & \text{на суше,} \\ h_P = h_0(P_0) & \text{на море;} \end{cases} \quad (1.206)$$

– AGP2

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & \text{вне } S, \\ |\nabla V(P_0 + h\vec{v})| = g_0(\sigma) & \text{на } S, \\ V(P_0 + h\vec{v}) = v_0(\sigma) & \text{на суше,} \\ h_P = h_0(P_0) & \text{на море.} \end{cases} \quad (1.207)$$

AGP1 (1.208) и AGP2 (1.209) представляют собой нелинейные смешанные краевые задачи (Дирихле и с косой производной) с частично свободной границей (на суше) для уравнения Лапласа.

Для этих двух задач в линейной постановке и сферической аппроксимации доказаны теоремы существования и единственности решения. Подробности можно найти в работах [47, 48].

**Переопределённая задача.** За последние десятилетия накопились большие объёмы измерительной информации. На одну и ту же территорию могут приходиться различные типы геодезических данных, например, наземная гравиметрия и градиентометрия. В результате мы сталкиваемся с

ситуацией, когда исходных данных больше, чем требуется для однозначного решения задачи. В связи с этим получила распространение переопределённая краевая задача геодезии. Так как все измерения содержат ошибки, то целесообразно поверхность  $S$  и заданные на ней граничные величины рассматривать как случайные.

По-видимому, впервые эта задача была рассмотрена в строгих математических рамках в работе [45]. Мы здесь приведём формулировку переопределённой (overdetermined) краевой задачи геодезии, следуя работе [49].

Даны функционалы на потенциале на поверхности Земли и вне её, характеризующие статистически их средними значениями и стандартными отклонениями. Требуется определить поверхность Земли и её внешнее гравитационное поле:

$$\Delta T(\vec{x}) = 0 \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (1.208)$$

$$B_i T(\vec{x}) = f_i, \vec{x} \in S, i = 1, 2, \dots, \quad (1.209)$$

$$T(\vec{x}) = 0, |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad (1.210)$$

где  $B_i$  и  $f_i$  – оператор и данные  $i$ -го типа, соответственно;

$\Omega$  – трёхмерная область, внешняя относительно замкнутой поверхности  $S$ ;

вектор местоположения  $\vec{x}$  задаётся математическим ожиданием  $\vec{x}_0 = M\{\vec{x}\}$  и дисперсией  $\sigma_0^2 = D\{\vec{x}\}$ ;

$i$  -ый тип данных описывается математическим ожиданием  $\Gamma_i^0 = M\{\Gamma_i\}$  и дисперсией  $\sigma_i = D\{\Gamma_i\}$ .

Решение задачи (1.208) обычно отыскивается методом наименьших квадратов.

Дальнейшие подробности можно найти, например, в работах [49–52].

## 1.9. Линейная краевая задача на эллипсоиде

В геодезической практике в основном рассматриваются краевые задачи в линейной постановке и сферической аппроксимации. Последнее упрощение приводит к погрешностям порядка сжатия Земли ( $\approx 0,3\%$ ), составляющим  $3 \cdot 10^{-3}$ . Для многих современных задач этого уже недостаточно. Точность измерений и степень покрытия ими поверхности Земли в наши

дни позволяет поставить целью глобальный геоид с точностью 1 см [53]. Естественно, что для этого необходимо разработать теорию соответствующего уровня точности. Таким образом, возникает необходимость в рассмотрении краевых задач на поверхности эллипсоида вращения, который гораздо ближе к форме Земли, чем сфера.

Одно из, видимо, наиболее точных решений краевой задачи на эллипсоиде получено в работе [54]. Оно позволяет определить внешний возмущающий потенциал  $T$  Земли с учетом сжатия отсчетного эллипсоида и высот земной поверхности над эллипсоидом, а также с учетом различий потенциалов  $W_{i0}$  силы тяжести в начальных пунктах  $i$  разных государственных нивелирных сетей. Точность определения возмущающего потенциала в этой задаче составляет  $5 \cdot 10^{-5}$ . В решении Молоденского [55] краевое условие и соответствующее интегральное уравнение записаны в геодезических координатах, что обеспечивает точность  $5 \cdot 10^{-8}$ . Только в решении Молоденский переходит к сферическим координатам, пренебрегая членами порядка  $e^4 < 5 \cdot 10^{-5}$ . В работе [54] переход к сферическим координатам осуществляется уже в краевом условии, что снижает его точность до  $5 \cdot 10^{-5}$ . Но при этом краевое условие по виду не отличается от упрощенной постановки в сферической аппроксимации. С той же точностью составлено интегральное уравнение.

Если учитывать тот факт, что нивелирные сети различных государств используют в качестве отсчёта различные значения  $W_{0i}$ , отличающиеся от нормального потенциала на уровне референц-эллипсоида, то краевое условие для возмущающего потенциала на земной поверхности  $S$  с относительной погрешностью порядка  $5 \cdot 10^{-8}$  имеет вид [2] (1.11)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial H} - \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \right|_S = -(g_S - \gamma_\Sigma) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \Big|_S (W_{0i} - U_0). \quad (1.211)$$

С использованием сферических координат краевое условие (1.211) приведено к более простому и менее точному виду

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{r} \right|_\Sigma = -\Delta g_i, \quad (1.212)$$

где

$$\Delta g_i = (g_s - \gamma_\Sigma) + \left[ \left( e^2 + \frac{2\omega^2 a}{\gamma_e} - 3e^2 \sin^2 \varphi \right) \frac{\tilde{T}}{a} + e^2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial \tilde{T}}{a \partial \varphi} \right]_s + \frac{2}{r} (W_{0i} - U_0), \quad (1.213)$$

где  $\tilde{T}$  – приближённое значение потенциала;

$\gamma_e$  – экваториальное значение силы тяжести на эллипсоиде.

Решение этой задачи отыскивается стандартным образом – с помощью составления интегрального уравнения относительно поверхностной плотности с последующим решением этого уравнения посредством параметра Молоденского. После этого можно переходить к вычислению возмущающего потенциала  $T$ . Здесь эти формулы не приводятся в силу их громоздкости. Подробности можно найти в [54].

В качестве исходных данных при этом требуется иметь информацию об аномалиях силы тяжести, высотах и наклонах краевой поверхности Земли, а также о приближенном представлении возмущающего потенциала  $\tilde{T}$  и потенциалах силы тяжести  $W_{0i}$  в исходных пунктах разных государственных нивелирных сетей.

Изучению краевых задач геодезии на эллипсоиде посвящено множество работ отечественных учёных, начиная с Загребина (1952 год) [55–60]. За рубежом также активно занимаются разработкой этого направления [61–68]. В работах [21, 22, 25, 26] использован метод функций Грина. Мы не будем подробно останавливаться на рассмотрении этих работ и использованных в них подходов, поскольку это может составить тему отдельного исследования.

## 1.10. Заключение по главе 1

Главная задача физической геодезии, в классической постановке состоящая в определении поверхности Земли и её внешнего гравитационного поля по значениям силы тяжести и потенциала на поверхности, представляет собой, по сути, краевую задачу для дифференциального уравнения Лапласа. Поэтому естественно воспользоваться для решения этой и сопутствующих задач методами теории потенциала. К основным классическим методам решения этой задачи можно отнести следующие: метод интегральных уравнений (МИУ), метод функций Грина (МФГ) и метод, использующий аппарат рядов по шаровым функциям (МРШФ).

МИУ состоит в том, что искомый возмущающий потенциал Земли представляется в виде потенциала слоя притяжения на краевой поверхно-

сти [69]. С учётом того, что производные потенциала слоя притяжения терпят разрыв на краевой поверхности, краевое условие преобразуется в интегральное уравнение или систему интегральных уравнений. Решение этого уравнения (или последовательное решение системы уравнений) доставляет искомый потенциал.

Этим методом были получены классические ряды Молоденского и Бровара, обеспечивающие теоретически неограниченные возможности повышения точности конечных результатов. Кроме того, МИУ хорошо приспособлен к краевым задачам со сложной краевой поверхностью. Этот факт выгодно отличает его от двух других классических подходов. Разложение потенциала притяжения Земли в ряды по шаровым или эллипсоидальным функциям представляет собой лишь приближённое решение, поскольку поверхность Земли не является сферой или эллипсоидом. К тому же сходимости этих рядов ухудшается по мере приближения к поверхности Земли. Построение функций Грина является очень сложной задачей, если краевая поверхность не является сферой.

Однако, при решении интегральных уравнений предполагается, что исходная информация безошибочна и известна на всей поверхности Земли.

В действительности, исходные данные, как результаты измерений:

- 1) отягощены неизбежными погрешностями;
- 2) дискретны;
- 3) разнородны по составу;
- 4) неравномерно распределены на физической поверхности Земли;
- 5) имеются не только на поверхности Земли, но и в ее внешнем пространстве.

Отсюда следует, что при использовании МИУ:

- 1) возникает необходимость интерполировать измерения;
- 2) нет возможности использовать информацию о точности имеющихся данных;
- 3) нет возможности совместного использования разнородной информации;
- 4) нет возможности задействовать измерения во внешнем пространстве.

Кроме того, как отмечал, Л. П. Пеллинен [70], «... для практического применения эти методы неудобны, так как на каждой стадии приближений приходится вычислять в каждой точке физической поверхности несобственные интегралы. Это вычисление предъявляет одинаковые высокие требования к знанию высот, аномалии силы тяжести и поправок, найденных в предыдущих приближениях, в окрестностях каждой исследуемой точки. Другой недостаток указанных методов – физическая нереальность материальной модели, объясняющей гравитационные аномалии. Из-за этого распределение плотностей материального слоя оказывается в гор-

ных районах весьма сложным и неустойчивым даже при спокойном поле аномалий силы тяжести, а процесс приближений сильно замедляется».

Несмотря на перечисленные недостатки, МИУ всё же остаётся востребованным инструментом решения основной задачи геодезии. Например, в работе [54] получено одно из наиболее точных решений линейной краевой задачи на эллипсоиде с помощью этого метода. В последние десятилетия, вследствие бурного развития компьютерных технологий, активно разрабатываются численные методы решения различных инженерных задач. В частности, для решения интегральных уравнений геодезии развиты и, по-видимому, получили наибольшее признание метод конечных элементов и метод граничных элементов, см., например, [71–73], а также работу [74] и библиографию в ней. Главными достоинствами этих методов является возможность рассмотрения реальной топографии Земли и моделирования с высокой разрешающей способностью. При этом они позволяют избавиться от тех недостатков, которым обладал МИУ в классическом варианте.

Высокие требования к исходной информации предъявляет и представление потенциала в виде ряда по шаровым функциям – данные должны быть известны по всей Земле и распределены равномерно. Кроме того, ряды по шаровым функциям неспособны отражать локальные особенности гравитационного поля. Происходит некое глобальное усреднение тонкостей строения ГПЗ в отдельных районах. В результате модельные значения оказываются слишком заглаженными в горных районах и завышенными иррегулярными над водными и равнинными поверхностями. Другие недостатки, указывающие на тот факт, что ряды по шаровым функциям не подходят для отображения тонкой структуры поля, описаны в параграфе 1.2. Но для моделирования низких и средних частот этот аппарат приспособлен очень хорошо, что, в частности, объясняет распространённость его использования при создании моделей ГПЗ. Ещё одно важнейшее свойство рядов по шаровым функциям состоит в том, что форма Земли и распределение масс внутри отражается только на значениях гармонических коэффициентов разложения. Поэтому эти коэффициенты, называемые стоксовыми постоянными, служат важнейшими характеристиками Земли.

Значимую роль в решении краевых задач физической геодезии играет метод, опирающийся на построение функций Грина. Тот факт, что функция Грина зависит только от формы краевой поверхности и решаемой краевой задачи является несомненным преимуществом этого подхода. Каждой замкнутой поверхности соответствует своя функция Грина для данной краевой задачи. И если она найдена, то данную краевую задачу можно решать независимо от полноты гравиметрической информации. Но построение функции Грина является очень сложной задачей для поверхностей, отличающихся от сферы. Даже для эллипсоида функция Грина имеет

очень сложную структуру. Тем не менее тот факт, что построение функции Грина позволяет получить точное решение задачи без необходимости прибегать к итерационным процедурам, делает этот подход привлекательным. В геодезической литературе много работ, направленных на построение функции Грина для решения той или иной краевой задачи геодезии, в основном, на эллипсоиде [21, 22, 24–26]. В работе [28] построена функция Грина для градиентометрических краевых задач на средне орбитальной сфере.

Таким образом, нельзя утверждать, что классические методы устарели и не способны эффективно решать задачи физической геодезии в условиях современных реалий. Дело в том, что изменения происходят не только в геодезической науке, в результате которых повышается точность измерительной информации, улучшается покрытие ею поверхности Земли и околоземного пространства, повышаются требования к точности определения потенциала и его трансформант. Изменения происходят также и в математике. И эти изменения приводят, с одной стороны, к появлению новых методов решения задач геодезии, с другой стороны, к развитию и обогащению уже имеющихся. Можно дать естественную рекомендацию выбирать для решения конкретной задачи тот метод – классический или современный – который позволит получить наиболее точное её решение, наиболее полно используя имеющуюся исходную информацию. При этом, конечно же, необходимо учитывать достоинства и недостатки каждого из этих методов, которых мы, в какой-то мере, попытались коснуться выше.

Но, какой бы метод решения краевой задачи геодезии ни использовался, важнейшее значение имеют теоремы существования, единственности и устойчивости решения. Они служат тем теоретическим базисом, на который опираются все практические методы. Реализация на практике всех рассмотренных подходов, как, впрочем, и тех, которые здесь не были охвачены, предполагает привлечение тех или иных вычислительных процедур. При этом очень важно знать, что решение не только существует, но и единственно и устойчиво к малым изменениям в исходных данных.

Доказательство таких теорем, в общем случае, является достаточно сложной задачей. Этим объясняется, видимо, тот факт, что для классической нелинейной задачи Молоденского первое строгое доказательство теоремы существования и единственности было получено только в 1975 году. Автором этой работы был Хёрмандер [38]. Требования к гладкости поверхности Земли и к малости отличия искомого потенциала от нормального практически оказались не выполнимыми. Но работа Хёрмандера показала принципиальную возможность доказательства такой теоремы. Сложность обусловлена тем, что задача Молоденского представляет собой краевую задачу со свободной границей. Сансо удалось преобразовать её в задачу с фиксированной границей в рамках концепции

гравитационного пространства [40, 41]. Этот подход позволил ослабить требования гладкости, предъявляемые в теореме Хёрмандера. Но они по-прежнему оставались далёкими от реальности. Пожалуй, на данный момент самый значительный результат для нелинейных краевых задач представлен теоремой, доказывающей существование и единственность решения нелинейной скалярной краевой задачи при условии, что центробежная компонента потенциала рассматривается как возмущение [45, 46]. Тогда на исходные данные, а именно, силу тяжести  $g$  и потенциал  $W$  накладываются естественные ограничения гладкости. Эти ограничения состоят в том, что  $g \in H^\varepsilon$ , то есть классу функций, промежуточных между непрерывными и непрерывно дифференцируемыми, а  $W \in H^{1+\varepsilon}$  – пространству непрерывно дифференцируемых функций, производные которых удовлетворяют условию Гёльдера.

За последнее время было сформулировано большое количество новых постановок краевой задачи геодезии, связанных с появлением новой измерительной информации, в основном, благодаря развитию космического сектора. Особо необходимо выделить краевую задачу с фиксированной границей, в которой предполагается, что поверхность Земли известна и на ней заданы значения чистых аномалий силы тяжести, а искомой функцией является, как обычно, внешний потенциал Земли. Возможно, что, в связи с этим, постепенно отпадёт необходимость в использовании теллуроида, как вспомогательной поверхности. Теллуرويد, с одной стороны, играет роль главной части неизвестной земной поверхности при линеаризации краевой задачи. С другой стороны, он позволяет избегать редуцирования измерений на геоид, что приводит к необходимости строить гипотезы относительно плотности распределения масс внутри Земли. Теперь поверхность Земли можно считать известной и отпадает практическая необходимость в выделении её «дифференциала». Также постепенно отпадает необходимость в редуцировании измерений, поскольку теперь мы можем вычислить нормальную силу тяжести непосредственно в тех точках земной поверхности, в которых у нас имеются измеренные значения реальной силы тяжести. Если возмущающий потенциал удалось найти, то легко вычислить высоты геоида и, тем самым, определить поверхность геоида. Но теоретическое значение теллуроида, по-видимому, будет сохраняться при линеаризации задач и последующей постановке теорем существования и единственности.

Для задачи с фиксированной границей в линейной постановке доказана теорема о существовании единственного и устойчивого решения при естественных ограничениях на исходные данные [44]. Предполагается, что чистые аномалии силы тяжести принадлежат гильбертову пространству



$H^0 = L_2$ , а известная поверхность Земли имеет почти звёздную форму (допускаются наклоны земной поверхности до  $89,6^\circ$ ). Этот замечательный результат особенно ценен, если учесть, что задача с фиксированной границей, по-видимому, представляет наибольший интерес в современных условиях.

### 1.11. Список использованных источников к главе 1

1. Жидков Н. П. Линейные аппроксимации функционалов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977. – 264 с.
2. Бровар В. В., Магницкий В. А., Шимбирев Б. П. Теория фигуры Земли. – М., Геодезиздат, 1961. – 256 с.
3. Гофман-Велленгоф Б., Мориц Г. Физическая геодезия. Перевод с англ. под ред. Ю. М. Неймана. – М. : МИИГАиК, 2007. – 427 с.
4. Нейман Ю. М. Вариационный метод физической геодезии. – М., Недра. – 1979. – 200 с.
5. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. – М. : Наука, 1976. – 518 с.
6. Шимбирев Б. П. Теория фигуры Земли. – М. : Недра. – 1975. – 432 с.
7. Мориц Г. Современная физическая геодезия / Перевод с англ. под ред. Ю. М. Неймана. – М. : Недра, 1983. – 392 с.
8. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения // АН СССР, Урал. науч. центр, Ин-т математики и механики. – М. : Наука, 1978. – 207 с.
9. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1972. – 544 с.
10. Михлин С. Г. Курс математической физики. – М., Наука, 1968. – 576 с.
11. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. – М., Высшая школа, 1977. – 431 с.
12. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли // Тр. ЦНИИГАиК. – 1960. – Вып. 131. – С. 1–252.
13. Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Интегральные уравнения для плотности простого слоя // Тр. ЦНИИГАиК, вып. 198. М. : ОНТИ ЦНИИГАиК, 1972. – С. 57–178.
14. Krarup T. Letters on Molodensky's problem. To the member of SSG. 5.3.1. Unpublished manuscript.
15. Бровар В. В. Решение некоторых внешних краевых задач для земной поверхности // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1963. – Вып. 1. – С. 55–72.
16. Бровар В. В. О решениях краевой задачи Молоденского // Известия

вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1963. – Вып. 4. – С. 129–137.

17. Brovar V.V. On the solution of Molodensky's boundary value problem // Bull. Geod., 72. – 1964. – P. 167–173.

18. Moritz H. Series Solution of Molodensky's Problem. – München : Deutsche geodätische Kommission, Reihe A, Heft 70, 1971.

19. Нейман Ю. М., Сугаипова Л. С. Сферические функции и их применение в геодезии : учеб. пособие. – М. : Изд-во МИИГАиК, 2005. – 87 с.

20. Кашеев Р. А. Введение в теорию гравитационного потенциала небесных тел. Конспект лекций. – Казань : Казан. ун-т, 2015. – 90 с.

21. Мазурова Е. М., Юркина М. И. К вопросу определения функции Грина для эллипсоидальной Земли // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2011. – № 5. – С. 3–10.

22. Остач О. М. Решение задачи Стокса для эллипсоидальной граничной поверхности методом функций Грина // Сборник научных трудов ЦНИИГАиК. – Вып. 233. – 1982. – С. 21–72.

23. Юркина М. И. Использование функции Грина для определения возмущающего потенциала с учетом земной эллипсоидальности // Труды ЦНИИГАиК. Физическая геодезия. – 1996. – Кн. 2. – С. 165–179.

24. Martinec Z. Construction of Green's function for the Stokes boundary-value problem with ellipsoidal corrections in the boundary condition // Journal of Geodesy. – 1998. – T. 72. – P. 460–472.

25. Martinec Z., Grafarend, E. W. Construction of Green's function to the external Dirichlet boundary-value problem for the Laplace equation on an ellipsoid of revolution // Journal of Geodesy. – 1997. – T. 71, № 9. – P. 562–570.

26. Yurkina M. I. (2002) A solution of Stokes' problem for the ellipsoidal Earth by means of Green's function // Geodesy – The Challenge of the Third Millennium / eds. E. W. Grafarend, F. W. Krumm, V. S. Schwarze. – Berlin : Springer, 2002. – P. 261–268.

27. Остач О. М. Определение возмущающего потенциала и стоксовых постоянных Земли методом функций Грина // Труды ЦНИИГАиК. – Вып. 176. – 1969. – С. 26–42.

28. Martinec M. Green's function solution to spherical gradiometric boundary-value problems // Journal of Geodesy. – 2003. – T. 77. – P. 41–49.

29. Бровар В. В. Фундаментальные гармонические функции с особенностью на отрезке и решение внешних краевых задач // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1964. – Вып. 3. – С. 51–61.

30. Пик М., Юркина М. И. Определение возмущающего потенциала по чистым аномалиям силы тяжести // Научно-технический сборник «Физическая геодезия». – 2013. – С. 61–64.

31. Бровар В. В. О возможном повышении точности гравиметрических выводов в геодезии // Астрономический журнал. – Т. 48. – 1971. –

Вып. 6. – С. 1327–1331.

32. Марыч М. И. О втором приближении М. С. Молоденского для возмущающего потенциала // Геодезия, аэрофотосъемка и картография. – Вып. 10. – 1969. – С. 17–27.

33. Moritz H. Introduction to Molodensky's Theory // *Bolletino di Geodesia e scienze affini*. – 1975. – Anno XXXIV, № 2.

34. Пеллинен Л. П. О тождественности различных решений задачи Молоденского // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – Вып. 3. – 1974. С. 65–71.

35. Moritz H. Nonlinear solutions of the geodetic boundary value problem. – Columbus : Department of Geodetic Science, Ohio State University, Report No. 126, 1969.

36. Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии // Тр. ЦНИИГАиК. – 1945. – Вып. 42. – С. 1–107.

37. Нейман Ю. М., Кузнецов М. В. О сходимости рядов Молоденского // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1979. – Т. 6. – С. 5–13.

38. Hörmander L. The boundary problems of physical geodesy / Stockholm : The Royal Institute of Technology, Division of Geodesy, 1975. – 78 p.

39. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы / пер. с англ. И. Г. Араманович, А. М. Березман, И. В. Вайнштейн [и др.] ; ред. пер. И. Г. Араманович – М. : Наука, 1968. – 720 с.

40. Sansó F. Discussion on the existence and uniqueness of the solution of Molodensky's problem in gravity space // *Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei (Sezioni di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali)*. – 1976. – Т. 61, Вып. 8.

41. Sansó F. The geodetic boundary value problem in gravity space // *Memorie dell'Accademia Nazionale dei Lincei*. – 1977. – Т. 14. – P. 39–97.

42. Sansó F. The analysis of the geodetic boundary value problem: state and perspectives // *Handbook of Mathematical Geodesy*. – Springer, 2018. – P. 459–489.

43. Sansó F. The gravity space approach to the geodetic boundary value problem including rotational effects // *Manuscripta Geodaetica*. – 1979. – Т. 4. – P. 207–244.

44. Sansó F., Venuti G. On the explicit determination of stability constants for the linearized geodetic boundary value problems // *Journal of Geodesy*. – 2008. – Т. 82. – P. 909–916.

45. Sacerdote F., Sansó F. Overdetermined boundary value problems of physical geodesy // *Manuscripta Geodaetica*. – 1985. – Т. 10. – P. 195–207.

46. Otero J., Sansó F. An analysis of the scalar geodetic boundary-value problem with natural regularity results // *Journal of Geodesy*. – 1999. – Т. 73. – P. 427–435.

47. Sansó F. The long road from measurements to boundary value problems in physical geodesy // *Manuscripta Geodaetica*. – 2024. – Т. 20, № 5. – P. 326–344.
48. Sacerdote F., Sanso F. Further remarks on the altimetry gravimetry problems // *Bulletin géodésique*. – 1987. – Т. 61. – P. 65–82.
49. Grafarend E. W., Keller W. Setup of Observational Functionals in Gravity Space as Well as in Geometry Space // *Manuscripta Geodaetica*. – 1995. – Vol. 20. – P. 301–325.
50. Barzaghi R., Fermi A., Tarantola S., and Sanso F. Spectral techniques in inverse stokes and overdetermined problems // *Surveys in Geophysics*. – 1993. – P. 461–475.
51. Barzaghi R., Fermi A., Tarantola S., and Sanso F. Spectral techniques in inverse stokes and overdetermined problems // *Surveys in Geophysics*. – 1993. – P. 461–475.
52. Rummel R., Teunissen P., Van Gelderen Uniquely and overdetermined geodetic boundary value problems by least squares / *Bulletin géodésique*. – 1989. – Т. 63, № 1. – P. 1–33.
53. Rapp R. H. (1997) Global models for the 1 cm geoid - present status and near-term prospects, in: *Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid*, Sanso, F. and Rummel.
54. Бровар В. В., Бровар Б. В. Высокоточный метод определения внешнего возмущающего потенциала реальной земли // Научно-технический сборник по геодезии, аэрокосмическим съемкам и картографии. Физическая геодезия. – М.: ЦНИИГАиК, 1999. – С. 14–54.
55. Молоденский М. С. Решение задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли // Тр. ЦНИИГАиК. – 1956. – Вып. 112. – С. 3–8.
56. Бровар В. В. К решению краевой задачи Молоденского с относительной погрешностью  $5 \cdot 10^{-5}$  // Научно-технический сборник по геодезии, аэрокосмическим съемкам и картографии. Физическая геодезия. Кн. 2. – М.: ЦНИИГАиК, 1996. – С. 156–164.
57. Загребин Д. В. Теория регуляризованного геоида // Тр. ИТА. – № 1. – 1952. – 223 с.
58. Майоров А. Н. Поправки за эллипсоидальность при вычислении гравиметрических высот квазигеоида комбинированным методом // Геодезия и картография. – № 2. – 1997. – С. 25–30.
59. Brovar V. V., Kopeikina Z. S., Pavlova M. V. Solution of the Dirichlet and Stokes exterior boundary problems for the Earth's ellipsoid // *J. Geod.* (2001) 74: P. 767–772.
60. Pellinen L. P. Effects of the Earth's ellipticity on solving geodetic boundary value problem // *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*. – 1982. – Т. 41, № 2. – P. 89–103.
61. Claessens S. J. Solutions to Ellipsoidal Boundary Value Problems for

Gravity Field Modelling : PhD thesis / Curtin University of Technology, Department of Spatial Science. – Perth, Australia, 2006.

62. Fei Z. L., Sideris M. G. (2000) A new method for computing the ellipsoidal correction for Stokes's formula // *Journal of Geodesy*. – Vol. 74. – No. 2. – P. 223–231.

63. Heck B., Seitz K. Solutions of the linearized geodetic boundary value problem for an ellipsoidal boundary to order  $e^3$  // *Journal of Geodesy*. – 2003. – Vol. 77, no. 3–4. – P. 182–192.

64. Martinec Z., Grafarend, E. W. Solution to the Stokes boundary value problem on an ellipsoid of revolution // *Studia Geophysica et Geodaetica*. – 1997. – T. 41, № 2. – P. 103–129.

65. Sjöberg L. E. The ellipsoidal correction to Stokes's formula // *Proceedings of the 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission: Gravity and Geoid 2002* / ed. I. N. Tziavos. – Thessaloniki : Ziti Editions, 2003. – P. 97–101.

66. Sjöberg L. E. The correction to the modified Stokes formula for an ellipsoidal Earth // *Honoring the Academic Life of Petr Vaníček* : UNB Technical Report No. 218 / ed. M. Santos. – Fredericton : University of New Brunswick, 2003. – P. 99–110.

67. Sjöberg L. E. The ellipsoidal corrections to order  $e^2$  of geopotential coefficients and Stokes' formula // *Journal of Geodesy*. – 2003. – T. 77, № 3–4. – P. 139–147.

68. Sjöberg L. E. A spherical harmonic representation of the ellipsoidal correction to the modified Stokes formula // *Journal of Geodesy*. – 2004. – T. 78, № 3. – P. 180–186.

69. Klees R. Boundary value problems and approximation of integral equations by Finite Elements // *Manuscripta Geodaetica*. – 1995. – T. 20. – P. 345–361.

70. Пеллинен Л. П. О вычислении уклонений отвеса и высот квазигеоида в горах // *Тр. ЦНИИГАиК, М.: Недра – Вып. 176.* – 1969. – С. 99–112.

71. Heck B. Integral Equation Methods in Physical Geodesy // *Geodesy – The Challenge of the 3rd Millennium* / eds. E. W. Grafarend, F. W. Krumm, V. S. Schwarze. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2003.

72. Klees R. Topics on Boundary Element Methods // *Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid* / eds. F. Sansó, R. Rummel. – Springer Lecture Notes in Earth Sciences, no. 65. – 1997. – P. 482–531.

73. Lehmann R. Studies on the Use of the Boundary Element Method in Physical Geodesy. – München : Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 113, 1997.

74. Macak M. et al. The finite element method as a tool to solve the oblique derivative boundary value problem in geodesy // *Tatra Mountains Mathematical Publications*. – 2020. – T. 75. – P. 63–80.

## **2. АНАЛИЗ СОВРЕМЕННЫХ ПОДХОДОВ К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ, ВКЛЮЧАЯ: КОЛЛОКАЦИЮ (СТАТИСТИЧЕСКИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОДЫ), ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ, МЕТОД ОПТИМАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЯДЕР, МУЛЬТИПОЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА, МЕТОД ЛИНЕЙНЫХ И СФЕРИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, МЕТОД РАЗНОМАСШТАБНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ГЕОПОТЕНЦИАЛА И ДРУГИЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ**

### **2.1. Необходимые сведения о гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром**

Основным объектом данной главы является класс задач, связанных, вообще говоря, с «восстановлением» непрерывных функций по результатам дискретных измерений различных «проявлений» этих функций – например, с определением геопотенциала по результатам измерений в отдельных точках величин силы тяжести. Такая целенаправленность продиктована насущными потребностями разделов геодезии, непосредственно связанных с решением ее основной задачи – определением в единой системе координат поверхности Земли и ее внешнего гравитационного поля. Дело в том, что и искомая физическая поверхность Земли, и искомый потенциал силы тяжести представляют собой, с математической точки зрения, некоторые функции (причем чрезвычайно сложной структуры) и не могут быть в принципе описаны величинами дискретными. Аналогичная ситуация имеет место в целом ряде задач космической геодезии, фотограмметрии и других дисциплин. В то же время, исходные измерения по-прежнему содержат то или иное дискретное множество чисел. При этом одной из труднейших задач всегда считалась разработка алгоритмов, позволяющих совместно обрабатывать *разнородные* измерения, полученные геодезией геометрической (углы и линии), физической (аномалия силы тяжести), космической (например, результаты доплеровского слежения за спутниками), а также геодезической астрономией (широты, долготы, азимуты). Для решения подобных проблем желательно, прежде всего, попытаться взглянуть на всевозможные геодезические измерения с неких единых и потому достаточно абстрактных позиций. Именно это и позволяет сделать функциональный подход к обработке разнородной геодези-

ческой информации, которого мы и будем придерживаться. При этом результаты всевозможных геодезических измерений трактуются как (отягощенные неизбежными ошибками) значения функционалов на геопотенциале Земли.

Поскольку гравитационный потенциал Земли является функцией гармонической, то важную роль в постановке задач физической геодезии играет гильбертово пространство  $H$  множества функций, регулярных на бесконечности и гармонических во внешнем пространстве относительно некоторой сферы, целиком расположенной в теле Земли. При этом центр этой сферы совпадает с началом используемой квазигеоцентрической системы координат. В литературе такую сферу называют сферой Бьерхаммара (Bjerhammar) [1]. Известно, что потенциал реальной Земли не принадлежит такому пространству, но может быть аппроксимирован функциями из  $H$ , как угодно, точно. Основанием для такого утверждения служит известная теорема Рунге-Крапуа [2, с. 55] [3, с. 56], о том, что множество  $X_0$  является всюду плотным подмножеством множества  $X$ . Здесь  $X_0$  – множество функций, регулярных на бесконечности и гармонических во внешнем относительно сферы Бьерхаммара пространстве, а  $X$  – множество функций, регулярных на бесконечности и гармонических во внешнем относительно теллуроида пространстве.

В общем случае, под гильбертовым пространством  $H$  будем понимать, как обычно, множество  $L^2(\Omega_R)$  упомянутых гармонических функций, квадратично интегрируемых на сфере  $\Omega_R$  радиуса  $R$  со скалярным произведением

$$(F, G)_{L^2(\Omega_R)} = \int_{\Omega_R} F(A)G(A)d\Omega_R, \quad (2.1)$$

для любых двух функций  $F, G \in L^2(\Omega_R)$  и соответствующей нормой  $\|F\|_{L^2(\Omega_R)} = \sqrt{(F, F)_{L^2(\Omega_R)}}$ .

Для дальнейшего изложения особое значение имеет специальный тип гильбертовых пространств, нашедших плодотворное приложение в геодезии. Это так называемые гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром (далее в. я.).

Пусть  $H$  – гильбертово пространство функций, определенных на множестве  $D$ . Функция  $K(A, B)$ , где  $A$  и  $B$  – произвольные точки  $D$ ,

называется воспроизводящим ядром гильбертова пространства  $H$ , если  $K(A, B)$  обладает двумя свойствами:

если  $B$  – любая фиксированная точка  $D$ , то  $K(A, B)$  как функция точки  $A$  принадлежит  $H$ , то есть

$$K(A, B) \in H; \quad (2.2)$$

значение любой функции  $f \in H$  в произвольной точке  $B \in D$  равно

$$f(B) = (f(A), K(A, B))_H^A. \quad (2.3)$$

Здесь верхний индекс  $A$  говорит о том, что операция скалярного произведения применяется к элементам  $f$  и  $K(\cdot, B)$  как к функциям точки  $A \in D$ .

Видно, что функции, заполняющие  $H$  с в. я.  $K(A, B)$ , ограничены в каждой точке  $B$  области своего определения  $D$ . В частности, является конечным число  $K(B, B)$  при  $\forall B \in D$ .

Для геодезических приложений наибольший интерес представляет понятие линейных функционалов на  $H$ . Поэтому мы приведем здесь соответствующие справочные сведения.

Правило  $L$ , согласно которому каждому элементу  $f \in H$  поставлено в соответствие одно и только одно число  $Lf$ , называется функционалом, определенным на  $H$ .

Пусть, например,  $D$  – сфера какого-нибудь радиуса, а  $C(D)$  обозначает множество всех непрерывных функций на  $D$ . Функционалами, определенными на  $C(D)$ , в частности, являются:

- поверхностный интеграл;
- коэффициенты Фурье разложения по ортогональной системе сферических функций.

Функционал называется линейным, если для любых  $f_1$  и  $f_2$  из  $H$  и любых действительных чисел  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  справедливо равенство:

$$L(\alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2) = \alpha_1 \cdot Lf_1 + \alpha_2 \cdot Lf_2. \quad (2.4)$$

Например, зафиксируем произвольный элемент  $\Psi(A) \in H$ . Линейный функционал на  $H$  можно определить так:

$$Lf = (f, \Psi)_H. \quad (2.5)$$



Функционал  $L$ , определенный на  $H$ , называется ограниченным, если при любом элементе  $f \in H$  имеет место неравенство:

$$|Lf| \leq C \cdot \|f\|, \text{ где } C = \text{const} > 0. \quad (2.6)$$

Наименьшее из чисел  $C$ , удовлетворяющих неравенству (2.6), называется нормой ограниченного функционала и обозначается  $\|L\|$ . Таким образом,

$$|Lf| \leq \|L\| \cdot \|f\|, \quad (2.7)$$

причем  $\|L\|$  нельзя заменить меньшим числом.

Например, функционал (2.7) ограничен, так как, согласно известному неравенству Буняковского–Коши

$$|(f, \Psi)_H| \leq \sqrt{(\Psi, \Psi)_H \cdot (f, f)_H} = \|\Psi\| \cdot \|f\|. \quad (2.8)$$

Неравенство (2.8) справедливо при любом  $f \in H$  и при  $f = \Psi$  обращается в равенство. Значит,  $\|L\| = \|\Psi\|$ .

Функционал  $L$ , определенный на  $H$ , называется непрерывным, если из условия  $f_n \rightarrow f$  следует сходимость последовательности  $(Lf_n)_{n=1}^\infty$  к числу  $Lf$ .

Определённое самостоятельное значение имеет множество всех линейных ограниченных функционалов, определенных на  $H$ . Будем обозначать это множество  $H^*$ .

Можно доказать, что:

- всякий линейный ограниченный на  $H$  функционал  $L$  непрерывен;
- $H^*$  – векторное пространство.

Векторное пространство  $H^*$  представляет особый интерес для геодезии, поскольку практически все объекты геодезических измерений можно трактовать как линейные (или линеаризованные) функционалы на геопотенциале как на некотором элементе определённого гильбертова пространства.

В самом деле, пусть  $Y$  – истинное значение какой-либо величины, являющейся объектом измерений в геодезии геометрической, физической, космической или геодезической астрономии – неважно. Это значение всегда зависит от координат одной или нескольких точек, расположенных на

земной поверхности или вне ее, и от потенциала  $W$  силы тяжести Земли. Таким образом,

$$Y = F(X, W). \quad (2.9)$$

Здесь  $X \in E_n$  – вектор-столбец  $n$  параметров, состоящий, например, из координат точек, от которых зависит  $Y$ , или содержащий какие-либо неизвестные числа, скажем, смещение системы координат или параметры ее ориентировки;  $E_n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство;  $W \in G$ , где  $G$  – некоторое заранее оговоренное гильбертово пространство;  $F$  – функционал, в общем случае нелинейный, отображающий произведение<sup>1</sup> пространств  $E_n \times G$  в множество действительных чисел  $E_1$ , то есть

$$F : E_n \times G \Rightarrow E_1. \quad (2.10)$$

Другими словами,  $F$  – это некоторое правило, согласно котором каждой паре элементов, один из которых берется из  $E_n$ , а другой – из  $G$ , можно поставить в соответствие одно действительное число.

Рассмотрим некоторые примеры. Не будем только пока конкретизировать то гильбертово пространство  $G$ , одним из элементов которого является потенциал  $W$ . Дело в том, что главной частью  $W$  является известный нормальный потенциал  $U$ , а неизвестен лишь возмущающий потенциал  $T = W - U$ . Поэтому практический интерес представляют те гильбертовы пространства  $H$ , которые содержат  $T$ .

Одним из основных объектов измерений физической геодезии является величина  $g$  силы тяжести, представляющая, по определению, следующий оператор от потенциала:

$$g = g(W) = |\vec{g}| = |\text{grad}W| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}. \quad (2.11)$$

Здесь  $W_x, W_y, W_z$  – частные производные  $W$  по  $x, y, z$  соответственно.

---

<sup>1</sup> Пусть  $U$  и  $V$  – два пространства. Элементами произведения  $U \times V$  служат все упорядоченные пары  $(u, v)$ , где  $u \in U$ ,  $v \in V$ . Например, двумерная плоскость  $E_2 = E_1 \times E_1$ , где  $E_1$  – ось всех действительных чисел, т. е. точка  $(x, y) \in E_2$ , если  $x \in E_1$ ,  $y \in E_1$  (поэтому произведение пространств называют также декартовым произведением).

Измеряемое значение величины силы тяжести в заданной точке  $P$  есть значение соответствующего дельта-функционала  $\delta_P$  от  $g$ :

$$Y = \delta_P(g) = \delta_P(g(W)). \quad (2.12)$$

Таким образом,  $Y$  зависит от трех координат точки  $P$  и функции  $W$ , что согласуется с представлением (2.9). Одним из основных объектов измерений геодезической астрономии являются астрономические широты  $\varphi$  и астрономические долготы  $\lambda$ , которые можно связать с потенциалом  $W$  следующим образом:

$$\varphi = \varphi(W) = \arctg \frac{-W_z}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2}}, \quad \lambda = \lambda(W) = \arctg \frac{W_y}{W_x}. \quad (2.13)$$

Измеряемые значения астрономических широты и долготы в заданной точке  $P$  есть значение соответствующего дельта-функционала  $\delta_P$  от  $\varphi$  и  $\lambda$ :

$$Y = \delta_P(\varphi) = \delta_P(\varphi(W)) \text{ или } Y = \delta_P(\lambda) = \delta_P(\lambda(W)). \quad (2.14)$$

Таким образом,  $Y$  зависит от трех координат точки  $P$  и функции  $W$ , что согласуется с представлением (2.9).

Другие примеры геодезических функционалов и методы их линеаризации описаны в работах [2, 4, 5].

Следующая замечательная теорема, принадлежащая Ф. Риссу, полностью характеризует пространство функционалов  $H^*$ .

**Теорема Рисса:** *Пространство  $H^*$  является гильбертовым пространством, изометрично изоморфным пространству  $H$ . Это значит, что для всякого линейного ограниченного функционала  $L \in H^*$  существует единственный элемент  $\Psi_L \in H$  такой, что при  $\forall f \in H$  справедливо равенство:*

$$Lf = (f, \Psi_L), \quad (2.15)$$

причем

$$\|L\|_{H^*} = \|\Psi_L\|_H. \quad (2.16)$$

Таким образом, значение *любого* линейного ограниченного функционала  $L$  на каждом элементе  $f \in H$  можно представить в виде скалярного произведения этого элемента  $f$  и некоторого другого элемента  $\Psi_L \in H$ , зависящего от  $L$  и играющего роль определённого представителя  $L$ . Ниже будет указан элегантный способ вычисления элемента  $\Psi_L$ , что приводит к универсальному способу вычисления значений любого линейного функционала  $L$ .

Формула (2.16) также очень важна для геодезических приложений, поскольку определяет смысл точностных расчетов.

Гильбертово пространство  $H^*$  называется сопряженным данному гильбертову пространству  $H$ . Элемент  $\Psi_L \in H$ , однозначно определяющий линейный ограниченный функционал  $L \in H^*$ , называется элементом, сопряженным данному функционалу  $L$ , или представителем функционала  $L$ .

В гильбертовом пространстве  $H^*$ , элементами которого являются линейные ограниченные функционалы, заданные на  $H$ , определена операция скалярного произведения  $(L_1, L_2)^*$  для каждой пары  $L_1, L_2 \in H^*$ . Действительно, в силу вытекающего из теоремы Ф. Рисса изометричного изоморфизма между  $H$  и  $H^*$ , скалярное произведение функционалов в  $H^*$  можно вычислить как скалярное произведение их представителей в  $H$  следующим образом:

$$(L_1, L_2)^* = (\Psi_{L_1}, \Psi_{L_2})_H, \quad (2.17)$$

где  $\Psi_{L_1}, \Psi_{L_2}$  — элементы из  $H$ , сопряженные функционалам  $L_1, L_2 \in H^*$ .

В результате для пространства  $H^*$  справедливы все понятия гильбертовых пространств. В частности, символом  $\text{Span}\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$  мы будем обозначать пространство, натянутое на линейно-независимые функционалы  $(L_1, L_2, \dots, L_n) \in H^*$ .

Заметим, что теорема Рисса остается справедливой и для любых конечномерных евклидовых пространств в силу полноты последних.

Пусть  $H$  — гильбертово пространство функций, определенных в какой-нибудь области  $D$ , а  $B \in D$  — какая-нибудь точка области. Дельта функционалом называется функционал  $\delta_B$ , значение которого  $\delta_B f$  на любой функции  $f \in H$  равно значению этой функции в точке  $B$ :

$$\delta_B f = f(B). \quad (2.18)$$

Отметим, что этот простейший функционал, строго говоря, определён не на всяком гильбертовом пространстве. Например, функции, заполняющие обычное гильбертово пространство  $L_2(D)$ , могут быть не определены на множествах нулевой меры.

Однако, из формул (2.3), (2.15), (2.18) следует, что: в  $H$  с воспроизводящим ядром  $K(A, B)$  определен функционал  $\delta_B$  при  $\forall B \in D$ ;

если  $\delta_B \in H^*$ , то функция  $K(A, B)$  является сопряженным элементом функционалу  $\delta_B$ .

Между условием  $\delta_B \in H^*$  и существованием в  $H$  воспроизводящее ядро  $K(A, B)$  имеется взаимосвязь. Она выявляется следующей теоремой.

**Теорема 1.** *Для того, чтобы  $H$  имело воспроизводящее ядро  $K(A, B)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\delta_B \in H^*$  для  $\forall B \in D$ .*

Следующие теоремы раскрывают детальные свойства гильбертовых пространств с в. я и часто необходимы в приложениях:

– пусть  $\{e_i(A)\}_{i=1}^{\infty}$  – ортонормированный базис пространства  $H$ , в котором существует воспроизводящее ядро  $K(A, B)$ . Тогда для любых точек  $A, B \in D$

$$K(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i(A) \cdot e_i(B); \quad (2.19)$$

– если в  $H$  существует воспроизводящее ядро  $K(A, B)$ , то оно единственно;

– если в  $H$  существует воспроизводящее ядро  $K(A, B)$ , то операция равенства элементов из  $H$  влечет за собой поточечное равенство;

– пусть  $K(A, B)$  – воспроизводящее ядро гильбертова пространства  $H$  и  $\{B_i\}_{i=1}^n$  – совокупность  $n$  точек из  $D$ . Тогда при любом наборе действительных чисел  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , одновременно неравных нулю, имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i K(B_i, B_j) \alpha_j \geq 0, \quad (2.20)$$

то есть воспроизводящее ядро является функцией положительно определённой;

– пусть гильбертово пространство  $H$ , имеющее воспроизводящее ядро  $K(A, B)$ , разложено в прямую сумму подпространств  $H_1$  и  $H_1^\perp$ :

$$H = H_1 \oplus H_1^\perp, \quad (2.21)$$

тогда

$$K(A, B) = K_1(A, B) + K_1^\perp(A, B), \quad (2.22)$$

где  $K_1(A, B)$  – воспроизводящее ядро подпространства  $H_1$ ;

$K_1^\perp(A, B)$  – воспроизводящее ядро подпространства  $H_1^\perp$ ;

– из разложения (2.21) следует, что  $\forall f \in H$  однозначно представим в виде суммы:

$$f(B) = f_1(B) + f_1^\perp(B), \quad (2.23)$$

где  $f_1 \in H_1, f_1^\perp \in H_1^\perp$ . Функция  $f_1(B)$  может быть найдена по формуле:

$$f_1(B) = \left( f(A), K_1(A, B) \right)_H^A; \quad (2.24)$$

– пусть в  $H$  существует воспроизводящее ядро  $K(A, B)$  и  $L$  – произвольный функционал из  $H^*$ . Тогда представитель этого функционала

$$\Psi_L(A) = L_B K(A, B), \quad (2.25)$$

что позволяет получить элемент  $\Psi_L(B) \in H$ , сопряженный любому линейному ограниченному функционалу  $L \in H^*$ . В правой части (2.25)  $L$  действует на  $K(A, B)$  как на функцию точки  $B \in D$ . Для простоты будем обозначать  $L_B K(A, B) = K(A, L)$ ;

– особо отметим выражение для квадрата нормы функционала. Для этого обозначим  $K(L, L)$  результат действия на воспроизводящее ядро

$K(A, B)$  функционалом  $L$  сначала как на функцию  $B$ , а затем как на функцию точки  $A$ , то есть

$$K(L, L) = L_A \cdot L_B K(A, B). \quad (2.26)$$

Тогда

$$\|L\|_{H^*}^2 = \|\Psi_L\|_H^2 = K(L, L), \quad (2.27)$$

то есть норма функционала в  $H^*$  равна норме его представителя в  $H$ , см. (2.16). В самом деле,

$$\begin{aligned} \|\Psi_L\|_H^2 &= (K(A, L), K(A, L))_H^A = (L_B K(A, B), L_B K(A, B))_H^A = \\ &= L_B \cdot L_B (K(A, B), K(A, B))_H^A = L_B \cdot L_B K(B, B) = K(L, L); \end{aligned}$$

– пусть  $L_1, L_2$  – произвольные элементы из  $H^*$ , тогда

$$(L_1, L_2)^* = (\Psi_{L_1}, \Psi_{L_2}) = L_1 \cdot L_2 K(A, B) = K(L_1, L_2), \quad (2.28)$$

где  $K(L_1, L_2)$  – результаты действия на воспроизводящее ядро  $K(A, B)$  сначала функционалом  $L_2$  как на функцию второго аргумента, а затем функционалом  $L_1$  как на функцию первого аргумента. Тем самым получен удобный для практики метод вычисления скалярного произведения в гильбертовом пространстве  $H^*$ .

Доказательства приведенных теорем и примеры их использования можно найти, например, в работах [5, 6].

## 2.2. Критический анализ традиционного моделирования ГПЗ рядами Фурье по шаровым функциям

Для моделирования глобального гравитационного поля Земли (ГПЗ) в геодезии обычно используются ряды по шаровым функциям вида

$$F(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta), \quad (2.29)$$

где  $F$  – изучаемая функция (полезный сигнал);

$R$  – отсчетный радиус;

$r, \theta, \lambda$  – сферические координаты, причём  $r > R$ ;

$P_{nm}(\cos \theta)$  – полностью нормированные присоединенные функции Лежандра;

$c_{nm}$  и  $s_{nm}$  – гармонические коэффициенты  $n$ -ой степени и  $m$ -го порядка.

Практически ряды всегда ограничены. Так, например, для возмущающего потенциала  $T = V - U$  (то есть, для результата вычитания из реального потенциала  $V$  его референсного значения  $U$ ) имеем:

$$\begin{aligned} T(r, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^N \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) = \\ &= \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^N \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n (a_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda)) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^N \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} Y_n(\theta, \lambda), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная;

$M$  – масса Земли;

$N$  – наибольшая степень разложения; гармоники

$$a_{nm} Y_{nm} = \begin{cases} c_{nm} \cos m\lambda \cdot P_{nm}(\cos \theta), & m = 0, \dots, n; \\ s_{n|m|} \sin |m|\lambda \cdot P_{n|m|}(\cos \theta), & m = -n, \dots, -1; \end{cases} \quad (2.31)$$

где  $Y_{nm}(\theta, \lambda)$  – сферическая функция  $n$ -ой степени и  $m$ -го порядка;

$c_{nm}$  и  $s_{nm}$ , или  $a_{nm}$  – соответствующие гармонические коэффициенты, представляющие собой коэффициенты Фурье возмущающего потенциала на сфере  $\Omega_R$  радиуса  $R$ , или на единичной сфере  $\Omega$ ,

$$a_{nm} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Omega_R} T(\theta, \lambda) Y_{nm}(\theta, \lambda) d\Omega_R = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} T(\theta, \lambda) Y_{nm}(\theta, \lambda) d\Omega. \quad (2.32)$$

Член  $(R/r)^{l+1}$  отражает затухание поля с высотой. Поэтому достижимое значение  $N$  при моделировании гравитационного поля по результатам спутниковых измерений существенно зависит не только от точностных возможностей аппаратуры, но и от высоты полёта. Так, например, в известном европейском проекте CHAMP (система высокий спутник – низкий спутник) приемлемое значение  $N$  приближённо находится между 50 и 70, а для другого европейского проекта – GRACE (система низкий спутник – низкий спутник) – расположено между 100 и 150.



Указанные шаровые функции составляют ортогональный базис гильбертова пространства  $H$  функций, регулярных на бесконечности и гармонических во внешнем пространстве относительно сферы Бьерхаммара (Bjerhammar), см. [1]. Ранее уже отмечалось, что реальный потенциал  $T$  не принадлежит такому пространству, но, согласно известной теореме Рунге-Краупа [3, с. 56], [2, с. 55], может быть аппроксимирован функциями из  $H$  как угодно точно.

Сферические координаты связаны с прямоугольными координатами  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  геоцентрической системы соотношением

$$\mathbf{x} = r [\sin \theta \cos \lambda, \sin \theta \sin \lambda, \cos \theta]^T = \mathbf{r} = r \vec{e}_r, \quad (2.33)$$

где  $\vec{e}_r = \mathbf{e}_r$  – единичный вектор, направленный к точке  $\mathbf{x}$ ,  $r = |\mathbf{x}|$ .

Сферические функции ортогональны, так что

$$\int_{\Omega} Y_{nm}(\mathbf{x}) Y_{kl}(\mathbf{x}) d\Omega = 4\pi \delta_{n,k} \delta_{m,l}, \quad (2.34)$$

где

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\lambda, \quad \delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{если } k = n \\ 0 & \text{если } k \neq n \end{cases}.$$

При этом

$$\|F\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2(F), \quad (2.35)$$

где  $\sigma_n^2(F) = \sum_{m=-n}^n a_{n,m}^2$  – степенные дисперсии.

Следующие важные для дальнейшего соотношения составляют содержание *теоремы сложения сферических функций* и *формулу Функа-Хеке* (Funk-Hecke), соответственно:

$$P_n(\vec{e}_{r_p} \vec{e}_{r_q}) = P_n(\mathbf{e}_{r_p}^T \mathbf{e}_{r_q}) = P_n(v) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\mathbf{x}_p) Y_{nm}(\mathbf{x}_q), \quad (2.36)$$

$$\int_{\Omega} K(v) Y_n(\mathbf{x}_p) d\Omega = k_n Y_n(\mathbf{x}_q), \quad k_n = 2\pi \int_{-1}^1 K(v) P_n(v) dv, \quad (2.37)$$

где  $\nu = \cos \psi$ ,  $\psi$  – сферическое расстояние между точками с координатами  $\mathbf{X}_p$  и  $\mathbf{X}_q$ . Пользуясь этими соотношениями, можно, в частности, убедиться, что [7, с. 9]

$$K(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} k_n P_n(\nu). \quad (2.38)$$

В настоящее время построены сотни рядов, подобных (2.29), различающихся точностью своих коэффициентов и длиной разложения, то есть наибольшей степенью  $N$  присутствующих коэффициентов. Поскольку  $N$  всегда конечно, то представление ГПЗ моделью (2.29) равносильно определённой низкочастотной фильтрацией, а наибольшая степень  $N$  определяет пространственное разрешение на поверхности Земли (разрешающая способность модели). Наименьшая полувогнута  $\psi$  (как сферическое расстояние), которую можно выделить с помощью  $(N+1)^2$  гармонических коэффициентов ряда (2.29), в простейшем случае определяется формулой, основанной на количестве нулей на экваторе:

$$\psi(N) = \frac{\pi R}{N}, \quad (2.39)$$

где  $R$  – средний радиус Земли.

Несколько более адекватное представление о разрешающей способности даёт диаметр той части земной сферы  $4\pi R^2 / (N+1)^2$ , которая приходится в среднем на один коэффициент ряда, то есть (как сферическое расстояние)

$$\psi(N) = 4 \cdot \arcsin \frac{1}{N+1}. \quad (2.40)$$

В таблице 2.1 указаны соотношения между наивысшей степенью разложения  $N$ , разрешающей способностью  $\psi$  по версии (2.40) и соответствующие ошибки усечения  $\zeta, \Delta g, \xi, \eta$  аномалии высоты  $\zeta$ , аномалии силы тяжести  $\Delta g$ , отклонений отвесной линии  $\xi, \eta$  (вычислены по модели Чернинга-Раппа [8]).

Таблица 2.1

Зависимость разрешающей способности  $\psi$  модели и ошибок усечения аномалии высоты  $\zeta$ , аномалии силы тяжести  $\Delta g$ , уклонений отвесной линии  $\xi, \eta$  от наивысшей степени разложения  $N$

$N$	$(N+1)^2$	$\psi^\circ$	$\psi$ (км)	$\varepsilon_\zeta$ (м)	$\varepsilon_{\Delta g}$ (мГал)	$\varepsilon_{\xi, \eta}$ (дуг. сек.)
360	130 321	0,635	70,540	0,228	25,27	3,76
720	519 841	0,318	35,283	0,103	20,12	3,00
1 440	2 076 481	0,159	17,654	0,042	14,54	2,16
1 800	3 243 601	0,127	14,125	0,030	12,68	1,89
3 600	12 967 201	0,064	7,065	0,010	7,12	1,06
5 400	29 170 801	0,042	4,710	0,004	4,34	0,65
7 200	51 854 401	0,032	3,533	0,002	2,74	0,41

Видно, что скорость сходимости ряда медленная, и достижение разрешающей способности в несколько километров требует таких высоких степеней разложения, которые в рамках теории сферических функций практически не достижимы по следующим причинам [9–11]:

– для разложения в ряд по сферическим функциям до наивысшей степени  $N$ , строго говоря, надо решать систему  $(N+1)^2$  уравнений с  $(N+1)^2$  неизвестными, матрица коэффициентов которой полностью заполнена и плохо обусловлена. Например, для получения ряда до 2160-ой степени необходимо преодолеть вычислительные трудности для устойчивого оценивания около 4 700 000 коэффициентов;

– гармонические коэффициенты не связаны с какой-либо индивидуальной пространственной локализацией. Каждый коэффициент отражает влияние всего ГПЗ, и наоборот – изменение даже одного коэффициента имеет глобальный эффект. При вычислении значения суммы полученного ряда в одной единственной точке необходимо всегда привлекать все многочисленные коэффициенты одновременно;

– аппроксимация достигается осциллирующими гармониками за счёт сетчатого взаимопогашения, но получаемый спектральный состав не сочетается со сложностью или, наоборот, гладкостью отдельных участков. Ряды Фурье, каковыми и являются ряды по сферическим функциям, способны отражать разнородности локального поля лишь *в среднем* по планете, что приводит к излишнему сглаживанию модельных значений ГПЗ в горах и, наоборот, к неоправданно иррегулярным результатам в равнинных районах и на океанах;

– тот факт, что исходные данные отдельных регионов точнее других, обычно компенсируется взвешенным уравниванием, результат которого приводит опять-таки к глобальному эффекту: *разрешающая способность*

получается одинаковой для всей планеты. Имеется всего лишь один параметр, позволяющий изменять разрешающую способность, – наивысшая степень разложения  $N$ . Поэтому нет возможности извлечь выгоду из высокоточных данных отдельных регионов, и реальная разрешающая способность окончательной модели диктуется, по существу, регионами, в которых данные имеют низкую точность или вовсе отсутствуют. Сбалансировать неизбежные различия одним параметром  $N$  невозможно;

– ряды по сферическим функциям хорошо приспособлены для моделирования *стационарного* (то есть достаточно однородного по пространству) поля, но очень медленно сходятся при попытках отражать детали поля *нестационарного*. Глобальный характер базиса в виде сферических функций и обусловленная этим медленная сходимость при моделировании нестационарного ГПЗ делает очень сомнительным достижение традиционными методами реально высокой разрешающей способности модели;

– исходные данные для вычисления гармонических коэффициентов должны быть известны по всей планете, причём распределены равномерно. Это вынуждает привлекать мало обоснованные гипотезы и разного рода методы заполнения «белых пятен».

Таким образом, каждая сферическая функция характеризуется вполне определёнными показателями степени  $n$  и порядка  $m$  и, следовательно, имеет однозначные спектральные характеристики. В этом смысле каждая сферическая функция идеально *локализована в частотной области*. Однако *в пространственной области* любая сферическая функция, будучи суженным на сферу полиномом трёх переменных, всегда определена на всей сфере, и в этом смысле не имеет пространственной локализации [10]. Таким образом, сферические функции идеально локализованы в частотной области, но не локализованы в пространстве. Этот очевидный факт имеет серьёзные последствия. Так, при моделировании, например, геопотенциала необходимо иметь исходные данные тоже по всей Земле и при том равномерно вне зависимости от того, хорошо ли изучен тот или иной регион или не изучен вовсе. Отклонение от этого требования в одном локальном районе отрицательно отражается на всех гармонических коэффициентах. Реальную разрешающую способность окончательной модели в результате диктуют регионы, в которых данные имеют низкую точность или вовсе отсутствуют.

Заметим, что прямо противоположными свойствами обладает обобщённая  $\delta$ -функция Дирака. Она отлична от нуля в единственной точке, то есть идеально *локализована в пространстве*, но её спектр, как известно, «равномерно размазан» по всей частотной области. Построить базисные функции, обеспечивающие *высокую локализацию одновременно и в пространстве, и в частотной области невозможно*, поскольку с улучшени-

ем локализации пространственной (частотной) ухудшается локализация частотная (пространственная).

Поэтому в настоящее время для аппроксимации сигналов с переменным спектром – а именно такая ситуация и является наиболее распространённой на практике – рекомендуется пользоваться базисными функциями с промежуточными свойствами локализации, причём такими, степенью локализации которых можно управлять с помощью определённого параметра. Следует принимать во внимание ожидаемый спектральный состав изучаемого сигнала (например, наземная или спутниковая гравиметрия) и детальность имеющихся исходных данных. Для описания длинных волн вполне уместно пользоваться сферическими функциями. Но для выявления локальных особенностей целесообразно пользоваться пространственно-локализованными базисными функциями – чем мельче детали, которые требуется отразить, тем более высокая пространственная локализация желательна. В связи с этим, представляется очень сомнительным продолжающееся стремление при моделировании ГПЗ достигать высокой разрешающей способности с помощью обязательно *единой* модели. Ведь ГПЗ заведомо пространственно-нестационарно и содержит регионы как с достаточно гладким потенциалом, так и с потенциалом, который резко изменяется даже на небольших расстояниях. В работе [12] проанализированы более миллиона точечных значений аномалии силы тяжести на расстояниях от 30 м до 11 км на территории Западной Австралии. В 39 трапециях  $5^\circ \times 5^\circ$  были эмпирически вычислены ковариационные функции. Анализ результатов показал, что различия между дисперсиями в равнинных и горных районах достигают нескольких сотен мГал<sup>2</sup>, а радиус корреляции меняется от  $0,5^\circ$  до  $1,4^\circ$ . Изменение радиуса корреляции, как известно, напрямую связано с изменением спектрального состава поля: чем меньше радиус корреляции, тем большее преобладание высокочастотных составляющих имеет место, и наоборот. Итак, традиционная методика построения модели глобального ГПЗ претерпела в настоящее время определённые модификации. Основой этих модификаций является *изменение базиса*.

Для отображения локальных особенностей поля необходимо привлекать новые базисные функции, отличающиеся от шаровых функций наличием пространственной локализации. При этом, конечно, не предполагается полный отказ от шаровых функций, которые достаточно хорошо проявляют себя при описании низко- и среднечастотной частей гравитационного поля Земли. Но для моделирования высокочастотного диапазона полезных сигналов в настоящее время всё чаще используются пространственно-локализованные базисные функции, которые обычно – вслед за геостатистикой – называются сферическими радиальными базисными функциями

(СРБФ) и вейвлетами (wavelet – короткая волна). Улучшение ситуации возможно только на основе разномасштабных методов моделирования, предполагающих разумное сочетание шаровых функций и вейвлет-анализа. Именно вейвлет-анализ позволяет не только реально *отражать* детали разнородного ГПЗ, но и реально *локализовать* местоположения различных амплитуд. Разумное сочетание традиционного ряда по шаровым функциям для низкочастотной части модели с результатами вейвлет-анализа для её высокочастотной части позволяет заметно улучшить характеристики модели и, в частности, её разрешающую способность.

## 2.3. Разномасштабное моделирование сигналов с помощью сферических радиальных базисных функций

### 2.3.1. От сферических гармоник к сферическим масштабирующим функциям и линейным вейвлетам

Пусть  $f(\mathbf{x})$  – произвольная функция, определённая на и вне сферы  $\Omega_R$  радиуса  $R$ . Традиционную форму (2.29) гармонического анализа такой функции, пользуясь (2.32) и (2.36), можно преобразовать к следующему виду [13]

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} f_{nm} Y_{nm}(\mathbf{x}/r) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}_p) Y_{nm}(\mathbf{x}_p) d\Omega Y_{nm}(\mathbf{x}/r) = \\
 &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x}_p) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\mathbf{x}_p) Y_{nm}(\mathbf{x}/r) d\Omega \Rightarrow \\
 f(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x}_p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(v) d\Omega = \\
 &= \int_{\Omega_R} f(\mathbf{x}_p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(v) d\Omega_R,
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

см. (2.19) и (2.36). Полученное подинтегральное выражение зависит только от сферического расстояния между точкой вычисления с координатами  $\mathbf{x}$  и точкой интегрирования  $p \in \Omega_R$  с координатами  $\mathbf{x}_p$ . Поэтому соответствующий интеграл представляет собой свёртку. В этой свёртке исходная функция играет роль обкладки, а ядром служит выражение [14, с. 75]

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(v) = \delta(v), \quad (2.42)$$

которое на сфере совпадает с обобщённой  $\delta$ -функцией Дирака.

Таким образом,

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_R} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) f(\mathbf{x}_p) d\omega = \int_{\Omega_R} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) f(\mathbf{x}_p) d\omega = (K * f)_{\Omega_R}(\mathbf{x}), \quad (2.43)$$

и, следовательно, ядро (2.42) формально является *воспроизводящим*, см. (2.3), но роль воспроизводящего ядра играет обобщённая функция Дирака.

Однако, такая функция не удовлетворяет требованиям, определяющим воспроизводящее ядро и не позволяет считать  $H$  гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром.

Чтобы исправить положение, рекомендуется ограничиться использованием только некоторого подпространства  $H_\beta$  пространства  $H$ , заполненного только более гладкими функциями [15].

Множество  $H_\beta$  содержит только такие функции из  $H$ , высокочастотные коэффициенты которых убывают быстрее, чем  $\beta_n^{1/2}$  при  $n \rightarrow \infty$ , то есть высокочастотная часть этих функций определённым образом ограничена. Здесь  $\beta_n$  обозначает числовую неотрицательную убывающую бесконечно малую последовательность, которую можно называть *показателем гладкости множества  $H_\beta$* . Задав на этом множестве скалярное произведение и соответствующую норму

$$(f, g) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=0}^{2n} f_{nk} \cdot g_{nk} \right)^{1/2}, \quad \|f\| = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=0}^{2n} f_{nk}^2 \right)^{1/2} < \infty, \quad (2.44)$$

вводят пространство Соболева  $H_\beta$ , получаемое замыканием описанного множества функций по указанной норме [16, с. 111].

Таким образом, если функция  $f \in H_\beta$ , то её коэффициенты Фурье  $f_{nk}$  удовлетворяют условию (2.44).

Если к тому же  $\beta_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $H_\beta$  то имеет воспроизводящее ядро вида

$$K_\beta(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \beta_n P_n(v), \quad v = \cos(\psi). \quad (2.45)$$

Ядро (2.45) является воспроизводящим только для пространства  $H_\beta$ . Поскольку в исходном пространстве  $H$  – это ядро, воспроизводящим не является, то введём для него новое обозначение

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} b_n P_n(v), \quad v = \cos(\psi). \quad (2.46)$$

Свёртки любого сигнала из  $H$  с  $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p)$  выполняют сглаживание и могут использоваться как определённые операторы фильтрации, где коэффициенты  $b_n$  отражают частотные свойства этого оператора.

Заметим, что (2.46) зависит только от сферического расстояния  $\psi$  между точками  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}_p$ , достигает максимума при  $\psi = 0$  и, следовательно, является СРБФ [17].

Если  $b_n = 1$  для  $\forall n$ , то выражения (2.46) и (2.42) совпадают и с позиции фильтрации полностью нейтральны, поскольку вход  $f(\mathbf{x})$  и выход  $f(\mathbf{x})$  оператора свёртки совпадают. Задаваясь другими последовательностями  $b_n$ , обеспечивающими сходимость ряда (2.46), будем получать множество соответствующих СРБФ с различными свойствами (их называют последовательностями Дирака). Пользуясь формулой Фунга-Хеке (2.37), можно доказать, что сферические функции являются собственными функциями интегрального преобразования по сфере с ядром (2.46), а *собственными числами* служат члены последовательности показателя гладкости  $b_n$ . Следовательно, если на вход свёртки (2.43) подаётся сигнал с гармоническими коэффициентами  $a_{nm}$ , то преобразованный сигнал на выходе имеет гармонические коэффициенты  $b_{nm} a_{nm}$ . Варьируя, таким образом, показателем гладкости, можно конструировать преобразования сигнала с нужными фильтрующими и сглаживающими способностями.



Если, например,  $b_n = 0$  для  $\forall n > N$  и  $b_n \neq 0$  для  $\forall n < N$ , то свёртка  $\forall f \in H$  с ядром (2.46) выполняет низкочастотную фильтрацию. Поэтому ясно, что легко организовать и полосовую фильтрацию, а выбор значений коэффициентов  $b_n$  позволяет обеспечить более детальные результаты фильтрации – усилить сигнал в определённой полосе частот или, наоборот, некоторую спектральную полосу сигнала ослабить (или даже отсечь) и т. п. Последовательное применение низкочастотной фильтрации позволяет разложить изучаемый сигнал на отдельные части *разного масштаба уровня*, соответствующие разным промежуткам спектра и, следовательно, разным разрешающим способностям моделирования. В этом состоит фундаментальная идея *разномасштабного анализа* с помощью СРБФ. Спецификация определённого масштаба обеспечивается специальным выбором коэффициентов  $b_n$  и количества слагаемых в ядре (2.46) в зависимости от нужного масштаба.

Полагая, что точки  $P$  и  $Q$  могут располагаться на и вне сферы  $\Omega_R$ , перепишем (2.46) и (2.43) в виде

$$B_j(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{R^2}{r_p r_q} \right)^{n+1} b_{nj} P_n(v), \quad (2.47)$$

$$f_j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_R} B_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) f(\mathbf{x}_p) d\Omega_R = (B_j * f)_{\Omega_R}(\mathbf{x}),$$

и будем называть ядро  $B_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p)$  *масштабирующим (сферической масштабирующей функцией) масштаба  $j = 0, 1, 2, \dots$* .

Согласно [18, с. 190, 194], выражение (2.47) называется *сферической масштабирующей функцией* на сфере  $\Omega_R$ , если выполняются следующие условия:

1) неотрицательная числовая последовательность  $b_{nj}$  монотонно убывает по  $n$  и монотонно возрастает по  $j$ , то есть для всякого  $j = 0, 1, \dots$  имеет место неравенство  $b_{n+1,j} < b_{nj}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , и для всякого  $n = 0, 1, \dots$  имеем  $b_{nj+1} > b_{nj}$ ,  $j = 0, 1, \dots$ ; при этом  $b_{0j} = 1$ ;

2)  $\lim_{j \rightarrow \infty} b_{nj} = 1$  для всякого  $n = 0, 1, \dots$ , то есть  $\lim_{j \rightarrow \infty} B_j(P, Q) = \delta(P, Q)$ , где  $\delta(P, Q)$  – обобщённая дельта-функция Дирака.

Важно отметить, что, в силу последнего условия,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - B_j * f\|_{L_2(\Omega_R)} = 0, \quad (2.48)$$

что обеспечивает теоретическую возможность аппроксимации с любой точностью. В силу равенства Парсеваля,

$$\|f - B_j * f\|_{L_2(\Omega_R)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (1 - b_j(n))^2 a_{nm}^2 \leq \|f\|^2. \quad (2.49)$$

При этом, погрешность аппроксимации монотонно убывает с возрастанием масштабного параметра  $j$ .

Можно доказать, что [18, с. 205]

$$B_j * f = \sum_{n=0}^{N_j} \sum_{m=-n}^n b_j(n) a_{nm} Y_{nm}(P), \quad (2.50)$$

где  $f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_{nm}(P)$ , и, следовательно, вычисление свёртки можно заменить гармоническим анализом сигнала  $f$  по сфере и последующим гармоническим синтезом (2.50). Здесь верхний предел суммирования  $N_j$  зависит от выбранного масштаба  $j$ .

Отметим также, что

$$\|B_j\|_{L^2(\Omega_R)}^2 = \sum_{n=0}^{N_j} \sigma_n^2(B_j), \quad (2.51)$$

где своеобразные степенные дисперсии

$$\sigma_n^2(B_j) = \frac{2n+1}{4\pi R^2} b_{nj}^2, \quad (2.52)$$

определяют спектр масштабирующей функции  $B_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$  [19].

Из сопоставления (2.52) и (2.35) следует, что для обеспечения равенств  $\sigma_n^2(f) = \sigma_n^2(B_j)$  при  $n = 0, \dots, N_j$  достаточно положить

$$b_{nj} = \sqrt{\frac{4\pi R^2}{2n+1}} \sigma_n(f). \quad (2.53)$$

Это соотношение позволяет подбирать масштаб  $j$  так, чтобы спектр масштабирующей функции приближённо соответствовал спектру анализируемой функции  $f(x)$ .

Разность масштабирующих функций двух последовательных масштабов называется (линейным) *вейвлетом*

$$W_j(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) = \sum_{n=0}^{N_j} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{R^2}{r_p r_q} \right)^{n+1} w_{nj} P_n(v), \quad w_{nj} = b_{n,j+1} - b_{nj}. \quad (2.54)$$

Точки  $P \in \Omega_R$  называются полюсами, а коэффициенты  $b_{nj}$ ,  $w_{nj}$  называются *масштабирующими коэффициентами масштаба (уровня)  $j$* , соответственно, *масштабирующей функции или вейвлета*. Если  $f$  – какая-нибудь функция (сигнал) пространства  $L_2(\Omega_R)$  на сфере  $\Omega_R$ , то ее *вейвлет-преобразованием* называется сферическая свёртка (скалярное произведение)

$$G_j(\mathbf{x}) = (W_j * f)(\mathbf{x}) \approx \int_{\Omega_R} W_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) f(\mathbf{x}_p) d\Omega_R, \quad (2.55)$$

где  $W_j$  обозначает вейвлет (2.54) масштабного уровня  $j$ .

Результат  $G_j(\mathbf{x})$  вейвлет-преобразования изучаемой функции собирает более тонкую структуру сигнала, содержащуюся в  $f_{j+1}(x) = (B_{j+1} * f)(x)$ , но не содержащуюся в  $f_j(x) = (B_j * f)(x)$ . При этом, если свёртка сигнала с масштабирующей функцией (2.47) представляет собой определённое сглаживание изучаемой функции путём низкочастотной фильтрации, то свёртку (2.55) с вейвлетом (2.54) естественно трактовать как полосовой фильтр, соответствующий определённой полосе спектра.

В конечном счёте изучаемую функцию можно представить в виде суммы разномасштабных слагаемых

$$f(x) = f_{j'}(x) + \sum_{j=j'}^J G_j(x) + \Delta f_{J+1}(x), \quad (2.56)$$

что и определяет сущность *разномасштабного моделирования (аппроксимации)*. Здесь  $f_{j'}(x)$  обозначает изучаемую функцию, сглаженную до

масштаба  $j'$ , а  $G_j(x)$  – полосовые детали изучаемой функции, соответствующие масштабам  $j = j', j' + 1, \dots, J$ .

Можно доказать, что всевозможные функции вида  $f_{j'}(x), G_j(x)$  и  $\Delta f_{j+1}(x)$  заполняют определённые непересекающиеся подпространства исходного пространства  $L_2(\Omega_R)$ , а объединение этих подпространств практически совпадает с  $L_2(\Omega_R)$ . Эти подпространства называют, соответственно, референчным, детализирующим и остаточным.

Выбор конкретных значений  $j'$  и  $J$  существенно зависит от задачи анализа и имеющихся данных. При наличии достаточной информации об изучаемой функции значимость остатка  $\Delta f_{j+1}(x) = f(x) - f_{j+1}(x)$  можно сделать, как угодно, малой. Ядра, покрывающие различные полосы частот, доставляют удобный инструмент вставки информации, полученной в различных частях спектра, в единый сигнал, что очень полезно при комбинировании разнородных измерений (например, гравиметрия наземная, спутниковая, аэрогравиметрия).

В общем случае разномасштабное разложение (2.56) не является ни прямым, ни ортогональным. Но это не мешает тому, что каждое слагаемое в этой аппроксимации описывает только такой «слой» исходного сигнала, который соответствует детализирующему пространству с определённым промежутком частот и, следовательно, с определённой разрешающей способностью. Хотя большинство физических полей, в том числе ГПЗ, проявляет значимую *корреляцию* в пространстве, описанная процедура – благодаря управляемой локализации базиса – позволяет целенаправленно выполнять *декорреляцию* сигналов.

*Билинейные вейвлеты.* Несколько по-другому вводятся так называемые *билинейные вейвлеты*, коэффициенты которых определяются из уравнения [20, с. 5, 67]

$$w_j(n)\tilde{w}_j(n) = b_{j+1}^2(n) - b_j^2(n), \forall n. \quad (2.57)$$

Отсюда следует, что, если  $w_j(n) = b_{j+1}(n) - b_j(n)$  – масштабирующий коэффициент *первичного* вейвлета масштаба  $j$ , то масштабирующий коэффициент *двойственного* вейвлета  $\tilde{w}_j(n) = b_{j+1}(n) + b_j(n)$ .

$$W_j(P, Q) = B_{j+1}(P, Q) - B_j(P, Q) =$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} w_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{R^2}{|x_p| |x_q|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x_p}{|x_p|} \cdot \frac{x_q}{|x_q|} \right), \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_j(P, Q) &= B_{j+1}(P, Q) + B_j(P, Q) = \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \tilde{w}_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left( \frac{R^2}{|x_p| |x_q|} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{x_p}{|x_p|} \cdot \frac{x_q}{|x_q|} \right), \end{aligned} \quad (2.59)$$

Если положить  $W_j(P, Q) = \tilde{W}_j(P, Q)$  для  $\forall j$ , то

$$w_j(n) = \sqrt{b_{j+1}^2(n) - b_j^2(n)}, \quad \forall n. \quad (2.60)$$

Можно показать, что введенные конструкции, так же, как и в случае линейных вейвлетов, позволяют выполнить разномасштабное моделирование типа (2.56) и разложить исходное пространство на соответствующие подпространства референсное, детализирующие и остаточное

$$\begin{aligned} f_J &= B_J^{(2)} * f = B_{J_0}^{(2)} * f + \sum_{j=J_0}^{J-1} \tilde{w}_j * (w_j * f) = \\ &= B_{J_0} * (B_{J_0} * f) + \sum_{j=J_0}^{J-1} \tilde{w}_j * (w_j * f). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Подробности о билинейных вейвлетах можно найти в работах [21, с. 5, 22, 23, с. 210].

### **2.3.2. Оценивание коэффициентов разложения свёртки по СРБФ методом наименьших квадратов**

Будем полагать в дальнейшем, что полезный сигнал  $f$  является функцией ограниченных частот вида

$$f(P) = \sum_{n=0}^{n'} \sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_{nm}(P), \quad (2.62)$$

и принадлежит пространству с воспроизводящим ядром

$$K(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) b_n P_n(v), \quad b_n \begin{cases} \neq 0 & n=0, \dots, n', \\ = 0 & n > n' \end{cases}, \quad (2.63)$$

где  $v = \cos \psi$ .

Пусть далее на сфере  $\Omega_R$  радиуса  $R$  задано такое множество несовпадающих точек  $Q_1, \dots, Q_N, N = (n' + 1)^2$ , что система уравнений

$$\sum_{n=0}^{n'} \sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_{nm}(Q_k) = f(Q_k); \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.64)$$

регулярна и, следовательно, позволяет однозначно определить коэффициенты  $a_{nm}$  (соответствующую систему функций обычно называют чебышевской [24, с. 28]). Знание  $a_{nm}$  позволяет однозначно представить свёртку (2.62) с (2.63) в виде линейной комбинации

$$f(P) = (K * f)(P) = \sum_{k=1}^N b_k K(P, Q_k), \quad (2.65)$$

где коэффициенты  $a_{nm}$  и  $b_k$  связаны регулярным соотношением

$$\sum_{k=1}^N Y_{nm}(Q_k) b_k = a_{nm}; \quad n = 0, \dots, n'. \quad (2.66)$$

В самом деле, если  $a_{nm}$  из (2.66) подставить в (2.62) и воспользоваться (2.19), то получим (2.65). Таким образом, если обкладка и ядро принадлежат одному и тому же пространству, то свёртку можно представить линейной комбинацией ядерных функций.

В частности, мы вправе рассматривать свёртки сигналов с масштабирующей функцией (2.47) как линейные комбинации соответствующих ядер, и для оценивания коэффициентов таких линейных комбинаций естественно пользоваться методом наименьших квадратов. Уравнения связи при этом имеют вид

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{x}) &= (B_j * f)(\mathbf{x}) \approx \int_{\Omega_R} B_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) f(\mathbf{x}_p) d\Omega_R = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k B_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{p_k}) \approx \sum_{k=1}^K \alpha_k B_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{p_k}) + e(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.67)$$

где  $e(\mathbf{x})$  – случайные ошибки измерений.

Первоначально неизвестные коэффициенты  $\alpha_k$ , по существу, играют такую же роль, как и гармонические коэффициенты  $a_{nm}$  в рядах по шаровым функциям, то есть являются коэффициентами разложения по определённым базисным функциям, в данном случае – по СРБФ.

Так, например, если получено подобное разложение для возмущающего потенциала  $T$

$$T_j(\mathbf{x}) = \frac{GM}{R} \sum_{k=1}^K \alpha_k B_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{p_k}), \quad (2.68)$$

то и любой функционал  $F$  на потенциале может быть вычислен по формуле

$$F(T_j)(\mathbf{x}) = \frac{GM}{R} \sum_{k=1}^K \alpha_k F(B_j)(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{p_k}). \quad (2.69)$$

Оцениваются коэффициенты разложения стандартным методом наименьших квадратов

$$\hat{\alpha} = (A^T P A)^{-1} A^T P f, \quad C_{\hat{\alpha}} = \hat{\sigma}^2 (A^T P A)^{-1}. \quad (2.70)$$

где  $A$  – матрица уравнений связи, элементами которой служат значения ядра;

$P$  – весовая матрица исходных значений сигнала;

$f$  – столбец исходных значений сигнала в определённом количестве точек с координатами  $\mathbf{X}$  (количество таких значений  $>$  количества  $K$  полюсов  $p_k$ );

$C_{\hat{\alpha}}$  – ковариационная матрица результатов уравнивания  $\hat{\alpha}_k$ ;

$\hat{\sigma}^2$  – оценка дисперсии единицы веса.

Подробности см, например, в работах [7, 10, 13, 25–27]. Полезная информация содержится также в работе [28], в которой показано, что полюса  $p_k$  целесообразно помещать на некоторой глубине относительно сферы  $\Omega_R$ .

К сожалению, однако, нередко непосредственно решить систему нормальных уравнений  $(A^T P A)\alpha = A^T P f$  не удаётся из-за того, что матрица связи  $A$  плохо обусловлена или даже имеет неполный ранг. В таких слу-

чаях применяется регуляризация по Тихонову [29, 30], что, конечно, заметно усложняет всю процедуру оценивания коэффициентов разложения.

Но в любом случае следующая теорема существенно сокращает объём вычислений при определении коэффициентов разложения  $\alpha_k$ .

**Теорема 2** [31]. Пусть в некоторой свёртке  $(K * f)(x)$ , обкладка  $f(x) \in \Omega_R$ , а ядро  $K(x, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} K_n P_n(v)$  таково, что  $K_n \begin{cases} \neq 0 & \text{для } n = 0, \dots, n' \\ = 0 & \text{для } n > n' \end{cases}$ .

Предположим, что матрица связи  $A$  в (2.70) имеет полный ранг и, следовательно, найдены такие коэффициенты  $\alpha_k$ , что

$$(K * f)(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k K(x, x_k). \quad (2.71)$$

Если

$$L(x, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} L_n P_n(v), \quad (2.72)$$

какое-то другое ядро, в котором  $L_n = 0$  при  $n > n'$  то

$$(L * f)(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k L(x, x_k). \quad (2.73)$$

Таким образом, коэффициенты разложения  $\alpha_k$  не зависят от СРБФ, если только они ограничены одним и тем же значением  $n'$ . Это означает, что, если мы определили коэффициенты аппроксимации для низкочастотного сглаживания сигнала, то для выделения деталей изучаемой функции с помощью вейвлетов можно пользоваться теми же коэффициентами! То есть, если

$$f_j(\mathbf{x}) = (B_j * f)(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k B_j(x, x_{p_k}), \quad (2.74)$$

то и



$$g_j(\mathbf{x}) = (W_j * f)(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k W_j(x, x_{p_k}). \quad (2.75)$$

Пусть, например, требуется построить локальную модель ГПЗ в определённом регионе путем совместного использования как наземных гравиметрических данных, так и результатов спутниковой гравиметрии.

Низкочастотную часть полезного сигнала  $f$  (например, геопотенциала) можно, как обычно, достаточно надёжно предсказать с помощью известных рядов по шаровым функциям до некоторой степени  $N$

$$f(\mathbf{x}) \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_{nm}(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}). \quad (2.76)$$

Поэтому основную проблему составляет моделирование остаточной высокочастотной части  $\Delta f(\mathbf{x})$ . Уравнения связи для этого, по существу, имеют стандартный вид, а именно

$$\Delta f(\mathbf{x}) + e(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k B(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) \Leftrightarrow \Delta \mathbf{f} + \mathbf{e} = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}.$$

В более подробной записи

$$\begin{bmatrix} \Delta f(\mathbf{x}_1^1) \\ \vdots \\ \Delta f_1(\mathbf{x}_{n1}^1) \\ \Delta f_2(\mathbf{x}_1^{11}) \\ \vdots \\ \Delta f_2(\mathbf{x}_{n2}^{11}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1(\mathbf{x}_1^1) \\ \vdots \\ e_1(\mathbf{x}_{n1}^1) \\ e_2(\mathbf{x}_1^{11}) \\ \vdots \\ e_2(\mathbf{x}_{n2}^{11}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_1) \cdots B_1(\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1(\mathbf{x}_{n1}^1, \mathbf{x}_1) \cdots B_1(\mathbf{x}_{n1}^1, \mathbf{x}_K) \\ B_2(\mathbf{x}_1^{11}, \mathbf{x}_1) \cdots B_2(\mathbf{x}_1^{11}, \mathbf{x}_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_2(\mathbf{x}_{n2}^{11}, \mathbf{x}_1) \cdots B_2(\mathbf{x}_{n2}^{11}, \mathbf{x}_K) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

где  $\Delta f_1(\mathbf{x})$ ,  $\Delta f_2(\mathbf{x})$  и, соответственно,  $e_1$ ,  $e_2$  и  $B_1$ ,  $B_2$  указывают на наличие двух разномасштабных типов наблюдений количеством  $n1$  и  $n2$  (в общем случае, разномасштабных типов может быть и больше). Каждому типу измерений соответствует своя масштабирующая функция или свой вейвлет со своими масштабными уровнями, но коэффициенты разложения  $\boldsymbol{\alpha}$  можно определять в единой схеме.

Примером практического использования комбинирования глобальной модели ГПЗ, топографической модели, наземной гравиметрии и аэрогра-

виметрии при создании международной системы высот (International Height Reference System – IHRs) может служить работа [18].

### 2.3.3. Численное интегрирование

Другой подход к вычислению вейвлет-преобразований основан непосредственно на численном интегрировании. В частности, поскольку объектом вычислений является свёртка, то можно воспользоваться известным свойством преобразований Фурье о том, что свёртка в пространственной области эквивалентна произведению образов Фурье в частотной области. При этом, естественно, воспользоваться известной техникой быстрых преобразований Фурье.

Но проще всего воспользоваться методами типа Driscoll and Healy [20]:  
– создать на сфере  $\Omega_R$  регулярную сетку полюсов так, что

$$x_k^j := x_{i,l}^j = R(\cos \beta_l^j \cos \lambda_i^j, \cos \beta_l^j \sin \lambda_i^j, \cos \beta_l^j)^T, \quad (2.78)$$

где долготы  $\lambda_i^j = i\pi/L_j$  и широты  $\beta_l^j = -\pi/2 + l\pi/(2L_j)$ ,  $i = 0, \dots, 2L_j - 1$ ,  $l = 0, \dots, 2L_j$ ,  $N_j = (2L_j + 1) \cdot 2L_j$ ;

$L_j$  – константа, определяющая размер шага сетки;

– соответствующие весовые коэффициенты численного интегрирования зависят только от широты и шага сетки и находятся по формуле

$$w_k^j := w_{i,l}^j = \frac{2\pi R^2}{L_j^2} \sin\left(\frac{l\pi}{2L_j}\right) \sum_{k=0}^{L_j-1} \frac{1}{2k+1} \sin\left(\frac{(2k+1)l\pi}{2L_j}\right); \quad (2.79)$$

– в результате можно получить коэффициенты [22]

$$d_{j,k} = w_k^j f(x_k^j), \quad (2.80)$$

такие, что

$$f_j(\mathbf{x}) = (B_j * f)(\mathbf{x}) \approx \int_{\Omega_R} B_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) f(\mathbf{x}_p) d\omega \approx \sum_{k=1}^{N_j} d_{j,k} B_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k). \quad (2.81)$$

Известны и другие сетки узлов с аналитически известными весовыми коэффициентами, но необходимость знания значений интегрируемой функции именно в специальных узлах далеко не всегда согласуется с ре-

альными исходными данными. В связи с этим возникает дополнительная проблема интерполяции, что существенно ограничивает возможности таких подходов. В то же время следует отметить, что при численном интегрировании не приходится сталкиваться с регуляризацией плохой обусловленности, как это имеет место в параметрическом определении коэффициентов разложения по СРБФ.

Однако, в конечном счёте предпочтение обычно отдаётся именно параметрическому методу, не требующему обязательной регулярности сетки узлов с исходными данными и позволяющему не только определить нужные коэффициенты, но и оценить их точность. Заметим также, что при вычислении свёрток численным интегрированием совместная обработка разномасштабной информации типа (2.77) не представляется возможной.

### **2.3.4. Виды сферических масштабирующих функций и соответствующих вейвлетов**

В современной литературе можно найти описание множества различных сферических вейвлетов. Все они имеют структуру вида (2.54) и отличаются масштабными коэффициентами  $b_j$  масштабирующей функции (2.47). Мы приведём здесь только несколько наиболее простых видов, причём будем пользоваться диадной (двоично-рациональной) формой как наиболее простой и наглядной:

– функция Шеннона (Shannon)

$$b_{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } n \in [0; 2^j), \\ 0 & \text{если } n \geq 2^j \end{cases}, \quad (2.82)$$

функция выполняет в пространственной области прямоугольную фильтрацию, соответствующую частотной полосе от 0-ой степени до степени  $2^{j-1}$  для масштабирующей функции и от  $2^j$  до  $2^{j-1} - 1$  степеней для вейвлетов. В результате функция Шеннона имеет наивысшую локализацию в частотной области, а за счёт этого – наибольшую осцилляцию в пространственной области. Обычно функция Шеннона используется в процессе анализа сигналов, чтобы избежать потери спектральной информации;

– функция полиномиально-кубическая (CuP)

$$b_{n,j} = \begin{cases} (1 - 2^{-j}n)^2(1 + 2^{-j+1}n) & \text{если } n \in [0; 2^j), \\ 0 & \text{если } n \geq 2^j \end{cases}. \quad (2.83)$$

Функция  $\text{CuP}$ , наоборот, имеет наименьшую пространственную осцилляцию, но фильтрация более гладкая, все рабочие масштабные коэффициенты  $< 1$ ;

– функция Блэкмана (Blackman)

$$b_{n,j} = \begin{cases} (1) & \text{если } n \in [0; 2^{j-1}) \\ A_j(n) & \text{если } n \in [2^{j-1}, 2^j) \\ 0 & \text{если } n \geq 2^j \end{cases} \quad (2.84)$$

$$\text{где } A_j(n) = \frac{21}{50} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{2^j}\right) + \frac{2}{25} \cos\left(\frac{4\pi n}{2^j}\right).$$

По своим свойствам функция Блэкмана представляет некий компромисс между двумя предыдущими вариантами. Обычно функции  $\text{CuP}$  и Блэкмана рекомендуются при синтезе, чтобы уменьшить ошибки систематического характера.

– масштабирующие (сглаженные) функции Хаара (Haar)

$$B_j(v) = \begin{cases} 0, & b_j < 1 - v \leq 2 \\ \frac{k+1}{2\pi} b_j^{-(k+1)} (v-1+b_j)^k, & 0 \leq 1 - v \leq b_j \end{cases}, \quad (2.85)$$

где  $b_j = 2^{-j}$  или  $b_j = 1 - \cos(2^{-j}\pi)$ , а  $k$  обозначает некоторую фиксированную степень многочлена и регулирует степень гладкости ядра. Соответствующие вейвлеты Хаара

$$W_j(v) = B_{j+1} - B_j = \begin{cases} 0, & b_j < 1 - v \leq 2 \\ -\left(\frac{k+1}{2\pi}\right) b_j^{-(k+1)} (v-1+b_j)^k, & b_{j+1} < 1 - v \leq b_j \\ \left(\frac{k+1}{2\pi}\right) (b_{j+1}^{-(k+1)} (v-1+b_{j+1})^k - b_j^{-(k+1)} (v-1+b_j)^k), & 0 \leq 1 - v \leq b_{j+1} \end{cases} \quad (2.86)$$

Сферические вейвлеты Хаара (Хаар) доставляют очень удобный инструмент локальной аппроксимации, позволяющий как бы увеличивать мелкие детали. Эти вейвлеты отличны от 0 только в некоторой очень небольшой обследуемой окрестности на сфере, и поведение сигнала вне этой окрестности вообще во внимание не принимается. Следовательно, локально можно обследовать всё более и более мелкие детали с повышенной

точно без ухудшения аппроксимации сигнала во всех остальных частях. Размер локальной области зависит от масштаба  $j$  вейвлета  $W_j$  и уменьшается с увеличением  $j$ .

Упомянутые функции являются примерами масштабирующих функций с ограниченным спектром ( $\exists N_j: b_{n,j} = 0$  для  $\forall n > N_j$ ). В качестве примера масштабирующей функции с неограниченным спектром ( $b_{n,j} \neq 0$  для  $\forall n$ ) отметим функцию Абеля-Пуассона с  $b_{n,j} = \exp(-np/2^j)$ , где  $n > 0$  – вспомогательный параметр. Удобно, что соответствующая сумма ряда (2.47) представляет собой элементарную функцию, строго положительную на сфере и достаточно быстро убывающую с увеличением сферического расстояния между  $x$  и  $x_p$ . Всё это упрощает вычислительные алгоритмы. Подробности см., например, в монографии [32, с. 199].

Примеры использования масштабирующей функции Абеля-Пуассона в сферическом вейвлет-анализе гравиметрических данных см. в работах [25, 26, 33]. В работах [19, 21, 34] с помощью сферических вейвлетов построены оригинальные модели ГПЗ по данным спутниковых миссий CHAMP, GOCE и GRACE.

Сравнительный анализ различных СРБФ можно найти, например, в работе [13].

## **2.4. Среднеквадратическая коллокация**

### **2.4.1. Чистая коллокация как обобщенная задача интерполяции**

Несколько иной класс сравнительно новых алгоритмов, обеспечивающих, вообще говоря, «восстановление» функций по результатам дискретных измерений различных «проявлений» этих функций, принято называть коллокацией.

Систематическую теорию для решения подобных задач удастся построить различными путями: либо опираясь на оптимальный линейный прогноз и фильтрацию на основе ковариационной теории случайных функций (статистический подход), либо опираясь на основные положения функционального анализа (функциональный подход). Однако в конечном счёте, оба пути приводят к одним и тем же результатам и, таким образом, обогащают друг друга интерпретациями с совершенно разных позиций [33].

Термин «коллокация» после работы известного отечественного математика Л. В. Канторовича [35] широко используется в математике в связи

с решением интегральных и дифференциальных уравнений, когда приближённое решение определяется из условия удовлетворения уравнению в некоторых заданных точках. Однако мы в дальнейшем, вслед за работами [4, 36, 37], будем вкладывать в этот термин несколько иной смысл, более подходящий для геодезических приложений и представляющий собой, с математической точки зрения, обобщение метода наименьших квадратов на случай бесконечномерных гильбертовых пространств.

В дальнейшем будем пользоваться сферической аппроксимацией, то есть точки с геодезическими координатами  $h, \varphi, \lambda$  отнесёнными к эллипсоиду, формально будем заменять точками со сферическими координатами  $r, \theta, \lambda$ , отнесёнными к среднеземной сфере радиуса  $R$ . При этом  $\theta = \pi/2 - \varphi$ ,  $r = R + h$ .

Начнем с постановки известных задач интерполяции функции, для простоты, одной переменной.

Некоторая функция  $f$ , аналитическое выражение которой неизвестно, определена на промежутке  $[a, b]$ , но задана только в отдельных точках (узлах интерполяции)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  этого промежутка.

#### **Задача интерполяции № 1 (локальная интерполяция).**

Располагая числами  $y_i = f(x_i), i = 1, 2, \dots, n$  и зная, что  $f$  принадлежит некоторому классу  $K$  функций (например, непрерывных на  $[a, b]$ ), требуется указать способ, с помощью которого можно было бы приписать значению  $f$  в заданной промежуточной между узлами точке  $x' \in (x_1, x_n)$  некоторое «разумное» приближенное число, то есть требуется проявить своего рода «искусство чтения между строк».

#### **Задача интерполяции № 2 (глобальная интерполяция).**

Требуется восстановить функцию  $f$ , то есть найти такую аналитически заданную функцию  $\hat{f}$ , которая приближала бы  $f$  на  $[a, b]$ , а ее значения в узлах интерполяции совпадали бы с заданными значениями функции  $f$ .

Полиномиальный подход к этим задачам заключается, как известно, в неявном или явном выборе интерполяционного полинома  $\hat{f}$  степени не выше  $n - 1$ , например, в форме Лагранжа или Ньютона и в вычислении  $\hat{f}(x') \approx f(x')$ .

Более абстрактная формулировка задачи позволяет получить решение гораздо более широкого, чем интерполяция, класса задач и, в конечном счете, приведет нас к методу обработки измерений, чрезвычайно эффективному с точки зрения геодезических приложений.

Пусть изучаемая функция  $f$  принадлежит некоторому классу  $K$  функций, определенных в заданной ограниченной замкнутой области  $D$  – одномерной, двумерной или трехмерной – неважно (размерность области  $D$  обусловлена количеством независимых переменных у изучаемой функции  $f$ ). Пусть далее на  $K$  определены  $n+1$  линейных линейно-независимых функционалов  $L_1, L_2, \dots, L_n, F$ , и нам известны значения первых  $n$  из этих функционалов на  $f$ , то есть известны числа  $l_i = L_i(f), i = 1, 2, \dots, n$ .

#### **Задача коллокации № 1 (локальная коллокация).**

Требуется указать способ, с помощью которого можно было бы приписать значению  $F(f)$  некоторое «разумное» приближенное число.

#### **Задача коллокации № 2 (глобальная коллокация).**

Требуется восстановить функцию  $f$ , то есть найти такую аналитически заданную функцию  $\hat{f}$ , которая приближала бы  $f$  на  $D$ , а значения функционалов  $L_1, L_2, \dots, L_n$  на  $\hat{f}$  совпадали бы с заданными числами  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , соответственно.

Описанные задачи будем называть *задачами коллокации*. Если участвующие в постановке задач функционалы  $L_1, L_2, \dots, L_n, F$  суть дельта-функционалы, соответствующие фиксированным точкам  $P_1, P_2, \dots, P_n, P' \in D$ , то задачи коллокации ничем не отличаются от задач интерполяции, в частности, тех, с которых мы начали содержание этого пункта (при  $D = [a, b]$ ). Таким образом, интерполяция есть частный случай коллокации.

Рассмотрим в общем виде *решение (локальной) задачи коллокации № 1*.

Поскольку вся количественная информация об изучаемой функции  $f$  содержится только в числах  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , то искомое число  $F(f)$  есть, конечно, некоторая функция от  $l_1, l_2, \dots, l_n$ . Мы будем ее аппроксимировать линейной однородной функцией, т. е. будем полагать, что

$$F(f) \approx \hat{F}(f) = a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_n l_n, \quad (2.87)$$

где  $\hat{F}$  – линейный функционал, аппроксимирующий  $F$ ;

$a_1, a_2, \dots, a_n$  – коэффициенты линейной комбинации подлежат определению.

Перепишем (2.87) с помощью матричной символики:

$$F(f) \approx \hat{F}(f) = a^T l,$$

где  $a$  и  $l$  –  $n$ -мерные столбцы чисел  $a_1, \dots, a_n$  и  $l_1, \dots, l_n$ , соответственно.

Так как  $l_i = L_i(f)$ , то (2.87) равносильно следующей записи

$$\hat{F}(f) = a_1 L_1(f) + a_2 L_2(f) + \dots + a_n L_n(f) = a^T L(f),$$

где  $L$  –  $n$ -мерный столбец исходных функционалов  $L_1, \dots, L_n$  (векторный функционал, преобразующий функции из  $H$  в  $n$ -мерные векторы).

Следовательно,

$$\hat{F} = a^T L. \quad (2.88)$$

При отыскании необходимых коэффициентов  $a$  полезно учесть, что множество всех линейных ограниченных на  $H$  функционалов образует гильбертово пространство  $H^*$  (сопряженное с  $H$ ). Заданные функционалы  $L_1, \dots, L_n \in H^*$ , будучи линейно-независимыми, образуют базис  $n$ -мерного подпространства  $H_1^* = \text{Span}\{L_1, \dots, L_n\}$ . При этом  $F \in H^*$ , но в общем случае  $F \notin H_1^*$ , так как  $F$  по условию линейно независим от  $L_1, \dots, L_n$ . Поэтому естественно коэффициенты  $a$  в (2.88) подобрать таким образом, чтобы  $\hat{F} \in H_1^*$  оказался элементом наилучшей аппроксимации  $F \in H^*$  и, следовательно, расстояние между  $F$  и  $\hat{F}$  по метрике  $H^*$  было бы наименьшим среди всех других возможных.

Таким образом, по определению,  $\hat{F}$  такой элемент из  $H_1^*$ , что

$$\|F - \hat{F}\|^* = \inf_{\hat{F} \in H_1^*} \|F - \hat{F}\|^*. \quad (2.89)$$

Подобные задачи имеют стандартное решение: коэффициенты  $a$  суть корни следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (L_1, L_1) * a_1 + (L_1, L_2) * a_2 + \dots + (L_1, L_n) * a_n &= (L_1, F)^* \\ (L_2, L_1) * a_1 + (L_2, L_2) * a_2 + \dots + (L_2, L_n) * a_n &= (L_2, F)^*, \\ &\dots \\ (L_n, L_1) * a_1 + (L_n, L_2) * a_2 + \dots + (L_n, L_n) * a_n &= (L_n, F)^* \end{aligned} \quad (2.90)$$



или в матричном виде

$$\Gamma a = b,$$

где  $\Gamma$  – матрица Грама,  $(i, j)$  позицию, в которой занимает скалярное произведение в  $H^*$  функционалов  $(L_i, L_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ;

$b$  – столбец правых частей системы (2.90), то есть,  $b = (L_i, F)^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Поэтому, очевидно,

$$a = \Gamma^{-1}b, \quad a^T = b^T \Gamma^{-1}, \quad (2.91)$$

и, в силу (2.88),

$$\hat{\Gamma} = b^T \Gamma^{-1} L. \quad (2.92)$$

Матрица Грама  $\Gamma$  нормальна, то есть симметрична и положительно определена. Следовательно, обратная матрица  $\Gamma^{-1}$  обязательно существует.

Таким образом, согласно (2.87), число

$$\hat{F}(f) = b^T \Gamma^{-1} L(f) = b^T \Gamma^{-1} l \approx F(f), \quad (2.93)$$

решает поставленную задачу коллокации № 1. При этом, если искомым функционал  $F$  совпадает с одним из заданных функционалов  $L_i$ , то решение (2.92) даст точно такой же функционал  $L_i$ . Действительно, в указанных условиях правая часть системы (2.90') есть  $i$ -й столбец матрицы  $\Gamma$ , и потому  $a$  в (2.91) есть  $i$ -й столбец единичной матрицы размером  $n, n$ . Следовательно, формула (2.92) дает

$$\hat{F} = L_i. \quad (2.94)$$

Именно это свойство коллокации оправдывает её название и позволяет считать её обобщением интерполяции.

Итак, аппроксимация значения нужного функционала  $F$  сводится к простейшим действиям с матрицами (2.93).

Что касается способа вычисления скалярных произведений в сопряженном пространстве, то, как показано в параграфе 2.1, воспроизводящее ядро  $K(A, B)$  гильбертова пространства  $H$  позволяет легко находить

представителя  $\Psi_F \in H$  для любого линейного ограниченного функционала  $F \in H^*$ .

Согласно (2.15), (2.17)

$$\Psi_F := F(f) = (f, \Psi_F), \forall f \in H. \quad (2.95)$$

Поэтому, согласно (2.3)

$$\begin{aligned} \Psi_F(A) &= (\Psi_F(B), K(B, A))_B = (K(B, A), \Psi_F(B))_B = \\ &= F_B(K(A, B)) = K(A, F). \end{aligned} \quad (2.96)$$

где  $K(A, B)$  представляет собой искомый представитель  $\Psi_F(A)$ ;

$A$  – текущая точка.

Таким образом, для практического определения  $\Psi_F(A)$  достаточно подействовать соответствующим функционалом  $F$  на ядро  $K(A, B)$  как на функцию точки  $B$ .

В связи с этим легко получить и скалярное произведение  $(F_1, F_2)$  двух функционалов  $F_1$  и  $F_2$  в гильбертовом пространстве  $H^*$ .

Действительно, в силу (2.17),

$$(F_1, F_2)^* = (\Psi_{F_1}, \Psi_{F_2}). \quad (2.97)$$

Но, в соответствии с (2.96),

$$\Psi_{F_1} = K(A, F_1), \quad \Psi_{F_2} = K(A, F_2),$$

и, следовательно,

$$(F_1, F_2)^* = (K(A, F_1), K(A, F_2))_A = (K(F_1, A), K(A, F_2))_A = K(F_1, F_2). \quad (2.98)$$

Таким образом, для получения числа  $(F_1, F_2)^*$  достаточно на  $K(A, B)$  подействовать сначала функционалом  $F_1$ , как на функцию точки  $A$ , а затем функционалом  $F_2$  как на функцию точки  $B$ .

Здесь и далее принята договоренность, что запись  $F(f)$  равносильна записи  $f(F)$ . Это и определяет смысл записи  $K(A, F)$  в (2.96) и  $K(F_1, F_2)$  в (2.98). В частности,

$$K(F_1, F_2) = F_{1_A}, F_{2_B} K(A, B).$$

Рассмотрим теперь решение *второй (глобальной) задачи коллокации*. Оно сводится, очевидно, к решению следующей системы  $n$  уравнений

$$Lf = l, \quad (2.99)$$

где функция  $f$  должна быть выбрана из  $H$ .

Эта система уравнений имеет по форме тот же смысл, что и система параметрических уравнений связи в ТМОГИ. Однако имеется и существенное отличие. Дело в том, что в классической ТМОГИ в роли неизвестного выступает всегда некоторый конечномерный вектор. Теперь же неизвестной является функция, представляющая собой элемент бесконечномерного гильбертова пространства. Каким бы большим ни было число  $n$ , количество уравнений в (2.99) всегда можно трактовать как меньшее, чем число неизвестных. Поэтому система (2.99) всегда имеет решение, причем решений бесчисленное множество. Обозначим множество всех решений системы (2.99) через  $L^{-1}l$ . Можно доказать, что на этом множестве существует единственная функция наименьшей нормы. Такая функция называется *нормальным решением* системы (2.99) и принимается в качестве решения  $\hat{f}$  глобальной задачи коллокации. Оператор, переводящий исходные данные  $l$  в нормальное решение  $\hat{f}$  системы (2.99), называется *главным псевдообратным оператором* и обозначается  $L^{+}$ . Таким образом,

$$\hat{f} = L^{+}l, \quad (2.100)$$

так что, по определению,

$$\hat{f} := \|\hat{f}\|_H = \inf_{f \in L^{-1}l} \|f\|_H. \quad (2.101)$$

Можно доказать, что нормальное решение отличается от искомой функции  $f$  меньше всего (по метрике пространства  $H$ ) по сравнению с любым другим возможным решением системы (2.99) и в этом смысле является оптимальным. Из других возможных обоснований оптимальности нормального решения приведем без доказательства следующую теорему из монографии [4].

**Теорема 3.** Выберем какое-нибудь положительное число  $C \geq \|\hat{f}\|$ , и на каждом решении  $\tilde{f} \in L^1$ , удовлетворяющем условию  $\|\tilde{f}\| \leq C$ , вычислим значение функционала  $F \in H^*$ . Множество всех полученных чисел образует отрезок на числовой оси. Длина этого отрезка зависит, разумеется, от  $F$  и выбранной константы  $C$ , но серединой отрезка всегда служит значение  $F$  именно на  $\hat{f}$  для  $\forall F \in H^*$ !

Таким образом, нормальное решение (2.100) глобальной задачи коллокации является оптимальным и с точки зрения решения локальной задачи коллокации: для всякого линейного ограниченного на  $H$  функционала  $F$  число  $F(\hat{f})$  является оптимальным значением для  $F(f)$  при данной информации. Можно доказать, что

$$\hat{F}(f) = F(\hat{f}), \quad (2.102)$$

где  $\hat{F}$  определяется условием (2.89);

$\hat{f}$  определяется условием (2.101) (см. ниже формулу (2.124)).

Теперь наметим путь практического определения оператора  $L^+$  и, следовательно, вычисления нормального решения  $\hat{f}$ .

Прежде всего, заметим, что нет необходимости искать  $\hat{f}$  во всем бесконечномерном пространстве  $H$ . Эта функция, как будет показано ниже, всегда принадлежит конечномерному подпространству этого пространства.

**Определение.** Множество всех функций из  $H$ , являющихся решением уравнения (2.99), но без правой части,

$$L\varphi = 0, \quad (2.103)$$

называется ядром векторного функционала  $L$  и обозначается  $\text{Ker}L$ .

Можно доказать, что использование векторного функционала  $L$  приводит к разбиению гильбертова пространства  $H$  на два взаимно ортогональных подпространства

$$H = \text{Ker}L \oplus \text{Ker}^\perp L, \quad (2.104)$$

где  $\text{Ker}L$  – бесконечномерно;

$\text{Ker}^\perp L$  – конечномерно и имеет размерность  $n$ . Здесь  $\text{Ker}^\perp L$  – множество всех функций из  $H$ , каждая из которых ортогональна любой функции из  $\text{Ker} L$ . Это множество называется ортогональным дополнением ядра векторного функционала. Именно ортогональному дополнению ядра векторного функционала  $L$  принадлежит нормальное решение  $\hat{f}$  системы (2.99), то есть

$$\hat{f} \in \text{Ker}^\perp L. \quad (2.105)$$

Доказательство этих утверждений можно найти, например, в работах [2, 3, 4, 6].

Итак, бесполезно искать  $\hat{f}$  во всем бесконечномерном множестве  $H$ . Достаточно ограничиться изучением лишь  $n$ -мерного подпространства  $\text{Ker}^\perp L$ , так как исходная информация не позволяет найти ту составляющую функции  $f$ , которая принадлежит ядру используемого векторного функционала  $L$ . Этот факт определяет и практический путь отыскания  $\hat{f}$ .

Действительно, предположим, что мы умеем определять базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  для  $\text{Ker}^\perp L$ . Тогда можно быть уверенным в существовании таких чисел  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , что

$$\hat{f} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n. \quad (2.106)$$

Так по условию задачи

$$L\hat{f} = l, \quad (2.107)$$

то нужные коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_n$  суть корни следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (L_1, L_1) * a_1 + (L_1, L_2) * a_2 + \dots + (L_1, L_n) * a_n &= (L_1, F)^*, \\ (L_2, L_1) * a_1 + (L_2, L_2) * a_2 + \dots + (L_2, L_n) * a_n &= (L_2, F)^*, \\ &\dots \\ (L_n, L_1) * a_1 + (L_n, L_2) * a_2 + \dots + (L_n, L_n) * a_n &= (L_n, F)^*, \end{aligned} \quad (2.108)$$

или в матричном виде

$$G \begin{matrix} c \\ n,n,1 \end{matrix} = \begin{matrix} l \\ n,1 \end{matrix}, \quad (2.109)$$

где  $G = (g_{ij})$ , а  $g_{ij} = L_i(e_j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ .

Можно доказать, что  $\det G \neq 0$  и потому решение системы (2.109) всегда существует и единственно:

$$\begin{matrix} c \\ n,1 \end{matrix} = G \begin{matrix} -1 \\ n,n \end{matrix} \begin{matrix} l \\ n,1 \end{matrix}, \quad (2.110)$$

Подставляя  $c$  в (2.106), получаем искомое решение глобальной задачи коллокации

$$\hat{f} = \begin{matrix} e \\ 1,n \end{matrix} G \begin{matrix} -1 \\ n,n \end{matrix} \begin{matrix} l \\ n,1 \end{matrix}, \quad (2.111)$$

где  $e$  – строка базисных функций  $e_1, \dots, e_n$ .

Смысл оставшегося неопределённым базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  для  $\text{Ker}^\perp L$  разъясняет следующий факт.

**Теорема 4.** Одним из базисов (неортогональных)  $n$ -мерного подпространства  $\text{Ker}^\perp L \subset H$  служит набор  $n$  линейно-независимых функций  $K(L_1, B)$ ,  $K(L_2, B), \dots, K(L_n, B)$  текущей точки  $B$ , являющихся представителями исходных линейно-независимых функционалов  $L_1, L_2, \dots, L_n$  соответственно.

Доказательство см., например в [3, с. 135]. Здесь мы отметим лишь, что линейная независимость сопряженных функций (представителей) является непосредственным следствием линейной независимости исходных функционалов.

Теперь понятно, что строка  $e_{1,n}$  базисных функций в формулах (2.106)–(2.110) представляет собой строку сопряженных функций (представителей)  $K(L_1, B)$ ,  $K(L_2, B), \dots, K(L_n, B)$ , и потому элементами матрицы  $G$  в (2.109) служат числа

$$g_{ij} = L_i(e_j) = L_i K(L_j, B) = K(L_j, L_i) = K(L_i, L_j). \quad (2.112)$$

А матрица  $\Gamma$  в формулах (2.91)–(2.93), разрешающих (локальную) задачу коллокации № 1, и матрица  $G$  в формулах (2.106)–(2.110), разрешающих (глобальную) задачу коллокации № 2, есть одна и та же нормальная матрица:

$$\underset{n,n}{\Gamma} = \underset{n,n}{G} = \underset{n,n}{K}(L, L). \quad (2.113)$$

Смысл последнего компактного обозначения таков: поскольку

$$\begin{pmatrix} K(L_1, B) \\ \vdots \\ K(L_n, B) \end{pmatrix} = \underset{n,1}{LK}(A, B) = \underset{n,1}{K}(L, B), \quad (2.114)$$

то

$$\underset{n,n}{G} = \underset{n,1}{L}(\underset{1,n}{K^T}(L, B)) = (\underset{n,1}{K}(L, B), \underset{1,n}{K^T}(L, B))_H = \underset{n,n}{K}(L, L), \quad (2.115)$$

где  $\underset{n,1}{K}(L, B)$  представляет собой  $n$ -мерный столбец сопряженных функций  $K(L_i, B)$  текущей точки  $B$ , то есть  $n$ -мерный столбец представителей исходных функционалов  $L_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ;

$\underset{n,n}{K}(L, L)$  – симметричная  $n \times n$  матрица,  $(i, j)$ -позицию, в которой занимают числа  $K(L_i, L_j)$ .

В этих обозначениях столбец  $\underset{n,1}{b}$  из (2.90)–(2.93) записывается следующим образом:

$$\underset{n,1}{b} = \underset{n,1}{L}(\underset{n,1}{FK}(A, B)) = \underset{n,1}{K}(L, F), \quad (2.116)$$

где  $\underset{n,1}{K}(L, F)$  –  $n$ -мерный столбец чисел  $K(L_i, F)$ ;

Итак, если класс функций, участвующий в постановке задач коллокации, представляет собой гильбертово пространство  $H$  с известным воспроизводящим ядром  $\underset{n,1}{K}(A, B)$ , то:

– решение (локальной) задачи коллокации № 1 практически рекомендуется находить по формулам (2.88), (2.90)–(2.93), опираясь на (2.113), (2.116), то есть

$$\underset{1,1}{\hat{F}} = \underset{1,n}{a^T} \cdot \underset{n,1}{L}, \quad (2.117)$$

где столбец коэффициентов  $\underset{1,n}{a}$  – корень системы

$$\underset{n,n}{K}(L, L) \underset{n,1}{a} = \underset{n,1}{K}(L, F), \quad (2.118)$$

таким образом,

$$\hat{F} = K_{1,n}^T(L, F) \cdot K_{n,n}^{-1}(L, L) L_{n,1}, \quad (2.119)$$

$$\hat{F}(f) = K_{1,n}^T(L, F) \cdot K_{n,n}^{-1}(L, L) \cdot l_{n,1}; \quad (2.120)$$

– решение (2.101) глобальной задачи коллокации практически рекомендуется находить по формуле (2.106), опираясь на следствие из теоремы 4, то есть в виде линейной комбинации представителей исходных функционалов,

$$\hat{f}(B) = c_{1,n}^T K_{n,1}(L, B) \Leftrightarrow \hat{f}(\cdot) = c_{1,n}^T K_{n,1}(L, \cdot), \quad (2.121)$$

где столбец коэффициентов  $c$  является решением системы

$$K_{n,n}(L, L) c_{n,1} = l_{n,1}. \quad (2.122)$$

Таким образом,

$$\hat{f}(\cdot) = K_{1,n}^T(L, \cdot) K_{n,n}^{-1}(L, L) l_{n,1}. \quad (2.123)$$

Тем самым получено исчерпывающее решение обеих задач коллокации.

В заключение сделаем несколько полезных замечаний.

1) согласно (2.123) и (2.120)

$$F(\hat{f}) = K_{1,n}^T(L, F) K_{n,n}^{-1}(L, L) l = \hat{F}(f), \quad (2.124)$$

что является доказательством ранее указанного равенства (2.102);

2) окончательные решения (2.120), (2.123) представляют собой линейные комбинации исходных чисел  $l_1, l_2, \dots, l_n$ :

$$\hat{F}(f) = a_{1,n}^T \cdot l_{n,1}, \quad (2.125)$$

$$\hat{f}(\cdot) = a_{1,n}^T(\cdot) l_{n,1}. \quad (2.126)$$

Здесь



$$a = K_{n,n}^{-1}(L, L) \cdot K_{n,1}(L, F), \quad (2.127)$$

$$a(\cdot) = K_{n,n}^{-1}(L, L) \cdot K_{n,1}(L, \cdot),$$

где  $a$  – столбец чисел;

$a(\cdot)$  – столбец функций, составляющих новый базис  $n$ -мерного подпространства  $\text{Ker}^\perp L \subset H$ . При этом

$$Fa(\cdot) = a(F) = a, \quad (2.128)$$

$$L_i a_j(\cdot) = a_j(L_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j. \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (2.129)$$

Важно, что  $a(\cdot)$  и  $a$  зависят только от используемого гильбертова пространства  $H$  (конкретно, от его воспроизводящего ядра) и вида используемых функционалов  $L$  и  $F$  и не зависят от изучаемой функции  $f$  (соотношение (2.129) является следствием того свойства, которое объясняет термин «коллокация» и указано после формулы (2.93)). Напомним, что аналогичная ситуация имеет место в классических задачах интерполяции с помощью полинома Лагранжа (роль  $a_i(\cdot)$  играют «полиномы влияния»  $i$ -го узла), численном интегрировании ( $a_i(\cdot)$  – те же полиномы влияния, а  $a_i(F)$  – весовые коэффициенты) и в других задачах вычислительной математики;

3) согласно (2.123) и (2.99),

$$\hat{f} = K^T(L, \cdot) \cdot K^{-1}(L, L) \cdot f = \Pi f, \quad (2.130)$$

где это легко проверить непосредственно –

$$\Pi \cdot \Pi = \Pi^2 = \Pi. \quad (2.131)$$

Оператор

$$\Pi = K_{1,n}^T(L, \cdot) \cdot K_{n,n}^{-1}(L, L) \cdot L = a_{1,n}(\cdot) L_{n,1}, \quad (2.132)$$

естественно, назвать проектором. Его областью определения служит исходное гильбертово пространство  $H$ , а множество значений, согласно

(2.105), есть ортогональное дополнение к ядру  $\text{Ker}^\perp L$  исходного векторного функционала  $L$  (см. формулу (2.104)). При этом  $\text{Ker}^\perp L \subset H$  и на  $\text{Ker}^\perp L$  проектор  $\Pi$  является тождественным, то есть

$$\forall f \in \text{Ker}^\perp L \subset H, \Pi f = f. \quad (2.133)$$

Проектор  $\Pi$  является основным оператором, разрешающим обе задачи коллокации, поскольку, согласно (2.119), (2.125) и (2.127),

$$\hat{f} = \Pi f, \hat{F} = F \cdot \Pi; \quad (2.134)$$

4) известно, что классические формулы полиномиальной интерполяции и численного интегрирования, имеющие, как уже подчеркивалось в замечании 2, ту же структуру, что и формулы (2.125), (2.126), являются точными на множестве полиномов, удовлетворяющих условиям интерполяции и имеющих степень, не превышающую определенное число, зависящее от количества исходных узлов. При этом исходными данными служат значения дельта-функционалов. Соотношение (2.133) показывает, что решения (2.125), (2.126) задач коллокации, обобщающих в указанном пункте 2.4.1 в смысле задачи интерполяции, являются точными на множестве функций, зависящем от структуры используемого гильбертова пространства  $H$  и от вида исходных функционалов  $L$ . При этом независимо от вида функционала  $F$

$$Ff = \hat{F}f \text{ для } \forall f \in \text{Ker}^\perp L \subset H \text{ и } \forall F \in H^*, \quad (2.135)$$

что непосредственно вытекает из (2.134) и (2.133).

Другими словами,

$$\text{Ker}(F - \hat{F}) = \text{Ker}^\perp L \text{ для } \forall F \in H^*. \quad (2.136)$$

**Оценивание точности.** Приведём основные положения о точности решения задач коллокации, полагая пока для простоты, что ошибки измерения функционалов пренебрегаемо малы.

Начнём с (локальной) задачи коллокации № 1. Цель этой задачи, как отмечалось в пункте 2.4.1., состоит в определении такой аппроксимации  $\hat{F}$  для искомого функционала  $F$ , которая отвечает условию оптимальности (2.89). Такая аппроксимация найдена в виде (2.119). Точность её, естественно, характеризуется расстоянием  $\|F - \hat{F}\|^*$  между  $F$  и  $\hat{F}$  по метрике того пространства, элементами которого являются функционалы

$F$  и  $\hat{F}$ , то есть по метрике гильбертова пространства  $H^*$ . Знание воспроизводящего ядра  $K(\cdot, \cdot)$  для исходного гильбертова пространства  $H$  позволяет сравнительно просто вычислить указанное расстояние.

**Теорема 5.** Мера близости  $\|F - \hat{F}\|^*$  приближенного функционала  $\hat{F}$  относительно соответствующего истинного функционала  $F$  определяется формулой:

$$\begin{aligned} \|F - \hat{F}\|^{*2} &= K_{1,1}(F, F) - K_{1,n}^T(L, F) \cdot K_{n,n}^{-L}(L, L) \cdot K_{n,1}(F, L) = \\ &= K_{1,1}(F, F) - K_{1,n}^T(L, F) \cdot a_{n,1} \cdot \end{aligned} \quad (2.137)$$

Последнее равенство здесь записано в терминах (2.127).

Доказательство можно найти в работе [5].

Подчеркнём, что мера точности (2.137) не зависит от конкретной функции  $f$  из  $H$ , на которой ищется значение функционала  $F$ , а зависит только от структуры используемого гильбертова пространства  $H$  (а именно, от его воспроизводящего ядра), структуры аппроксимирующего  $F$  и заданных  $L$  функционалов.

Величина  $\|F - \hat{F}\|^{*2}$  уменьшается с увеличением  $n$  в силу положительной определенности квадратичной формы, вычитаемой в (2.137) (это является следствием положительной определенности воспроизводящего ядра, см. (2.20)).

Найденный функционал  $\hat{F}$  позволил нам приписать искомому числу  $F(f)$ , то есть значению  $F$  на теперь уже конкретной, но неизвестной функции  $f \in H$ , разумное приближение  $\hat{F}(f)$  в соответствии с формулой (2.120). В общем случае ( $F \neq L_i, i=1,2,\dots,n$ ), очевидно,  $F(f) \neq \hat{F}(f)$  и число

$$|\Delta_{F,f}| = |F(f) - \hat{F}(f)| = |(F - \hat{F})(f)|, \quad (2.138)$$

представляет собой истинную ошибку аппроксимации.

Следующая теорема позволяет вычислить предельную ошибку такой аппроксимации.

**Теорема 6.** Истинная ошибка (2.138) аппроксимации числа  $F(f)$  числом  $\hat{F}(f)$ , полученным по правилу (2.120), удовлетворяет неравенству

$$|\Delta_{F,f}| = |(F - \hat{F})(f)| \leq \|F - \hat{F}\|^* \cdot (\|f\|^2 - \|\hat{f}\|^2)^{1/2}, \quad (2.139)$$

где  $\|F - \hat{F}\|^*$  определяется формулой (2.137);

$\|\hat{f}\|$  – норма нормального решения  $\hat{f}$  глобальной задачи коллокации (№ 2) определяется формулой

$$\|\hat{f}\|^2 = l_{1,n}^T \cdot K_{n,n}^{-1}(L, L) \cdot l_{n,1}; \quad (2.140)$$

где  $\|f\|$  – норма изучаемой функции  $f \in H$  должна быть известной.

При этом, согласно (2.16),

$$|\Delta_{F,f}| \leq \|F - \hat{F}\|^* \cdot \|f - \hat{f}\|. \quad (2.141)$$

На основании соотношений (2.104) и (2.105),

$$\forall f \in H: f = (f - \hat{f}) + \hat{f} \Rightarrow (f - \hat{f}) \perp \hat{f}, \quad (2.142)$$

и потому справедлива обобщенная теорема Пифагора:

$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2 + \|f - \hat{f}\|^2. \quad (2.143)$$

Заметим, что иногда более полезной оказывается иная форма неравенства (2.139):

$$|F(f) - F(\hat{f})| \leq \|f\| \cdot \left( \|F\|^{*2} - \{K(F, L_i)\}^T \{K(L_i, L_j)\}^{-1} \{K(F, L_j)\}^{1/2} \right). \quad (2.144)$$

Следующая теорема позволяет интерпретировать критерий точности аппроксимации типа (2.137) в терминах истинной ошибки типа (2.138).

**Теорема 7.** Квадрат нормы разности искомого функционала  $F$  и его оптимальной оценки  $\hat{F}$ , дающий меру точности оценки  $\hat{F}$  в квадратичной метрике пространства  $H^*$ , совпадает по величине с истинной ошибкой оптимальной аппроксимации значения функционала  $F$  на своём представителе  $f_F$ , то есть

$$\|F - \hat{F}\|^{*2} = FK(\cdot, F) - \hat{F}K(\cdot, F) = F(f_F) - \hat{F}(f_F) = \Delta_{F, f_F}. \quad (2.145)$$

**Теорема 8.** Множество  $\text{Ker}^\perp L$ , представляющее собой  $n$ -мерное подпространство исходного гильбертова пространства  $H$ , имеет воспроизводящее ядро  $K_\Pi(A, B)$  вида

$$K_\Pi(A, B) = K_{1,n}^T(L, A) \cdot K_{n,n}^{-1}(L, L) \cdot K_{n,1}(B, L). \quad (2.146)$$

Понятно, что, если воспроизводящим ядром (2.146) подействовать на функцию  $f$  из  $H$ , то получится проекция  $\Pi f$  этой функции на  $\text{Ker}^\perp L$ , то есть

$$\forall f \in H : (K_\Pi(A, B), f(B))_B = \Pi f(A) = \hat{f}(A). \quad (2.147)$$

Это непосредственно вытекает из соотношений (2.142).

Остаточное воспроизводящее ядро  $K_0(A, B)$  для  $\text{Ker} L$  имеет вид

$$K_0(A, B) = K(A, B) - K_\Pi(A, B). \quad (2.148)$$

Действительно, поскольку, в силу (2.104), применима теорема 2.21.

Сопряженное пространство  $H^*$ , в соответствии с выражением (2.104), также разбивается, подобно (2.142), на два взаимно ортогональные подпространства

$$H^* = (\text{Ker}^\perp L)^* \oplus (\text{Ker} L)^*. \quad (2.149)$$

При этом

$$\hat{F} \in (\text{Ker}^\perp L)^*, \quad (F - \hat{F}) \in (\text{Ker} L)^*, \quad (2.150)$$

и

$$F = \hat{F} \oplus (F - \hat{F}), \quad \hat{F} \perp (F - \hat{F}), \quad (2.151)$$

что уже использовалось при доказательстве теоремы 5. Поэтому имеет место теорема Пифагора:  $\|F\|^{*2} = \|\hat{F}\|^{*2} + \|F - \hat{F}\|^{*2}$ , где

$$\|F\|^{*2} = K(F, F), \quad \|\hat{F}\|^{*2} = K_\Pi(F, F), \quad \|F - \hat{F}\|^{*2} = K_0(F, F). \quad (2.152)$$

Последняя формула представляет собой тоже самое, что и формула (2.137).

Формулы (2.137), (2.139) и (2.140) являются рабочими формулами для оценивания точности решения задач коллокации в наиболее реальной для практики ситуации, когда число  $n$  исходных линейно-независимых функционалов конечно. При этом важно, что, как уже отмечалось выше, величина  $\|F - \hat{F}\|^{*2}$  уменьшается с увеличением  $n$ . Однако, с увеличением  $n$  ухудшается обусловленность подлежащих решению систем уравнений (2.118) и (2.122). Поэтому необходимо обсудить положение дел при  $n \rightarrow \infty$ .

Предварительно введем одно новое понятие.

**Определение.** Пусть  $D$  – некоторая ограниченная область – одномерная, двумерная или трехмерная, а  $\varepsilon$  – как угодно малое положительное число. Множество точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$  области  $D$  называется  $\varepsilon$ -сетью в этой области, если в  $\varepsilon$ -окрестность любой точки  $A \in D$  попадает хотя бы одна точка  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . При этом сами точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются узлами  $\varepsilon$ -сети. Ясно, что  $n$  зависит от  $\varepsilon$  и  $n \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Теорема 9.** Пусть  $H$  – сепарабельное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром  $K(A, B)$ . Элементами  $H$  служат функции  $f(A)$ , определенные в ограниченной области  $D$ . Пусть, далее, точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют  $\varepsilon$ -сеть в  $D$  для заданного положительного числа  $\varepsilon$ ; пусть, далее,  $\delta_1(\cdot), \delta_2(\cdot), \dots, \delta_n(\cdot)$  обозначают дельта-функционалы, соответствующие узлам-сети ( $\delta_i(f) = f(A_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ), а  $\hat{f}_n$  – нормальное решение (2.123) соответствующей глобальной задачи коллокации с  $l_i = f(A_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда, если  $n \rightarrow \infty$  так, что  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то:

а) сопряженные функции  $K_1 = K(A_1, B)$ ,  $K_2 = K(A_2, B), \dots, K_n = K(A_n, B)$ ... текущей точки  $B$ , соответствующие указанным дельта-функционалам, образуют полную систему функций в  $H$ ;

б) нормальное решение  $\hat{f}_n$  сходится по норме пространства  $H$  к истинной функции  $f$ , на которой заданы значения дельта-функционалов, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = f \Leftrightarrow \|f - \hat{f}_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.153)$$

В условиях доказанной теоремы истинная ошибка (2.138) решения задачи коллокации также стремится к нулю, поскольку стремится к нулю правая часть неравенства (2.139).

Интересно отметить, что, если искомый функционал  $F$  есть тоже дельта-функционал, то задачи коллокации в условиях теоремы 9 совпадают с задачами интерполяции (см. начало пункта 2.4.1). Однако решение этих задач классическими полиномиальными методами указанными предельными свойствами не обладают!

Утверждение б) теоремы 9 является, по существу, следствием утверждения а) этой теоремы. Справедливо следующее более общее утверждение.

**Теорема 10.** Для сходимости  $\hat{f}_n \rightarrow f \in H$  по метрике  $H$  необходимо и достаточно, чтобы система функций  $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ , сопряженная к исходным линейно-независимым функционалам  $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$  из  $H^*$  (уже не обязательно дельта-функционалам!), была полна в  $H$ .

Вопросы конкретного выбора воспроизводящего ядра для геодезических целей обсуждаются ниже в пункте 2.4.2.

#### **2.4.2. Обобщение на случай наличия ошибок в исходных измерениях**

Обратимся вновь к уравнениям коллокации (2.99). Будем теперь полагать, что правые части  $l_{n \times 1}$  отягощены ошибками  $\Delta_{n \times 1}$ , которыми уже нельзя пренебрегать и которые характеризуются ковариационной матрицей  $C_{\Delta} = M(\Delta^T \cdot \Delta) = (c_{ij})$ , где центральный момент второго порядка  $c_{ij} = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$ . Здесь  $M$  – символ математического ожидания,  $\sigma_i, \sigma_j$  – средние квадратические значения ошибок  $\Delta_i, \Delta_j$ , а  $\rho_{ij}$  – соответствующий коэффициент корреляции. Так что результаты измерений  $l_i$  имеют структуру

$$\tilde{l}_i = L_i(f) + \Delta_i = l_i + \Delta_i, \quad (2.154)$$

где истинные значения  $L_i \in H^*$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ . Чтобы отметить это, соответствующий вектор измерений будем сверху помечать символом  $\sim$ .

В указанной ситуации неразумно отыскивать оценку  $\hat{f}$  решения  $f$  задачи коллокации среди элементов множества  $L^{-1}\tilde{l}$ , как это рекомендовано

в пункте 2.4.1. В самом деле, искомая функция  $f \in H$ , вследствие ошибок измерений  $\Delta_i$  значений  $L_i(f)$ , не будет удовлетворять, вообще говоря, уравнениям (2.99). Значит,  $fl \in /L^{\sim}$ . В этом пункте описывается подход к решению задач коллокации соединяющий в себе идеи классического метода наименьших квадратов и метода коллокации, рассмотренного в пункте 2.4.1. Этот подход, называемый среднеквадратической коллокацией, алгоритмически мало отличается от уже изложенного, но позволяет ослабить влияние ошибок измерений, осуществляя своего рода фильтрацию.

Начнем с решения глобальной задачи коллокации № 2. Очевидно, решение  $\hat{f}_d(\cdot)$  по-прежнему имеет смысл отыскивать в подпространстве  $\text{Ker}^\perp L \subset H$  (см. (2.104)), поскольку в результатах измерений  $\tilde{l}$  содержится информация лишь о проекции  $f^\perp(\cdot)$  искомой функции  $f(\cdot)$  на  $\text{Ker}^\perp L$ . Проекция же  $f_0 \in \text{Ker} L$  функции  $f$  «не чувствуется» данным набором функционалов  $L_{n \times 1}$ , поскольку, согласно (2.103),

$$L(f_0) = 0. \quad (2.155)$$

Будем полагать, что исследуемая функция  $f$  может быть отнесена к функциональному гильбертову пространству  $H$  с воспроизводящим ядром  $K(A, B)$ . Согласно теореме 4, базисом подпространства  $\text{Ker}^\perp L \subset H$  служит набор  $n$  линейно-независимых функций

$$\{K(L_1, B), K(L_2, B), \dots, K(L_n, B)\} = K_{1 \times n}^T(L, B).$$

Решение  $\hat{f}_d$  глобальной задачи методом средней квадратической коллокации по определению ищется под условием:

$$(\|f\|_H^2 + v^T C_\Delta^{-1} v) \rightarrow \min, \quad f \in \text{Ker}^\perp L. \quad (2.156)$$

где  $C_\Delta$  – ковариационная матрица ошибок измерений;

$v$  – вектор уклонений от результатов измерений  $\tilde{l}$ , соответствующий произвольной функции  $f$ :

$$v = L(f) - \tilde{l}. \quad (2.157)$$



Для решения вариационной задачи (2.156) нам понадобится следующее известное из линейной алгебры правило для подсчёта квадрата нормы элемента евклидова пространства в случае, когда элемент задан своими коэффициентами разложения по базису: если  $K(L, B)$  определяет базис  $1 \times n$

подпространства  $\text{Ker}^\perp L$  и  $f(B) = \sum_{i=1}^n a_i K(L_i, B)$  представляет собой произвольный элемент из  $\text{Ker}^\perp L$ , то

$$\|f\|_H^2 + a^T G a, \quad (2.158)$$

где  $G$ , в соответствии с (2.115), является матрицей Грама с элементами

$$G = (g_{ij}) = (K(L_i, L_j)) = K(L, L). \quad (2.159)$$

Если, в частности, базис ортогонален, то матрица Грама  $G$  оказывается диагональной (и даже единичной, если базисные элементы к тому же нормированы). Формула (2.158) позволяет легко вычислить квадрат нормы элемента из пространства  $\text{Ker}^\perp L$ . При этом вектор уклонений (2.157) может быть найден по формуле:

$$v = Ga - \tilde{l}. \quad (2.160)$$

Чтобы убедиться в этом, подставим в (2.157) вместо  $f$  разложение  $f(\cdot) = \sum_{i=1}^n a_i K(L_i, \cdot)$  функции по базису подпространства  $\text{Ker}^\perp L$  и воспользуемся обозначением (2.112). Получим

$$\begin{aligned} v_i &= L_i \left( \sum_{j=1}^n a_j K(L_j, \cdot) \right) - \tilde{l}_i = \sum_{j=1}^n a_j L_j K(L_j, \cdot) - \tilde{l}_i = \\ &= \sum_{j=1}^n a_j K(L_j, L_i) - \tilde{l}_i. \end{aligned} \quad (2.161).$$

Матричная запись этого и есть равенство (2.160).

Второе слагаемое в левой части записи (2.156) для любой функции  $f$  из  $\text{Ker}^\perp L$ , представленной разложением по базису, можно вычислить по формуле

$$v^T C_{\Delta}^{-1} v = (a^T G - \tilde{l}^T) C_{\Delta}^{-1} (Ga - \tilde{l}). \quad (2.162)$$

**Теорема 11.** *Решение глобальной задачи методом среднеквадратической коллокации представляет собой линейную комбинацию представителей исходных функционалов*

$$\hat{f}(\cdot) = \underset{1 \times n}{K^T(L, \cdot)} \underset{n \times 1}{b}, \quad (2.163)$$

где  $b$  – столбец корней системы нормальных уравнений

$$\underset{n \times n}{(K(L, L) + C_{\Delta})} \underset{n \times 1}{b} = \underset{n \times 1}{\tilde{l}}. \quad (2.164)$$

Поэтому

$$\hat{f}(\cdot) = \underset{1 \times n}{\Lambda^T(\cdot)} \underset{n \times 1}{\tilde{l}}, \quad (2.165)$$

где  $\Lambda(\cdot)$  является решением системы уравнений

$$\underset{n \times n}{(K(L, L) + C_{\Delta})} \underset{n \times 1}{\Lambda(\cdot)} = \underset{n \times 1}{K(\cdot, L)}. \quad (2.166)$$

Заметим, что оценки среднеквадратической коллокации (2.164), в отличие от чистой коллокации (2.123), не воспроизводят исходные измерения, то есть

$$L_i(\hat{f}) - \tilde{l}_i = v_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.167)$$

так как бессмысленно копировать значимые погрешности (сравните с (2.94)).

Точность оценки (2.163) может быть вычислена по формуле

$$\|F - \hat{F}\|^{*2} = K(F, F) - (K(L_i, F))^T \cdot (K(L_i, L_i) + C_{\Delta})^{-1} \cdot (K(F, L_i)), \quad (2.168)$$

которая при  $C_{\Delta} = 0$  совпадает с (2.137).

Если  $C_{\Delta} = 0$ , то и решение глобальной задачи методом среднеквадратической коллокации совпадает с нормальным решением  $\hat{f}$  (2.123) методом «чистой» коллокации.

### 2.4.3. О выборе воспроизводящего ядра

Мы рассмотрели вопросы решения задач коллокации в любом заданном гильбертовом пространстве  $H$  с воспроизводящим ядром. Для геодезических целей гильбертово пространство необходимо выбрать таким образом, чтобы оно непременно содержало в себе возмущающий потенциал Земли, поскольку, как показано в параграфе 2.1., любые геодезические измерения представляют собой линейные или линеаризованные функционалы на потенциале.

При решении глобальных задач физической геодезии целесообразно пользоваться гильбертовым пространством  $H$  функций, регулярных на бесконечности и гармонических во внешнем пространстве относительно сферы Бьерхаммара (Bjerhammar, [13]), целиком расположенной в теле Земли. Известно, что реальный потенциал  $T$  не принадлежит такому пространству, но, согласно известной теореме Рунге-Крарупа [3, с. 56], [2, с. 55], «множество потенциалов, регулярных вне сферы Бьерхаммара, составляет плотное подмножество множества потенциалов, регулярных вне Земли». Поэтому  $T$  может быть аппроксимирован функциями из  $H$  как угодно точно. Этому пространству можно назначить воспроизводящее ядро, поскольку условия для этого, согласно теореме 1, достаточно необременительны и, практически, всегда выполняются. Используя указанные в параграфе 2.2. шаровые функции как ортогональный базис этого пространства, и, опираясь на теоремы 2.19 и 2.36, можно получить воспроизводящее ядро в виде

$$K(P, P') = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} b_n \left( \frac{R^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(v), \quad v = \cos \psi, \quad (2.169)$$

где  $P_n(\cdot)$  – полиномы Лежандра степени  $n$ ;

$\psi$  – сферическое расстояние между точками  $P$  и  $P'$ ;

$r$  и  $r'$  – расстояния от начала координат до этих точек, а неотрицательные коэффициенты  $b_n$  отражают различные возможности выбора воспроизводящего ядра.

Знание воспроизводящего ядра гильбертова пространства  $H$  позволяет легко получить воспроизводящее ядро какого-нибудь другого гильбертова пространства, которому принадлежит какая-нибудь другая трансформанта гравитационного поля. Для этого достаточно подействовать соответствующим функционалом на воспроизводящее ядро дважды: один раз как на функцию первой точки, а второй раз – как на функцию второй

точки. Например, для аномалии силы тяжести, которая, как известно, в сферической аппроксимации определяется функционалом  $\tilde{\Delta}g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T + \Delta_i$ , имеем

$$K_{\Delta g}(P, P') = \sum_{i=2}^{\infty} \sigma_i^2 \frac{(i-1)^2}{rr'} \left( \frac{R^2}{rr'} \right)^{i+1} P_i(\cos \psi). \quad (2.170)$$

#### 2.4.4. Изоморфизм между гильбертовым пространством и случайным полем

В принципе, можно работать с любым воспроизводящим ядром. По форме ничего не меняется: и критерии оптимальности (2.90), и характеристики точности (2.137) представляют собой нормы избранного пространства, и задача решается под естественным условием минимизации этих норм. Однако разные гильбертовы пространства придают разный смысл норме и, следовательно, разный смысл мере аппроксимации. *Поэтому желательно так выбрать гильбертово пространство, чтобы упомянутые критерии совпадали (или почти совпадали) с вероятностно-статистическим понятием среднеквадратических ошибок.*

Оказывается, что это можно сделать (по крайней мере, приближённо), благодаря существующему изоморфизму между функциями, определенными на  $D$  и заполняющими гильбертово пространство  $H$  с в. я.  $K(P, P')$ , и реализациями случайного поля  $\xi(\omega, D)$ , определенными при каждом элементарном исходе  $\omega$  на этом же множестве  $D$ . Воспроизводящее ядро  $K(P, P')$  при этом играет роль автоковариационной функции данного поля.

В самом деле, предположим, что в (2.169)

$$b_n = \frac{4\pi R^2}{2n+1} \sigma_n^2, \quad (2.171)$$

где  $\sigma_n^2$  – степенные дисперсии возмущающего потенциала, то есть среднеинтегральные значения квадратов сферических функций степени  $n$  на сфере с радиусом  $R$ , равным среднему радиусу Земли,

$$\sigma_n^2 = \left( \frac{GM}{R} \right)^2 \sum_{m=-l}^l a_{nm}^2. \quad (2.172)$$

Это означает, что в качестве воспроизводящего ядра взята автоковариационная функция  $K(P, P')$  возмущающего потенциала на сфере  $r = r' = R$ . Тогда скалярное произведение в  $H^*$  двух функционалов  $L_1$  и  $L_2$  на искомом потенциале приобретает смысл ковариации  $\text{cov}(l_1, l_2) = M(l_1, l_2)$  между значениями  $l_1$  и  $l_2$  этих функционалов на потенциале, то есть

$$(L_1, L_2)^* = K(L_1, L_2) = \text{cov}(l_1, l_2) = M(l_1 \cdot l_2), \quad (2.173)$$

где любой результат  $\tilde{l}_i$  измерений (после удаления нормальной составляющей) трактуется как значение  $l_i$  некоторого ограниченного линейного (или линеаризованного) функционала  $L_i$  на возмущающем потенциале  $T \in H$  плюс неизбежная случайная ошибка  $\Delta_i$ , то есть

$$\tilde{l}_i = l_i + \Delta_i = L_i(T) + \Delta_i, \quad (2.174)$$

где  $i = 1, 2, \dots$  – номер измерения;

$M$  – символ математического ожидания.

Поэтому, в частности,

$$\|L_i\|^{*2} = K(L_i, L_i) = M(l_i^2) = \sigma^2(l_i), \quad (2.175)$$

где  $\sigma^2(l_i)$  – дисперсия величины  $l_i$ .

Следовательно, мера точности  $\|F - \hat{F}\|^{*2}$ , определяемая по формуле (2.137), представляет собой дисперсию ошибки  $F(f) - \hat{F}(f)$ , а величина  $\|F - \hat{F}\|^*$  есть среднеквадратическое значение этой ошибки. Выражения вида  $K(L_i, F_j)$  в (2.118) получают смысл взаимной ковариации между соответствующими значениями, а (2.170) автоковариационная функция аномалии силы тяжести.

В результате описанные методы решения задач коллокации совпадают с известными в ковариационной теории случайных функций методами оптимального линейного прогноза.

Так, любой функционал на возмущающем потенциале в случае «чистой» коллокации выглядит, согласно (2.123), следующим образом:

$$\hat{F}_j(T) = (K(L, F_j))^T \cdot (K(L_i, L_i))^{-1} \cdot l. \quad (2.176)$$

Другими словами, надо решить систему  $n$  нормальных уравнений

$$(K(L_i, L_j))_{n,n} \cdot b_{n,1} = l_{n,1}, \quad (2.177)$$

и тогда оптимальная оценка любого функционала на возмущающем потенциале определяется следующей простой формулой

$$\hat{F}_j(T) = \sum_{i=1}^n b_i \cdot K(L_i, F_j). \quad (2.178)$$

В частности, оценку самого возмущающего потенциала в произвольной точке  $P'$  можно представить в виде линейной комбинации или представителей исходных функционалов, или самих исходных функционалов, то есть

$$\hat{T}(P') = \sum_{i=1}^n b_i \cdot K(L_i, P') = \sum_{i=1}^n \Lambda_i(P') \cdot l_i. \quad (2.179)$$

Соотношения (2.178), (2.179) остаются, согласно теореме 11, справедливыми и в случае среднеквадратической коллокации. Надо только для определения решать систему нормальных уравнений или относительно чисел  $b$ ,

$$(K(L, L) + C_{\Delta})_{n \times n} \cdot b_{n \times 1} = \tilde{l}_{n \times 1}, \quad (2.180)$$

или относительно функций  $\Lambda(P')$

$$(K(L, L) + C_{\Delta})_{n \times n} \cdot \Lambda_{n \times 1}(P') = K_{n \times 1}(P', L). \quad (2.180)$$

При этом элементы  $(K(L_i, L_j))$  матрицы  $K(L, L)$  можно трактовать как элементы автоковариационной матрицы вектора измерений  $l$ , число  $K(L_i, F_j)$  – как взаимную ковариацию  $\text{cov}(L_i(T), F_j(T))$  между  $i$ -тым результатом измерений и  $j$ -той искомой величиной, а  $K(L_i, P')$  – как взаимную ковариацию между  $i$ -тым результатом измерений и значением потенциала в точке  $P'$ .

Остаточное воспроизводящее ядро типа (2.148), то есть

$$K_0(P, P') = K(P, P') - (K(L, P))^T \cdot (K(L, L))^{-1} \cdot K(P', L), \quad (2.182)$$

представляет собой автоковариационную функцию потенциала, остаточного после того, как оценка (2.179) отнесена к референц-потенциалу.

Строго вычислить ковариационную функцию по формуле (2.169) практически, конечно, невозможно, поскольку необходимые для этого степенные дисперсии известны лишь до конечной степени  $N$ , причём приближённо. Остальные степенные дисперсии приходится моделировать так, чтобы полученный ряд оказался сходящимся. Одной из простейших оценок соответствующей асимптотики является эмпирическое «правило Каулы»

$$\sigma_n^2 \sim 1,6 \frac{10^{-10}}{n^3}, \quad (2.183)$$

где  $\sigma_i^2$  – модельные степенные дисперсии.

На спутниковых высотах затухание с ростом степени усиливается за счёт появления дополнительного коэффициента  $(R/r)^{n+1}$ .

Ковариационная функция глобального возмущающего потенциала, соответствующая одной из наиболее удачных моделей, получена в работе [38] и записывается в следующем виде:

$$K_T(\psi, r, r') = a \sum_{n=2}^N d_n(T) \left( \frac{R^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{A}{(n-1)(n-2)(n+b)} \left( \frac{R_B^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi). \quad (2.184)$$

где  $\psi$  – сферическое расстояние между двумя точками,  $\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda')$ ;

$r$  и  $r'$  – расстояние от начала координат до этих точек;

$d_n(T)$  – степенные дисперсии погрешностей низкочастотной части потенциала до  $N$  включительно;

$R$  – средний радиус Земли,  $R_B < R$  – радиус сферы Бьерхаммара;

$P_n(\cos \psi)$  – полиномы Лежандра  $n$ -ой степени.

Число  $b$  обычно выбирается равным 4, но иногда, чтобы максимально приблизиться к низким степенным дисперсиям, достигает 24. Натуральное

число  $N$  должно быть названо пользователем, а константы  $A$  и  $R_B$  являются параметрами ковариационной функции и подлежат определению по результатам корреляционного анализа эмпирических данных.

Если степенные дисперсии  $d_i$  неизвестны, то перед первым слагаемым в (2.184) ставится положительный множитель пропорциональности  $a$ , полагая, что спектр шумов пропорционален спектру реального поля. При этом  $a$  трактуется как дополнительный параметр, подлежащий определению по результатам корреляционного анализа эмпирических данных. Параметры определяются последовательными приближениями методом наименьших квадратов.

Соответствующую автоковариационную функцию аномалии силы тяжести можно, согласно (2.170), записать в виде

$$K_{\Delta g}(\psi, r, r') = a \sum_{i=2}^N d_i(\Delta g) \left( \frac{R^2}{rr'} \right)^{i+1} P_i(\cos \psi) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{D(\Delta g)(n-1)}{(n-2)(n+b)} \left( \frac{R_B^2}{rr'} \right)^{i+1} P_i(\cos \psi). \quad (2.185)$$

Если константа  $A$  в (2.184) имеет размерность  $\left( \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \right)^2$ , а  $D(\Delta g)$  в (2.185) имеет размерность  $\text{мГал}^2$ , то на нулевой высоте

$$D(\Delta g) \approx \frac{A}{63,71^2}. \quad (2.186)$$

При работе в локальных районах широко используется *статистическая коллокация*, когда воспроизводящее ядро полностью заменяется (эмпирически полученной и аналитически аппроксимированной) ковариационной функцией аномалии силы тяжести, и вся обработка разнородных измерений базируется на принципе оптимального статистического прогноза в свете классической теории Винера-Колмогорова. Необходимая процедура описана во многих статьях и учебных пособиях, см., например, [2, 39], и мы не будем на этом останавливаться. Отметим только, что при ковариационном анализе гравитационного поля, как правило, предполагается изотропность поля, то есть предполагается, что ковариация для двух точек исследуемой области зависит только от расстояния между этими точками, что, конечно, имеет место далеко не всегда. В работах [40, 41], а



затем и в [42, 43] рассмотрены методы и использование ковариационного анализа нестационарных полей.

### **2.4.5. Заключительные замечания**

Заключительные замечания:

- по целям и задачам методы разномасштабного моделирования (РММ) и среднеквадратической коллокации (СКвК) имеют много общего, поскольку в конечном счете обе методики стремятся адекватно оценить значения определённых функционалов на геопотенциале и замоделировать (аппроксимировать) определённые трансформанты ГПЗ. Более того, если в методе РММ коэффициенты масштабирующих функций (2.47) назначать согласно (2.53), то масштабирующую функцию, естественно, трактовать как ковариационную функцию ГПЗ, и РММ и статистическая трактовка коллокации просто совпадают;

- выбор в методе РММ масштабирующих коэффициентов  $b_n$  по формуле (2.53) полностью соответствует по идее выбору воспроизводящего ядра в методе СКвК, совпадающего с ковариационной функцией геопотенциала;

- как разномасштабное моделирование, так и среднеквадратическая коллокация основаны на линейной аппроксимации с использованием воспроизводящего ядра (см. (2.46) и (2.169), которое связывает искомые параметры с исходными данными. При этом исходные данные могут охватывать результаты измерений различного типа (гравиметрия, топография и др.). Однако в РММ может применяться уравнение (2.63) отдельно для каждого типа исходных данных (см. (2.56)), в то время как в СКвК все источники ковариационной матрицы должны рассматриваться в одном и том же уравнении (2.166), что приводит к необходимости решать слишком большие системы уравнений. В подобных ситуациях рекомендуется пользоваться методом конечных элементов [36, 44] или такими специальными численными методами коллокации, как последовательная коллокация и быстрая коллокация [5, 33, 45, 46];

- и в том и другом варианте, оценивание нужных параметров выполняется методом наименьших квадратов, но в методе СКвК точность окончательных результатов оценивается непосредственно (2.175), а в методе РММ сначала оценивается точность вспомогательных параметров (2.70);

- СКвК, как правило, требует предварительной глобальной редукции ГПЗ, то есть удаления его трендовой низкочастотной части. Но, в конечном счёте, удалённая часть поля должна быть восстановлена, что может служить источником дополнительных погрешностей. В методе РММ такая процедура используется в гораздо меньшей степени;

– в численных методах широко используется идея интерполяции и аппроксимации с помощью гладких функций – сплайнов, см., например, [21, 47]. Формально, *сплайном  $k$ -го порядка* называется функция, у которой минимальна норма  $k$ -ой производной. Например, при  $k = 3$  функция имеет минимальную кривизну и называется кубическим сплайном. Отметим, что обеспечение гладкости интерполяции путём минимизации норм производных является сутью не только сферических сплайнов, но и изложенной выше теории коллокации. Достаточно вспомнить, что оптимальное решение (2.123) задачи коллокации имеет, согласно (2.101), наименьшую норму в соболевском пространстве по сравнению с любыми другими возможными вариантами. Величину такой нормы можно интерпретировать как определённую меру гладкости и дифференцируемости сигнала. Поэтому известное свойство, например, упомянутых кубических сплайнов определять интерполяционную функцию наименьшей кривизны, по существу, справедливо и в гораздо более общих задачах коллокации. Если в методе коллокации отказаться от попыток приблизить используемое воспроизводящее ядро к ковариационной функции изучаемого сигнала (обычно в виде возмущающего геопотенциала), то мы получим то, что принято называть *сферическими сплайнами*. Незначительные различия – только в терминологии;

– в геостатистике известны некоторые разновидности метода коллокации. Наиболее известным является так называемый кригинг-метод (Kriging), названный в честь его автора – южно-африканского горного инженера Danie Krige. Основное отличие от статистической коллокации состоит в отсутствии свободного члена в исходной постановке линейного прогноза. Это приводит к необходимости пользоваться разными формами кригинга (простой, стандартный, универсальный) в зависимости от имеющейся информации о среднем значении исследуемого поля, и при отсутствии такой информации может давать смещённые результаты. Если исследуемое поле центрировано, то кригинг-метод и коллокация дают идентичные результаты [48, с. 162].

## 2.5. Вариационный метод регуляризации

Обратимся вновь к уравнениям коллокации (2.174) и будем по-прежнему полагать, что правые части  $l$   $n \times 1$  отягощены ошибками  $\Delta$   $n \times 1$ , которыми нельзя пренебрегать и которые характеризуются ковариационной матрицей  $C_{\Delta} = M(\Delta^T \cdot \Delta) = (c_{ij})$ , где центральный момент второго порядка  $c_{ij} = M(\sigma_i \cdot \sigma_j)$ . Здесь  $M$  – символ математического ожидания,  $\sigma_i, \sigma_j$  –

средние квадратические значения ошибок  $\Delta_i, \Delta_j$ , а  $\kappa_{ij}$  – соответствующий коэффициент корреляции. Предположим, для простоты, что все исходные измерения  $\tilde{l}$  имеют одинаковую физическую размерность, например, мГал, а систематические ошибки отсутствуют  $M(\Delta_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В таком случае ковариационную матрицу ошибок удобно представлять в виде  $C_\Delta = d \cdot Q$ , где  $d$  – обычно неизвестная дисперсия единицы веса, а элементы  $q_{ij}$  матрицы «обратных весов»  $Q$  предполагаются известными и имеют вид

$$q_{ij} = \frac{\kappa_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j}{d} = \kappa_{ij} \cdot \frac{1}{\sqrt{w_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{w_j}},$$

где  $w_i = \frac{d}{\sigma_i^2}$  – вес погрешности  $\Delta_i$ . Соответствующий вектор измерений будем обозначать  $\tilde{l}_d$ .

Как следует из теории чистой коллокации, при неограниченном увеличении равномерно распределённых измерений оценка потенциала  $\hat{T}$ , вычисленная по формуле (2.179), сходится по норме  $H$  к искомому потенциалу  $T \in H$  в случае безошибочности исходных данных  $\tilde{l}$  (см. теорему 9). Это является одной из веских причин принимать  $\hat{T}$  в качестве решения глобальной задачи коллокации. Существуют, однако, некоторые реальные обстоятельства, способные, если не принять необходимые меры, поставить под сомнение свойство (2.153) оценки  $\hat{T}$ . Дело в том, что обусловленность матрицы  $K(L, L)$  с ростом  $n$  непременно ухудшается. Это означает, что непренебрегаемые ошибки измерений  $\Delta$  и неизбежные ошибки округления при счете могут значительно исказить корни уравнений (2.164), что, в свою очередь, приведет к ошибкам в  $\hat{T}$ , возрастающим с увеличением  $n$ . Кроме того, влияние ошибок измерений, выполненных на спутниковых высотах, сильно возрастает при опускании к поверхности Земли.

Сказанное заставляет модифицировать среднеквадратическую коллокацию и стараться отыскивать такую оценку возмущающего потенциала (будем обозначать её  $\hat{T}_\alpha$ ), которая, во-первых, гарантировала бы сходимость (2.153), и, во-вторых, позволяла согласовывать вычисленное решение  $\hat{T}_\alpha$  с ошибками исходных данных  $\Delta$ : чем меньше ошибки  $\Delta$ , тем ближе  $\hat{T}_\alpha$  должна быть к оценке  $\hat{T}$ , полученной в условиях полного отсутствия шумов. Такие оценки называются регуляризованными.

Согласно [30], регуляризованным решением уравнений (2.174) называется такая функция  $\hat{T}_\alpha \in H$ , зависящая от  $\tilde{l}_d$ , которая удовлетворяет условию:

$$\left\| \hat{T}_\alpha - \hat{T} \right\|_H \xrightarrow{d \rightarrow 0} 0, \quad (2.187)$$

где  $\hat{T}$  – решение глобальной задачи коллокации, полученное по безошибочным исходным данным  $l_0$ , состоящим из  $n$  чисел.

Таким образом, если найти метод получения регуляризованного решения, то, в силу (2.187) и (2.153),  $\hat{T}_\alpha$  будет сходиться по норме  $H$  при  $d \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow \infty$  к истинному возмущающему потенциалу  $T$ , то есть

$$\lim_{d \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \left\| \hat{T}_\alpha - T \right\|_H = 0.$$

Предположим, что нам известна дисперсия единицы веса  $d = \sigma^2$  ошибок  $\Delta_i$ . Тогда один из наиболее известных методов регуляризации состоит в выборе в качестве решения глобальной задачи коллокации такой функции  $\hat{T}_\alpha \in \text{Ker } \perp L$ , которая согласуется с точностью исходных данных  $d$  следующим образом:

$$\frac{(\hat{l}_d - L(\hat{T}_\alpha))^T \cdot W \cdot (\hat{l}_d - L(\hat{T}_\alpha))}{n} \equiv \frac{V_\alpha^T \cdot W \cdot V_\alpha}{n} = d, \quad (2.188)$$

где  $W = Q^{-1}$  – матрица весов измерений;

$V_\alpha$  – столбец уклонений  $v_{i\alpha} = \tilde{l}_i - L_i(\hat{T}_\alpha)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Другими словами, отыскание нужной оценки  $\hat{T}_\alpha$  сводится к решению классической вариационной задачи на условный минимум:

$$\begin{aligned} \|T\|_H^2 &= b^T \cdot K(L, L) \cdot b \Rightarrow \min \\ \frac{(\hat{l}_d - L(T_\alpha))^T \cdot W \cdot (\hat{l}_d - L(T_\alpha))}{n} &\equiv \frac{V_\alpha^T \cdot W \cdot V_\alpha}{n} = d. \end{aligned} \quad (2.189)$$

Решение имеет стандартную структуру (2.179):

$$\hat{T}_\alpha(P') = \sum_{i=1}^n K(L_i, P') \cdot b_{i\alpha}, \quad (2.190)$$

где  $b_{i\alpha}$  являются корнями системы  $n$  линейных уравнений

$$(K(L, L) + \alpha \cdot Q) \cdot b = \tilde{l}_d. \quad (2.191)$$

$n, n \qquad n, n \quad n, 1 \quad n, 1$

Здесь положительное безразмерное число  $\alpha$  называется параметром регуляризации. Его следует подобрать так, чтобы соответствующий возмущающий потенциал (2.190) обеспечивал выполнение равенства (2.188), хотя бы приближённо.

Левая часть равенства (2.188) определяет меру близости  $\alpha$  между измеренными и вычисленными значениями исходных функционалов в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$  и называется невязкой. Невязка представляет собой некоторую функцию  $\rho(\alpha)$  параметра регуляризации:

$$\rho(\alpha) = \left[ \frac{V_\alpha^T \cdot W \cdot V_\alpha}{n} \right]^{1/2} = \left\| \hat{l}_d - L(T_\alpha) \right\|_{E_n}. \quad (2.192)$$

В работе [29] доказывается, что невязка на промежутке  $(0, \infty)$  монотонно возрастает от 0 до  $\left\| \tilde{l}_d \right\|_{E_n}$ . При этом выполняется естественное условие  $\sqrt{d} < \left\| \tilde{l}_d \right\|_{E_n}$ , означающее, что результаты измерений  $\tilde{l}_i$  содержат полезную информацию  $l_i = L_i(T)$ , то существует единственное значение  $\alpha > 0$ , при котором выполняется условие (2.188).

Оптимальное значение любого функционала  $F \in H^*$  на возмущающем потенциале находится, как обычно, действием этого функционала на оптимальную оценку  $\hat{T}_\alpha$ .

Что касается практической реализации описанного вариационного метода регуляризации по невязке, то мы отметим здесь только следующий простейший итерационный подход.

Зададимся какой-нибудь убывающей последовательностью положительных чисел  $\alpha_m$ , например,  $\alpha_m = \text{const}/m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , и будем последовательно решать задачу (2.189) для каждого  $m$  до тех пор, пока не выполнится с нужной точностью условие (2.188). Подробности вариационного метода регуляризации по невязке и другие способы выбора параметра ре-

гуляризации, описаны в литературе, см., например, [30]. Отметим только, что в простейшем случае можно просто полагать  $\alpha = d$ , что приводит к описанной в пункте 2.4.2. среднеквадратической коллокации. Подробности вариационного метода регуляризации и примеры геодезических приложений можно найти в работах [5, 29, 49].

В заключение этого параграфа отметим, что в стандартных задачах обработки измерений об ошибках исходных данных обычно достаточно знать (с той или иной полнотой) только матрицу «обратных весов»  $Q = W^{-1}$ , а дисперсия единицы веса  $d$ , как правило, заранее неизвестна и подлежит оценке в процессе самой обработки по формуле

$$\hat{d} = \frac{(\hat{l}_d - L(\hat{T}_\alpha))^T \cdot W \cdot (\hat{l}_d - L(\hat{T}_\alpha))}{n} \equiv \frac{V_\alpha^T \cdot W \cdot V_\alpha}{n}. \quad (2.193)$$

Выполнение же регуляризации по невязке требует дополнительную информацию о шумах – дисперсия единицы веса должна быть известна заранее.

## 2.6. Оптимизация основных операторов физической геодезии

### 2.6.1. Вероятностная оптимизация интегральных операторов

Основные задачи физической геодезии можно представить в операторном виде как  $Ag = f$ , где  $A$  – линейный интегральный оператор, действующий по единичной сфере  $\omega$ , а  $g$  и  $f$  обозначают, соответственно, вход и выход оператора [50].

Примерами могут служить:

–  $S_t(\psi)$  – оператор Стокса, преобразующий аномалию силы тяжести  $\Delta g = g$  в высоты геоида  $\zeta = f$

$$\zeta(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\omega} S_t(\psi) \Delta g(P') d\omega = \frac{R}{4\pi\gamma} S_t(\psi) * \Delta g, \quad (2.194)$$

где  $R$  – средний радиус Земли;

\* – обозначение свёртки.

$$\begin{aligned}
S_t(\psi) &= \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \cdot \ln \left[ \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right] = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi)
\end{aligned} \tag{2.195}$$

представляет собой известное ядро Стокса. Здесь  $\psi$  – сферическое расстояние между точкой вычисления и текущей точкой интегрирования;

–  $K(\psi)$  – оператор Хотина-Коха, преобразующий возмущение силы тяжести  $\delta g = g$  в высоты геоида  $\zeta = f$

$$\zeta(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\omega} K(\psi) \delta g(P') d\omega = \frac{R}{4\pi\gamma} K(\psi) * \delta g, \tag{2.196}$$

$$K(\psi) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - \ln \left( 1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi); \tag{2.197}$$

–  $\frac{dS(\psi)}{d(\psi)}$  – оператор Венинг- Мейнеса, преобразующий аномалию силы тяжести  $\Delta g = g$  в составляющие уклонения отвеса  $\xi = f$  или  $\eta = f$  :

$$\xi = \frac{1}{4\pi\gamma_0} \int_{\omega} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d(\psi)} \cos \alpha d\omega, \quad \eta = \frac{1}{4\pi\gamma_0} \int_{\omega} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d(\psi)} \sin \alpha d\omega, \tag{2.198}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dS(\psi)}{d(\psi)} &= -\frac{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} + 8 \sin \psi - 6 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - 3 \frac{1 - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}{\sin \psi} + \\
&+ 3 \sin \psi \ln \left[ \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) \right].
\end{aligned} \tag{2.199}$$

Практически, на вход преобразования поступает функция  $\tilde{g} = g + \Delta$ , где  $\Delta$  – неизбежные помехи. Естественно, возникает вопрос о влиянии

помех на конечный результат – выход  $f$  и о возможности оптимизировать оператор  $A$  в зависимости от статистических свойств входа  $\tilde{g}$ .

Решение подобных задач занимает видное место в современной теории случайных функций. В общем случае оператор  $\tilde{A}$  называется оптимальным, если математическое ожидание аппроксимации выхода  $f$  функцией  $\tilde{A}\tilde{g}$  совпадает с требуемой функцией  $f$ , а дисперсия этой аппроксимации минимальна по сравнению с любыми другими линейными интегральными операторами, действующими на  $\tilde{g}$ . Практически, такой оператор ищется по-прежнему в виде интегрального преобразования по сфере  $\Omega$ , но ядро должно быть модернизировано. Реализацию общего алгоритма подобной оптимизации на примере интегрального преобразования Стокса можно найти, например, в работе [51].

В результате оптимизированное ядро получено в виде

$$\tilde{S}_t(P, P') = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \sum_{l=0}^{2n} \frac{D_{nl}}{D_{nl} + d_{nl}} \cdot Y_{nl}(P) \cdot Y_{nl}(P'), \quad (2.200)$$

где сферические функции  $Y_{nl}(P) = P_n^{(k)}(\cos \theta) \cos k\lambda$  при  $l \leq n$ , где  $k = l$ , но  $Y_{nl}(P) = P_n^{(k)}(\cos \theta) \sin k\lambda$  при  $l > n$ , где  $k = l - n$ .

Рассмотрим частные случаи:

1) пусть функции  $\Delta g(P)$  и  $\Delta(P)$  изотропны. Тогда, как показано в работе [52],  $D_{nl} = \frac{D_n}{2n+1}$  и  $d_{nl} = \frac{d_n}{2n+1}$ , где  $D_n$  и  $d_n$  – соответствующие степенные дисперсии. Поэтому, на основании теоремы сложения сферических функций

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t(P, P') &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \cdot \frac{D_n}{D_n + d_n} \sum_{l=0}^{2n} Y_{nl}(P) \cdot Y_{nl}(P') = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{D_n}{D_n + d_n} \cdot \frac{2n+1}{n-1} \cdot P_n(\cos \psi) = \tilde{S}_t(\psi); \end{aligned} \quad (2.201)$$

2) если возмущающие помехи отсутствуют, то есть  $\Delta(P) \equiv 0$ , то  $d_{nl} \equiv 0$  и формула (2.201) приводит к классическому ядру Стокса (2.195).

Итак, знание спектральных характеристик гравитационного поля и его помех позволяет модифицировать формулу Стокса. Смысл модификации состоит в том, что непосредственно в процессе интегрирования удаётся отфильтровывать неизбежные помехи исходной функции аномалии силы



тяжести. В случае отсутствия помех выведенные обобщения (2.200) совпадают с классическим преобразованием Стокса (2.195).

Аналогично могут быть поставлены и решены подобные задачи применительно к другим операторным преобразованиям физической геодезии.

### **2.6.2. Устойчивое суммирование рядов по шаровым функциям**

Особый интерес, в частности, представляет распространённая задача оптимального суммирования возмущённых рядов по сферическим функциям (2.30) при моделировании различных трансформант ГПЗ.

Рассмотрим среднюю квадратичную аппроксимацию гравитационного поля конечным рядом (2.30). Если

$$\bar{a}_{nl} = a_{nl} + \Delta a_{nl}, \quad (2.202)$$

то погрешность аппроксимации в точке  $P$  определяется выражением

$$\varepsilon_N(P) = - \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^{2n} \Delta a_{nl} Y_{nl}(P) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{2n} a_{nl} Y_{nl}(P), \quad (2.203)$$

где первое слагаемое зависит от точности используемых гармонических коэффициентов (ошибка определения), а второе слагаемое обусловлено необходимостью пользоваться рядом конечной длины (ошибка усечения).

Средняя дисперсия аппроксимации по всей сфере

$$\bar{\varepsilon}_N^2 = M \left\{ \varepsilon_N^2(P) \right\} = \sum_{n=0}^N d_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} D_n = D - \sum_{n=0}^N (D_n - d_n), \quad (2.204)$$

где  $M$  – оператор математического ожидания;

$d_n$  – степенная дисперсия возмущающей функции;

$D_n$  – степенная дисперсия изучаемой функции;

$D$  – полная дисперсия изучаемой функции  $f(P)$ .

Таким образом, оптимальное значение длины ряда  $N$  зависит не только от спектра возмущающей функции, но и от степени гладкости аппроксимируемой функции. При увеличении  $N$  на единицу  $\varepsilon_N^2$  изменяется на величину  $d_{N+1} - D_{N+1}$ , что, разумеется, выгодно лишь при условии

$$d_{N+1} < D_{N+1}. \quad (2.205)$$

Эту ситуацию можно улучшить тем же методом оптимизации оператора, как это описано выше. Для этого под  $A$  будем понимать оператор, на вход которого подаётся последовательность коэффициентов  $a_{nl}$ , а выходом служит искомая функция  $f(P)$ . Поскольку практически на вход преобразования подаются возмущенные коэффициенты  $\bar{a}_{nl}$ , то есть основание заменить  $A$  другим оператором  $\tilde{A}$  оптимальным с точки зрения минимума дисперсии  $\varepsilon^2$  аппроксимации. Все выкладки, приведенные в работе [51], остаются в силе. Надо лишь принять передаточную функцию  $\equiv 1$ . В результате получим следующую формулу суммирования аппроксимирующего ряда:

$$f(M) \approx \tilde{f}(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2n} \tilde{a}_{nl} Y_{nl}(M), \quad (2.206)$$

где  $\tilde{a}_{nl}$  – модифицированные коэффициенты, определяемые по формуле

$$\tilde{a}_{nl} = \delta_{nl} \bar{a}_{nl}, \quad (2.207)$$

где  $\delta_{nl}$  – вспомогательный множитель, равный

$$\delta_{nl} = \frac{D_{nl}}{D_{nl} + d_{nl}}; \quad 0 < \delta_{nl} \leq 1. \quad (2.208)$$

Дисперсии  $D_{nl}$  и  $d_{nl}$  связаны с соответствующими степенными дисперсиями  $D_n$  и  $d_n$  известными соотношениями

$$D_n = \sum_{l=0}^{2n} D_{nl}, \quad d_n = \sum_{l=0}^{2n} d_{nl}. \quad (2.209)$$

В случае изотропности ГПЗ индекс  $l$  в двух последних формулах следует отбросить.

Если в сумме (2.206) ограничиться слагаемыми со сферическими функциями первых  $N$  степеней, то вместо погрешности (2.204), будем иметь погрешность аппроксимации

$$\bar{\varepsilon}_N^2 = M \left\{ \varepsilon_N^2(P) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n - 2 \sum_{n=0}^N \delta_n D_n + \sum_{n=0}^N \delta_n^2 (D_n + d_n) = D - \sum_{n=0}^N \delta_n D_n.$$

При увеличении  $N$  на единицу  $\varepsilon_N^2$  изменяется на величину  $-\delta_{N+1}D_{N+1}$ , что всегда выгодно. Таким образом, можно использовать весь эмпирический материал в виде возмущенных коэффициентов  $\bar{a}_{nl}$ .

## 2.7. Методы, основанные на быстрых преобразованиях Фурье и Хартли

### 2.7.1. Непрерывные преобразования Фурье и Хартли

Многие задачи физической геодезии, как уже отмечалось в параграфах 2.3., 2.4., с математической точки зрения, представляют собой свёртки, то есть интегральные преобразования, ядро которых зависит только от расстояния между точкой выхода и текущей точкой интегрирования входа. Практическую реализацию таких интегральных преобразований можно существенно облегчить, если преобразовать задачу в частотную область. В математике известно несколько видов непрерывных линейных преобразований, которые позволяют сопоставить цифровому сигналу, заданному в пространственной (или временной) области, его эквивалентное представление в частотной области. И наоборот, если известна частотная характеристика сигнала, то обратное преобразование позволяет определить соответствующий сигнал в пространственной (или временной) области. Особенно полезными в геодезической практике оказались преобразование Фурье и преобразование Хартли.

Преобразование Фурье переводит пространственную функцию  $x(t)$  в частотную функцию  $X(f)$  посредством интегрального преобразования с использованием комплексной экспоненты [53–55]

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt = F[x(t)], \quad (2.210)$$

где  $F$  – оператор прямого преобразования Фурье,  $j = \sqrt{-1}$ .

Обратное преобразование [53–55]

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(2j\pi ft) df = F^{-1}[X(f)], \quad (2.211)$$

где  $F^{-1}$  – оператор обратного преобразования Фурье.

Функция  $X(f)$  показывает интенсивность колебаний, соответствующих различным значениям частот  $f$ . Модуль  $|X(f)|$  есть амплитуда колебания, а аргумент – фаза, соответствующие данному значению  $f$ . Функция  $|X(f)|^2$  называется спектральной плотностью, а  $|X(f)|$  – амплитудной плотностью для исходной функции  $x(t)$ . При этом известно, что образ Фурье свертки двух функций равен произведению образов Фурье каждой функции в отдельности (теорема о свёртке). А образ Фурье произведения двух функций в частотной области выражается сверткой соответствующих образов Фурье сомножителей (теорема о коммутативности свёртки) [53–55]:

$$y(t) = h(t)x(t) \Rightarrow Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\eta)X(f - \eta)d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} H(f - \eta)X(\eta)d\eta, \quad (2.212)$$

и наоборот. Смещению в пространственной области соответствует умножение на комплексную экспоненту в области частот, а смещению в области частот соответствует умножение на комплексную экспоненту в пространственной области.

Эти же свойства справедливы и для функций нескольких переменных, но всегда приходится пользоваться комплексными переменными.

Например, пара двумерного преобразования Фурье для функций двух пространственных переменных (координат точки) записывается в виде [53–55]

$$G(u, v) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y)e^{-j(ux+vy)} dx dy, \quad (2.213)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} G(u, v)e^{j(ux+vy)} du dv. \quad (2.214)$$

Преобразование Хартли, в отличие от преобразования Фурье, является преобразованием чисто вещественным, что является его преимуществом. Пусть, например, имеем исходную функцию времени  $V(t)$ . Ее частотный спектр  $H(\omega)$  с помощью преобразования Хартли определяется формулой [56]

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \text{cas}(\omega t) dt, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad \text{cas} t = \cos t + \sin t. \quad (2.215)$$

Обратное одномерное непрерывное преобразование Хартли имеет вид [56]

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \text{cas}(\omega t) d\omega. \quad (2.216)$$

Таким образом, преобразования Хартли строго обратны самому себе, что также является его преимуществом.

Преобразование Хартли свертки двух функций  $V_1(t) * V_2(t)$  равно [56]

$$\frac{1}{2} [H_1(\omega)H_2(\omega) - H_1(-\omega)H_2(-\omega) + H_1(\omega)H_2(-\omega) + H_1(-\omega)H_2(\omega)]. \quad (2.217)$$

Для двумерной функции  $f(x, y)$  прямое и обратное непрерывные преобразования Хартли выглядят следующим образом [56]

$$H(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \text{cas}[2\pi(ux + vy)] dx dy, \quad (2.218)$$

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} H(u, v) \text{cas}[2\pi(ux + vy)] du dv. \quad (2.219)$$

Преобразование Хартли (ПХ) свертки двух двумерных функций  $f_1(.) * f_2(.)$  равно [56]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} N [H_1(u, v)H_2(u, v) - H_1(-u, -v)H_2(-u, -v) + \\ & + H_1(u, v)H_2(-u, -v) + H_1(-u, -v)H_2(u, v)]. \end{aligned} \quad (2.220)$$

### **2.7.2. Дискретные преобразования и быстрые алгоритмы**

Для практических приложений важны дискретные формы преобразований.

Прямое и обратное преобразование Фурье  $X(k)$  дискретной функции  $x(n)$  определяются формулами [54, 55, 57]

$$X(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad x(n) = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.221)$$

где  $W_N^{nk}$  – поворачивающий множитель (или ядро преобразования), равный

$$W_N^{nk} = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right) = \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (2.222)$$

При  $k > N/2$  величинам  $X(k)$  соответствуют отрицательные частоты, то есть  $X(-1) = X(N-1)$ ,  $X(-2) = X(N-2)$  и так далее. Следовательно, второй половине преобразования отвечает преобразование для отрицательных значений  $k$ . Отсюда следует важное свойство: если  $x(n)$  – действительные числа, то  $X(-k) = X^*(k)$ , где  $X^*(k)$  обозначает сопряженное число. Следовательно, преобразование Фурье действительной последовательности требует определения только  $N/2$  комплексных величин. Недостающие величины можно получить, исходя из симметрии значений преобразования Фурье действительной последовательности. Отметим, что  $x(n)$  и  $X(k)$  – дискретные периодические функции. Их можно рассматривать как функции, регулярно повторяющиеся в пространстве и в области частот, соответственно.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и обратное ДПФ могут быть реализованы как умножение некоторой квадратной матрицы на входной вектор-столбец. Общая формула для элемента матрицы, расположенного в  $n$ -ом столбце и  $m$ -ой строке при  $T = 1$  выглядит так

$$W_{\text{ДПФ}}(m, n) = \exp\left(-j 2\pi \frac{(m-1)(n-1)}{N}\right), \quad (2.223)$$

$$1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N \quad x = \frac{1}{NT} W^{-1} X.$$

Преобразование Фурье для функций двух и более числа переменных можно выполнять последовательно по каждой координатной оси (строчно-столбцовый метод).

Дискретное прямое и соответствующее ему обратное преобразование Хартли (ДПХ) определяются соотношениями [56]

$$H(u) = N^{-1} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \text{cas}(2\pi ux/N), \quad f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} H(u) \text{cas}(2\pi ux/N), \quad (2.224)$$

где  $x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ;

$u = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

ДПХ свёртки числовых последовательностей  $f_1(x) * f_2(x)$  равно [56]

$$H(u) = \frac{1}{2} N[H_1(u)H_2(u) - H_1(-u)H_2(-u) + H_1(u)H_2(-u) + H_1(-u)H_2(u)]. \quad (2.225)$$

Заметим, что формула ДПХ свёртки упрощается, если  $H_2(u)$  – четная функция, тогда  $H(u) = NH_1(u)H_2(u)$ . Если  $H_2(u)$  – нечетная функция, то ДПХ свёртки равно:  $H(u) = NH_1(-u)H_2(u)$ . На практике обычно используется матричная интерпретация дискретных преобразований.

В настоящее время для вычисления дискретных преобразований Фурье и Хартли разработано большое количество специальных, так называемых быстрых алгоритмов (БПФ и БПХ), которыми полезно пользоваться и в геодезических целях.

Все алгоритмы БПФ можно разделить на два вида: децимацию (прореживание) по времени и децимацию по частоте. Но каждая из этих двух форм, в свою очередь, имеет множество модификаций. Детали можно найти, например, в работах [54, 55, 58–60].

### **2.7.3. Приложение к численным методам теории Молоденского**

Покажем, что важнейшие задачи физической геодезии в рамках строгой теории Молоденского можно формулировать в терминах свёрток и, следовательно, эффективно решать эти задачи с помощью БПФ и БПХ [54].

#### *Интегральное решение задачи Молоденского*

Для иллюстрации будем пользоваться плоской аппроксимацией необходимых формул, так как большая часть спектра аномалий силы тяжести сконцентрирована в области коротких длин волн (менее 2 000 км), и поэтому для ограниченной области сферическая поверхность может быть достаточно надёжно аппроксимирована касательной плоскостью [61]. При этом аномалии высот и составляющие уклонений отвеса получаются из соответствующих формул для сферы при  $R \rightarrow \infty$ . В этом случае пределы функций Стокса и Коха равны, то есть  $\lim S(\psi) = \lim N(\psi) = 0$  при  $\psi \rightarrow \infty$ . Поэтому ядра интегралов в формулах, по которым можно вычислять возмущающий потенциал, аномалию высоты и компоненты уклонения от-

веса по чистым и смешанным аномалиям аналогичны, отличие заключается только в обкладках (чистые аномалии  $\delta g$  или смешанные  $\Delta g$ ).

Следующие формулы вычисления аномалий высот имеют вид свёрток и позволяют пользоваться БПФ и БПХ [10, 54]:

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\Sigma} \frac{\lambda_0}{r} dx dy = \frac{1}{2\pi\gamma} \lambda_0 * l_{\zeta}, \\ \zeta_1 &= \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\Sigma} \frac{\lambda_1}{r} dx dy = \frac{1}{2\pi\gamma} \lambda_1 * l_{\zeta}, \dots,\end{aligned}\tag{2.226}$$

$$\begin{aligned}\zeta_n &= \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\Sigma} \frac{\lambda_n}{r} dx dy - \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\Sigma} \frac{(H' - H)^2}{r^3} \lambda_{n-2} dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi\gamma} \lambda_n * l_{\zeta} - \frac{1}{4\pi\gamma} [(H'^2 \lambda_{n-2}) * l_{\zeta}^3 - 2H'((H \lambda_{n-2}) * l_{\zeta}^3) + \\ &\quad + H^2(\lambda_{n-2} * l_{\zeta}^3)],\end{aligned}\tag{2.227}$$

где  $x$  и  $y$  – плановые координаты на плоскости;

$r$  – расстояние между текущей точкой интегрирования  $P$  с нормальной высотой  $H'$  и фиксированной точкой  $A$  с нормальной высотой  $H$ , то есть  $r = ((x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2)^{1/2}$ ;

ядро  $l_{\zeta} = r^{-1}$  – горизонтальная плоскость, проходящая через точку вычисления  $A$ ;

$\gamma$  – нормальное значение силы тяжести,

$$\lambda_0 = \delta g, \tag{2.228}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{H' - H}{r^3} \lambda_0 dx dy, \tag{2.229}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{H' - H}{r^3} \lambda_1 dx dy + \lambda_0 t g^2(\rho, n). \tag{2.230}$$

Отметим, что ядро интегралов  $l_{\zeta}$  имеет особенность в начале координат, которая заключается в “выкалывании” данной точки, для чего полагаем  $l_{\zeta}(0,0) = 0$ .



Значительное упрощение вычислений связано с тем, что образы Фурье для ядра Стокса  $l_\zeta$  и ядра Венинг-Мейнеса  $l_\xi, l_\eta$  можно вычислить по аналитическим формулам [62]:

$$\begin{Bmatrix} l_\xi(x, y) \\ l_\eta(x, y) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \partial l_\zeta(x, y) / \partial y \\ \partial l_\zeta(x, y) / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} (x^2 + y^2)^{-3/2}, \quad (2.231)$$

$$F \{ l_\zeta(x, y) \} = (u^2 + v^2)^{-1/2} = \frac{1}{q}, \quad (2.232)$$

$$F \begin{Bmatrix} l_\xi(x, y) \\ l_\eta(x, y) \end{Bmatrix} = -2\pi j \begin{Bmatrix} v \\ u \end{Bmatrix} (u^2 + v^2)^{-1/2} = -2\pi j \begin{Bmatrix} v \\ u \end{Bmatrix} \frac{1}{q}, \quad (2.233)$$

где  $u, v$  – частоты;  $j = \sqrt{-1}$ .

#### *Решение методом аналитического продолжения*

В основе другого метода лежит аналитическое продолжение аномалии силы тяжести, заданной на земной поверхности  $S$ , вниз к некоторой внутренней сфере или к уровню исследуемой точки, определение на этой поверхности в соответствии с теорией Стокса искомого элемента гравитационного поля Земли и аналитическое продолжение вверх найденного элемента. Следуя работе [2], приведём результаты применения этого метода в случае чистых аномалий. Обозначим через  $\delta g$  значение чистой аномалии силы тяжести на физической поверхности Земли, а через  $\delta g'$  – значение чистой аномалии на уровне точки  $A$ , в которой предполагается вычислять аномалию высоты  $\zeta$  или составляющие уклонения отвеса  $\xi, \eta$ .

Функции  $\delta g$  и  $\delta g'$  связаны между собой рядом Тейлора [52], который после некоторых преобразований позволяет получить ряды для вычисления аномалий высот и компонент уклонения отвеса.

Формулы в плоской аппроксимации имеют вид [54]

$$\begin{aligned} \zeta(x_A, y_A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\gamma} \iint \frac{g_n(x_p, y_p)}{r(AP)} dx_p dy_p = \\ &= \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x_A, y_A) * l_\zeta(x_A, y_A) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n. \end{aligned} \quad (2.234)$$

Выражения поправочных членов  $g_n$  являются интегралами типа свёртки, что позволяет при их вычислении использовать преобразование Фурье [54]:

$$\begin{aligned} g_n(x_p, y_p) = \\ = - \sum_{r=1}^n \frac{1}{(2\pi)^r r!} [h_p - h_A]^r F^{-1} \left\{ F(\bar{r}(x_p, y_p))^r \cdot F(g(x_p, y_p))_{n-r} \right\} = \quad (2.235) \\ = - \sum_{r=1}^n \frac{1}{(2\pi)^r r!} [h_p - h_A]^r F^{-1} \left\{ [\bar{R}(u_p, v_p)]^r G_{n-r}(u_p, v_p) \right\}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} g_1(x_p, y_p) &= (h_A - h_p) \frac{1}{2\pi} F^{-1} \left[ F\bar{r}(x_p, y_p) \cdot F\delta g(x_p, y_p) \right], \quad (2.236) \\ g_2(x_p, y_p) &= (h_A - h_p) \frac{1}{2\pi} F^{-1} \left[ F(\bar{r}(x_p, y_p)) \cdot Fg_1(x_p, y_p) \right] - \\ &\quad - (h_p - h_A)^2 \frac{1}{8\pi^2} F^{-1} \left[ F(\bar{r}^2(x_p, y_p)) \cdot F\delta g(x_p, y_p) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{r}$ , согласно [54, 63], определяется как

$$\bar{r}(x, y) = r(x, y) - \bar{R}(0, 0) \delta(x, y), \quad (2.237)$$

где  $\delta(x, y)$  – двумерная дельта-функция Дирака.

Дальнейшее упрощение вычисления  $g_n$  связано с тем, что образ Фурье ядра  $\bar{r}(x_p, y_p)$  можно достаточно приближённо вычислить аналитически [54, 62]:  $\bar{R}(u, v) \approx -(2\pi)^2 q$ , где  $q = (u^2 + v^2)^{1/2}$ . В результате получено, что [54]

$$\begin{aligned} g_1(x_p, y_p) &= (h_A - h_p) \frac{1}{2\pi} F^{-1} \left[ -(2\pi)^2 q \cdot F \{ \delta g(x_p, y_p) \} \right], \\ g_2(x_p, y_p) &= -(h_A - h_p) \frac{1}{2\pi} F^{-1} \left[ -(2\pi)^2 q \cdot Fq_1(x_p, y_p) \right] - \quad (2.238) \\ &\quad - (h_p - h_A)^2 \frac{1}{8\pi^2} F^{-1} \left[ 16\pi^4 q^2 \cdot F\delta g(x_p, y_p) \right], \end{aligned}$$

и так далее.

На практике часто вместо  $g_1$  вычисляют поправку за рельеф  $c$ . Поправка за рельеф  $c$  в точке  $P$  выражается формулой [54, 57], которую также можно записать в терминах свёртки следующим образом [16, 54]

$$c(x, y) = \frac{1}{2} G \varrho \{ t(x, y) * l(x, y) - 2h(x, y) [h(x, y) * l(x, y)] + L_{00} t(x, y) \}, \quad (2.239)$$

$$l(x, y) = (x^2 + y^2)^{-3/2}, \quad t(x, y) = h^2(x, y), \quad L_{00} = L(0, 0), \quad (2.240)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная;

$\varrho$  – средняя плотность топографических масс;

$h$  и  $h_p$  – нормальные высоты,  $\Delta h = h - h_p$ .

## 2.8. Вейвлетный анализ

### 2.8.1. От классического преобразования Фурье к оконному преобразованию Фурье

Под вейвлетным анализом понимается специальный вид спектрального анализа, позволяющий, в отличие от классического спектрального анализа Фурье, получать распределение амплитуд (мощности) анализируемого сигнала и по частоте, и по времени (пространству).

Широкое использование классического преобразования Фурье (ПФ) в параграфе 2.7. основано на замечательном свойстве этого преобразования, позволяющем заменять сложные интегральные преобразования определённого класса (свёртки) в пространственной области простым умножением соответствующих образов в частотной области. При этом приходится работать только или в пространственной области, или только в частотной области, и важны только правильные зависимости амплитуд от частот, что и полностью обеспечивает стандартный образ Фурье. Но, если необходимо выполнить спектральный анализ полезных сигналов или детальное моделирование ГПЗ, то тот факт, что спектр, получаемый с помощью стандартного ПФ, указывает зависимость амплитуд (или, более общо, мощности сигнала) только от частот и не даёт никаких сведений о положении спектра в пространстве, представляет собой серьёзный недостаток классического ПФ и обобщённых рядов Фурье.

Так, преобразование Фурье не отличает сигнал с суммой двух синусоид (стационарный сигнал) от сигнала с двумя последовательно следующими синусоидами с теми же частотами (нестационарный сигнал), так как спектральные коэффициенты вычисляются интегрированием по всему ин-

тервалу задания сигнала. Полностью отсутствуют возможности анализа их особенностей (сингулярностей), так как в частотной области происходит «размазывание» особенностей сигналов (разрывов, ступенек, пиков и т. п.) по всему частотному диапазону спектра. Появляются «паразитные» высокочастотные составляющие, явно отсутствующие в исходном сигнале при наличии в нём скачков и разрывов.

Например, составим из гармоник  $\varphi_1(t) = \cos(2\pi 10t)$  и  $\varphi_2(t) = \cos(2\pi 20t)$  с частотными компонентами 10 и 20 Гц два разных сигнала:  $f_1(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ , а  $f_2(t)$  пусть состоит из тех же частот, но появляющихся на разных промежутках времени – сначала на промежутке от 0 до 300 мс определена  $\varphi_1(t)$ , а затем на промежутке от 300 до 600 мс определена  $\varphi_2(t)$ . Очевидно, что  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  существенно отличаются друг от друга, причем сигнал  $f_1(t)$  является стационарным, так как его частоты не меняются со временем, а сигнал  $f_2(t)$  нестационарный. Однако их ПФ (спектры) не содержат никаких признаков различия и полностью совпадают. Отметим, что в теории сигналов важную роль играют нестационарные сигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ), частота которых со временем меняется непрерывно (chirp-сигналы).

Итак, если сигнал нестационарный (а, в общем случае, это так и есть), то для его анализа и моделирования деталей классическая теория Фурье непригодна. Чтобы как-то подправить ситуацию, возникла идея трактовать нестационарные сигналы как кусочно-стационарные. Такой подход получил название оконного преобразования Фурье (ОПФ). Область определения сигнала делится на отдельные части (окна), в пределах которых сигнал можно считать стационарным. Сигнал умножается на некоторую оконную функцию (взвешивается) и произведение подвергается ПФ. Далее оконная функция сдвигается, и процедура повторяется. В результате получается не стандартная амплитудно-частотная зависимость, а некоторая амплитудно-частотно-временная (амплитудночастотно-пространственная) зависимость. Мы не только знаем, какие частотные компоненты присутствуют в сигнале, но и в какой момент времени (в какой области пространства) они встречаются. Полученная спектрограмма уже не обычная двумерная (частоты, амплитуды), а трёхмерная (частоты, время, мощность сигнала). Конечно, эта информация приближённая, но, казалось бы, чем уже носитель оконной функции, тем больше оснований полагать стационарность в соответствующей области, и тем подробнее результат. Однако, это не так. Согласно принципу неопределённости Гейзенберга, улучшение временной (пространственной) локализации приводит к ухудшению частотной. К тому же, окно нужно выбирать единое для всего сигнала, тогда как разные участки обычно требуют применения

разных окон. Таким образом, ОПФ заметно расширяет возможности классического ПФ, но, по существу, проблема анализа нестационарных сигналов остаётся нерешённой. То же можно сказать и относительно ПХ. Нужен новый аппарат с новыми базисными функциями.

Такой аппарат – необходимые определения, свойства и их следствия – кратко изложен ниже, но применительно только для одномерных сигналов. При необходимости все сказанное может быть обобщено на многомерные случаи. Для простоты мы говорим о функциях, зависящих от времени  $t$  и, соответственно, о временных рядах и частотах. Однако без нарушения общности независимая переменная может трактоваться как характеристика пространственного местоположения.

### **2.8.2. От оконного преобразования Фурье к вейвлет-преобразованию**

Получить детальное распределение мощности нестационарного сигнала одновременно и относительно расположения в пространстве, и относительно частотного состава физически невозможно из-за уже не раз упоминавшегося принципа неопределённости Гейзенберга. Но физика такова, что высокочастотные компоненты нестационарных сигналов обычно локальны, то есть занимают отдельные короткие промежутки времени (отдельные области небольших размеров). А длинноволновые компоненты, как правило, наоборот являются относительно протяжёнными. Это даёт возможность выполнить такое преобразование сигнала, которое позволяет анализировать сигнал на различных частотах и различном временном (пространственном) разрешении одновременно. Такое преобразование состоит в представлении сигнала (для простоты речь идёт об одномерном сигнале) в виде обобщенного ряда или интеграла

Фурье по системе базисных функций вида

$$\varphi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2.241)$$

где  $a > 0$  – параметр, который позволяет изменять временной (пространственный) масштаб;

$b$  – параметр, который позволяет осуществлять сдвиг по времени (по пространству);

$\frac{1}{a}$  – множитель, который обеспечивает независимость нормы этих функций от масштабирующего числа  $a$ .

При заданных значениях параметров  $a$  и  $b$  такие функции называются вейвлетами (wavelet – короткая волна), а разложение сигналов по вейвлетам называется вейвлет-преобразованием (ВП).

Вейвлеты  $\psi_{ab}(t)$  конструируются из некоторого исходного материнского вейвлета  $\psi(t)$ . Малые значения  $a$  соответствуют мелкому масштабу  $\psi_{ab}(t)$ , или высоким частотам  $\omega \sim 1/a$ , большие значения параметра  $a$  – крупному масштабу  $\psi_{ab}(t)$ , то есть растяжению материнского вейвлета  $\psi(t)$  и сжатию его спектра.

Перечислим основные признаки, которыми непременно должна обладать исходная функция, чтобы стать вейвлетом:

- ограниченность, то есть квадрат нормы функции должен быть конечным;
- локализация и во времени, и по частоте;
- осцилляция (знакопеременность) вокруг нуля на оси времени так, что среднее значение равно нулю;
- самоподобие, то есть все вейвлеты конкретного семейства  $\psi_{ab}(t)$  имеют то же число осцилляций, что и материнский вейвлет  $\psi(t)$ .

### *Непрерывное вейвлет-преобразование*

Непрерывное вейвлет-преобразование (НВП) определяется как скалярное произведение сигнала  $f(t)$  и базисных функций  $\psi_{ab}(t)$ , конструируемых с помощью непрерывных масштабных преобразований ( $a$  в единицах, обратных частоте) и переносов ( $b$  в единицах времени) материнского вейвлета  $\psi(t)$  с произвольными значениями базисных параметров  $a$  и  $b$  в формуле (2.241). В результате прямое (анализ) и обратное (синтез) НВП (т. е. ПНВП и ОНВП) сигнала  $f(t)$  определяются следующими действиями [64, 65]:

$$W_f(a, b) = \langle f(t), \psi_{ab}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (2.242)$$

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \psi_{ab}(t) \frac{da db}{a^2}, \quad C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty, \quad (2.243)$$

где  $C_\psi$  – нормирующий коэффициент (для ортонормированных вейвлетов  $C_\psi = 1$ );

$\Psi(\omega)$  – образ Фурье вейвлета  $\psi(t)$ .

Из (2.242) следует, что вейвлет-спектр  $W_f(a, b)$  (масштабно-временной спектр) в отличие от фурье-спектра является функцией двух аргументов: первый аргумент  $a$  (временной масштаб) аналогичен периоду осцилляций, т. е. обратен частоте, а второй  $b$  аналогичен смещению сигнала по оси времени.  $W_f(b, a_0)$  характеризует временную зависимость (при  $a = a_0$ ), а  $W_f(a, b_0)$  характеризует частотную зависимость (при  $b = b_0$ ).

Если исследуемый сигнал  $f(t)$  представляет собой одиночный импульс длительностью  $\tau_u$ , сосредоточенный в окрестности  $t = t_0$ , то его вейвлет-спектр будет иметь наибольшее значение в окрестности точки с координатами  $a = \tau_u$ ,  $b = t_0$ .

Результат вейвлет-преобразования – обычный массив числовых коэффициентов. Такая форма представления информации очень удобна, поскольку числовые данные легко обрабатывать. С геометрической точки зрения, спектр  $W_f(a, b)$  одномерного сигнала представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Для изображения поверхности часто пользуются изоуровнями на плоскости  $ab$ , позволяющими проследить изменение интенсивности амплитуд ВП на разных масштабах ( $a$ ) и в разное время ( $b$ ). Иногда изображают картины линий локальных экстремумов поверхности, так называемый скелетон (skeleton), который выявляет структуру анализируемого сигнала. При широком диапазоне масштабов применяются логарифмические координаты ( $\log a, b$ ).

Таким образом, при НВП, так же, как и при ОПФ, перед интегрированием сигнал как бы взвешивается некоторой функцией-окном. Но теперь решение проблемы выбора окна как бы содержится в самой базисной функции, которая позволяет сужать и расширять это окно. В результате НВП представляет собой определённую меру подобия между базисными функциями (вейвлетами) и самим сигналом – чем больше подобия, тем заметнее реакция. Вычисленные коэффициенты отражают близость сигнала к вейвлету текущего масштаба. Процедура определения коэффициентов начинается с использования наиболее сжатого вейвлета ( $a = 1$ ), что выявляет наличие наиболее высоких частот сигнала. Затем вейвлет смещается на  $b$ , и так до конца сигнала. Следующий шаг состоит в увеличении масштаба  $a$  на некоторую величину (таким образом, расширяя вейвлет-окно для поиска более низких частот), и процедура смещения повторяется. В результате получается большое количество избыточной информации, поскольку получается набор вейвлет-коэффициентов для каждого возможного масштаба.

Отсюда появляется возможность адаптивного к сигналу выбора параметров окна. В соответствии с принципом неопределенности сужение окна анализа во временной области вызывает расширение его в частотной. Поэтому, если на плоскости время-частота изобразить такое окно в виде прямоугольника, длина одной стороны которого равна длине некоторого промежутка времени, а длина другого равна длине соответствующего промежутка частот, то площадь такого окна при его перемещении остается постоянной.

Неравенству из (2.243) удовлетворяют многие функции, и в литературе можно найти множество различных вейвлетов. Например, вейвлетный базис можно получить из функции Гаусса  $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2)$ . Взяв первую производную, получим вейвлет вида  $\psi(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t \exp(-t^2/2)$ , который называют WAVE-вейвлет. Если взять вторую производную, то получим вейвлет  $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1-t^2) \exp(-t^2/2)$ , который называют мексиканской шляпой (МНАТ-вейвлет). Разность двух Гауссиан образует DOG-вейвлет  $\exp(-t^2/2) - \frac{1}{2} \exp(-t^2/8)$ . Такие «гауссовы» вейвлеты являются одними из самых распространенных. Их описание можно найти, например, в работе [64].

### *Свойства вейвлет-анализа*

Прямое ВП содержит комбинированную информацию об анализируемом сигнале и анализирующем вейвлете. Несмотря на это, ВП позволяет получить объективную информацию о сигнале, потому что некоторые свойства ВП не зависят от выбора анализирующего вейвлета. Независимость от вейвлета делает следующие простые свойства очень важными:

- линейность  $W[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha W_1(a, b) + \beta W_2(a, b)$  следует из скалярного произведения (2.242);
- смещение сигнала во временной области на  $b_0$  ведет к сдвигу вейвлет-образа также на  $b_0$ , то есть  $W[f(t - b_0)] = W[a, b - b_0]$ ;
- растяжение (сжатие) сигнала приводит также к растяжению (сжатию) его в области  $W(a, b)$ , то есть  $W[f(t/a_0)] = 1/a_0 W[a/a_0, b/a_0]$ ;



– дифференцирование  $W\left[d_t^m f\right] = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d_t^m [\Psi_{ab}(t)] dt$  откуда

следует, что проигнорировать, например, крупномасштабные составляющие и проанализировать особенности высокого порядка или мелкомасштабные вариации сигнала  $f(t)$  можно дифференцированием нужное число раз либо вейвлета, либо самого сигнала. Если учесть, что часто сигнал задан цифровым рядом, а анализирующий вейвлет – формулой, то это свойство весьма полезное;

– масштабно-временная локализация обусловлена тем, что элементы базиса ВП хорошо локализованы и обладают подвижным частотно-временным окном. За счет изменения масштаба (увеличение  $a$  приводит к сужению фурье-спектра функции  $\Psi_{ab}(t)$ ) вейвлеты способны выявлять различие в характеристиках на разных шкалах (частотах), а за счет сдвига – проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем исследуемом интервале. Это позволяет сохранять хорошее разрешение на разных масштабах.

Что касается обратного НВП, то его точность зависит от выбора базисного вейвлета и способа построения базиса, т. е. от значений базисных параметров  $a, b$ . Строго теоретически, вейвлет может считаться базисной функцией  $L_2(R)$ ,  $R(-\infty, \infty)$  только в случае его ортонормированности. Для практических целей непрерывного преобразования часто бывает вполне достаточна устойчивость и приближённая ортогональность системы разложения функций. Под устойчивостью понимается достаточно точная реконструкция произвольных сигналов. Для ортонормированных вейвлетов обратное вейвлет-преобразование записывается с помощью того же базиса, что и прямое (2.243).

*Разложение сигналов в ряд по вейвлетам.*

*Диадное вейвлет-преобразование*

Непрерывное изменение параметров  $a$  и  $b$  при расчёте вейвлет-спектра требует большие вычислительные затраты. Но участвующее при этом множество функций  $\Psi_{ab}(t)$ , по сути, избыточно. Желательна дискретизация параметров при сохранении возможности восстановления сигнала из его преобразования. Дискретизация, как правило, осуществляется через степени 2:

$$a = 2^m, \quad b = k \cdot 2^m, \quad \Psi_{mk}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \Psi(2^{-m}t - k), \quad (2.244)$$

где  $m$  и  $k$  – целые числа.

В этом случае плоскость  $a, b$  превращается в соответствующую сетку  $m, k$ . При этом дискретизация называется диадной, а соответствующее преобразование – диадным (dyadic) ВП. Параметр  $m$  называется диадным параметром масштаба.

Прямое и обратное диадное ВП непрерывных сигналов запишутся в виде:

$$c_{mk} = (f(t), \psi_{mk}(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{mk}(t) dt, \quad f(t) = \sum_{m,k} c_{mk} \psi_{mk}(t), \quad (2.245)$$

где коэффициенты  $c_{mk}$  можно определить через непрерывное ВП  $W_f(a, b)$  как  $c_{mk} = W(2^m, k \cdot 2^m)$ .

В результате вейвлет-спектр  $c_{mk}$  можно представить как вертикальные отрезки, размещенные на плоскости  $a, b$  в узлах сетки  $m, k$ . Формально обобщенный ряд Фурье для  $f(t)$  в (2.245) отличается от традиционного только тем, что суммирование проводится не по одному, а по двум индексам. Но это несущественно, так как обе системы индексации принадлежат одному классу бесконечных счётных множеств.

Диадное ВП часто называют дискретным. Однако, по мнению ряда авторов, правильнее называть его диадным, представляющим особую разновидность непрерывного ВП и позволяющим устранить избыточность последнего.

Особый вид вейвлетов, занимающих промежуточное положение между непрерывным и диадным ВП, называют *фреймом*. Вейвлет-фреймы используют кратное двум масштабирование ( $a = 2^m$ ), но непрерывный сдвиг. Следовательно, они сохраняют избыточность, которая присуща непрерывному ВП, но в гораздо меньшей мере по сравнению с ним.

### *Дискретное преобразование*

Под дискретным вейвлет-преобразованием (ДВП) понимается дискретизация не только параметров  $a$  и  $b$ , но и дискретизация во времени самого сигнала. На основании теоремы отсчетов Котельникова непрерывный сигнал  $f(t)$ , спектр которого не содержит частот выше  $\nu_m$ , полностью определяется дискретной последовательностью своих мгновенных значений  $\{f_i\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , отсчитываемых через интервалы времени  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \frac{1}{2v_m}, \quad v_d = \frac{1}{\Delta t} = 2v_m, \quad (2.246)$$

где  $\Delta t$  и  $v_d$  – интервал (шаг) и частота дискретизации.

Таким образом, дискретизированный с шагом  $\Delta t$  сигнал можно определить выражением:

$$f_d(t) = \{f_i\} \sum_{i=1}^{N-1} f(i\Delta t) \delta(t - i\Delta t), \quad (2.247)$$

где  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака.

Заметим, что, если нас интересует только анализ сигнала (без последующего его синтеза), то дискретизация может выполняться с любой частотой, даже не удовлетворяющей критерию Найквиста.

Если число отсчетов составляет  $N = 2^{n_0}$ , то максимальное значение  $m$  в формулах (2.244) будет равно  $n_0 - 1$ . Наибольшее значение  $k$  для текущего  $m$  определяется:  $k = 2^{n_0 - m} - 1$ . В частности, для  $m = 0$  (то есть  $a = 1$ ) число сдвигов  $k$  базисного вейвлета составит  $2^{n_0} - 1 = N - 1$ ; с каждым последующим значением  $m(1, 2, \dots)$  вейвлет  $\psi_{mk}(t)$  расширяется в два раза, а число сдвигов  $k$  уменьшается в два раза.

Вейвлет-коэффициенты  $c_{mk}$  можно вычислить с помощью итерационной процедуры, известной под названием *быстрого вейвлет-преобразования БВП*. С алгоритмом БВП можно ознакомиться, например, с помощью работ [66, 67]. При этом, если необходимо, можно сжать полученные данные, отбросив некоторую несущественную часть закодированной таким образом информации. Осуществляется это квантованием, в процессе которого приписываются разные весовые множители различным вейвлет-коэффициентам. Аккуратно проведенная процедура позволяет не только удалить возможные шумы, но и существенно сократить потребность в компьютерной памяти.

### *Двумерные вейвелеты*

Двумерные (и вообще многомерные) вейвлет-преобразования являются расширением одномерных преобразований.

Пусть, например, приходится иметь дело с двумерными массивами  $f(x, y)$  двух переменных  $x$  и  $y$ . Тогда, вместо выражения для одномер-

ной вейвлет-функции вида (2.241), можно воспользоваться двумерным аналогом

$$\frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \Psi \left( \frac{x - b_1}{a_1}, \frac{x - b_2}{a_2} \right), \quad (2.248)$$

где  $a_1$  и  $a_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$  – значения  $a$  и  $b$  по каждому измерению.

Для двумерного диадного ВП непрерывных сигналов:

$$\begin{aligned} a &= 2^m, & b &= k 2^m = ka, \\ \varphi_{m,k} &= 2^{-m/2} \varphi(2^{-m} V - k), & \psi_{m,k} &= 2^{-m/2} \psi(2^{-m} V - k). \end{aligned} \quad (2.249)$$

В общем случае вейвлетными функциями таких преобразований являются тензорные произведения одномерных функций по размерности преобразования. Разработаны различные численные методы работы с такими функциями (см. например, [12, 66, 67]), но практическая реализация преобразований с многомерными вейвлетами (мультивейвлетами) остаётся достаточно сложной.

Относительная сложность любых вейвлетных преобразований является их основным недостатком.

Теория вейвлет-разложения на плоскости, к сожалению, не может быть естественно распространена на двумерную сферу из-за особенностей на полюсах в стандартной сферической системе координат и вообще из-за другой топологии. Предпринимались разные попытки задания плоским вейвлетам растяжения на сфере, например, с помощью стереографической проекции. В результате трудами, главным образом, немецкого математика Фридена (Frieden) [22] и его соратников [21, 31] разработан метод сферического вейвлет-разложения, использующий гармонические вейвлеты. Этот метод позволяет выделять разные частоты исследуемой функции (в обычном смысле разложений по сферическим гармоникам) и приводит к её разномасштабному представлению, см. параграф 2.3.

### **2.8.3. Некоторые геодезические приложения**

Вейвлет-преобразования в настоящее время приняты на вооружение для огромного числа разнообразных применений, нередко заменяя обычное преобразование Фурье. В основном используются дискретные вейвлеты как в силу повсеместного применения цифровых методов обработки данных, так и в силу ряда различий дискретного и непрерывного вейвлет-преобразований. Но непрерывные вейвлеты дают несколько более нагляд-

ное представление результатов анализа в виде поверхностей вейвлет-коэффициентов по непрерывным переменным.

В пункте 2.7.3. показано, что важнейшие задачи физической геодезии в рамках строгой теории Молоденского можно формулировать в терминах свёрток и решать с помощью преобразований Фурье. В работах [68, 69] разработаны алгоритмы вычислений аномалии высоты и составляющих уклонений отвеса с точностью нулевого и первого приближения теории Молоденского для ближней зоны на основе вейвлет-преобразования. Например, вычисление аномалии высоты  $\zeta_0$  с точностью нулевого приближения выполняется по формуле

$$\zeta_0 = \frac{R}{2\pi\gamma} W^{-1} \{ W[\Delta g] \cdot W[S_1(\psi)] \}, \quad (2.250)$$

где  $R$  – средний радиус Земли;

$\gamma$  – нормальное значение силы тяжести;

$W[\dots]$  и  $W^{-1}[\dots]$  – прямое и обратное полные ступенчатые двумерные вейвлет-преобразования (схема лифтинга);

$\Delta g$  – массив данных аномалии силы тяжести.

$S_1(\psi) = \frac{1}{2} S(\psi) \sin(\psi)$  – модифицированная функция Стокса  $S(\psi)$ .

Проведены исследования по выбору наилучшего алгоритма вейвлет-преобразования для решения конкретных задач по определению трансформант гравитационного поля. Сравнивались лифтинг-схема с фильтрами Хаара, стационарное преобразование с фильтрами Хаара и стационарное преобразование с фильтрами Добеши второго порядка. Использование схемы лифтинга позволило на порядок ускорить вычисления по сравнению с использованием стационарного вейвлет-преобразования. Методы вычислений проверены на реальных материалах гравиметрических съёмок.

В работе [12] в терминах двумерных ВП с использованием ортогональных вейвлетов Добеши (Daubechies) выражены 8 основных интегральных операторов физической геодезии в плоской аппроксимации: Стокса, Вининг-Мейнеса, Пуассона (продолжение вверх) [70] – все 3 в прямом и обратном направлениях, а также поправка в силу тяжести за рельеф и формула преобразования уклонения отвеса в высоты геоида. Сингулярности ядер аппроксимированы в конечномерных подпространствах разномасштабного анализа. Разработаны методы высокой степени сжатия детализирующих коэффициентов и рекомендованы процедуры вычислений, существенно сокращающие необходимый объём вычислений

и освобождающие память компьютера. Последний фактор позволил свободно работать с обширными матрицами разреженной структуры. Точность конечных результатов идентична точности известных методов преобразований Фурье и численных интегрирований.

В работе [71] исследованы возможности применения теории вейвлетов в свете линейной алгебры [65] при сжатии и фильтрации геоинформации. Разработаны методики построения ортонормированных базисов различными методами вейвлет-преобразования, на основе которых составлены алгоритмы и соответствующие программы для ЭВМ по сжатию геоинформации на примере рельефа местности и фотоизображений. Исследована эффективность сжатия геоинформации и фильтрации шумов с помощью вейвлетов. Разработана методика определения значения величины фильтра в зависимости от точности исходной геоинформации, проиллюстрированная на примере расчёта значения фильтра для сжатия информации о высотах рельефа местности. Такая же методика рекомендована и для фильтрации изображений.

Примеры определения распределения плотностных источников по результатам гравиметрии с помощью ВП можно найти в работе [72]. Разработано вейвлет-преобразование геопотенциальных полей на горизонтальном круговом цилиндре и сферической поверхности [74]. Наиболее важным результатом реализации такого преобразования явилась возможность определения местоположений и глубин залегания аномалиеобразующих источников. Изучение характера распределения вейвлет-коэффициентов при различных значениях масштабного параметра позволило ассоциировать аномалии вейвлет-срезов с известными геологическими структурами.

Разнообразные приложения описаны в монографии [32].

Отметим также эффективное использование ВП (в частности, с помощью вейвлетов Морле (Morlet)) при исследовании точности и надёжности работы глобальных навигационных спутниковых систем и построенных с их помощью сетей в различных условиях [74].

## **2.9. Искусственные нейронные сети**

### **2.9.1. Общие сведения об ИНС**

Искусственная нейронная сеть (ИНС) – это новое направление в вычислительной математике и практике создания сложных технических систем, способное выполнять самые разнообразные операции, в том числе недоступные для традиционной математики (сравнения по образцу, классификация объектов, распознавание образов и др.). Область использования ИНС в настоящее время чрезвычайно широка – от диагностики забо-

леваний и автоматического анализа документов до управления динамическими системами и создания искусственного интеллекта. Поэтому естественно желание выяснить возможности нового мощного математического метода и при решении задач геодезического профиля.

ИНС представляет собой систему соединённых и взаимодействующих между собой довольно простых процессоров (искусственных нейронов). Каждый нейрон подобной сети имеет дело только с сигналами, которые он периодически получает, и сигналами, которые он периодически посылает другим нейронам. Каждый вход в  $i$ -ый нейрон умножается на некоторый весовой коэффициент  $w_i$ , определяющий активность соответствующего сигнала. Произведения суммируются, и к ним добавляется некоторая константа  $w(i, 0)$  (смещение). Далее эта сумма модифицируется с помощью какой-нибудь несложной нелинейной функции. Нелинейная функция, которая используется для преобразования уровня активации нейрона в выходной сигнал, называется передаточной функцией (или элементом активации). Передаточная функция обеспечивает нелинейность сети (известно, что многослойные нейронные сети обладают большей представляющей мощностью, чем однослойные, только в случае присутствия нелинейности). В качестве передаточной функции можно выбирать различные нелинейные дифференцируемые функции, но обычно используется сигмоида  $s(x) = (1 + \exp(-kx))^{-1}$ ,  $k > 0$ , так как её возможные значения всегда находятся между 0 и 1. При этом слабые сигналы усиливаются, а с увеличением сигнала это усиление падает. Кроме того, сигмоида имеет простую производную  $s' = s(1 - s)$ .

Такие по отдельности простые процессоры, будучи соединёнными в достаточно большую сеть с управляемым взаимодействием, вместе способны решать довольно сложные задачи. Совокупность нейронов с единичными входными сигналами называют *слоем*.

Обычно выделяют (по крайней мере) три слоя сети:

- *входной* (исходные данные задачи);
- *промежуточный* (его называют скрытым, скрытых слоёв может быть много);
- *выходной* (результаты решения задачи).

Сети, содержащие только один промежуточный слой, называют *персептронами*. Если промежуточных слоёв несколько, то используется термин *многослойный персептрон*. В конечном счёте, при наличии  $k$  нейронов входного слоя, одного промежуточного слоя с  $m$  нейронами и одним нейроне на выходе

$$y = s \left[ \sum_{i=1}^m w_i s \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j + w_{i,0} \right) + w_0 \right].$$

Доказана обобщённая аппроксимационная теорема [75]: с помощью определённого набора указанных операций можно получить структуру, описывающую любую непрерывную функцию с определённой наперёд заданной точностью. Другими словами, сеть при соответствующем выборе её структуры можно сделать *универсальным аппроксиматором*, то есть какую бы функцию нам не предстояло вычислить, мы знаем, что существует нейросеть, способная сделать это.

Перед началом работы необходимо определиться с архитектурой сети – количество слоёв, количество нейронов в каждом слое, наличие и вид передаточных функций. Всем весам и смещениям нужно присвоить какие-нибудь небольшие начальные значения. Лучше это делать случайным образом. Полезно иметь ввиду, что многослойные нейронные сети обладают большей представляющей мощностью, чем однослойные, только в случае присутствия нелинейности. Цель дальнейших действий состоит в настройке сети, то есть в таком подборе ее весов и смещений, при котором приложение некоторого множества входов приводило бы к требуемому множеству выходов. Для краткости эти множества входов и выходов называют векторами. Такая процедура составляет процесс обучения сети. Для обучения необходимо для каждого входного вектора иметь парный ему целевой вектор, задающий требуемый выход. Вместе они называются обучающей парой  $X, Y$ . Желательно иметь множество таких обучающих пар (обучающее множество). Кроме того, необходимо определить количественный критерий близости всякого выхода сети к нужному вектору. Будем называть это функцией цели  $F(X, Y, W)$ , где  $W$  обозначает множество всех весовых коэффициентов и смещений сети.

Для каждой обучающей пары надо подать исходные данные на вход сети, послойно вычислить выход и получить разность между выходом сети и требуемым выходом (целевым вектором обучающей пары). Эта разность определяет значение функции цели и используется далее для обратного хода, имеющего своей задачей коррекцию весов и смещений сети под условием минимизации функции цели. Для этого надо обеспечить  $\partial F / \partial W = 0$ , что выполняется численно, например, методом последовательного спуска по градиенту или методом Левенберга-Марквардта [76, с. 243].

После достаточного числа повторений указанных операций для каждого вектора обучающего множества разность между действительными выхода-



ми и целевыми выходами достигает приемлемой величины, и говорят, что сеть обучилась. Подробности можно найти в учебных пособиях [76–78].

Таким образом, нейронные сети не программируются в привычном смысле этого слова, а обучаются. Обучение многослойной ИНС, согласно указанному алгоритму обратного распространения, с математической точки зрения представляет собой многопараметрическую задачу нелинейной оптимизации функции цели, количественно описывающей уровень пригодности функционирования ИНС. Обученную сеть можно трактовать как практический механизм реализации нелинейной зависимости «вход-выход» любой сложности, в том числе, в виде «чёрного ящика». Возможность обучения – одно из главных преимуществ нейронных сетей перед традиционными алгоритмами. В процессе обучения нейронная сеть способна выявлять сложные зависимости между входными данными и выходными, а также выполнять обобщение. Это значит, что в случае успешного обучения сеть сможет выдавать верный результат на основании данных, которые отсутствовали в обучающей выборке, а также неполных и/или «зашумленных», частично искажённых данных. По окончании обучения сеть желательно протестировать на каких-либо ранее не использованных данных и, таким образом, убедиться в надёжности последующего использования по назначению (для распознавания изображений, аппроксимации сложной зависимости, оптимизации, идентификации объектов и т. д.).

Существует обширная классификация ИНС по различным принципам. Из сравнительно простых сетей мы отметим только *радиальные базисные нейронные сети (РБНС)*. Эти сети используют те же свойства радиальных базисных функций (РБФ), что и в теории сферических вейвлетов, см. параграф 2.7. Обычно РБНС состоят из большего количества нейронов, чем стандартные сети с прямой передачей сигналов и обучением методом обратного распространения ошибки, но на их создание и обучение требуется значительно меньше времени.

Из сложных ИНС особый интерес представляют самонастраивающиеся стохастические ИНС, выполняющие процесс обучения «самостоятельно» на эвристических и метаэвристических принципах без явного привлечения обучающего множества. В настоящее время опубликовано множество подобных алгоритмов. Но, по-видимому, наибольшее признание получил, так называемый, генетический алгоритм (ГА), [79], воплощающий представления о дарвиновской эволюции на основе генерации, тестирования и отбора наиболее жизнеспособных особей (ген – единица наследственной информации).

### 2.9.2. Примеры успешного решения задач геодезии с помощью ИНС

*Преобразования координат.* Моделирование систем геодезических координат (geodetic reference system, GRS) и их реализация (geodetic reference frame, GRF) нередко приводит к тому, что картографический материал, составленный в разные временные промежутки, оказывается основанным на различных системах отсчёта, что вызывает необходимость их соотнесения друг с другом. Процедура преобразования систем координат хорошо известна и достаточно просто выполняется по стандартным правилам. Однако реальная связь двух систем координат по разным причинам далеко не всегда соответствует той математической модели, которая позволяет нам достаточно надёжно определять необходимые параметры преобразования и их количество. Поэтому, естественно, воспользоваться средствами ИНС, позволяющими, как отмечалось выше, описать любую непрерывную зависимость с любой наперёд заданной точностью.

Опубликовано большое количество работ, в которых задачи о преобразовании систем координат (как пространственных [38, 80], так и плоских [81, 82]) решаются с помощью ИНС, и результаты сравниваются с решениями тех же задач классическими методами. Сделан единодушный вывод о несомненном преимуществе ИНС. При этом рекомендуется пользоваться именно РБНС.

*Преобразования высот.* Показательный эксперимент с преобразованием геодезических высот в ортометрические выполнен на территории Турции [83]. Исходными данными послужили разбросанные по территории страны 190 станций, на которых измерены и ортометрические высоты  $H$  (традиционным нивелированием), и геодезические высоты  $h$  (с помощью ГНСС). Полученные точечные значения высот геоида  $N = h \cup H$  аппроксимированы непрерывной поверхностью, пользуясь для этого различными математическими средствами (полиномиальная интерполяция, сплайны, среднеквадратическая коллокация, искусственные нейросети) и различным количеством  $k$  исходных значений высот геоида  $N(k = 20, 40, 80, 100, 120)$ . Остальные  $190 \setminus k$  значений высот геоида используются для контроля вычислений. Сравнение результатов аппроксимации с соответствующими контрольными значениями убедительно показало, что наилучшая аппроксимация достигается с помощью ИНС (среднеквадратическое отклонение от 6 см для  $k = 20$  до 4 см для  $k = 120$ ).

По сути, аналогичные работы с теми же выводами описаны в статьях [84–86].

*Моделирование гравитационного поля.* В работе [87] выполнена экстраполяция измеренных значений модуля силы тяжести с помощью ИНС в виде многослойного персептрона с алгоритмом обратного распространения ошибки. Оптимальное количество промежуточных слоёв подобрано эмпирически и оказалось равным 19. В 56 точках  $8^\circ \times 12^\circ$  территории США значения модуля силы тяжести  $g$  измерены непосредственно и вычислены по моделям EGM-2008 и EIGEN-6C4 до 2190-ой степени. Из парных значений (измеренные и вычисленные по одной из моделей) в 32 точках составлены обучающие векторы и выполнена тренировка ИНС. Полученная в результате модель значений силы тяжести протестирована в оставшихся 24 точках. Сравнение полученных модельных значений и вычисленных по EGM-2008 (или с помощью EIGEN-6C4) с измеренными значениями показало, что точность  $g$ , полученных с помощью ИНС, оказывается более высокой по сравнению с результатами вычислений по каждой из упомянутых двух моделей ГПЗ. Заметим, что при использовании ИНС нет необходимости делать какие-либо предположения относительно частотного состава данных, а при появлении дополнительной информации полученную модель легко модифицировать.

С целью исследования геодезических возможностей искусственного интеллекта, в работе [88] проанализированы 6 различных вариантов машинного обучения для моделирования нормального значения силы тяжести в 424 разных точках земной поверхности. Один из вариантов представлял собой ИНС на основе радиальных базисных функций с 3 входами (геодезические координаты точки) и одним выходом (значение нормальной силы тяжести). Для обучения (297 точек) и тестирования (127 точек) результатов выходные значения предвычислены по известной формуле Сомильяна-Пицетти. Оптимальное количество нейронов в промежуточном слое оказалось равным 50. Именно такая РБНС показала наилучшую точность и устойчивость прогноза. Сделан вывод о высокой перспективности методов искусственного интеллекта при моделировании ГПЗ.

*Оценка вектора скорости смещения пунктов.* В [89] показана целесообразность использования ИНС для оценки скоростей изменения пространственных положений геодезических пунктов в связи с движением литосферных плит. По результатам испытаний в пяти геодезических сетях среди выбранных ИНС предпочтение отдаётся многослойному персептрону обратного распространения, точность которого в трёх сетях превысила точность, полученную методом кригинга. Особо отмечается способность ИНС без особых затрат «доучиваться» в случае выявления новых данных, чего нельзя сказать о кригинг-методе, требующем в таком случае повторного переопределения всех весов.

*Аппроксимация орбиты спутников GPS.* В [90] демонстрируется эффективность использования РБНС при вычислении координат спутников GPS по бортовым и эфемеридным данным по сравнению с традиционными методами полиномиальной и тригонометрической интерполяции.

*Анализ деформаций.* Набирает популярность использования ИНС для анализа и прогнозирования деформаций сооружений.

В [91] описано успешное использование РБНС для моделирования векторов смещений и деформации конструкций, а именно резервуара для хранения сжиженного природного газа. Сделаны выводы об эффективности РБНС, позволившей подтвердить гипотезу о характере возникновения и последствий выявленных деформаций.

В [92] исследовались возможности прогнозирования вертикального перемещения конструкций с целью предотвращения потенциальных повреждений. Использован многослойный персептрон с алгоритмом обратного распространения. Сделан вывод о возможности использования обученной ИНС для прогнозирования вертикальных смещений с точностью порядка  $\pm 0,5$  мм.

*Примеры использования ГА.* В статье [93] описано использование ГА для проектирования геодезических сетей – оптимизация конфигурации сети, распределение весов планируемых измерений и др.

Пример оптимального подбора спутников с помощью ГА в задачах ГНСС-позиционирования показан в работе [28].

В работе [94] ГА реализован при решении задачи об определении параметров отражённого сигнала альтиметрии. При этом, в отличие от классического метода Левенберга-Марквардта, подбирать начальные значения параметров не требуется, достаточно указывать лишь функцию цели и границы возможных изменений искомых параметров.

В работах [95, 96] с помощью ГА решаются задачи о преобразовании геодезических высот в ортометрические.

## 2.10. Мультипольное представление потенциала

В 1974 г. Г. А. Мещеряков [97] обратил внимание на неиспользованные возможности мультипольного представления потенциала притяжения  $V$ , которое было предложено в 1881 г. Максвеллом и эквивалентно представлению  $V$  в виде разложения по шаровым функциям

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}, \quad (2.251)$$

где  $Y_n$  – обычный «игрек» Лапласа (сферическую функцию  $n$ -й степени).

Под мультиполем нулевого порядка понимается точечный заряд  $q$  в начале системы координат, потенциал которого в некоторой точке пространства  $Q$  равен  $V_0 = q/r$ , где  $q$  – момент этого мультиполя,  $M_0 = q$ ,  $r$  – расстояние точки  $Q$  от заряда  $q$ . Мультиполь первого порядка – это диполь. Последовательно конструируются мультиполь второго порядка (квадруполь), октаполи, тетраполи и т. д. В общем случае мультиполь  $n$ -го порядка – это точечный объект, который получается в результате предельного перехода, которому подвергаются два мультиполя  $(n-1)$ -го порядка. По Максвеллу гармоника  $V_n$  может быть представлена мультиполем  $n$ -го порядка

$$V_n = (-1)^n \frac{M_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (2.252)$$

где  $M_n$  – момент мультиполя;

$h_1, h_2, \dots, h_n$  – направления осей мультиполя, по которым ведется дифференцирование  $1/r$ ;

$r$  – расстояние от центра сферы единичного радиуса до произвольной точки пространства. Центр сферы принят за начало системы координат. При этом сферические функции удобно трактовать как

$$Y_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} M_n \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (2.253)$$

В работе [97] дана физическая трактовка мультиполей нулевого, 1-го и 2-го порядков. Последующие исследования возможностей использования мультиполей, в том числе посвящённые выбору целесообразной методики вычисления их параметров и анализу получаемых результатов, опубликованы в ряде работ Г. А. Мещерякова и А. Н. Марченко, например, см. [98]. Разработана методика определения полюсов (направлений осей) и моментов мультиполей [99], основанная на теореме Сильвестра. Эта методика применена для расчета параметров мультиполей 3-го и 4-го порядков и более высоких порядков по данным о модели ГПЗ.

Получено алгебраическое уравнение  $2n$ -ой степени для определения направлений осей мультиполя  $n$ -го порядка и разработана методика вычисления моментов мультиполей при известных направлениях их осей. Представление сферических функций при помощи мультиполей позволяет точно определить положение экстремальных точек для каждой степени

гармоники гравитационного потенциала, в которых его градиент коллинеарен направлению на центр масс планеты.

Параметры мультиполей используются для построения алгоритма преобразования гармонических коэффициентов геопотенциала при вращении координатной системы. Алгоритм включает в себя вычисление параметров мультиполей по исходным значениям гармонических коэффициентов, пересчёт направлений осей мультиполей в новую систему координат и определение гармонических коэффициентов геопотенциала в новой системе.

Заметим, что введенные Максвеллом оси и моменты имеют один и тот же смысл как для сферических (шаровых) функций, так и для мультиполей соответствующих порядков. Общая сферическая функция  $Y_n(\theta, \varphi)$  зависит от  $(2n+1)$  параметров. В лапласовом представлении – это коэффициенты  $c_{nk}$ ,  $s_{nk}$  (см. (2.29); в максвелловом – это момент функции и  $2n$  величин, определяющих направления ее  $n$  осей. Смысл этих представлений различен. В первом случае разложение идет по системе базисных функций. Во втором – безотносительно какого-либо базиса или системы координат.

Отметим, что существуют формулы перехода от максвеллова представления сферических функций к лапласову и обратно.

В работах А. Н. Марченко ([100, 101] и др.) найдено развитие теории радиальных мультиполей, представляющих собой производные ядра точечной массы. Радиальные мультиполи, по сути, представляют собой частотно неограниченные СРБФ, и следовательно, могут успешно применяться для локального моделирования ГПЗ. Например, в работе [102] различные СРБФ, в том числе, радиальные мультиполи, использованы для моделирования гравитационного поля на территории Нидерландов. Проведённый сравнительный анализ показал, что мультиполи справляются с этой задачей не хуже, чем, например, СРБФ в виде ядра Пуассона.

## 2.11. Заключение по главе 2

Выполненный краткий обзор и анализ современных подходов к представлению гравитационного поля Земли (ГПЗ) содержит 10 параграфов, но не претендует, конечно, на полноту охвата. Более того, внутри почти каждого параграфа имеются различные направления современных исследований и их приложений, вполне достойные собственного анализа, а не ссылок на литературу, как это сделано в отчёте. Тем не менее, все эти подходы имеют общую природу в том смысле, что все они являются методами аппроксимации геопотенциала и его трансформант по разного рода функционалам на потенциале. При описании и сравнении таких мето-

дов наиболее удобно пользоваться основными понятиями функционального анализа. Необходимые для этого сведения собраны в параграфе 2.1.

По-видимому, в настоящее время основным инструментом аппроксимации геопотенциала являются ряды по шаровым функциям. Однако, представляется очень сомнительным продолжающееся стремление при моделировании ГПЗ достигать высокой разрешающей способности с помощью обязательно *единой модели*. В параграфе 2.2. даётся обоснование того, что для отображения локальных особенностей поля необходимо привлекать новые базисные функции, отличающиеся от шаровых функций наличием пространственной локализации. При этом, конечно, не предполагается полный отказ от шаровых функций, которые достаточно хорошо проявляют себя при описании низко- и среднечастотной частей ГПЗ. Но для моделирования высокочастотного диапазона полезных сигналов в настоящее время всё чаще используются пространственно-локализованные базисные функции, которые обычно вслед за геостатистикой называются сферическими радиальными базисными функциями (СРБФ) и вейвлетами (wavelet-короткая волна). Делается вывод о том, что улучшение ситуации возможно только на основе разномасштабных методов моделирования, предполагающих разумное сочетание шаровых функций и вейвлет-анализа.

Такое разномасштабное моделирование сигналов с помощью СРБФ и соответствующих вейвлетов излагается в параграфе 2.3. Приведены определения и свойства основных понятий, указаны основные численные алгоритмы. Сферические вейвлеты доставляют удобный инструмент локальной аппроксимации, позволяющий как бы увеличивать мелкие детали. Вейвлеты отличны от 0 только в некоторой очень небольшой обследуемой окрестности на сфере, и поведение сигнала вне этой окрестности вообще во внимание не принимается. Следовательно, локально можно обследовать все более и более мелкие детали с повышенной точностью без ухудшения аппроксимации сигнала во всех остальных частях. Размер локальной области зависит от масштаба  $j$  вейвлета и уменьшается с увеличением  $j$ .

Другой эффективный метод аппроксимации ГПЗ – среднеквадратическая коллокация. Параграф 2.4. содержит достаточно подробное изложение теоретических основ этого метода и его основных алгоритмов. Отмечена возможность отказаться от традиционной гипотезы об изотропности ГПЗ и указаны ссылки на работы, описывающие коллокацию в условиях нестационарных полей. В конце параграфа проделан подробный сравнительный анализ методов коллокации и СРБФ, которые по своим целям и задачам имеют много общего.

В частности, одной из общих черт разномасштабного анализа и коллокации является тот факт, что те системы линейных алгебраических урав-

нений, к решению которых сводятся основные алгоритмы этих методов, часто по разным причинам оказываются плохо обусловленными. Это вызывает необходимость регуляризации. Необходимые для этого сведения изложены в параграфе 2.5. В основу положены основные методы регуляризации по А. Н. Тихонову [30].

По существу, те же идеи регуляризации лежат в основе методов оптимизации основных операторов физической геодезии, изложенных в параграфе 2.6. Смысл оптимизации состоит в том, что при использовании операторов удаётся отфильтровывать неизбежные помехи исходной функции непосредственно в процессе интегрирования. В случае отсутствия помех выведенные обобщения совпадают с известными классическими вариантами. Особый интерес, в частности, представляет распространённая задача оптимального суммирования возмущённых длинных рядов по шаровым функциям при моделировании различных трансформант ГПЗ.

Широкий круг задач физической геодезии, основанный на быстрых преобразованиях Фурье и Хартли, описан в параграфе 2.7. Кратко указаны основные свойства этих преобразований и их приложения к численным методам теории Молоденского. Эффективное использование классического преобразования Фурье основано на замечательном свойстве этого преобразования, позволяющем заменять сложные интегральные преобразования определённого класса (свёртки) в пространственной области простым умножением соответствующих образов в частотной области. При этом приходится работать только или в пространственной области, или только в частотной области, и важны только правильные зависимости амплитуд от частот, что полностью обеспечивает стандартный образ Фурье. Но, если необходимо выполнить спектральный анализ полезных сигналов или детальное моделирование ГПЗ, то тот факт, что спектр, получаемый с помощью стандартного преобразования Фурье, указывает зависимость амплитуд (или, более общо, мощности сигнала) только от частот и не даёт никаких сведений о положении спектра в пространстве, представляет собой серьёзный недостаток классического преобразования Фурье и обобщённых рядов Фурье. Оконное преобразование улучшает ситуацию, но не решает проблему. Нужен новый аппарат с новыми базисными функциями.

Такой аппарат называется вейвлетным анализом и кратко изложен в параграфе 2.8. Получить детальное распределение мощности нестационарного сигнала одновременно и относительно расположения в пространстве, и относительно частотного состава физически невозможно из-за известного принципа неопределённости Гейзенберга. Но физика их такова, что высокочастотные компоненты нестационарных сигналов обычно локальны, то есть занимают отдельные короткие промежутки времени (отдельные области небольших размеров). А длинноволновые компоненты, как правило, наоборот являются относительно протяжёнными. Это даёт



возможность выполнить такое преобразование сигнала, которое позволяет анализировать сигнал на различных частотах и различном временном (пространственном) разрешении одновременно. Перечислены основные признаки, которыми непременно должна обладать функция, чтобы стать вейвлетом, и указана техника непрерывного и дискретного вейвлет-преобразований. Двумерное вейвлет-преобразование невозможно непосредственно обобщить на сферу из-за другой топологии. Вследствие исследований по преодолению этих трудностей появилась теория сферических вейвлетов и СРБФ, описанная в параграфе 2.3.

Параграф 2.9. посвящён новому направлению вычислительной математики – искусственным нейронным сетям (ИНС). Область использования ИНС в настоящее время чрезвычайно широка. Доказано, что при соответствующем выборе структуры ИНС, её можно сделать *универсальным аппроксиматором*, то есть какую бы зависимость нам не предстояло вычислить, мы знаем, что существует нейросеть, способная сделать это с любой наперёд заданной точностью. Поэтому естественно желание выяснить возможности нового мощного математического метода и при решении задач геодезического профиля. В параграфе 2.9. приведены общие сведения об ИНС и перечислены наиболее показательные примеры эффективного использования ИНС в геодезии.

В последнем параграфе 2.10. описано мультиполярное представление геопотенциала по Максвеллу. Отмечено существование формулы перехода от максвеллова представления сферических функций к лапласову и обратно. Радиальные мультиполи (то есть производные ядра точечной массы), по сути, представляют собой частотно неограниченные СРБФ, и следовательно, могут успешно применяться для локального моделирования ГПЗ. Сравнительный анализ показал, что мультиполи справляются с этой задачей не хуже, чем, например, СРБФ в виде ядра Пуассона.

Проделанный анализ отечественных и зарубежных современных публикаций геодезической направленности позволяет сделать вывод, что к некоторым подходам к изучению ГПЗ внимание в определённом смысле ослабевает, а к некоторым, наоборот, усиливается. Особенно большой интерес последнее время вызывают работы, исследующие геодезические возможности теории вейвлетов и теории искусственных нейросетей (см. параграфы 2.3., 2.8., 2.9.). Складывается впечатление, что эти направления являются в настоящее время наиболее перспективными. Не ослабевает интерес к совершенствованию и приложениям коллокации в разных её концепциях (см. параграф 2.4.). Сравнительный анализ методов коллокации, СРБФ и сферических вейвлетов описан в конце параграфа 2.4. Использование СРБФ в теории и практике нейросетей отмечено в параграфе 2.9.

Разумеется, предположительно высказанные приоритеты никак не умаляют другие методы, упомянутые в отчёте или не упомянутые, речь идёт лишь о тенденциях в публикациях, и всё может быстро измениться.

Другая тенденция публикаций состоит в том, что все основные работы и разнообразные учебные пособия по современным подходам к представлению ГПЗ изданы за рубежом, что затрудняет работу наших специалистов.

## 2.12. Список использованных источников к главе 2

1. . Bjerhammar, A. A review of discrete methods in physical geodesy Text. // «Approximation Methods in Geodesy», ed. H. Moritz, H. Sunkel. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe. – 1978.
2. . Мориц Г. Современная физическая геодезия / Перевод с англ. под ред. Ю. М. Неймана. – М. : Недра, 1983. – 392 с.
3. Нейман Ю. М. Вариационный метод физической геодезии. – М., Недра. – 1979. – 200 с.
4. Жидков Н. П. Линейные аппроксимации функционалов. – М. : Изд. МГУ, 1977. – 264 с.
5. Нейман Ю. М., Бывшев В. А. Вариационный метод физической геодезии и коллокация / под ред. Б. В. Бровара. – М. : Научный мир, 2010. – 572 с.
6. Треногин В. А. Основы функционального анализа. – М. : Наука, 1980. – 496 с.
7. Freedden W., Schreiner M. Multiresolution Analysis by Spherical Up Functions // In Schriften Zur Functionanalysis und Geomathematik. Bericht 2. – 2003.
8. Tscherning C. C., Rapp R. H. Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations, and Deflections of the Vertical Implied by Anomaly Degree-Variance Models // Department of Geodetic Science. The Ohio State University. Columbus, Ohio, USA. Rep. 208. – 1974. – 94 p.
9. Нейман Ю. М., Сугаипова Л. С. Об адаптации глобальной модели геопотенциала к региональным особенностям (часть 1) // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2014. – № 3. – С. 3–12.
10. Нейман Ю. М., Сугаипова Л. С. Основы разномасштабной аппроксимации геопотенциала : монография. – М. : Изд-во МИИГАиК, 2016. – 218 с.
11. Тихонов А. Н. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Доклады Академии наук СССР, 1964. – Т. 156, № 2. – С. 268–271.
12. Elhabiby M. M. Wavelet Representation of Geodetic Operators // PhD Thesis, University of Calgary, Canada. – 2007.
13. Bentel K., Schmidt M., Gerlach C. Different radial basis functions and their applicability for regional gravity field representation on the sphere // Int J Geomath. – DOI 10.1007/s13137-012-0046-1.
14. Нейман Ю. М., Сугаипова Л. С. Сферические функции и их применение в геодезии: учеб. пособие. – М.:Изд-во МИИГАиК, 2005. – 87с.

15. Freedden W. On spherical spline interpolation and approximation. *Math. Methods Appl. Sci.* 3. – 1981. – P. 551–575.
16. Kearley, A. H. W., Sideris M. G., Krynski Y., Forsberg K., Schwarz K. P. White Sands revisited – a comparison of techniques to predict deflections of the vertical // *UCSE Report № 30007*, Division of Surveying Engineering, The University of Calgary, Alberta, Canada. – 1985. – 166 p.
17. Schmidt M., Fengler M., Mayer-Gurr T., Eicker A., Kusche J., Sanchez L., Han S. Regional gravity field modelling in terms of spherical base functions // *J Geodesy*. – 2007. – Vol. 81. – P. 17–38.
18. Qing L., Schmidt M., Sanchez L., Willberg M. Regional gravity field refinement for (quasi-) geoid determination based on spherical radial basis functions in Colorado // *Journal of Geodesy*. – 2020. – P. 94–99.
19. Schmidt M., Han S.-C., Kusche J., Sanchez L., Shum C.K. Regional high-resolution spatiotemporal gravity modeling from GRACE data using spherical wavelets // *Geophysical Research Letters*. – 2006. – Vol. 33. – L08403. – DOI: 10.1029/2005GL025509.
20. Driscoll J. R., Healy R. M. Computing Fourier transforms and convolutions on the 2-sphere // *Adv. Appl. Math.* – 1994. – Vol. 15. – P. 202–250.
21. Fengler J., W. Freedden, A. Kohlhaas, V. Michel, and T. Peters (2006). Wavelet modeling of regional and temporal variations of the earth's gravitational potential observed by GRACE // *Journal of Geodesy*. – DOI: 10.1007/s00190-006-0040-1. 2005.
22. Freedden W., Gervens T., Schreiner M. (1998) *Constructive Approximation on the Sphere (With Applications to Geomathematics)* // Clarendon Press, Oxford. – 1998. – ISBN: 9780198536826.
23. Michel V. *Lectures on Constructive Approximation // Fourier, Spline, and Wavelet Methods on the Real Line, the Sphere, and the Ball*. New York, Springer. – 2013. – 324 p.
24. Калиткин Н. Н. Численные методы. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
25. Болотин Ю. В., Вязьмин В. С. Сферический вейвлет-анализ аэрогравиметрических данных // *Геофизические исследования*. – 2012. – Т. 13, № 2. – С. 33–49.
26. Болотин Ю. В., Вязьмин В. С. Локальное многомасштабное оценивание аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии // *Геофизические исследования*. – 2014. – Т. 15, № 3. – С. 38–49.
27. Сугаипова Л. С. От интеграла Стокса к аппроксимации с помощью СРБФ // *Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка*. – 2018. – Т. 62, № 1. – С. 15–22.
28. Song J., Xue G., Kang Y. (2016). A novel method for optimum global positioning system satellite selection based on a modified genetic algorithm. *PLoS ONE*, 11(3), e0150005.

29. Тихонов А. Н., Большаков В. Д., Нейман Ю. М. Некорректные задачи геодезии // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1980. – № 1. – С. 54–63.
30. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М. : Наука, 1986. – 287 с.
31. Freedden W., Schneider F. Wavelet approximation on closed surfaces and their application to boundary-value problems of potential theory / Math. Meth. in the Appl. Sci. – 1998.
32. Keller W. Wavelets in Geodesy and Geodynamics // Walter de Gruyter, Berlin, New York. – 2004. – 279 p.
33. Попадъев В. В. Современное состояние метода коллокации // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2011. – № 5. – С. 10–15.
34. Fengler M. J., Freedden W., Gutting M. Multiscale Modelling from EIGEN-1s, EIGEN-2, EIGEN-GRACE01S, GGM01, UCPH2002-0.5, EGM96 // Proc. Second International GOCE User Workshop GOCE, The Geoid and Oceanography ESA-ESRIN, Frascati, Italy, 8–10 March 2004 (ESA SP-569, June 2004).
35. Канторович Л. В. Об одном методе приближённого решения дифференциальных уравнений в частных производных // ДАН СССР, 1934. – Т. 2, № 9. – С. 532–536.
36. Нейман Ю. М., Лебедев С. В., Нгуен Т. В. Приближённое решение двумерных задач средней квадратической коллокации с большим количеством исходных данных // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1987, № 2, с. 15-25
37. Moritz H. Least-squares collocation. Publ / Deut. Geod. Komm., A, 70, 1970.
38. Tierra A., Dalazoana R., De Freitas S. (2008). Using an Artificial Neural Network to Improve the Transformation of Coordinates between Classical Geodetic Reference Frames // Computers & Geosciences, 34. – P. 181–189.
39. Гофман-Велленгоф Б., Мориц Г. Физическая геодезия. Перевод с англ. под ред. Ю. М. Неймана. – М. : МИИГАиК, 2007. – 410 с.
40. Darbehesti N., Featherstone W. E. Non-stationary covariance function modelling in 2D least-squares collocation // J Geodesy. – 2009. – Vol. 83. – P. 495–508.
41. Kearsley A. H. W. Non-stationary estimation in gravity prediction problems. Report 256. Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, USA. – 1977.
42. Нейман Ю. М., Сугаипова Л. С. О ковариационном анализе неоднородного гравитационного поля Земли // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 5. – С. 15–22.

43. Нейман Ю. М., Сугаипова Л. С., Попадьев В. В. Сферические радиальные базисные функции с метрикой Махаланобиса // Геодезия и картография. – 2019. – Т. 80, № 10. – С. 2–10.
44. Нейман Ю. М., Лебедев С. В. Приближённое решение задач коллокации методом конечных элементов // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1986. – № 1. – С. 14–19.
45. Moritz H. Stepwise and Sequential Collocation // Geodetic Science, OSU, Report No. 203. – 1973.
46. Sanso F., Tscherning C. C. Fast spherical collocation: theory and examples // Journal of Geodesy (2003) 77:101–112.
47. Freedman W. On approximation by harmonic splines // Manuscr. Geodaet. 6. – 1981. – P. 193–244.
48. Dermanis A. Kriging and Collocation – a comparison. Manuscripta Geodaetica. – Vol. 9. – 1984. – P.159–167.
49. Neyman Yu. Improperly Posed Problems in Geodesy and Methods of their Solution. Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation. Edited by K. P. Schwarz. 1985, Calgary, Alberta, Canada Publication 60003. – p. 499–566.
50. Нейман Ю. М. Об условиях изотропности при вероятностном изучении гравитационного поля // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1974. – № 1. – С. 85–91.
51. Нейман Ю. М. Вероятностная модификация формулы Стокса при вычислении аномалии высот // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1974. – № 6. – С. 21–24.
52. Мориц Г. Теория Молоденского и GPS (Памяти М. С. Молоденского) // Геодезия и картография. – 2001. – № 6. – С. 7–17.
53. Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их приложение в управлении, связи и других областях. – М. : Наука, 1989. – 495 с.
54. Мазурова Е.М. Дискретные линейные преобразования в геодезии. – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. — 303 с.
55. Нуссбаумер Г. Д. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. – М. : Радио и связь, 1985. – 248 с.
56. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли // М. : Мир, 1990. – 175 с.
57. Sideris M. G. A Fast Fourier Transform method for computing terrain corrections // Manuscript Geodetic. – 1985. – Vol. 10, № 1. – P. 66–77.
58. Брейсуэлл Р. Н. Быстрое преобразование Хартли// ТИИЭР. – 1984. – Т. 72. – № 8. – С. 19–27.
59. Мазурова Е. М. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2004. – № 3. – С. 18–35.
60. Мазурова Е. М. Двумерное и матричное представление быстрого преобразования Фурье // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2004. – № 4. – С. 3–12.

61. Молоденский М. С. Определение фигуры геоида при совместном использовании астрономо-геодезических отклонений отвеса и карты аномалий силы тяжести // Труды ЦНИИГАиК, М. : Редбюро ГУГСК СССР, 1937. – Вып. 17.
62. Sideris M. G., Schwarz K. P. Solving Molodensky's series by Fast Fourier Transform techniques // Bull. Geodesique. – 1986. – Vol. 60. – P. 51–63.
63. Vassiliou A. A., Schwarz K. P. Study of the high frequency spectrum of the anomaly gravity potential // The University of Calgary, Division of Surveying Engineering Alberta, Canada. 1985. – Vol. 2, № 1. – 28 p.
64. Лапшин А. Ю. Классификация основных видов вейвлетов и их свойства // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2011. – № 3. – С. 18–22.
65. Фрейзер М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры ; пер. с англ. Я. М. Жилейкина. – М. : Бином. Лаб. знаний, 2007. – 487 с.
66. Дремин И. М., Иванов О. В., Нечитайло В. А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171, № 5. – С. 465–501.
67. Яковлев А. Н. Введение в вейвлет-преобразования : учеб. пособие. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003. – 104 с.
68. Лапшин А. Ю. Вычисление аномалии высоты при помощи вейвлет-преобразования // Сборник материалов республиканской научно-практической конференции, посвященной 20-летию независимости Республики Узбекистан и 90-летию кафедры геодезии, картографии и кадастра НУУз. (Ташкент, 13–14 мая 2011 г.). – Ташкент, 2011. – С. 134–136.
69. Мазурова Е. М., Лапшин А. Ю. Вычисление аномалии высоты с точностью первого приближения теории Молоденского в ближней зоне на основе вейвлет-преобразования // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2011. – № 6. – С. 41–43.
70. Сугаипова Л. С. О применении вейвлетов Абеля-Пуассона для анализа силы тяжести в локальном районе // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2017. – № 5. – С. 3–13.
71. Ярмоленко А. С., Скобенко О. В. Применение теории вейвлетов при сжатии и фильтрации геоинформации // Записки Горного института. – 2018. – Т. 234. – С. 612–623. – DOI: 10.31897/PMI.2018.6.612.
72. Матвеева Н. А., Утемов Э. В., Нургалиев Д. К. Определение глубинных источников аномалий гравитационного потенциала Земли на основе непрерывного «естественного» вейвлет-преобразования. Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей : материалы 44-й сессии Междунар. семинара им. Д. Г. Успенского. – М., 2017. – С. 256–260.
73. Хайруллина Н. А. Методика обработки и анализа данных глобального гравитационного поля Земли на сфере с использованием «естественного» вейвлет-преобразования [Текст] : специальность 25.00.10 – Геофи-

зика, геофизические методы поисков полезных ископаемых: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата геолого-минералогических наук / Хайруллина Наталья Александровна ; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт геологии и нефтегазовых технологий. – Казань, 2021. – 26 с.

74. Bogusz J., Klos A. Wavelet Analysis for Investigation of Precise GNSS Solutions' Credibility. Artificial Satellites. – Vol. 45, No. 4 – 2010. – DOI: 10.2478/v10018-011-0005-3.

75. Hornik K., Stinchcombe M., White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators // Neural Network. – 1989. – Vol. 2. – P. 359–366.

76. Хайкин С. Нейронные сети. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2006.

77. Бураков М. В. Нейронные сети и нейроконтроллеры : учеб. пособие, – СПб. : ГУАП, 2013. – 284 с.

78. Каллан Р. Основные концепции нейронных сетей / Пер. с англ. под ред. А. Г. Сивака. – М. : Издат. дом «Вильямс», 2001. – 287 с.

79. Бураков М. В. Генетический алгоритм: Теория и практика // СПб. : ГУАП. – 2008.

80. Ziggah Y.Y., Youjian H., Tierra A. R., Laari P. B. (2019). Coordinate Transformation between Global and Local Data Based on Artificial Neural Network with K-Fold Cross-Validation in Ghana // Earth Sciences Research Journal, 23(1). – P. 67–77.

81. Gullu, M. (2010). Coordinate transformation by radial basis function neural network. Scientific Research and Essays, 5. – P. 3141–3146.

82. Ziggah Y. Y., Hu Y., Issaka Y., Laari P. B. (2019). Least squares support vector machine model for coordinate transformation // Geodesy and Cartography, 45(1). – P. 16–27.

83. Kavzoglu T., Saka. M. H. Modelling local GPS/levelling geoid undulations using artificial neural networks // Journal of Geodesy 78(9). – 2005. – P. 520–527.

84. Gullu M., Yilmaz M., Yilmaz I. Application of Back Propagation Artificial Neural Network for Modelling Local GPS/Levelling Geoid Undulations: A Comparative Study. FIG Working Week 2011, Marrakech, Morocco, 18-22 May 2011.

85. Yilmaz M., Turgut B., Gullu M., Yilmaz I. (2017). Application of artificial neural networks to height transformation // Tehnicki Vjesnik, 24(2). – P. 443–448.

86. Zaletnyik P., Volgyesi L., Palancz B. (2004). Approach of the Hungarian geoid surface with sequence of neural networks // Geo-Imagery Bridging Continents, 20th ISPRS Congress 35. – P. 119–122.

87. Turgut B. (2016). Application of back propagation artificial neural networks for gravity field modelling // *Acta Montanistica Slovaca*, 21(3). – P. 200–207.
88. Kumi-Boateng B., Ziggah Y. Y. (2020). Toward the Fourth Industrial Revolution: Testing the Capability of Machine Learning in Predicting Normal Gravity // *RevCAD Journal of Geodesy and Cadastre*, 28. – P. 147–166.
89. Yilmaz M., Gullu M. (2014). A comparative study for the estimation of geodetic point velocity by artificial neural networks // *Journal of Earth System Science*, 123(4). – P. 791–808.
90. Preseren P. P., Stopar B. (2009). GPS orbit approximation using radial basis function networks // *Computers & Geosciences* 35(7). – P. 1389–1396.
91. Courine B. (2014). Deformation analysis of GPS auscultation network based on generalized regression neural network (GRNN). *Larhyss Journal*, (19)19, – p. 139–160.
92. Pantazis G., Alevizakou E. G. (2013). The use of artificial neural networks in predicting vertical displacements of structures // *International Journal of Applied Science and Technology*, 3(4). – P. 1–8.
93. Doma M. I., Shoney A. F. E. (2011). A new method for designing the optimum geodetic networks using genetic algorithms. *Journal of Engineering and Applied Science*. – 58(2), P. 109–125.
94. Нейман Ю. М., Сугаипова Л. С. Об определении параметров отражённого сигнала альтиметрии // *Геодезия и картография*. – 2019. – Т. 80, № 12. – С. 10–19.
95. Niu Z., Song M., Chen J. (2012). Comparative research on GPS height fitting methods based on neural network // *Procedia Engineering*, 28. P. 696–702.
96. Wu L.-C., Wang T.-S., Wei Z.-M. (2012). Conversion of GPS height with genetic neural network method // *Future Control and Automation*. – P. 479–485.
97. Мещеряков Г. А. О мультипольном представлении гравитационного потенциала // *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*. – 1974. – Вып. 19. – С. 63–72.
98. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Нахождение осей гравитационных мультиполей // *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*. – 1977. – Вып. 25. – С. 42–47.
99. Мещеряков Г. А. О нахождении полюсов сферических функций // *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*. – 1976. – Вып. 23. – С. 61–66.
100. Марченко А. Н. О вычислении моментов гравитационных мультиполей Земли // *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*. – 1977. – Вып. 25. – С. 35–41.



101. Marchenko A. N. Parameterization of the Earth's Gravity Field: Point and Line Singularities. Lviv Astronomical and Geodetical Society // Lviv, Ukraine, 1998. – P. 210.
102. Tenzer R., Klees R. The choice of the spherical radial basis functions in local gravity field modelling // *Studia Geophys Geod.* – 2008. – Vol. 52. – P. 287–304.

### **3. ЧИСТЫЕ И СМЕШАННЫЕ АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ, ПОЛУЧЕННЫЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАЗЕМНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ И ПО РЕЗУЛЬТАТАМ РАБОТЫ КОСМИЧЕСКИХ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ МИССИЙ CHAMP, GRACE, GRACE-FO, GOCE**

#### **3.1. Анализ данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам наземных измерений**

##### ***3.1.1. Актуальность исследования***

Высокоточное и детальное определение параметров гравитационного поля Земли относится к числу важнейших и наиболее сложных научных задач геодезии. Знание гравитационного поля является необходимым условием для решения широкого круга прикладных и фундаментальных задач, включая высокоточное позиционирование, навигацию, геофизические и геодинамические исследования, гидрологические расчёты, а также мониторинг состояния окружающей среды.

Пространственные координаты на всей поверхности Земли могут определяться с миллиметровой точностью относительно её центра масс на основе сигналов глобальных спутниковых навигационных систем (ГНСС). Однако остаётся нерешённой проблема однозначного определения физических высот. Лишь на отдельных территориях удаётся вычислять физическую высоту с погрешностью порядка сантиметра. Для большей части территорий земного шара ошибки превышают дециметровый уровень, а в горах и предгорьях они могут достигать нескольких метров. Вследствие этого координатно-временное и навигационное обеспечение (КВНО), основанное только на ГНСС, не является полным. Связано это главным образом с недостаточной точностью моделей гравитационного поля, поскольку физическая высота определяется потенциалом поля силы тяжести Земли. Гравитационный потенциал сложен для описания математическими моделями, поскольку находится в прямой зависимости от внутреннего строения Земли. Оно, в свою очередь, труднодоступно для непосредственного изучения. На практике геопотенциал можно лишь вычислить на основе косвенных измерений, главным образом, значений ускорения силы тяжести (гравиметрический метод). При этом связь измеряемых характеристик поля с потенциалом нелинейная и требует сложно-

го математического аппарата с одной стороны и глобальной гравиметрической изученности с другой.

Геопотенциал в точке также можно получить в комбинации геометрического нивелирования и гравиметрических определений. Однако вычисление потенциала таким способом имеет технологическое ограничение. При развитии протяжённых нивелирных сетей неизбежно накапливаются систематические погрешности, что, в свою очередь, приводит к увеличению неопределённости физической высоты по мере удаления от исходного пункта сети. Накапливаемая неопределённость также приводит к систематическим ошибкам дециметрового порядка.

Одним из перспективных способов решения проблемы построения системы физических высот является развитие сетей квантовых футштоков, позволяющих напрямую оценивать приращение гравитационного потенциала с использованием технологии хронометрического нивелирования. Тем не менее, технические средства хронометрического нивелирования в обозримом будущем будут оставаться в стадии лабораторных образцов, а в перспективе, даже при их практическом внедрении, будут являться наиболее дорогостоящим видом геодезического оборудования. Поэтому на перспективу следующих десятилетий решение задачи развития общемировой системы высот следует искать в совершенствовании классических технологий. И самая важная из них – технология моделирования гравитационного поля.

В настоящее время отсутствуют универсальные методики моделирования гравитационного поля Земли (ГПЗ). Это обусловлено разнообразием типов используемых измерительных данных, различиями в процедурах предварительной подготовки информации, а также применяемыми математическими моделями. Процесс подготовки данных является технологически сложным, поскольку требует учёта множества факторов. Для повышения качества моделирования ГПЗ применяется ряд вспомогательных преобразований, предполагающих привлечение дополнительных данных. Например, процедура топографического редуцирования, используемая для повышения точности интерполяции аномалий силы тяжести, требует применения детальных и точных цифровых моделей рельефа местности.

В связи с этим Международной ассоциацией геодезистов (IAG) создана рабочая группа в рамках Комиссии 2 «Гравитационное поле» (Commission 2. Gravity Field), одной из задач которой является разработка и стандартизация эффективных методик предварительной обработки данных и моделирования гравитационного поля Земли [1]. Деятельность по данному направлению координируется специализированными подкомиссиями IAG, в частности SC 2.2 «Geoid, Physical Height Systems and Vertical Datum Unification» и SC 2.4 «Gravity and Geoid» а также её региональными подразделениями (SC 2.4a–2.4e). Сравнительные исследования показыва-

ют, что различные комбинации процедур предварительной обработки приводят к существенно различающимся результатам моделирования ГПЗ на одних и тех же территориях. При этом уровень расхождений зависит от степени гравиметрической изученности региона, характера рельефа и типа используемых измерений [2].

Следовательно, выбор технологий обработки гравиметрических данных является важным элементом технологии построения единой системы физических высот. Для корректного моделирования гравитационного поля Земли, строго говоря, требуется полная гравиметрическая изученность всей земной поверхности. При этом объём и качество используемой измерительной информации напрямую определяют итоговое качество гравитационной составляющей координатно-временного и навигационного обеспечения (КВНО).

Международная ассоциация геодезистов (IAG) рекомендует для построения детальных моделей гравитационного поля совместно использовать любую доступную измерительную информацию. Например, в качестве рекомендуемых отмечены результаты наземных, воздушных и морских гравиметрических съёмок, цифровые модели рельефа местности и современные глобальные модели геопотенциала. Комбинирование разнородных измерений позволяет уменьшать погрешности моделирования характеристик глобального и регионального гравитационного поля [1, 3]. Особое внимание IAG предлагает уделять исследованию способов разработки региональных и локальных моделей на основе наземных гравиметрических наблюдений.

В Российской Федерации определение характеристик гравитационного поля связано с созданием на основе наземной гравиметрической информации высокоточных региональных цифровых моделей аномалий высоты, аномалий силы тяжести и отклонений отвесной линии, сопоставимых по точности с нивелирными и спутниковыми данными.

Точность моделей характеристик гравитационного поля находится в прямой зависимости от гравиметрической изученности территории и типа используемых геопространственных данных [4].

В Российской Федерации в результате многолетних геодезических и геофизических экспедиционных исследований накоплен значительный архив гравиметрических данных. К ним относятся материалы поисковых геофизических работ, карты аномалий силы тяжести в свободном воздухе, результаты астрономо-гравиметрических определений отклонений отвесных линий, а также материалы спутникового нивелирования. Каждый тип измерений требует применения специализированной методики предварительной обработки, что является необходимым условием для комплексного использования всего объёма доступной информации о гравитационном поле Земли при его моделировании.

Одним из важнейших факторов, влияющих на технологию моделирования гравитационного поля по наземным гравиметрическим данным, является использованная система высот при определении аномалии силы тяжести в свободном воздухе. Если при вычислении аномалии силы тяжести применялась нормальная высота, то такая аномалия классифицируется как смешанная (3.1)

$$\Delta g = g - \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial H} H^\gamma, \quad (3.1)$$

где  $g$  – измеренное значение силы тяжести;

$\frac{\partial \gamma}{\partial H}$  – вертикальная составляющая градиента нормального поля силы тяжести;

$H^\gamma$  – нормальная высота точки измерения силы тяжести.

В зарубежных источниках смешанную аномалию называют как «gravity anomaly». Однако в переводе термина есть принципиальный момент, заключающийся в том, что под «gravity anomaly» понимается аномалия, вычисленная по высоте, отчитываемой над уровнем моря. Таким образом, такие аномалии силы тяжести, следует различать, но часто они упоминаются в одном контексте.

Если для определения аномалий силы тяжести использовать высоты над уровнем эллипсоидом, то аномалия называется чистой (3.2)

$$\delta g = g - \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial H} H, \quad (3.2)$$

где  $H$  – геодезическая высота гравиметрического пункта.

В зарубежной литературе чистая аномалия силы тяжести обозначается как «gravity disturbance». Чистые аномалии силы тяжести в свободном воздухе отличаются от смешанных на величину, пропорциональную аномалии высоты, с коэффициентом, равным вертикальному градиенту нормального поля. Поскольку значения аномалий высот могут достигать нескольких десятков метров, разница в значениях аномалий силы тяжести между чистыми и смешанными типами может составлять единицы и даже десятки миллигал, что является значимой величиной с точки зрения задач высокоточного моделирования. Следовательно, одновременное использование в моделировании гравитационного поля смешанных и чистых аномалий без предварительного приведения их к единой системе является некорректным действием.

При моделировании гравитационного поля предпочтительнее использовать чистые аномалии силы тяжести. Это обусловлено тем, что при их

вычислении точки измерений строго относятся к физической поверхности Земли с использованием геодезических высот, отсчитываемых от общеземного референц-эллипсоида. Такая привязка обеспечивает согласованность с глобальными геодезическими системами координат и повышает физическую корректность краевой задачи.

До появления ГНСС высокоточное определение геодезических высот было недоступным при гравиметрических съемках, поэтому при вычислении аномалий силы тяжести использовались нормальные высоты. В результате аномалии относились не к физической поверхности Земли, а к промежуточной – теллуroidу. При решении краевой задачи Молоденского в качестве граничной поверхности принимается физическая поверхность Земли, и отсутствие геодезических высот компенсировалось применением метода последовательных приближений. Использование чистых аномалий позволяет избежать итерационных процедур при определении аномалий высот и уклонений отвесных линий, что способствует повышению точности и устойчивости моделирования гравитационного поля.

Методы позиционирования с помощью ГНСС, включая спутниковый относительный метод и метод точного точечного позиционирования (PPP), обеспечивают достаточную точность определения геодезических высот для корректного вычисления чистых аномалий силы тяжести в свободном воздухе. Это особенно актуально при проведении детальных наземных гравиметрических съемок, а также при аэрогравиметрических и морских измерениях, выполняемых с подвижных платформ. В связи с этим современные гравиметрические исследования проводят с обязательным сопровождением ГНСС-измерений.

Однако существующие архивы гравиметрической информации в Российской Федерации и за её пределами в подавляющей степени представлены картами смешанных аномалий силы тяжести. Значительная часть этих данных представлена в редукции Буге, которые не могут быть непосредственно использованы для моделирования глобального или регионального гравитационного поля. Таким образом, возникает актуальная задача предварительной обработки и преобразования разнотипных гравиметрических данных, полученных из различных источников, с целью их унификации и приведения к единой системе – чистым аномалиям, отнесенным к физической поверхности Земли.

В этой связи для обеспечения высокоточного моделирования гравитационного поля Земли особую важность приобретает анализ общей гравиметрической изученности территории Российской Федерации, оценка состава и типов доступных данных, а также идентификация потенциальных проблем, связанных с предварительной обработкой гравиметрической информации, включая различия в системах высот, методах редуцирования и пространственном разрешении.

### **3.1.2. Подготовка и анализ данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам наземных гравиметрических измерений**

Гравитационное поле Земли (ГПЗ) является объектом широкого научного изучения, и состояние его изученности постоянно развивается.

Наиболее полные базы данных ГПЗ сосредоточены в научных центрах, фондах, компаниях и институтах, которые осуществляют сбор, обработку и хранение информации, полученной различными методами и аппаратурой.

*Гравиметрические данные NCEI.* Одним из наиболее известных держателей гравитационных данных является Национальный центр атмосферных исследований (National Centers for Environmental Information, NCEI), который входит в состав Национального управления океанических и атмосферных исследований (National Oceanic and Atmospheric Administration, NOAA) в США. NCEI предоставляет доступ к широкому спектру геофизических данных, включая наземные и морские гравиметрические съемки, сетки, модели и геоиды [5].

Параметры данных включают координаты пункта (широту, долготу), аномалию Буге (суша), аномалию в свободном воздухе (океан), а также измеренное значение абсолютной силы тяжести и высоту над уровнем моря. Около 70 процентов информации представляют собой данные, полученные из наблюдений на региональных станциях и измерений абсолютной силы тяжести.

*Международное гравиметрическое бюро* (Bureau International Gravimetric (BGI)) [6] представляет собой научную службу Международной ассоциации геодезии – International Association of Geodesy (IAG), Международного союза геодезии и геофизики – International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG), Глобальной системы геодезических наблюдений – Global Geodetic Observing System (GGOS). BGI обеспечивает сбор данных и долгосрочную доступность результатов гравиметрических измерений, полученных на поверхности Земли, внося свой вклад в GGOS. В настоящее время она содержит более 12 миллионов относительных измерений, полученных в ходе наземных, морских и воздушных гравиметрических исследований.

Данные об измерениях силы тяжести предоставляются по запросу и могут быть получены для любого участка земной поверхности, не превышающего размеры  $20^\circ \times 20^\circ$ , и не более 10 000 значений. При запросе информации на территорию, превышающую указанные размеры, доступ к данным предоставляется, если запрашивающая сторона внесла свой

вклад в базу данных. Важно отметить, что полная база данных, охватывающая всю поверхность земного шара, не предоставляется.

*Гравиметрические данные публично-правовой компании «Роскадастр» (ППК «Роскадастр»)*. ППК «Роскадастр» предоставляет всем заинтересованным лицам сведения единой электронной картографической основы, пространственные данные и материалы федерального фонда пространственных данных (ФФПД), а также пространственные метаданные. Предоставление материалов и данных из ФФПД осуществляет через Федеральный портал пространственных данных (ФППД).

Федеральный портал пространственных данных является федеральной государственной информационной системой (ФППД, ГИС ФППД, портал) и создан в рамках национальной программы «Цифровая экономика Российской Федерации» [7]. Портал представляет собой интернет-витрину, которая позволяет пользователям всех категорий получить полную информацию об обеспеченности территории Российской Федерации картографическими и геодезическими материалами, хранящимися в государственных фондах пространственных данных (в настоящее время идет наполнение метаданных). Портал имеет открытый и закрытый сегменты. Для получения закрытой информации необходима авторизация в личном кабинете от имени руководителя организации [8].

*Российский федеральный геологический фонд*. Для выполнения анализа данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам наземных гравиметрических измерений, основным источником получения информации на территорию Российской Федерации является Единый фонд геологической информации о недрах (ЕФГИ) [9]. ЕФГИ – это федеральная государственная информационная система (ФГИС), содержащая реестр первичной и интерпретированной геологической информации о недрах, имеющихся в федеральном фонде геологической информации и его территориальных отделениях, фондах геологической информации субъектов РФ, органах государственной власти РФ и органах государственной власти субъектов РФ, в организациях, находящихся в ведении указанных органов государственной власти. В ЕФГИ содержится первичная и интерпретированная геологическая информация о недрах, представленная на электронных носителях и имеющаяся в федеральном фонде и его территориальных отделениях.

ЕФГИ является открытым для всех категорий пользователей. Реестр открытых данных включает в себя краткое описание, перечень геологических документов, хранящихся в Росгеолфонде, территориальных фондах геологической информации и их филиалах. Сведения в ЕФГИ представлены в виде таблицы с набором наиболее информативных атрибутов документа, интерактивную электронную карту изученности территорий разной направленности.



Интерактивная электронная карта изученности территорий России используется для максимально простого и быстрого получения краткой справочной информации по ключевым информационным блокам, имеющим отношение к недропользованию в нашей стране: изученность территории, недропользование, геологическое строение территории, геофизические карты (гравиметрическая изученность), геохимические карты, инженерно-геологические карты. Все материалы, доступные на сайте, подготовлены отраслевыми организациями, находящимися в ведении Роснедра: ФГБУ «ВСЕГЕИ», ФГБУ «Росгеолфонд», ФГБУ «ВНИИОкеангеология» и др.

В данном исследовании выполнен анализ возможности использования справочной информации открытого доступа в ЕФГИ, полученной на сайте в 2021 году (рис. 3.1) для подготовки данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести по результатам наземных гравиметрических измерений [9].

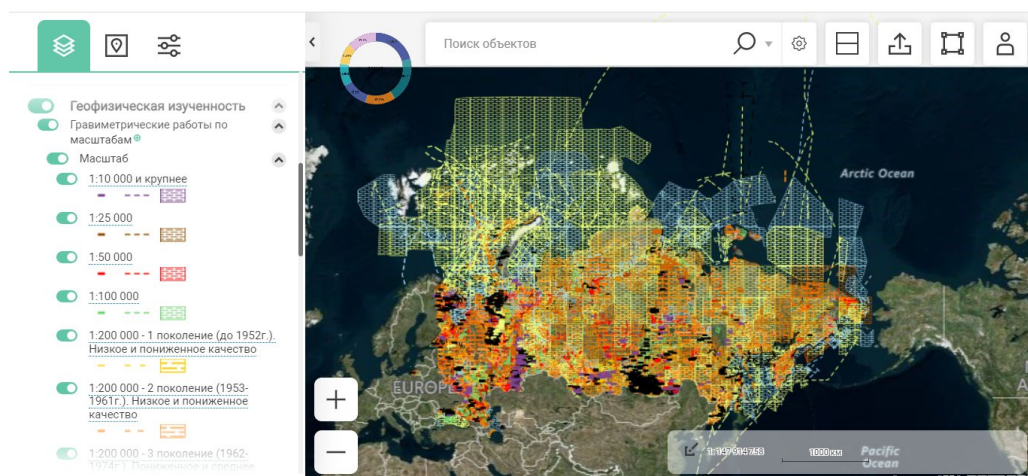


Рис. 3.1. Гравиметрическая изученность территории России [9]

Данные о наземных гравиметрических работах, выполненных в масштабах 1:10 000, 1:25 000, 1:50 000, 1:100 000, 1:200 000, 1:500 000, 1:1 000 000, на территории федеральных округов Российской Федерации в процентном соотношении к занимаемой площади представлены в табл. 3.1 и 3.2. Визуализация результатов, приведенных в табл. 3.1 и 3.2, представлена на картограммах гравиметрической изученности территории Российской Федерации (рис. 3.2–3.6).

Таблица 3.1

Данные о наземных гравиметрических работах, выполненных в масштабах 1:10 000, 1:25 000, 1:50 000, на территории федеральных округов Российской Федерации в процентном соотношении к занимаемой площади

	Федеральный округ	Площадь ФО (км <sup>2</sup> ) [10]	Масштаб 1:10 000		Масштаб 1:25 000		Масштаб 1:50 000	
			Площадь (км <sup>2</sup> )	%	Площадь (км <sup>2</sup> )	%	Площадь (км <sup>2</sup> )	%
1	Северо-Западный	1 686 972	33 739	2	50 609	3	590 440	35
2	Центральный	650 205	97 531	15	32 510	5	325 103	50
3	Приволжский	1 036 975	207 395	20	362 941	35	518 488	50
4	Южный	556 661	13 435	3 2	31 348	7 6	246 302	55 44
5	Северо-Кавказский	170 439	0	0	25 566	15	68 176	40
6	Уральский	1 818 497	317 295	7	454 624	25	454 624	25
7	Сибирский	4 361 727	130 852	3	436 173	10	1 090 431	25
8	Дальневосточный	6 952 555	0	0	208 577	3	695 255	10

Таблица 3.2

Данные о наземных гравиметрических работах, выполненных в масштабах 1:100 000 и 1:200 000, на территории федеральных округов Российской Федерации в процентном соотношении к занимаемой площади

	Федеральный округ	Площадь ФО (км <sup>2</sup> )	Масштаб 1:100 000		Масштаб 1:200 000	
			Площадь (км <sup>2</sup> )	%	Площадь (км <sup>2</sup> )	%
1	Северо-Западный	1 686 972	253 045,80	15	1 349 577,60	80
2	Центральный	650 205	130 041,00	20	552 674,25	85

Окончание табл. 3.2

	Федеральный округ	Площадь ФО (км <sup>2</sup> )	Масштаб 1:100 000		Масштаб 1:200 000	
			Площадь (км <sup>2</sup> )	%	Площадь (км <sup>2</sup> )	%
3	Приволжский	1 036 975	518 487,50	50	933 277,50	90
4	Южный	556 661	380 647,85	85	403 038,90	90
5	Северо-Кавказский	170 439	144 873,15	85	153 395,10	90
6	Уральский	1 818 497	727 398,80	40	1 727 572,15	95
7	Сибирский	4 361 727	654 259,05	15	3 489 381,60	80
8	Дальневосточный	6 952 550	1 042 882,50	15	5 214 412,50	75

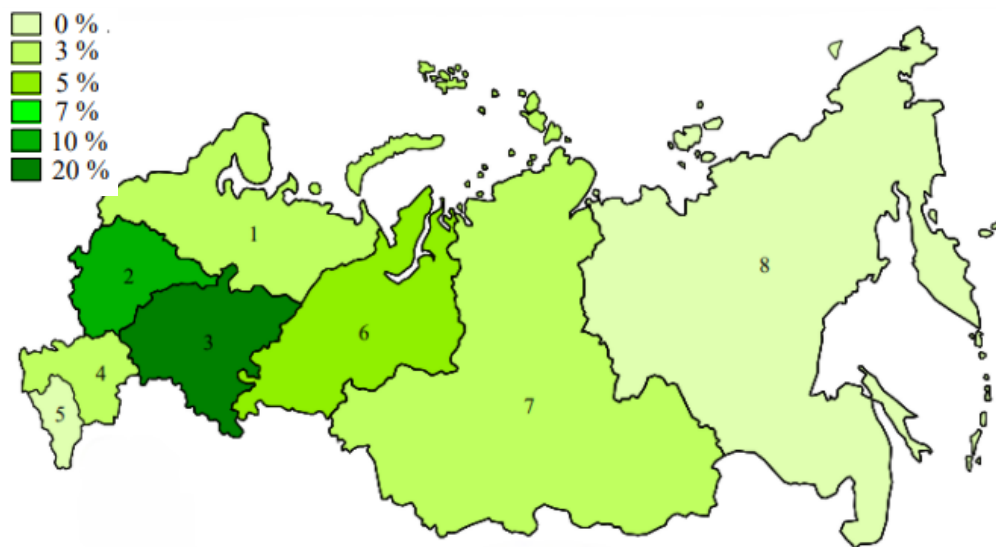


Рис. 3.2. Картограмма гравиметрической изученности территории Российской Федерации по федеральным округам в масштабе 1:10 000

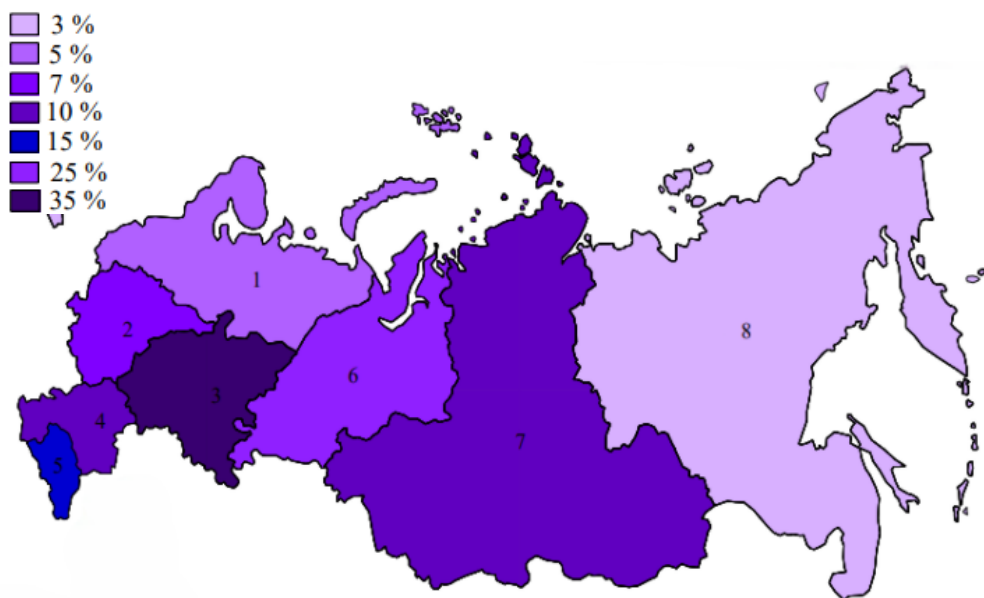


Рис. 3.3. Картограмма гравиметрической изученности территории Российской Федерации по федеральным округам в масштабе 1:25 000

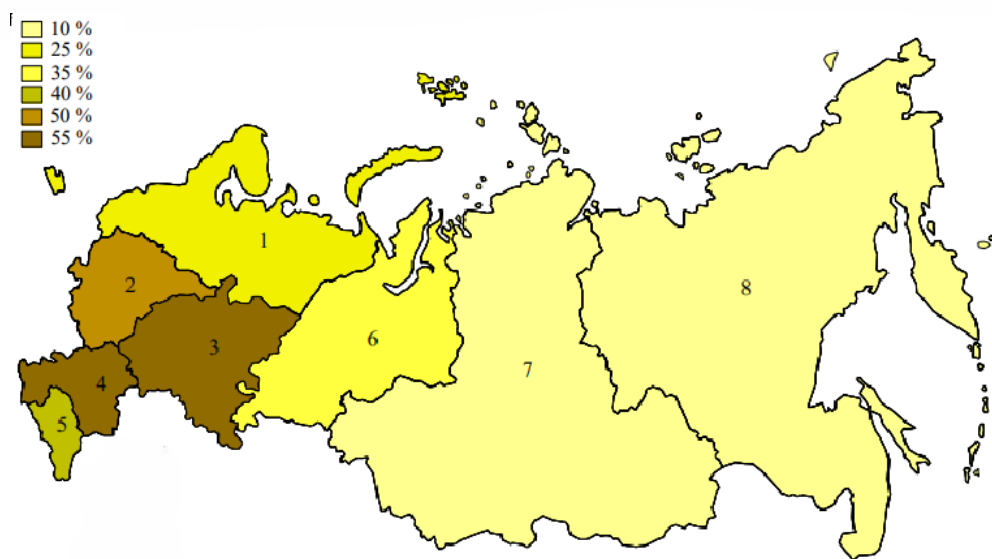


Рис. 3.4. Картограмма гравиметрической изученности территории Российской Федерации по федеральным округам в масштабе 1:50 000

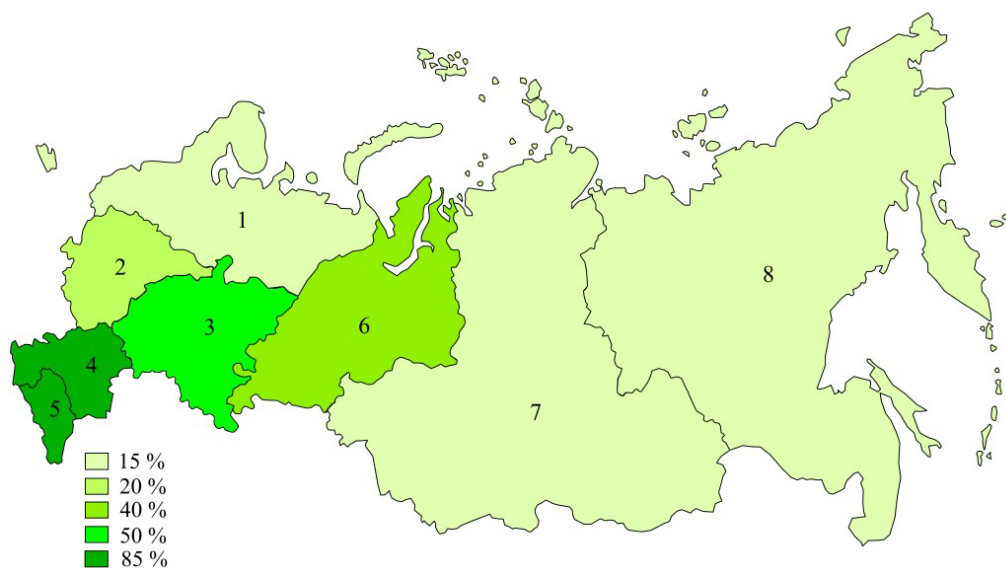


Рис. 3.5. Картограмма гравиметрической изученности территории Российской Федерации по федеральным округам в масштабе 1:100 000

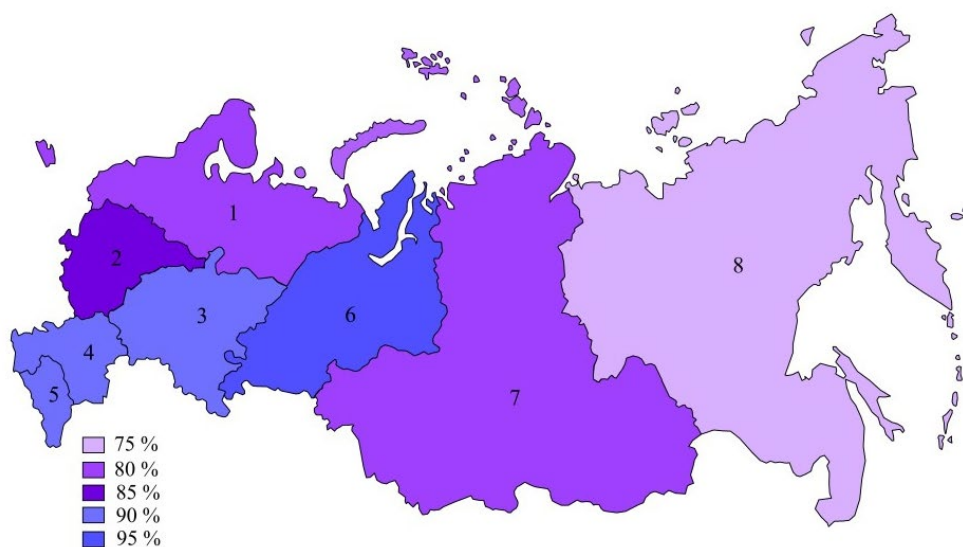


Рис. 3.6. Картограмма гравиметрической изученности территории Российской Федерации по федеральным округам в масштабе 1:200 000

Анализ данных наземных гравиметрических работ на территории Российской Федерации позволяет сделать следующие выводы:

площадь гравиметрической изученности территории России в масштабе 1:10 000 составляет 1 800 246,42 км<sup>2</sup>, что соответствует 10,51 % от площади территории Российской Федерации;

площадь гравиметрической изученности территорий России в масштабе 1:25 000 составляет 1 602 347,43 км<sup>2</sup>, что соответствует 9,36 % от площади Российской Федерации;

площадь гравиметрической изученности территорий России в масштабе 1:50 000 составляет 3 988 818,35 км<sup>2</sup>, что соответствует 23,29 % от площади Российской Федерации;

площадь гравиметрической изученности территорий России в масштабе 1:100 000 составляет 3 851 635,65 км<sup>2</sup>, что соответствует 22,49 % от площади Российской Федерации;

площадь гравиметрической изученности территории России в масштабе 1:200 000 составляет 13 823 329,60 км<sup>2</sup>, что соответствует 80,71 % от площади Российской Федерации.

При проведении анализа гравиметрических работ особое внимание уделено изученности территории Новосибирской области (НСО).

В связи с тем, что для разработки теории и алгоритмов создания высокоточных моделей ГПЗ и его трансформант на основе данных аномалий силы тяжести необходимо располагать результатами гравиметрических измерений с точностью не хуже 1 мГал, исходной информацией могут служить результаты гравиметрических работ, представленных в масштабах 1:200 000 и крупнее [11].

Данные о наземных гравиметрических работах, выполненных в масштабе 1:200 000, в процентном соотношении к площади территории районов Новосибирской области представлены в таблице 3.3 и в виде картограммы гравиметрической изученности (рис. 3.7).

*Таблица 3.3*

Данные о наземных гравиметрических работах, выполненных в масштабе 1:200 000, в процентном соотношении к площади территории районов Новосибирской области

№	Район НСО	Площадь района (км <sup>2</sup> ) [12]	Масштаб 1:200 000	
			Площадь (км <sup>2</sup> )	%
1	Кыштовский	11 101	7 770,7	70
2	Северный	15 569	6 219,2	40
3	Убинский	13 869	5 504,0	40

Окончание табл. 3.3

№	Район НСО	Площадь района (км <sup>2</sup> ) [12]	Масштаб 1:200 000	
			Площадь (км <sup>2</sup> )	%
4	Колыванский	10 573	3 171,9	30
5	Мошковский	2 590	259,1	10
6	Болотинский	3 400	337,4	10
7	Усть-Таркский	4 060	1 218,3	30
8	Венгеровский	6 312	6 312,0	100
9	Куйбышевский	8 817	2 646,9	30
10	Каргатский	5 600	5 600,0	100
11	Татарский	5 100	1 948,0	40
12	Чановский	5 515	5 515,0	100
13	Барабинский	5 400	5 400,0	100
14	Чистоозерный	5 688	2 275,2	40
15	Купинский	5 809	5 809,0	100
16	Здвинский	4 970	4 970,0	100
17	Доволенский	4 422	4 422,0	100
18	Чулымский	8 559	8 559,0	100
19	Баганский	3 368	3 368,0	100
20	Карасукский	4 320	4 320,0	100
21	Краснозерский	5 329	5 329,0	100
22	Кочковский	2 518	2 518,0	100
23	Коченевский	5 070	5 070,0	100
24	Новосибирский	3 496	3 496,0	100
25	Тогучинский	6 060	6 060,0	100
26	Ордынский	4 748	4 748,0	100
27	Искитимский	4 362	4 362,0	100
28	Маслянинский	3 450	103,6	3
29	Сузунский	4 745	142,4	3
30	Черепановский	2 936	87,2	3
		177 756		

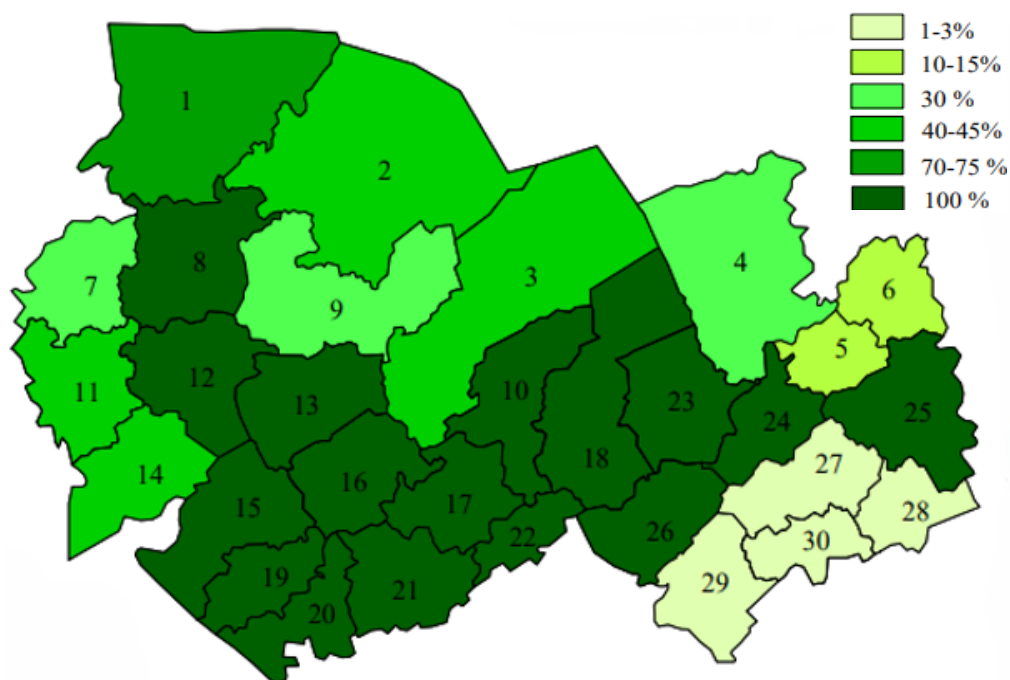


Рис. 3.7. Картограмма гравиметрической изученности  
в масштабе 1:200 000 районов Новосибирской области

Анализ информации о гравиметрических съемках в масштабах 1:10 000; 1:25 000; 1:50 000; 1:100 000; 1:200 000; 1:500 000; 1:1 000 000, выполненных на территории Новосибирской области, позволяет сделать следующие выводы:

площадь гравиметрической изученности территории Новосибирской области в масштабе 1:200 000 составляет 113 042,91 км<sup>2</sup>, что соответствует 63,6 % от площади территории НСО;

площадь гравиметрической изученности территории Новосибирской области в масштабе 1:1 000 000 составляет 108 416,50 км<sup>2</sup>, что соответствует 61,0 % площади территории НСО.

В настоящее время получение доступа к информационным ресурсам и системам, администрируемым ФГБУ «Росгеолфонд», в том числе к интерактивным картам изученности, предоставляется только на основании разрешения Федерального агентства по недропользованию [13].

Подготовка материала для выполнения анализа данных аномалий силы тяжести, полученных по результатам наземных гравиметрических измерений, осуществлена на основе информации, предоставленной Федеральным бюджетным учреждением «Территориальный фонд геологической инфор-



мации (ТФГИ) по Сибирскому федеральному округу» (Новосибирск) и Отделениями ТФГИ Субъектов РФ (Томск, Омск, Барнаул, Кемерово).

В период 2013–2014 гг. сотрудниками Сибирской государственной геодезической академии (ныне СГУГиТ) в рамках Государственного задания Минобрнауки РФ «Развитие геоинформационного обеспечения территорий на основе системы ГЛОНАСС, данных дистанционного зондирования Земли и других результатов космической деятельности» для успешного выполнения научно-исследовательской работы «Разработка и исследование комплексной технологии координатно-гравитационного обеспечения локальных спутниковых геодезических сетей активных (постоянно действующих) базовых станций (СГС АБС)» получены результаты наземных гравиметрических измерений. На территорию Новосибирской области и на ее ближайшие окрестности (в стокилометровой зоне – территория Томской, Омской, Кемеровской областей и Алтайского края) получены сведения о проведении гравиметрических съемок, которые содержатся в отчетах гравиметрических партий, выполнивших гравиметрическую съемку.

Полученные материалы гравиметрических съемок выполнены для прогноза глубинного геологического строения территории Западно-Сибирской плиты и ее обрамления. Небольшой объем исследований в масштабах 1:50 000 и 1:25 000 проводился в пределах месторождений полезных ископаемых и был направлен на поиски и уточнение границ рудоносных структур и залежей углеводородов.

Всего на указанной территории за период с 1954 по 2010 гг. силами разных организаций выполнено свыше 100 съемок масштаба от 1 : 1 000 000 до 1:10 000.

Полученные материалы гравиметрических съемок в масштабах 1:200 000 и 1:100 000 на указанную территорию представлены в виде картограмм (приложение А, рис. А.1–А.4).

Основными особенностями гравиметрической изученности исследуемой территории являются [14]:

- качество гравиметрических работ, выполненных в разное время, весьма отличается друг от друга;
- до 30 % территории покрыто съемками, выполненными до 1957 года, которые не соответствуют современным требованиям выполнения гравиметрических работ;
- 35 % гравиметрических съемок масштаба 1:100 000 и крупнее выполнено без соблюдения требований к топографо-геодезическому обеспечению, предусматривающему жесткие нормы погрешности определения значений высот и координат пунктов;
- гравиметрические съемки масштабов 1:200 000, 1:100 000 и крупнее, выполненные с начала 1960-х годов и до 2010 г. увязаны с пунктами госу-

дарственных опорных сетей I и II класса и между собой, выполнены по современным методикам, надежными приборами. Их качество не подвергается сомнению.

Визуализация результатов анализа гравиметрических работ на территорию Новосибирской области и ее ближайшие окрестности (в стокилометровой зоне – территория Томской, Омской, Кемеровской областей и Алтайского края) представлена на картограммах (рис. 3.8, 3.9).

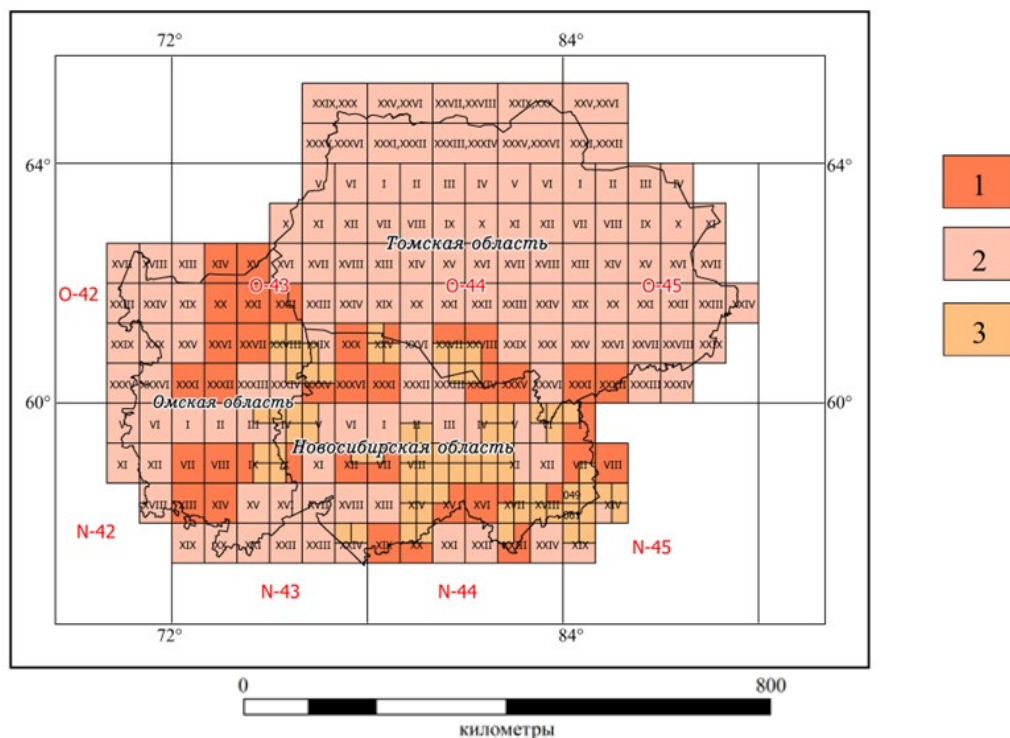


Рис. 3.8. Картограмма результатов гравиметрических съемок в масштабах 1:100 000 и 1:20 000: 1 – представляет исторический интерес (масштаб 1:200 000); 2 – информация не полная; 3 – представляет исторический интерес (масштаб 1:100 000)

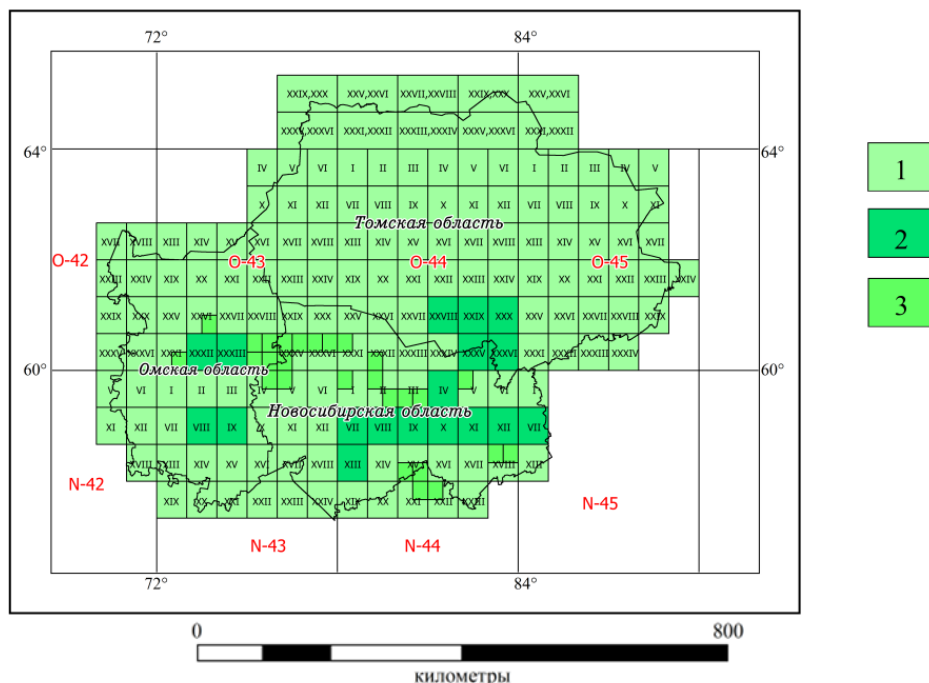


Рис. 3.9. Картограмма результатов гравиметрических съемок в масштабах 1:100 000 и 1:20 000: 1 – результаты гравиметрических съемок (масштаб 1:200 000); 2 – информация не полная и низкое качество материала; 3 – результаты гравиметрических съемок (масштаб 1:100 000)

Анализ материалов гравиметрических работ на исследуемую территорию позволил выбрать 3 500 опорных пунктов гравиметрических сетей 2 и 3 классов, на которых определены значения силы тяжести с погрешностью от  $\pm 0,03$  мГал до  $\pm 0,05$  мГал.

Планово-высотное обеспечение гравиметрических работ на опорных пунктах выполнено в соответствии с требованиями инструкции по развитию высокоточной государственной гравиметрической сети России [15]. Плотность опорных гравиметрических пунктов на исследуемой территории неравномерная, есть зоны без покрытия пунктов. Плотность гравиметрических пунктов увеличивается к юго-востоку, что соответствует требованиям проведения гравиметрических работ на территориях с горным и предгорным рельефом. На юге и юго-западе территории преобладает равнинный рельеф, что сказывается и на плотности пунктов, их количество уменьшается. На севере Новосибирской области, на границе с Томской областью при гравиметрических исследованиях выполнена более детальная гравиметрическая съемка.

Расположение опорных гравиметрических пунктов на исследуемой территории приведено на рис. 3.10.

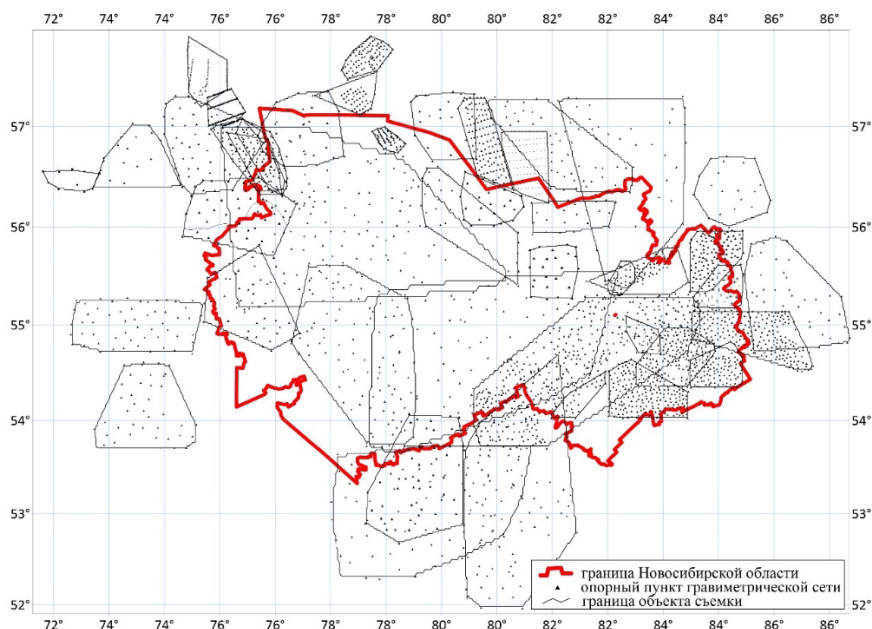


Рис. 3.10. Расположение опорных пунктов гравиметрических сетей 2 и 3 классов на территории Новосибирской области и прилегающих территорий

По наземным измерениям силы тяжести на территории Новосибирской области и ее ближайших окрестностей в стокилометровой зоне (территория Томской, Омской, Кемеровской областей и Алтайского края) вычислены аномалии силы тяжести в редукции за свободный воздух:

$$\delta g = g_{uz} - \gamma^0 + 0,3087h, \quad (3.3)$$

где  $h$  – геодезическая высота для «чистых» аномалий или нормальная высота для «смешанных»;

$\gamma^0$  – нормальное значение силы тяжести на поверхности эллипсоида относимости получено по формуле Сомильяна [16]:

$$\gamma^0 = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (3.4)$$

где  $k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1$ ;

$a$  и  $b$  – соответственно большая и малая полуось эллипсоида;

$\gamma_p$  и  $\gamma_e$  – соответственно полярное и экваториальное нормальное значение силы тяжести;

$e^2$  – квадрат эксцентриситета эллипсоида;

$B$  – геодезическая широта. За эллипсоид относимости принят эллипсоид WGS-84.

Редуцирование нормального значения силы тяжести на высоту точки выполнялось по формуле:

$$\gamma^h = \gamma^0 - 0,3087h, \quad (3.5)$$

где  $h$  – высота точки измерения силы тяжести.

На рис. 3.11 приведена картосхема смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам гравиметрических работ на территории Новосибирской области и прилегающих территориях.

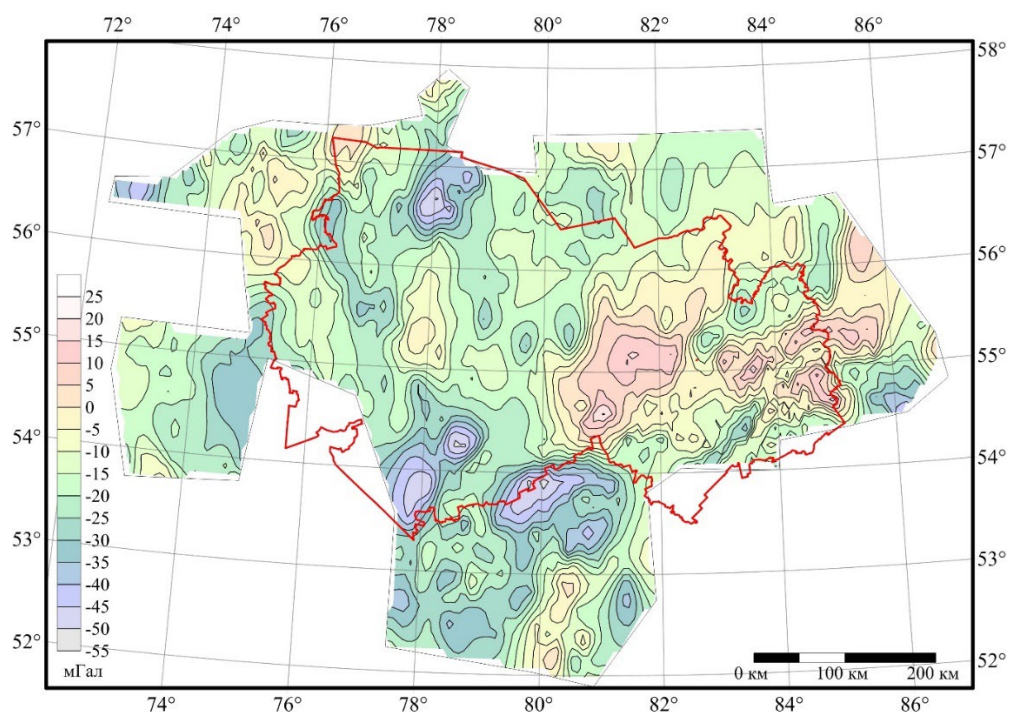


Рис. 3.11. Картосхема смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам гравиметрических работ на территории Новосибирской области и прилегающих территориях

На рис. 3.12 приведена картосхема чистых аномалий силы тяжести, полученных по результатам гравиметрических работ на территории Новосибирской области и ее ближайших окрестностях в стокилометровой зоне (территория Томской, Омской, Кемеровской областей и Алтайского края).

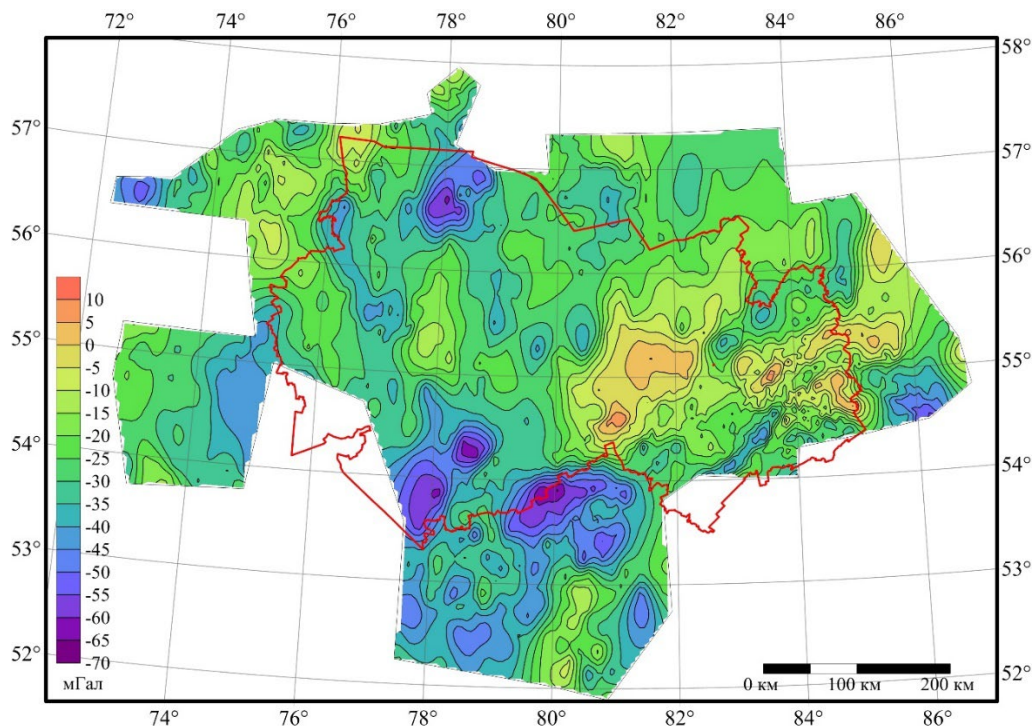


Рис. 3.12. Картосхема чистые аномалии силы тяжести, полученных по результатам гравиметрических работ на территории Новосибирской области и прилегающих территориях

**Выводы по 3.1.2.** По данным, предоставленным ФГУ «Территориальный фонд геологической информации (ТФГИ) по Сибирскому федеральному округу» выполнена оценка качества результатов гравиметрических работ на территорию Новосибирской области и ее ближайшие окрестности (в стокилометровой зоне – территория Томской, Омской, Кемеровской областей и Алтайского края), которая позволяет сделать следующие выводы:

- территория Новосибирской области покрыта гравиметрическими съемками масштаба 1:200 000 требуемого качества на 39,34 %; территория Омской области – 21,43 %; территория Томской области – около 1 %;



- создана база данных гравиметрической информации на исследуемую территорию в масштабах 1:200 000, 1:100 000 в цифровом виде;
- точность аномалий силы тяжести, полученных по наземным гравиметрическим измерениям на исследуемую территорию, соответствует требованиям точности гравиметрической съемки масштабов 1:200 000 и 1:100 000;
- для анализа аномалий силы тяжести, полученных по данным наземных гравиметрических измерений, необходимо использовать результаты гравиметрических съемок с учетом современных требований, предъявляемых к точности геодезической основы и гравиметрической аппаратуры.

### ***3.1.3. Подготовка материала для выполнения анализа данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам наземных, спутниковых и нивелирных измерений***

Помимо архивов наземных гравиметрических измерений, имеются два дополнительных источника информации о гравитационном поле Земли: каталоги государственной нивелирной сети, а также результаты астрономических и ГНСС-определений на пунктах государственной геодезической сети (ГГС). Разность геодезической высоты, определяемой по ГНСС-наблюдениям, и нормальной высоты формирует геометрическую аномалию высоты. Разность астрономических и геодезических координат используется для вычисления отклонений отвесной линии в меридиане и первом вертикале. Указанные данные применяются при определении параметров гравитационного поля и решении ряда дополнительных задач.

Первая задача – оценка соответствия моделей гравитационного поля Земли наземным измерениям. Аномалии высот, вычисленные с использованием математической модели геопотенциала, сравниваются с разностью, образованной из геодезических и нормальных высот на нивелирных пунктах. Эта разность является одним из важным показателем точности моделирования гравитационного поля.

Вторая задача – выявление локальных геометрических деформаций нивелирной сети на основе совместной обработки результатов нивелирных, астрономических и спутниковых измерений. При построении моделей гравитационного поля в ряде стран оцениваются деформации высотных сетей, обусловленные накоплением систематических ошибок [17, 38].

Третья задача – разработка высокоточных региональных моделей гравитационного поля Земли. В источнике [19] предложен способ определе-

ния локальной модели внешнего гравитационного поля на ограниченных участках земной поверхности, названный автором операторным. Данный способ предусматривает решение задачи моделирования гравитационного поля не только в виде функции двух координат, описывающей трансформанту квазигеоида, но и в виде трёхмерного объекта – потенциала ускорения силы тяжести как функции трёх координат:

$$W = W(B, L, H, c), c = (L, B, H, H\gamma, \lambda, \varphi, \alpha, g, \zeta, C_{nm}, S_{nm}), \quad (3.6)$$

где  $B, L, H$  – геодезические долгота, широта и высота на общеземном эллипсоиде (определяемые по ГНСС-измерениям);

$c$  – вектор параметров модели характеристик гравитационного поля, полученный по совокупности измерительных данных, доступных на локальном участке;

$H\gamma$  – нормальная высота точки из каталогов государственной нивелирной сети;

$\lambda, \varphi, \alpha$  – астрономические долгота, широта и азимут;

$g$  – ускорение силы тяжести;

$\zeta$  – аномалия высоты;

$C_{nm}, S_{nm}$  – сферические гармонические коэффициенты глобальной геопотенциальной модели (например, EGM2008).

Все трансформанты гравитационного поля одновременно используются при решении обратной задачи – определении параметров модели  $W(B, L, H, c)$ , что не реализовано в интегральном подходе М. С. Молоденского. При этом частично операторный способ реализован методом конечных элементов в программном комплексе Digital Finite Element Height Reference Surface (DFHRS) [20]. В нем предусмотрена возможность определения параметров урванной поверхности только по данным астрономических определений уклонений отвесных линий [21]. Это обеспечивает использование данных квазизенитных астрономических определений, которые являются самостоятельным источником информации при моделировании гравитационного поля Земли.

Четвёртая задача – аппроксимация значений аномалии силы тяжести в районах с недостаточной гравиметрической изученностью. На основе подхода, предложенного в [19], методом среднеквадратического прогноза осуществляется оценка средних значений силы тяжести по совокупности данных: уклонения отвесных линий, полученные из астрономических определений; аномалии высот, определённые по результатам спутникового нивелирования; параметры глобальных моделей гравитационного поля.



Указанный подход будет полезен на территориях с фрагментарным охватом гравиметрической съёмкой масштаба 1:200 000, включая Новосибирскую область, где участки, не охвачённые съёмкой, составляют 40 % от общей площади.

Пятая задача – преобразование смешанных аномалий силы тяжести в чистые с использованием информации из каталогов ГНС и ГГС. Преобразование выполняется на основе существующих глобальных моделей высот с уточнением на пунктах ГГС и ГНС.

По данным ППК «Роскадастр» на 2020 г., на территории Новосибирской области расположено более 3 600 пунктов ГГС. Из них 133 пункта относятся к 1-му классу, 1 147 – ко 2-му классу. Количество пунктов с астрономическими определениями координат составляет около 200. Количество пунктов ГГС, на которых проведены ГНСС-измерения на 2016 г., составляет 327, что соответствует 9 % от общего числа (рис. 3.13) [22]. Распределение пунктов носит неравномерный характер: в малонаселённых северных районах Новосибирской области ГНСС-измерения на пунктах ГГС не выполнялись либо не включались в состав регионального отделения фонда пространственных данных. Плотность пунктов с ГНСС-измерениями составляет 1 пункт на 500 км<sup>2</sup>.

В результате подготовки материалов для анализа данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам наземных спутниковых и нивелирных измерений, установлено, что количество пунктов ГГС с выполненными ГНСС-наблюдениями составляет 9 % от общего числа пунктов государственной геодезической сети на территории Новосибирской области. Дополнительные спутниковые наблюдения на пунктах ГГС позволят существенно повысить информативность фонда измерительной информации о гравитационном поле Земли, без привлечения дорогостоящих наземных гравиметрических съёмок.

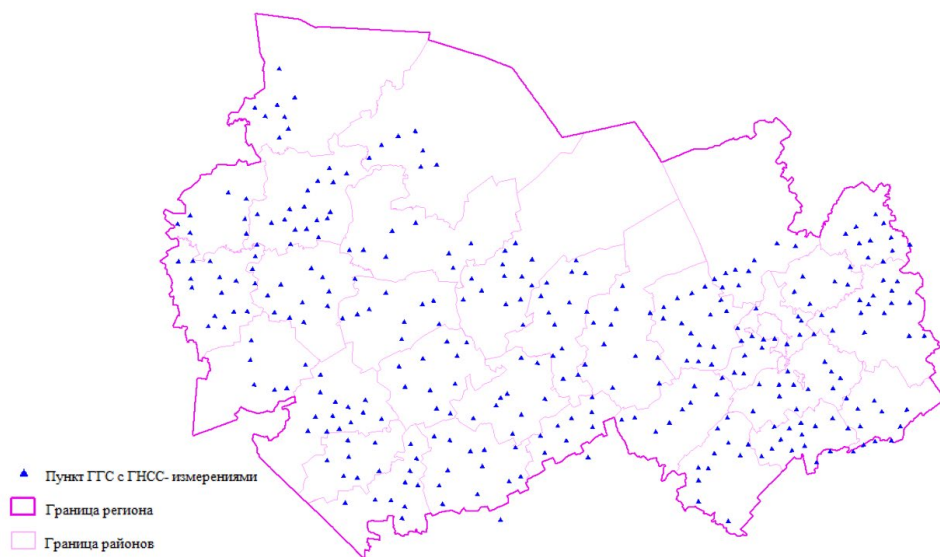


Рис. 3.13. Распределение пунктов ГГС Новосибирской области, на которых выполнены ГНСС наблюдения

### **3.1.4. Предварительная обработка архивов гравиметрической информации**

#### **3.1.4.1. Методологические аспекты обработки и согласования гравиметрических данных в единой информационной системе**

Архивные данные измерений, характеризующих гравитационное поле Земли, могут существенно различаться, в зависимости от принятых моделей предварительной обработки. Доступ к исходной измерительной информации позволяет избежать большинства проблем при обработке данных. В противном случае для корректного использования архивных гравиметрических данных требуется применение ряда преобразований, в отдельных случаях – допущений. Поэтому для формирования обобщённой базы данных гравиметрических измерений необходимо включать дополнительную атрибутивную информацию, обеспечивающую автоматическое преобразование и согласование разнородных данных.

В ходе обработки в измеренные значения силы тяжести на гравиметрических пунктах вводятся поправки за геодинамические эффекты, выбор которых зависит от требуемой точности определения ускорения силы тяжести, а также техническими регламентами. Так согласно ГКНИП 04-122-

03 [15] при развитии государственной гравиметрической сети требуется учитывать влияние атмосферного давления, движения полюса Земли, приливов, вызванных Солнцем и Луной, а также вводить поправки за уровень грунтовых вод.

Особое значение при реализации гравиметрических сетей имеет выбор метода учёта приливных вариаций силы тяжести, поскольку амплитуда поправок превышает величину других геодинамических эффектов. В ГКНИП 04-122-03 [15] отсутствуют формулы расчёта твердого и океанических приливов. Указано лишь, что поправки должны рассчитываться с использованием программы «Maгia», встроенной в программное обеспечение абсолютного гравиметра.

Существуют три концепции учёта приливных эффектов: полный учёт прилива (tide-free), средний прилив (mean-tide) и нулевой прилив (zero-tide). Приливообразующий потенциал включает постоянную (независящую от времени) и переменную составляющие. В концепции tide-free влияние притяжения Луны и Солнца исключается из всех величин, характеризующих фигуру Земли и параметры гравитационного поля. В концепции mean-tide из данных удаляется только переменная часть потенциала, а постоянная составляющая сохраняется в геопотенциале и геометрической фигуре Земли. В концепции zero-tide постоянная и переменная составляющие исключаются только из величин, характеризующих гравитационное поле, но сохраняются в параметрах фигуры Земли.

Международная ассоциация геодезистов рекомендовала использовать концепцию mean-tide для построения Международной системы высот, что закреплено резолюцией 2015 г. [23]. Формулы и модели расчёта поправок за приливные эффекты, атмосферные и океанические нагрузки, а также за смещение полюса, стандартизированы в соглашениях МСВЗ 2010 г. [24].

Для корректного совместного использования данных наземной и космической гравиметрии необходимо согласование методов учёта геодинамических факторов. В базе данных гравиметрической информации должен быть предусмотрен отдельный атрибут, идентифицирующий тип используемой концепции учёта приливов и других эффектов. В программе обработки должны быть реализованы классы учёта геодинамических эффектов в соответствии с международными или государственными стандартами, включая функции перерасчёта поправок.

При определении аномалий силы тяжести (АСТ) в гравиметрических пунктах в первую очередь вычисляются значения нормальной силы тяжести (НСТ). Параметры нормального поля силы тяжести могут меняться в связи с обновлением руководящих нормативных документов. Для гравиметрических данных, полученных в разные эпохи, требуется согласование параметров нормального поля. В Российской Федерации для большей части архивных гравиметрических карт НСТ рассчитывались по междуна-

родной формуле Гельмерта 1907 г. В действующей инструкции по гравиразведке [25] рекомендовано использовать указанную формулу при определении аномалий силы тяжести.

В 2016 г. утверждены новые значения гравитационного параметра, ускорения свободного падения на полюсе и экваторе, а также потенциала на уровне эллипсоида (Постановление Правительства Российской Федерации от 24 ноября 2016 г. № 1240 «Об установлении государственных систем координат, государственной системы высот и государственной гравиметрической системы»). Указанные параметры определяют нормальное поле для эллипсоида системы координат ГСК-2011. За рубежом для вычисления АСТ рекомендуется применять эллипсоид GRS-80 [26], параметры которого отличаются от параметров эллипсоидов Красовского и ГСК-2011. При отсутствии учёта различий в используемых уровнях эллипсоидов возникает систематическая ошибка, величина которой достигает 2 мГал. Таким образом, наличие в базе данных атрибута, идентифицирующего тип используемого эллипсоида для расчёта нормального поля, необходимо для строгого перехода между системами. В базе данных должна быть предусмотрена таблица гравиметрических эллипсоидов, а в записях с измерениями – указана информация об использованном уровне эллипсоида и гравиметрических постоянных.

Возможность восстановления исходных измерений из отчётов по гравиметрическим съёмкам является принципиально важным при формировании первичных баз данных. Большинство проблем согласования архивных гравиметрических данных преодолимо при наличии доступа к исходным измерениям. В этом случае преобразование сводится к корректному описанию функций перехода между эллипсоидами или учёту геодинатических эффектов. Однако исходные каталоги гравиметрических наблюдений не всегда доступны. Восстановление данных невозможно, если гравиметрическая карта выполнена в условном уровне или условной системе координат. В таких случаях преобразование данных сопровождается значительной потерей точности и требует привлечения информации топографических карт.

Указанная процедура не требуется для карт мелких масштабов, поскольку средняя квадратическая ошибка (СКО) интерполяции АСТ на таких картах превышает порядок величин, характеризующих различие в параметрах геодезических эллипсоидов и систем высот.

Преобразования координат точек гравиметрических измерений также необходимо выполнять при определении БД гравиметрической информации. Все российские архивные каталоги и карты составлены в системе СК-42. В соответствии с требованиями нормативных документов новые материалы гравиметрических съёмок должны передаваться в системе ГСК-2011 [27]. Предельно допустимая ошибка определения координат грави-

метрических пунктов для крупнейшего масштаба съёмки (1:5 000) составляет 2 м относительно государственной геодезической сети. Ошибка семи-параметрического преобразования из СК-42 или СК-95 в ГСК-2011 превышает указанное значение. Следовательно, программное обеспечение должно предусматривать преобразование систем координат при работе с первичными базами данных гравиметрической информации, а в базе данных должен быть реализован атрибут принадлежности координат, по которому возможны преобразования с использованием стандартных библиотек.

### ***3.1.4.2. Преобразование смешанных аномалий силы тяжести в чистые***

При моделировании гравитационного поля одновременное использование чистых и смешанных аномалий недопустимо, поскольку их отличия достигают целых милигалов, что превосходит предельно допустимую полную ошибку интерполяции АСТ по самой мелкомасштабной карте 1:500 000 согласно [25]. Поэтому для гравиметрических карт всех масштабных рядов требуется преобразование аномалий силы тяжести в общую систему высот. Проблема преобразования чистых аномалий силы тяжести в смешанные подробно рассмотрена в статье [28]. Авторы исследования считают возможным переход без потери точности при наличии исходных каталогов измерений. Для преобразования смешанных АСТ необходимо восстановить в точке наблюдения геодезическую высоту над эллипсоидом относимости. Для мелкомасштабных карт достаточно использовать аномалии высот, вычисленные по глобальным моделям геопотенциала типа EGM2008 или ГАО-2012. Критерием допустимости преобразования смешанных аномалий силы тяжести служит соответствие величины ошибки вычисления аномалии высоты ошибке определения высоты гравиметрических пунктов относительно государственной системы высот [25]. Ошибка определения аномалии высоты по глобальным моделям оценивается величиной 20 см [11]. Следовательно, преобразование смешанных АСТ в чистые допустимо для масштабов 1:500 000–1:100 000 при использовании моделей геопотенциала. Указанные модели позволяют определять аномалии силы тяжести вне горных массивов с точностью, достаточной для преобразования. СКО определения высот гравиметрических пунктов составляет 5–10 см для детальных гравиметрических съёмок. Поэтому для преобразования каталогов крупномасштабных съёмок требуется применение иной методики.

Если геодезическая высота пункта гравиметрических наблюдений отсутствует в каталоге, то ее можно восстановить по моделям геопотенциала с привлечением данных ГНСС-определений на пунктах ГГС и ГНС. Искомая

геодезическая высота в гравиметрическом пункте будет представлять собой следующую комбинацию (3.7)

$$H_P = H_P^\gamma + \zeta_P(GGM) + \delta\zeta_P(GGM) + \delta H_P^\gamma, \quad (3.7)$$

где  $H_P^\gamma$  – нормальная высота точки наблюдений из каталогов или снятая с топографической карты крупного масштаба;

$\zeta_P(GGM)$  – аномалия высоты, вычисленная по глобальной модели геопотенциала с использованием требуемого уровенного эллипсоида;

$\delta\zeta_P(GGM)$  – систематическая ошибка определения аномалии высоты на гравиметрическом пункте  $P$ ;

$\delta H_P^\gamma$  – локальная систематическая ошибка нивелирной сети.

Задача повышения точности преобразования смешанных АСТ из архивных каталогов гравиметрической информации сводится к оценке параметра  $\Delta H = \delta\zeta_P(GGM) + \delta H_P^\gamma$ . Эта комбинация будет достигать метровых значений и ее трудно разделить на составляющие. Ожидается плавное изменение функции  $\Delta H$ . Её параметры следует определять эмпирически на пунктах государственной нивелирной сети с использованием спутниковых измерений относительным методом или PPP. Значения поправок  $\Delta H$  требуется интерполировать в точки гравиметрических измерений с применением подходящих интерполирующих функций.

Нивелирная сеть представляет собой единое геометрическое построение, в котором нормальные высоты получены путем уравнивания методом наименьших квадратов. Следовательно, систематические ошибки нивелирной сети должны изменяться плавно вдоль полигонов уравнивания. Функция геопотенциала является гладкой по определению, а глобальные модели гравитационного поля Земли (ГПЗ) допускают линейную интерполяцию аномалий высот и уклонов отвесных линий по регулярной сетке. Поэтому систематические ошибки нивелирных сетей и определения аномалий высот по моделям ГПЗ также могут быть интерполированы на регулярной сетке с некоторой погрешностью. Так СКО определения нормальных высот ГНСС-нивелированием при на практике достигает уровня допустимых ошибок нивелирования IV класса [22, 29].

Фонд пространственных данных ППК «Роскадастр» имеет большой массив спутниковых наблюдений, проведенных на пунктах государственной геодезической сети по всей стране с целью построения матриц деформаций [17]. Следовательно, есть все предпосылки для высокоточного преобразования архивов смешанных аномалий по всей стране.

Требуемая погрешность измерения аномалий силы тяжести для самой детальной съемки составляет 0,015 мГал (масштаб 1:5 000). Если нормальные высоты гравиметрических пунктов определены с ошибкой 5 см, то для преобразования смешанных аномалий силы тяжести в чистые без потери точности требуется вычислить геодезическую высоту с ошибкой не хуже 2 см. Современные модели геопотенциала не обеспечивают вычисление аномалий высот в произвольной точке с указанной точностью. Следовательно, ошибка чистой аномалии силы тяжести после преобразования превысит ошибку смешанной аномалии. Повышение качества перехода возможно при использовании итерационного подхода. На первом этапе следует выполнить преобразование смешанных аномалий в чистые с применением уточненной на пунктах ГНС модели геопотенциала. Затем необходимо уточнить значения аномалий высот в гравиметрических пунктах с использованием преобразованных АСТ. Вычисленные по формуле Молоденского аномалии высот используются для повторного преобразования смешанных аномалий в чистые на втором этапе итерации. Указанный подход заменяет последовательные приближения краевой поверхности к физической поверхности Земли процедурой итерационного уточнения чистых АСТ.

В результате формула связи чистых и смешанных аномалий силы тяжести приобретет следующий вид:

$$\delta g_P = \Delta g_P + \frac{\partial \gamma}{\partial H} (\zeta_P(GGM) + \Delta H_P^{\text{int}}), \quad (3.8)$$

где  $\Delta H_P^{\text{int}}$  — интерполированное значение поправки  $\Delta H$  за систематические ошибки определения аномалий высот и нивелирной сети.

Ошибка определения поправки зависит от интерполирующей функции, плотности и качества данных из каталогов государственный нивелирной сети, качества спутниковых наблюдений. Квадрат ошибки преобразования аномалий силы тяжести приблизительно будет иметь следующий вид:

$$m_{\delta g_P}^2 = \left( \frac{\partial \gamma}{\partial H} \right)^2 (m_{\text{int}}^2 + m_H^2 + m_{H^\gamma}^2), \quad (3.9)$$

где  $m_{\text{int}}$  — ошибка интерполирования поправки  $\Delta H$  ;

$m_H$  — ошибка определения геодезической высоты по результатам спутниковых определений;

$m_{H^\gamma}$  — ошибка геометрического нивелирования.

Оценить верхнюю границу погрешности преобразования АСТ из смешанных в чистые можно по параметрам, входящим в формулу (3.5). Точность определения геодезической высоты методами спутникового позиционирования зависит от множества факторов: используемого оборудования, продолжительности и условий измерений, ошибки измерения высоты антенны, удаленности пункта спутниковых наблюдений от базовой станции. Допускаемая приборная погрешность определения геодезической высоты составляет  $5 \text{ мм} + 0,5 \text{ мм/км}$  для современной мультисистемной двухчастотной спутниковой аппаратуры. Верхнюю границу возможных расстояний между базовой станцией и позицией определяемого пункта можно оценить величиной в 100 км. Средние расстояния между пунктами высокоточной геодезической сети (ВГС) составляют 150–200 км, поэтому верхнюю границу можно считать, как половину среднего значения расстояний. Следовательно, верхний предел допускаемой ошибки определения геодезической высоты на пунктах нивелирной сети составит 5,5 см.

Большая часть пунктов ГНС относится к IV классу, поэтому верхний предел ошибки геометрического нивелирования определяется по допустимой невязке в полигоне IV класса. Допустимая невязка задаётся выражением  $20 \text{ мм} \cdot \sqrt{L}$  с максимальной длиной линии для необжитых территорий в 80 км. Таким образом, СКО нивелирования примет значение 18 см. В ошибку положения нивелирного пункта должна включаться неизвестная накопленная систематическая ошибка, зависящая от относительного положения пункта по отношению к начальному реперу нивелирной сети.

Величина ошибки интерполирования будет зависеть от плотности пунктов ГНС, включенных в процедуру вычисления поправки  $\Delta H$ , шага регулярной сетки модели и интерполирующей функции. Для определения оптимальных условий интерполирования поправок  $\Delta H$  требуется отдельное исследование с привлечением большого массива данных ГНС-определений на пунктах ГГС в различных регионах Российской Федерации.

Таким образом, можно оценить предельную ошибку преобразования АСТ из смешанных в чистые величиной 0,05 мГал. Эта ошибка не включает погрешность интерполирования АСТ. Преобразовать аномалии силы тяжести без потери точности можно для каталогов гравиметрических измерений, формировавшихся для создания карт до масштаба 1:25 000 (табл. 3.4). Погрешность чистых АСТ возрастет в 4 и 2 раза для каталогов масштабов 1:5 000 и 1:10 000 соответственно без учета влияния ошибки интерполирования величины  $\Delta H$ . Реальная ошибка преобразования АСТ может оказаться ниже приведенной оценки, так как параметры  $m_H$  и  $m_{H\gamma}$

взяты по самому низкому классу нивелирования, предельно возможным длинам полигонов нивелирных сетей и расстояниям между станциями спутниковых определений. При этом гравиметрические съемки для со-



ставления крупномасштабных карт имеют малую долю всего архива информации о гравитационном поле Земли на территории РФ.

Таблица 3.4

Оценка СКО преобразования АСТ из смешанных в чистые по формуле 3.9

Масштаб карты (сечение изоаномал), мГал	СКП определения наблюденных значений АСТ, мГал	СКП определения высот, м	Оценка СКП АСТ после преобразования из смешанных в чистые, мГал
1:500 000 (5)	0,500	5,00	0,50
1:200 000 (2)	0,400	2,50	0,40
1:100 000 (1)	0,300	1,20	0,31
1: 50 000 (0,5)	0,150	0,70	0,16
1: 50 000 (0,25)	0,070	0,35	0,09
1:25 000 (0,25)	0,060	0,35	0,08
1:25 000 (0,2)	0,060	0,25	0,08
1:10 000 (0,2)	0,060	0,20	0,08
1:10 000 (0,1)	0,030	0,10	0,07
1:5 000 (0,1)	0,030	0,10	0,07
1:5 000 (0,05)	0,015	0,05	0,06

Преобразовать аномалии силы тяжести с достаточной точностью можно только при условии обеспечения гладкости функции для  $\Delta H$ . Проблемы могут возникнуть при наличии грубых ошибок в каталогах ГНС, которые очень сложно выявляются. Отбраковать грубые ошибки каталогов можно при помощи условия (3.10):

$$H_P - H_P^\gamma < 2\sqrt{m_{\zeta(GGM)}^2 + m_{H_P^\gamma}^2 + m_{H_P}^2}, \quad (3.10)$$

где  $m_{H_P}$  – оценка среднеквадратической погрешности определения геодезической высоты пункта ГНС по паспортной точности спутникового приемника;

$m_{H_P^\gamma}$  – предельно допустимая невязка геометрического нивелирования для данного пункта, определяемая по классу нивелирования;

$m_{\zeta(GGM)}$  — эмпирически установленные значения ошибки вычисления аномалии высоты по модели геопотенциала для данного региона.

По результатам проведенных исследований возможности преобразования смешанных аномалий силы тяжести в чистые можно сформулировать следующие выводы:

- преобразование АСТ из смешанных в чистые по архивным каталогам осуществимо без потери точности вплоть до масштаба 1:25 000;
- преобразование аномалий силы тяжести по каталогам крупномасштабных гравиметрических карт возможно с увеличением СКО в 2–4 раза;
- требуется провести оценку точности интерполирования комбинации систематических ошибок определения аномалий высот по моделям геопотенциала и нивелирных сетей, определить оптимальный алгоритм создания матриц деформаций нивелирных сетей;
- необходимо предусмотреть в базе данных гравиметрической информации атрибут типа используемой высоты в целях автоматического преобразования смешанных АСТ в чистые и обратно;
- требуется предусмотреть тип данных, соответствующий спутниковым определениям аномалии высоты по разнице нормальных высот из каталогов государственной нивелирной сети и ГНСС-определений, для этого необходимо связать базы данных гравиметрической информации с базой данных государственной нивелирной сети;
- необходимо указывать в атрибутах типа данных координат из ГНСС-определений на пунктах ГНС дату измерений и использующуюся систему координат.

### **3.1.5. Исследование изменений аномалии силы тяжести с изменением высоты во внешнем гравитационном поле Земли**

#### **3.1.5.1. Общие замечания по поводу решения задач физической геодезии при помощи применения аналитически продолженных аномалий**

Из теории гравитационного потенциала [30] известно, что если гравитационный потенциал и его производные обладают гармоническими свойствами и заданы в некоторой области, расположенной вне притягивающих масс, то они могут быть определены во всем пространстве, в том числе и внутри притягивающих масс, за исключением особых точек, в которых потенциал и его производные теряют свои гармонические свойства. Про-

цесс определения гармонической функции в области ее существования по значениям, заданным в другой более узкой области, называется аналитическим продолжением [31, 32].

Методам аналитического продолжения геофизических полей с профилей измерений в нижнее полупространство посвящено много работ ведущих геофизиков: И.Г. Клушина, В.Н. Страхова, М.С. Жданова. Однако, в процессе многочисленных исследований, было выявлено явление распада поля в окрестности особых точек [33], которое свидетельствует о катастрофической неустойчивости применяемых подходов, явившееся препятствием для практического применения метода. Причина этого состоит в несоответствии описания изучаемых полей линейными математическими моделями: представление полей в виде рядов или интегралов типа Коши порождает существенную некорректность, которая объясняется тем, что поле, имеющее особенности в нижнем полупространстве, принципиально не может адекватно описываться линейной конструкцией. Единственной относительно удачной попыткой обойти описанные сложности является метод полного градиента В. М. Березкина [34]. Аналитическое продолжение аномалий силы тяжести в нижнее полупространство представляет собой сложную проблему. Принципиальная сложность заключается в неустойчивости (некорректности) решения этой задачи. Существует много способов аналитического продолжения поля: решение граничной задачи для дифференциального уравнения Лапласа, методом собственных функций или методом сеток, на основе использования ряда Тейлора и др. [35]. Все указанные методы подвержены влиянию случайных ошибок при выполнении практических расчетов. Среди различных способов аналитического продолжения гармонических функций вниз наиболее простым является способ, основанный на теореме Гаусса о среднем значении гармонической функции [31].

Впервые в физической геодезии аналитическое продолжение вниз исследовал М. С. Молоденский. Однако он отказался от этого метода. Дело в том, что аналитическое продолжение внешнего гравитационного потенциала внутрь земных масс может оказаться сингулярным в некоторых точках. Несмотря на это, интерес к аналитическому продолжению, благодаря своей простоте, проявляли и проявляет сейчас ряд западных специалистов в области физической геодезии. К ним относятся Бьерхаммар [36], который предложил решение краевой задачи физической геодезии выполнять с помощью сферы целиком расположенной в теле Земли несмотря на то, что искомый возмущающий потенциал не гармоничен между сферой Бьерхаммара и поверхностью Земли. При этом он опирался на теорему Рунге-Крарупа, согласно которой, любая гармоническая функция  $\varphi$ , регулярная вне поверхности Земли, может быть равномерно аппроксимиро-

вана гармоническими функциями  $\psi$ , регулярными вне произвольно заданной сферы внутри Земли, в том смысле, что для всякого заданного  $\varepsilon > 0$  неравенство  $|\varphi - \psi| < \varepsilon$  справедливо как во внешнем пространстве, так и на любой замкнутой поверхности охватывающей Землю [37, 38–40] и др. М. Pick в работе [41] предложил для аналитического продолжения функций с поверхности Земли вверх использовать плотности простого и двойного слоя. Однако их выводы были выполнены формально и независимо от проблем сходимости при игнорировании того, что на самом деле аналитическое продолжение внутрь масс Земли в общем случае недопустимо. Аналитическое продолжение внешнего гравитационного потенциала с помощью регулярной гармонической функции вниз к уровню моря возможно, когда все массы вне эллипсоида исключены, причем так, что потенциал вне Земли должен остаться неизменным. В этом случае аналитическое продолжение возмущающего потенциала  $T$  и его производных является регулярной функцией всюду между земной поверхностью и эллипсоидом [42]. Формально теорема Рунге-Крауца допускает возможность аналитического продолжения внешнего потенциала вниз к уровню моря с точностью, достаточной для всех практических целей. Таким образом, эта теорема, утверждает, что любую гармоническую вне поверхности функцию можно равномерно приблизить с помощью последовательности функций гармонических вне произвольной сферы, или же с помощью частичных сумм рядов Фурье по системе сферических функций. М. С. Петровская [43] рассматривала вопрос об аналитическом продолжении геопотенциала в верхнее и нижнее полупространство.

Потребность в точном определении гравитационного поля Земли становится очевидной при решении современных задач геодезии, геофизики, геодинамики, океанографии и климатологии. Определения характеристик гравитационного поля получили новое развитие с появлением новых космических методов изучения поля силы тяжести при реализации трех концепций измерения – космических гравиметрических миссий:

- система спутник-спутник (satellite-to-satellite tracking, SST), один из которых высокий, другой низкий, реализованная в проекте CHAMP (Challenging Minisatellite Payload);
- система спутник-спутник, в которой оба спутника низкие, реализованная в проекте GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment);
- спутниковая градиентометрия, реализуемая в проекте GOCE (Gravity Field and Steady State Ocean Circulation Explorer). При этом необходимо учитывать, что при изучении ГПЗ спутниковыми методами гравитационное поле на спутниковых высотах отличается от гравитационного поля тяжести на земной поверхности.

Во-первых, орбиты спутников подвержены влиянию силы тяготения, потенциал которой представляют в виде разложения в ряд Фурье по системе сферических функций

$$V(\varphi, \lambda, r) = \frac{fM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (3.11)$$

где  $fM$  – геоцентрическая гравитационная постоянная;

$a_e$  – экваториальный радиус Земли;

$r$  – радиус-вектор точки наблюдения  $(\varphi, \lambda, r)$ ;

$\bar{C}_{nm}$  и  $\bar{S}_{nm}$  – нормированные безразмерные гармонические коэффициенты геопотенциала степени  $n$  и порядка  $m$ ;

$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$  – нормированные присоединенные функции Лежандра.

Во-вторых, на движение особенно близких спутников оказывают влияние сопротивление атмосферы, а также притяжение Луны и Солнца.

В-третьих, потенциал тяготения  $V(\varphi, \lambda, r)$  является регулярной функцией на бесконечности и при  $r \rightarrow \infty$  имеем  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(\varphi, \lambda, r) = 0$ .

Задача, связанная с гармоническим продолжением гравиметрической информации к поверхности Земли, полученной во внешнем пространстве по спутниковым данным, постоянно встречается в физической геодезии. Следует иметь в виду, что характеристики аномального гравитационного поля, полученные на спутниковой высоте, даже при отсутствии ошибок измерений, расцениваются по своей информативности как результат сглаживания наземных данных по стандартным площадям. При этом необходимо учитывать, что при изучении ГПЗ спутниковыми методами преобразование результатов со спутниковых высот на земную поверхность приводит к увеличению неизбежных погрешностей и ослаблению ГПЗ с высотой измерений пропорционально коэффициенту [42]  $\left( \frac{r}{R} \right)^{(n+1)}$ , где  $r$  – радиус-вектор искусственного спутника земли (ИСЗ) на орбите;  $R$  – радиус Земли;  $n$  – степень разложения аномального гравитационного потенциала в ряд Фурье.

Этот эффект минимизируется при использовании орбиты настолько низкой, насколько это возможно и измерением не самого потенциала  $V$  или даже его градиента, а его производных второго порядка, как изменений силы тяжести.

Не менее актуальной является и задача гармонического продолжения вверх от земной поверхности во внешнее пространство для определения

силы тяжести и аномалий силы тяжести на высоте полета ИСЗ или самолета для калибровки результатов спутниковой гравиметрии и аэрогравиметрии. Следует иметь в виду, что значения аномального гравитационного потенциала, полученные на спутниковой высоте, даже при отсутствии ошибок измерений, расцениваются по своей информативности как сглаженные на земной поверхности по стандартным площадям размером  $\Delta \times \Delta$ . Так, например, аномалия силы тяжести, полученная на высоте  $\sim 12$  км, соответствует сглаженным наземным аномалиям силы тяжести по трапециям размером  $1^\circ \times 1^\circ$  [37]. То есть, аналитическим продолжением аномалий в верхнее полупространство подавляются высокочастотные составляющие гравитационного поля. Кроме того, неизбежные ошибки измерений на спутниковых высотах при продолжении вниз возрастают пропорционально коэффициенту (7) [42].

### *3.1.5.2. Теоретические основы применения гармонических функций для аналитического продолжения аномалий силы тяжести в исследовании их изменений с изменением высоты*

Аналитическое продолжение аномалий силы тяжести на высоту полета ИСЗ можно выполнить, если эта аномалия является гармонической функцией и задана на сфере или плоскости. В этом случае задача аналитического продолжения аномалий силы тяжести на высоту орбиты ИСЗ решается путем использования интеграла Пуассона, разрешающего классическую краевую задачу Дирихле для гармонических функций на сфере [39].

Внешняя задача Дирихле для сферы  $\omega$  в общем случае заключается в определении вне этой сферы произвольной гармонической функции  $V_e(\varphi, \lambda)$ , регулярной на бесконечности  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_e$  по значениям  $f(\varphi', \lambda')$ , заданным на поверхности этой сферы  $\omega$ , причем так, чтобы на поверхности этой сферы выполнялось условие

$$\lim_{\rho \rightarrow R} V_e(\varphi, \lambda) = f(\varphi', \lambda'), \quad (3.12)$$

где  $\varphi'$  и  $\lambda'$  – значения сферических координат на поверхности сферы  $\omega$ .

Определяемую функцию  $V_e(\varphi, \lambda)$  на основании фундаментальной формулы Грина

$$4\pi V_e(\varphi, \lambda) = \iint \frac{dV_e}{dn} \frac{1}{r} R^2 d\omega - \iint V_e \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{r} \right) R^2 d\omega, \quad (3.13)$$

можно представить как сумму потенциалов простого и двойного слоя, распределенных на поверхности сферы  $\omega$

$$V_e(\varphi, \lambda) = \iint \frac{\mu}{r} d\omega - \iint v \frac{d(1/r)}{dn} R^2 d\omega. \quad (3.14)$$

Так как каждый из этих потенциалов удовлетворяет уравнению Лапласа то  $\Delta V_e(\varphi, \lambda) = 0$ . Плотность простого слоя  $\mu$  и плотность двойного слоя  $v$  определяются из предельного условия

$$\lim_{\rho \rightarrow R} V_e(\rho, \varphi, \lambda) = f(\varphi', \lambda'). \quad (3.15)$$

Учитывая, что потенциал простого слоя – функция непрерывная, а потенциал двойного слоя терпит на слое разрывы при  $\rho \rightarrow R$

$$W_e = W_0 + 2\pi v(\varphi', \lambda') \text{ и } W_i = W_0 - 2\pi v(\varphi', \lambda'),$$

поэтому

$$\lim_{\rho \rightarrow R} V_e(\rho, \varphi, \lambda) = \iint \frac{\mu}{r} d\omega - \iint v \frac{d(1/r)}{dn} d\omega + 2\pi v(\varphi', \lambda') = f(\varphi', \lambda'), \quad (3.16)$$

или после преобразования получим

$$\lim_{\rho \rightarrow R} V_e(\rho, \varphi, \lambda) = \iint \left( \mu - \frac{v}{2R} \right) \frac{1}{r} R^2 d\omega + 2\pi v(\varphi', \lambda') = f(\varphi', \lambda'). \quad (3.17)$$

Выбирая произвольные плотности  $\mu$  и  $v$  так, чтобы подынтегральный член в скобках равнялся нулю, тогда

$$\lim_{\rho \rightarrow R} V_e(\rho, \varphi, \lambda) = 2\pi v(\varphi', \lambda') = f(\varphi', \lambda').$$

Отсюда находим

$$v(\varphi', \lambda') = \frac{1}{2\pi} f(\varphi', \lambda');$$

$$\mu(\varphi', \lambda') = \frac{1}{4\pi R} f(\varphi', \lambda').$$

Подставляя найденные значения  $\mu$  и  $\nu$  в формулу (3.14), получим

$$V_e(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \iint f(\varphi', \lambda') \left[ \frac{1}{rR} + \frac{2d(r^{-1})}{dR} \right] R^2 d\omega. \quad (3.18)$$

Выражение в квадратных скобках после преобразования можно представить в следующем виде

$$\left[ \frac{1}{rR} + \frac{2d(r^{-1})}{dR} \right] = \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^3}. \quad (3.19)$$

Тогда интеграл (3.18) примет вид

$$V_e(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \iint f(\varphi', \lambda') \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^3} R^2 d\omega. \quad (3.20)$$

Формула (3.20) называется интегралом Пуассона для внешнего пространства. Этот интеграл решает внешнюю краевую задачу Дирихле для сферы при  $\rho > R$ .

Используем интеграл Пуассона (3.14) для аналитического продолжения аномального потенциала и его первой производной во внешнее полупространство. Так как аномальный потенциал  $T_e(\rho, \varphi, \lambda)$  – является разностью потенциалов действительной  $W(\rho, \varphi, \lambda)$  и нормальной  $U(\varphi, \lambda)$  Земли, т. е.  $T_e(\rho, \varphi, \lambda) = W(\rho, \varphi, \lambda) - U(\varphi, \lambda)$ , то в нем отсутствует центробежный потенциал и он удовлетворяет уравнению Лапласа и регулярен на бесконечности. Представим этот потенциал вне сферы радиуса  $R$  в виде ряда Фурье по шаровым функциям.

Для этого в формуле (3.18) представим функцию  $1/r$  помощью ряда по степеням  $R/\rho$  в следующем виде

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi) \quad \text{при } \rho > R. \quad (3.21)$$

Дифференцируя ряд (3.21) по  $R$  умножая на 2, получим



$$2 \frac{d(r^{-1})}{dR} = \sum_{m=0}^{\infty} 2n \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (3.22)$$

Разделив ряд (3.21) на  $R$ , складывая его с рядом (3.18), представим ядро интеграла Пуассона (3.18) в следующем виде

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{rR} + \frac{2d(r^{-1})}{dR} \right] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi) + \sum_{m=0}^{\infty} 2n \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (2n+1) \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Подставляя выражение (3.23) в интеграл Пуассона (3.18), получим

$$T_e(\rho, \varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} \frac{(2n+1)}{4\pi} \iint f(\varphi', \lambda') P_n(\cos \psi) R^2 d\omega. \quad (3.24)$$

Введем следующее сокращение для (3.24):

$$Y_n = \frac{(2n+1)}{4\pi} \iint f(\varphi', \lambda') P_n(\cos \psi) d\omega. \quad (3.25)$$

В выражении (3.25) вместо полинома Лежандра  $P_n(\cos \psi)$  степени  $n$  от сферического расстояния  $\psi$  необходимо представить его через сферические координаты  $(\varphi', \lambda')$  текущей точки на сфере с помощью теоремы сложения сферических функций

$$\begin{aligned} P_n(\cos \psi) &= P_n(\sin \varphi) P_n(\sin \varphi') + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [\cos m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda'] \cdot P_{nm}(\sin \varphi) P_{nm}(\sin \varphi'), \end{aligned} \quad (3.26)$$

здесь  $P_{nm}(\sin \varphi)$  – присоединенная функция Лежандра.

Подставляя выражение (3.26) в формулу (3.25), получим

$$Y_n(\varphi, \lambda) = \left[ \frac{(2n+1)}{4\pi} \iint f(\varphi', \lambda') P_n(\sin \varphi') d\omega \right] P_n(\sin \varphi) +$$

$$+ \sum_{m=1}^n \left\{ \left[ \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \iint f(\varphi', \lambda') \cos m\lambda' d\omega \right] \cos m\lambda + \left[ \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \iint f(\varphi', \lambda') \sin m\lambda' d\omega \right] \sin m\lambda \right\} P_{nm}(\sin \varphi). \quad (3.27)$$

В формуле (3.27) выражения в квадратных скобках определяют гармонические коэффициенты соответствующих сферических функций, которые обозначены как

$$\left. \begin{aligned} C_{n0} &= \frac{(2n+1)}{4\pi} \iint f(\varphi', \lambda') P_n(\sin \varphi') d\omega \\ C_{nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \iint f(\varphi', \lambda') \cos m\lambda' d\omega \\ S_{nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \iint f(\varphi', \lambda') \sin m\lambda' d\omega \end{aligned} \right\}. \quad (3.28)$$

Подставляя принятые обозначения (3.28) в формулу (3.27), получим

$$Y_n(\varphi, \lambda) = \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi). \quad (3.29)$$

Решение краевой задачи Дирихле для сферы радиуса  $R$  в виде ряда по сферическим функциям для возмущающего потенциала  $T$ :

$$T_e(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} Y_n(\varphi, \lambda) \quad \text{при } r > R, \quad (3.30)$$

и их производных (чистые аномалии силы тяжести)

$$\Delta g_e = \frac{\partial T_e(r, \varphi, \lambda)}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} Y_n(\varphi, \lambda) \quad \text{при } r > R. \quad (3.31)$$

В формулах (3.30) и (3.31) сферическая функция  $Y_n(\varphi, \lambda)$  степени  $n$  имеет вид

$$Y_n(\varphi, \lambda) = \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (3.32)$$

где  $\Delta\bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{nm}^0$  – разность безразмерных нормированных гармонических коэффициентов геопотенциала. При вычислении разности  $\Delta\bar{C}_{nm}$  значение  $\bar{C}_{nm}^0$  – коэффициент нормального геопотенциала отнесен к эллипсоиду WGS-84.  $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$  – нормированные безразмерные гармонические коэффициенты модели геопотенциала степени  $n$  и порядка  $m$ ;  $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$  – нормированные присоединенные функции Лежандра.

### 3.1.5.3 Исследование изменений аномалий силы тяжести с изменением высоты во внешнем гравитационном поле Земли

На рис. 3.14 и 3.15 приведены карты чистых аномалий силы тяжести, вычисленных по формулам (3.31) и (3.32) при  $r > R$  на уровне моря и на высоте 500 км с помощью программных продуктов [44–48].

Для вычисления сферической функции по формуле (3.32) использованы нормированные гармонические коэффициенты  $\bar{C}_{nm}$  и  $\bar{S}_{nm}$  глобальной высокостепенной модели геопотенциала EIGEN-6C4 [49] при  $n = 2190$ .

На рис. 3.14 приведена карта чистых аномалий силы тяжести на поверхности Земли, вычисленных на уровне моря (при  $r = R$ ).

Из рис. 3.14 видно, что значения чистых аномалий, вычисленных на уровне моря находятся в диапазоне от  $-300$  мГал до  $+300$  мГал.

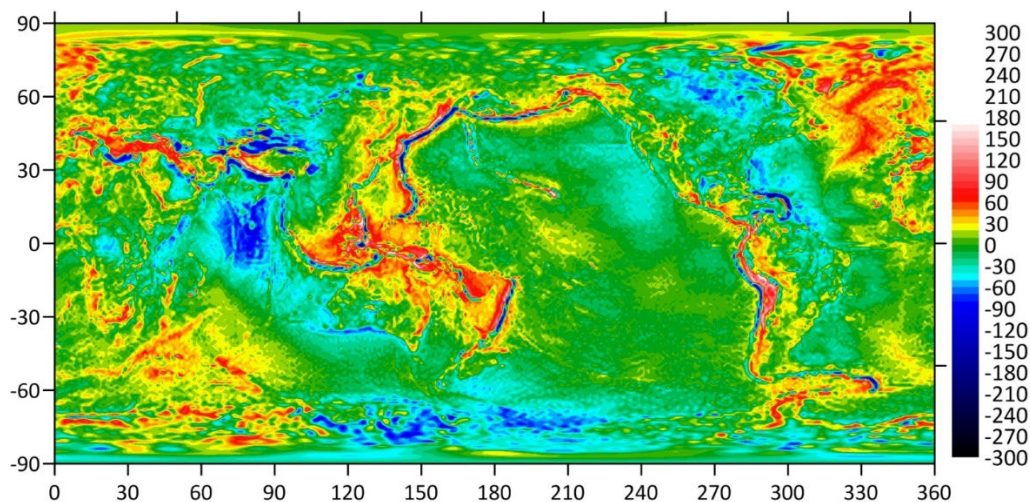


Рис. 3.14. Чистые аномалии силы тяжести, вычисленные на поверхности Земли на уровне моря

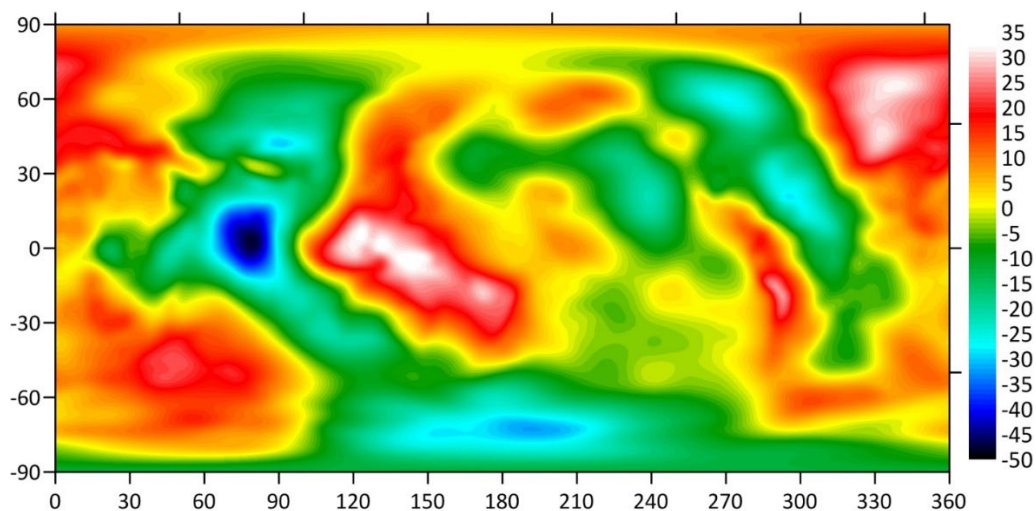


Рис. 3.15. Чистые аномалии силы тяжести, вычисленные на высоте 500 км над Землей

На рис. 3.15 приведена карта чистых аномалий силы тяжести, вычисленных на высоте 500 км над Землей ( $r = R + 500$  км).

Приведенные на рис. 3.15 значения чистых аномалий силы тяжести, вычисленные на высоте 500 км над земной поверхностью, находятся в диапазоне от  $-50$  мГал до  $+35$  мГал. Причем, с увеличением высоты до 500 км, эти аномалии уменьшились по сравнению с чистыми аномалиями силы тяжести, вычисленными на уровне моря, почти в 6–7 раз.

На рис. 3.16 приведен график изменения с высотой силы тяжести  $g$ , нормальной силы тяжести  $\gamma$  и чистых аномалий  $\Delta g$ .

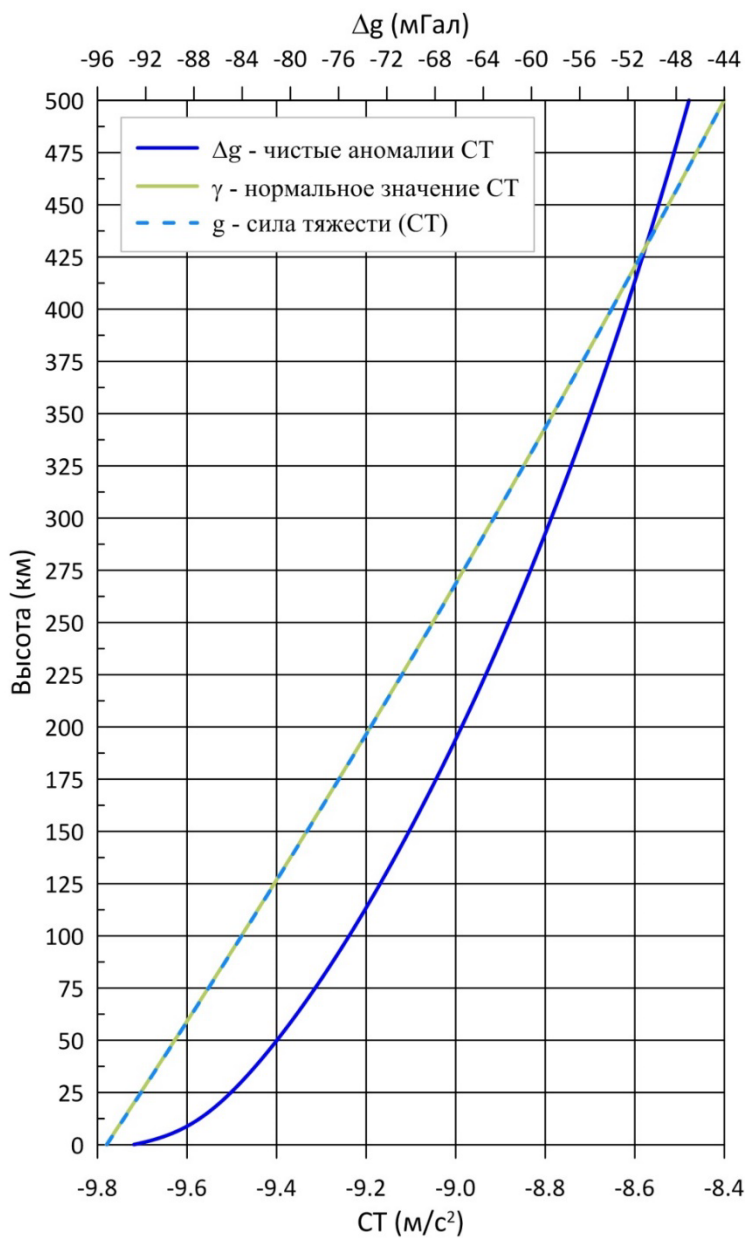


Рис. 3.16. График изменения с высотой силы тяжести  $g$ , нормальной силы тяжести и чистых аномалий

Из приведенного на рис. 3.16 графика видно, что изменения с высотой происходит почти линейно, уравнения которых имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} g(H) &= -9,770515 + 0,0030680H - 6,2403 \cdot 10^{-7} H^2 \\ \gamma(H) &= -9,778638 + 0,0030667H - 6,2386 \cdot 10^{-7} H^2 \end{aligned} \right\}, \quad (3.33)$$

где  $H$  – высота в километрах.

Это изменение с ростом высоты от 0 до 500 км составило от 9,8 м/с<sup>2</sup> до 8,4 м/с<sup>2</sup>. Поведение чистой аномалии силы тяжести с ростом высоты представляет сложную кривую, уравнение которой имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta g(H) &= 91,0127 + 0,2692H - 0,0018H^2 + 1,0046 \cdot 10^{-5} H^3 + \\ &\quad - 3,0341 \cdot 10^{-8} H^4 + 4,6039 \cdot 10^{-11} H^5 + \\ &\quad - 2,7491 \cdot 10^{-14} H^6. \end{aligned}$$

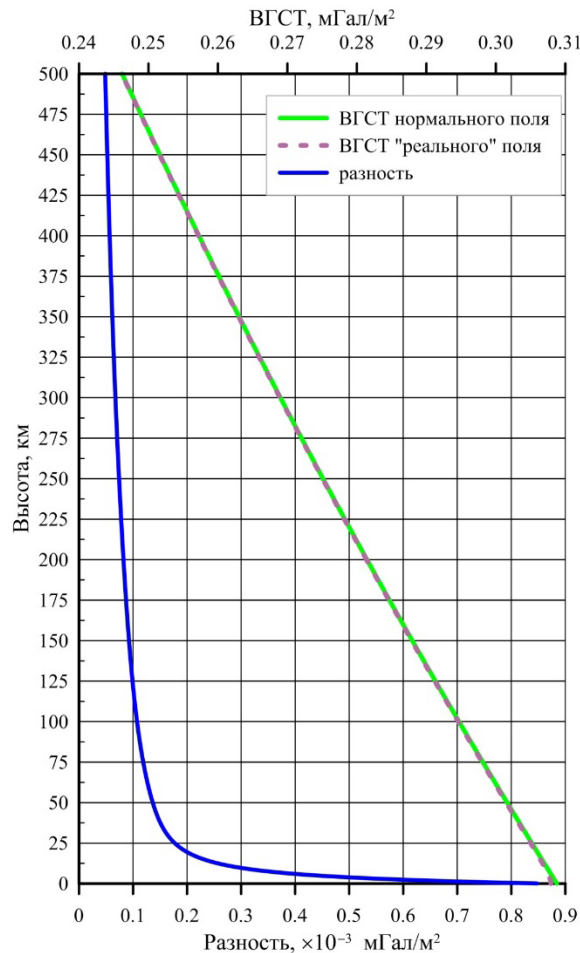


Рис. 3.17. График изменения вертикального градиента силы тяжести с высотой

На рис. 3.17 приведен график изменения вертикального градиента силы тяжести с высотой.

Вертикальные градиенты нормального и реального гравитационного поля Земли изменяются с высотой практически одинаково, однако разность между ними изменяется по сложной кривой от  $+5 \cdot 10^{-4}$  до  $-1 \cdot 10^{-4}$  мГал/м<sup>2</sup>.

Таким образом, результаты гармонического продолжения аномалий силы тяжести во внешнее пространство показывают, что при удалении от земной поверхности характеристики аномального гравитационного поля убывают по величине, а изображения на картах как бы размазываются, потому что аномалии силы тяжести, обусловленные неглубоко залегающими, сконцентрированными массами убывают сильнее, чем аномалии более глубоко залегающих источников. Иначе говоря, в процессе аналитического продолжения в верхнее полупространство подчеркивается влияние региональных аномалий и ослабление влияния локальных.

### **3.1.6. Список использованных источников к параграфу 3.1**

1. SC 2.2: Geoid, Physical Height Systems and Vertical Datum Unification // IAG : [сайт]. – URL: <https://com2.iag-aig.org/sub-commission-22>. – (дата обращения: 01.11.2021). – Режим доступа : общий доступ. – Текст : электронный.

2. Claessens S. J., Filmer M. S. Towards an International Height Reference System: insights from the Colorado geoid experiment using AUSGeoid computation methods // Journal of Geodesy. – 2020. – Vol. 94. – № 5. – P. 52. – DOI: 10.1007/s00190-020-01379-3.

3. Commission 2. Gravity Field // IAG : [сайт]. – URL: <https://geodesy.science/com2/structure/sub-commissions/>. – (дата обращения: 11.08.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

4. Анализ гравиметрической изученности территории Новосибирской области по данным наземных измерений / И.Г. Ганагина, Н.Н. Кобелева, Д.Н. Голдобин, И. В. Зверев // Вестник СГУГиТ. –2022. Т. 27, № 6. – С. 14-25.

5. National Centers for Environmental Information : [сайт]. – URL: <https://www.ncei.noaa.gov/products/gravity-data>. – (дата обращения: 04.05.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

6. Bureau International Gravimetric (BGI) : [сайт]. – URL: <https://bgi.obs-mip.fr/> (дата обращения: 11.08.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

7. ППК «Роскадастр». Сервисы и услуги. Материалы и данные ФФПД : [сайт]. – URL: <https://kadastr.ru/services/materialy-i-dannye-ffpd/>. – (дата обращения: 11.08.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.
8. ФППД. Федеральный портал пространственных данных : [сайт]. – URL: <https://portal.fppd.cgkipd.ru/glavnaia/instruktsii/lichnyi-kabinet> (дата обращения: 11.08.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.
9. Российский федеральный геологический фонд : [сайт]. – URL: <https://www.rfgf.ru/exploration-map>. – (дата обращения: 02.11.2021г.). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.
10. Федеральные округа. Большая российская энциклопедия : [сайт]. – URL: <https://bigenc.ru/c/federal-nye-okruga-261f85>. – (дата обращения: 11.08.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.
11. Канушин В. Ф. Исследование современных глобальных моделей гравитационного поля Земли / В. Ф. Канушин, А. П. Карпик, И. Г. Ганагина, [и др.]. – Новосибирск: СГУГиТ, 2015. – 269 с.
12. Общие сведения. Правительство Новосибирской области / Информационный ресурс. – URL: <https://www.nso.ru/page/2264> (дата обращения: 11.08.2025). – Режим доступа: свободный
13. ФГБУ «Росгеолфонд» : [сайт]. – URL: <https://rfgf.ru/infore-sursy/kartogramma-izuchennosti/>. – (дата обращения: 11.08.2025г.). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.
14. Прихода А. Г. Методы геодезического обоснования гравиметрических съёмок. – М. : Недра, 1974. – 68 с.
15. ГКИНП(ГНТА)-04-122-03 Инструкция по развитию высокоточной государственной гравиметрической сети России. – Введ. 2004–01–02. – М. : ЦНИИГАиК, 2004. – 218 с.
16. National geospatial-intelligence agency (NGA) Standardization document department of defense, world geodetic system 1984, Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems, 2014-07-08, Version 1.0.0, NGA.STND.0036\_1.0.0\_WGS84
17. Мареев А. В. Результаты исследования матриц деформаций координатной основы СК-42 // Геодезия и картография. – 2023. – Т. 84, № 7. – С. 14–23. – DOI : 10.22389/0016-7126-2023-997-7-14-23. – EDN UZUZFB.
18. Brown N. J. AUSGeoid2020 combined gravimetric–geometric model: location-specific uncertainties and baseline-length-dependent error decorrelation / N. J. Brown, J. C. McCubbine, W. E. Featherstone, [et al.] // Journal of Geodesy. – 2018. – Vol. 92. – № 12. – P. 1457–1465. – DOI: 10.1007/s00190-018-1202-7.
19. Сурнин Ю. В. Математическая модель внешнего гравитационного поля на ограниченном участке земной поверхности по спутниковым и традиционным геодезическим данным // Сборник материалов междуна-



родного научного конгресса «ГЕО-Сибирь-2006». – Новосибирск, 2006. – Т.1, ч.2. – С. 79–90.

20. Jäger R. A New Integrated Geodesy Approach for Regional Gravity Field Modelling and Height Reference Surface Computation [Presentation]/ R. Jäger. // Novosibirsk : Interexpo-Geosiberia 2013, 2013. – URL: [http://dfhbf.de/files/DFHRS\\_5.0.pdf](http://dfhbf.de/files/DFHRS_5.0.pdf)

21. Morozova K. Preliminary Results on Quasi-Geoid for Western Part of Latvia Using Digital-Zenith Camera and DFHRS V.4.3 Software / K. Morozova, R. Jäger, J. Balodis, [et al.] // *Geophysica*, 2019. – № 54(1). – pp. 61–68.

22. Обиденко В. И., Опритова О. А., Решетов А. П. Разработка методики получения нормальных высот на территории Новосибирской области с использованием глобальной модели геоида EGM2008 // *Вестник СГУГиГ*. – 2016. – № 1 (33). – С. 14–25.

23. IAG Resolutions Adopted by the IAG Council at the XXVIth IUGG General Assembly, Prague, Czech Republic, June 22 – July 2, 2015. – URL: (дата обращения: 11.08.2025).

24. Petit G., Luzum B. IERS Conventions (2010). Frankfurt am Main : Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie. – 2010. P. 179.

25. Инструкция по гравirazведке, единые технические требования Часть 5. – 1980.

26. BGI normal gravity determination : [сайт]. – URL: [https://www5.obs-mip.fr/wpcontentomp/uploads/sites/46/2017/10/BGI\\_Normal\\_gravity\\_determination.pdf](https://www5.obs-mip.fr/wpcontentomp/uploads/sites/46/2017/10/BGI_Normal_gravity_determination.pdf). – (дата обращения: 17.10.2021). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

27. Постановление Российской Федерации об установлении государственных систем координат, государственной системы высот и государственной гравиметрической системы. – Введ. 2016–24–11. – 2016.

28. Елагин А. В., Дорогова И. Е., Мареев А. В. Исследование взаимосвязи смешанных и чистых аномалий силы тяжести // *Вестник СГГА*. – 2014. – № Вып. 3 (27). – С. 70–83.

29. Гиенко Е. Г., Кузьмин В. И., Сурнин Ю. В. Некоторые результаты определения локального гравитационного поля на поверхности Земли // *Вестник СГГА*. – Новосибирск : СГГА, – 2006. – № 11. – С. 8–13.

30. Идельсон Н. И. Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике. – Ленинград ; Москва: Объединенное научно-техническое издательство, Главная редакция общетехнической литературы, 1936. – 424 с.

31. Миронов В. С. Курс гравirazведки: для вузов по специальности «Геофиз. методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых». – Ленинград: Недра. Ленингр. отдние, 1972. – 512 с.

32. Огородова Л. В. Высшая геодезия. – М.: Геодезкартиздат, 2006. – 384 с.

33. Страхов В.Н. Аналитическое продолжение потенциальных полей. Доклады Академии наук. 2000. Т. 374. № 1. С. 103-106.

34. Березкин В. М., Киричек М. А., Кунарев А. А. Применение геофизических методов разведки для прямых поисков месторождений нефти и газа. – М. : Недра, 1978. – 223 с.

35. Гравиразведка: Справочник геофизика / Е.А. Мудрецов и др. – М: Недра, 1990. – 606 с.

36. Bjerhammar A. Discrete solutions of the boundary value problem in physical geodesy // *Tellus*. – 1975. – Vol. 27. – № 2. – P. 97–106. – DOI: 10.3402/tellusa.v27i2.9892.

37. Марыч И. М. О решении задачи Молоденского при помощи ряда Тейлора. – Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1973. – № 17. – 26 с.

38. Krarup T. Mathematical Foundation of Geodesy. Selected Papers of Torben Krarup / Aalborg University. Danish GPS Center. Niels Jernes Vej 149220. Aalborg Denmark. – 2006, 415 p. ISBN-10 3-540-33765-2 Springer Berlin Heidelberg New York. ISBN-13 978-3-540-33765-2 Springer Berlin Heidelberg New York

39. Krarup T. Some Remarks About Collocation // *Approximation Methods in Geodesy*. – 1978. pp. 193–209.

40. Moritz H. A new series solution of Molodensky's problem // *Bulletin Géodésique*. – 1970. – Vol. 96. – № 1. – С. 183–195. – DOI: 10.1007/BF02521707.

41. Pick, M. Analytical continuation of a function from the Earth's surface upwards // *Bull. Geod. sei. affini*. – 1975. – Vol. 34. – № 4. – pp. 417–431.

42. Гофман-Велленгоф Б., Мориц Г. Физическая геодезия. – М. : МИ-ИГАиК, – 2007. – 426 с.

43. Petrovskaya M. S. Upward and downward continuations in the geopotential determination // *Bulletin Géodésique*. – 1979. – Vol. 53. – № 3. – pp. 259–271. – DOI: 10.1007/BF02523957.

44. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ 2015660860 Российская Федерация. GeoPot ver 1.0 / Д. Н. Голдобин, В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет геосистем и технологий». – 2015617857; заявл. 26.08.2015; опубли. 20.11.2015. – 1 с.

45. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ 2015661196 Российская Федерация. GeoAnom ver 1.0 / Д. Н. Голдобин, В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет геосистем и технологий». – 2015617768; заявл. 26.08.2015; опубли. 20.11.2015. – 1 с.

46. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ 2015661197 Российская Федерация. GeoUnd ver 1.0 / Д. Н. Голдобин,

В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Н. С. Косарев; заявитель и право-обладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет геосистем и технологий». – 2015617766; заявл. 26.08.2015; опубл. 20.11.2015. – 1 с.

47. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ 2017614700 Российская Федерация. Geo\_UOL ver. 1.0 / Д. Н. Голдобин, В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Н. С. Косарев; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет геосистем и технологий». – 2017610246; заявл. 10.01.2017; опубл. 26.04.2017. – 1 с.

48. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ 2018666260 Российская Федерация. Geo\_ABSGRAV ver. 1.0 / Д. Н. Голдобин; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет геосистем и технологий». – 2015617768; заявл. 26.11.2018; опубл. 13.12.2018. – 1 с.

49. International Centre for Global Earth Models (ICGEM). – URL: <http://icgem.gfz-potsdam.de/home>. – (дата обращения: 11.08.2025г.). – Режим доступа : общий доступ.

## **3.2. Анализ данных чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам работы космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GRACE-FO и GOCE**

### **3.2.1. Введение**

Появление современных спутниковых технологий изменило подходы в решении задач изучения гравитационного поля Земли (ГПЗ) как в пространстве, так и во времени. В настоящее время получение характеристик (ГПЗ) возможно не только по наземным измерениям, но и методами моделирования по данным космических гравиметрических миссий Challenging Minisatellite Payload (CHAMP), Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer (GOCE), Gravity Recovery and Climate Experiment (CRACE) и ее продолжения – CRACE Follow On [1–10].

Миссии CHAMP, GRACE, GRACE-FO и GOCE имеют различные характеристики, различаются между собой как по составу исходной информации, так и по методикам их обработки и удовлетворяют разным аспектам определения высокоточного гравитационного поля.

В связи с этим актуальным является анализ получения чистых и смешанных аномалий силы тяжести по результатам работы космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GRACE-FO и GOCE.

В космических гравиметрических миссиях CHAMP, GRACE, GRACE-FO и GOCE реализуются две технологии наблюдений [11, 12]:

- «спутник – спутник» (измерения расстояний и скорости изменения расстояний между спутниками);

- спутниковая градиентометрия (измерение разности ускорений силы тяжести внутри спутника).

Концепция «спутник – спутник» состоит в измерении скорости между двумя спутниками при двух вариантах их взаимного расположения: высокий и низкий спутник и два низких спутника, расположенных на близких орбитах на расстоянии 50–300 км.

В проекте CHAMP реализована система «спутник – спутник», один из которых высокий, другой низкий.

В системе «спутник–спутник» в режиме высокий – низкий околоземная орбита низколетящего спутника непрерывно отслеживается высокими спутниками относительно сети наземных станций. На низком спутнике устанавливают акселерометр. Акселерометр измеряет трехмерные возмущающие ускорения, которые вызваны гравитационным полем Земли и действуют на низкий спутник. Возмущающие ускорения соответствуют первым производным гравитационного потенциала.

Одной из основных целей миссии CHAMP предусматривалось изучение глобального поля силы тяжести, уточнение длинноволновой части статического поля и ее временных вариаций, вызванных различными геодинамическими факторами. В результате работы миссии создано несколько моделей геопотенциала по разному набору измерительных данных, определена уровенная поверхность Земли с точностью 10 см и пространственным разрешением 350 км (55 гармоник геопотенциала), более высокая – сантиметровая точность геоида получена с разрешением 1 000 км [11].

Система «спутник – спутник» SST-LL, в которой оба спутника низкие, реализована в проекте GRACE. GRACE – совместная гравиметрическая миссия Федерального агентства National Aeronautics and Space Administration (NASA) и Германского центра авиации и космонавтики.

Миссия реализована системой «спутник–спутник», в режиме «низкий–низкий», согласно которому два спутника следуют друг за другом по околополярной орбите на высоте до 500 км. При этом выполняются измерения межспутниковой дальности и ее производных с использованием микроволновой системы слежения. Орбиты двух отдельно летящих спутников по-разному возмущаются в гравитационном поле Земли, что приводит к вариациям межспутниковой дальности.

При полете над территориями со структурными и плотностными неоднородностями распределения масс, скорость спутников меняется, а вместе с тем меняется расстояние между ними. В среднем расстояние составляет 220–250 км, измеряется с помощью микроволнового радара с точностью до первых десятков микрон. Изменение, отражающееся в силе притяжения спутников, может быть измерено с высокой точностью (до одного микрона). Измеренное с высокой точностью расстояние является исходной величиной, позволяющей выявить распределение аномальных масс территорий земной поверхности, над которыми пролетают гравиметрические спутники [13, 14].

Траектория полета спутников покрывает территорию Земли примерно за 30 суток, что позволяет отслеживать перераспределение масс на земной поверхности в динамике. Это дает возможность создавать временные модели гравитационного поля с периодичностью один раз в месяц.

Помимо микроволновой системы измерений расстояния, каждый спутник оснащен дополнительным оборудованием. ГНСС-приемник, расположенный на борту спутников, позволяет определять точное положение каждого космического аппарата вдоль базовой линии. Для устранения влияния внешних негравитационных сил на борту каждого космического аппарата находится чувствительный электростатический акселерометр, расположенный вблизи центра масс спутника [15].

Основными целями проекта являются:

- определение глобального гравитационного поля Земли с высокой разрешающей способностью;
- изучение вариации силы тяжести во времени;
- изучение с помощью GPS-измерений явлений преломления в ионосфере и тропосфере путем детального определения электронного содержания.

Миссия GRACE, запущенная с космодрома Плесецк в 2002 году, прекратила функционирование в сентябре 2017 г., в мае 2018 г. запущена миссия CRACE Follow On (GRACE FO). Спутники миссии оснастили лазерной интерферометрической системой, согласованной с данными основной измерительной системы микроволнового диапазона спутников GRACE. Это позволило повысить точность измерения расстояния между спутниками почти в 30 раз, а точность гравитационных моделей увеличить на 30 %.

Результатами завершившейся миссии CRACE и активной CRACE FO являются ежемесячные данные, представленные временными моделями геопотенциала, позволяющие отследить изменение характеристик гравитационного поля Земли в динамике, сделать выводы о сезонных перераспределениях масс на суше и в океане. Кроме того, результаты работы мис-

сии существенно расширяют возможности исследований вопросов климатологии, сейсмологии и геодинамики [5, 8, 14, 16–18].

Миссия GOCE – совместный проект многолетней работы исследователей и инженеров из 45 европейских компаний (Европейское космическое агентство) – предназначен для исследования гравитационного поля Земли. Для этого на спутнике установлен градиометр, который будет измерять гравитационное поле с высочайшей точностью. В основе градиентометрии спутника лежит принцип дифференциальной акселерометрии. Точность измерений обеспечивают шесть необычайно чувствительных акселерометров, способных почувствовать отклонение в силе притяжения в одну десятиллионную от нормального уровня [1]. Принципиально важной составляющей проекта стала непрерывная (каждые 10 секунд) высокоточная привязка спутников миссии GOCE к созвездию спутниковой навигационной системы GPS, одновременно решающая две задачи:

- обеспечение высокоточной пространственной привязкой каждого градиентометрического измерения;
- получение прямоугольных координат спутника GOCE как псевдоизмерения, которые обладают высокой информативностью с точки зрения оценивания низкочастотной компоненты модели гравитационного потенциала Земли.

В табл. 3.5 представлена сравнительная характеристика спутников космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GRACE-FO, GOCE

*Таблица 3.5*

Основные характеристики спутников космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GRACE-FO, GOCE

	Высота орбиты, км	Эксцентриситет	Наклон	Дата запуска	Масса, кг
CHAMP	450–350	0,000 7	87,3°	15.07.2000	400
GRACE	450–300	0,005	89,5 °	17.03.2002	432
GRACE-FO	490–300	0,001	89,0 °	22.05.2018	600
GOCE	250	0,004 5	96,6 °	17.03.2009	1 100

### 3.2.2. Анализ получения чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам работы космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GOCE

В настоящее время модели глобального гравитационного поля, полученные на основе спутниковых измерений гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GRACE-FO и GOCE становятся все более детальными и точными с высоким разрешением как для статических, так и для временных характеристик гравитационного поля Земли. На сегодняшний день на сайте службы International Center for Global Gravity Field Models (ICGEM) представлено 178 моделей, доступных в виде нормированных коэффициентов сферических гармоник [19].

В табл. 3.6 представлен перечень глобальных моделей геопотенциала, созданных по результатам космической гравиметрической миссии CHAMP.

Таблица 3.6

Перечень глобальных моделей геопотенциала, полученных по результатам космической гравиметрической миссии CHAMP [19]

Nn	Наименование модели	Год публикации	Максимальная степень	Исходные данные
1	ULux_CHAMP2013s	2013	120	S(Champ)
2	AIUB-CHAMP03S	2010	100	S(Champ)
3	EIGEN-CHAMP05S	2010	150	S(Champ)
4	AIUB-CHAMP01S	2007	70	S(Champ)
5	EIGEN-CHAMP03S	2004	140	S(Champ)
6	TUM-2S	2004	60	S(Champ)
7	DEOS_CHAMP-01C	2004	70	S(Champ)
8	ITG_Champ01K	2003	70	S(Champ)
9	ITG_Champ01S	2003	70	S(Champ)
10	ITG_Champ01E	2003	75	S(Champ)
11	TUM-2Sp	2003	60	S(Champ)
12	TUM-1S	2003	60	S(Champ)
13	EIGEN-CHAMP03Sp	2003	140	S(Champ)
14	EIGEN-2	2003	140	S(Champ)
15	EIGEN-1	2002	119	S(Champ)
Примечание: S – спутниковые данные				

В табл. 3.7 представлен перечень глобальных моделей геопотенциала, созданных по результатам космической гравиметрической миссии GRACE.

*Таблица 3.7*

Перечень глобальных моделей геопотенциала, полученных по результатам космической гравиметрической миссии GRACE [19]

Nn	Наименование модели	Год публикации	Максимальная степень	Исходные данные
1	ITSG-Grace2018s	2019	200	S(Grace)
2	Tongji-Grace02k	2018	180	S(Grace)
3	Tongji-Grace02s	2017	180	S(Grace)
4	ITU_GRACE16	2016	180	S(Grace)
5	HUST-Grace2016s	2016	160	S(Grace)
6	GGM05S	2014	180	S(Grace)
7	ITSG-Grace2014k	2014	200	S(Grace)
8	ITSG-Grace2014s	2014	200	S(Grace)
9	Tongji-GRACE01	2013	160	S(Grace)
10	AIUB-GRACE03S	2011	160	S(Grace)
11	GIF48	2011	360	A, G, S(Grace)
12	ITG-Grace2010s	2010	180	S(Grace)
13	GGM03C	2009	360	A, G, S(Grace)
14	AIUB-GRACE02S	2009	150	S(Grace)
15	EGM2008	2008	2190	A, G, S(Grace)
16	AIUB-GRACE01S	2008	120	S(Grace)
17	GGM03S	2008	180	S(Grace)
18	ITG-Grace03	2007	180	S(Grace)
19	ITG-Grace02s	2006	170	S(Grace)
20	EIGEN-GRACE02S	2004	150	S(Grace)
21	GGM02S	2004	160	S(Grace)
22	EIGEN-GRACE01S	2003	140	S(Grace)
23	GGM01S	2003	120	S(Grace)
Примечание: А – альтиметрия, G – наземные данные, S – спутниковые данные				



В табл. 3.8 представлен перечень глобальных моделей геопотенциала, созданных по результатам космической гравиметрической миссии GOCE.

Таблица 3.8

Перечень глобальных моделей геопотенциала, полученных по результатам космической гравиметрической миссии GOCE [19]

Nn	Наименование модели	Год публикации	Максимальная степень	Исходные данные
1	GOSG02S	2023	300	S (Goce)
2	GO CONS GCF 2 DIR R6	2019	300	S(Goce)
3	GO CONS GCF 2 TIM R6	2019	300	S(Goce)
4	EIGEN-GRGS.RL04.MEAN-FIELD	2019	300	S(Goce)
5	GO CONS GCF 2 TIM R6e	2019	300	G (Polar), S(Goce)
6	GOSG01S	2018	220	S(Goce)
7	NULP-02s	2017	250	S(Goce)
8	XGM2016	2017	719	A, G, S(GOCO05s)
9	GO CONS GCF 2 SPW R5	2017	330	S(Goce)
10	IfE GOCE05s	2017	250	S(Goce)
11	IGGT R1	2017	240	S(Goce)
12	GOCO05c	2016	720	(Goce), A, G, S
13	GOCO05s	2015	280	(Goce), S
14	JYY GOCE04S	2014	230	S(Goce)
15	GO CONS GCF 2 TIM R5	2014	280	S(Goce)
16	GO CONS GCF 2 SPW R4	2014	280	S(Goce)
17	GO CONS GCF 2 TIM R4	2013	250	S(Goce)
18	ITG-Goce02	2013	240	S(Goce)
19	JYY GOCE02S	2013	230	S(Goce)
20	GO CONS GCF 2 SPW R2	2011	240	S(Goce)
21	GO CONS GCF 2 TIM R2	2011	250	S(Goce)
22	GO CONS GCF 2 DIR R2	2011	240	S(Goce)
23	GO CONS GCF 2 TIM R3	2011	250	S(Goce)
24	GO CONS GCF 2 SPW R1	2010	210	S(Goce)
25	GO CONS GCF 2 TIM R1	2010	224	S(Goce)
26	GO CONS GCF 2 DIR R1	2010	240	S(Goce)
Примечание: A – альтиметрия, G – наземные данные, S – спутниковые данные				

Модели геопотенциала, полученные исключительно на основе спутниковых наблюдений, представляют особый интерес. В отличие от наземных наблюдений, которые, как правило, немногочисленны и получены различными инструментальными средствами с разным уровнем качества и выборками, спутниковые наблюдения охватывают всю поверхность Земли.

Поскольку спутниковые измерения производятся с помощью одной и той же сенсорной платформы, глобальный уровень точности наблюдений более стабилен по сравнению с наземными наблюдениями. Это упрощает адекватное стохастическое моделирование на уровне наблюдений.

Начиная с 2004 года, разработчики для создания глобальных моделей геопотенциала используют различные комбинации данных: результаты космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE и GOCE, наземные измерения, альтиметрию, лазерную локацию (табл. 3.9).

Таблица 3.9

Перечень глобальных моделей геопотенциала, полученных  
по результатам различных комбинаций [19]

Nn	Наименование модели	Год публикации	Максимальная степень	Исходные данные
1	GOCO2025s	2025	300	S(Goce), S(Grace), S(Lageos), S(Champ)
2	WHU-SWPU-GOGR2022S	2023	300	S (Goce), S (Grace)
3	Tongji-GMMG2021S	2022	300	S (Goce), S (Grace)
4	SGG-UGM-2	2020	2190	A, EGM2008, S(Goce), S(Grace)
5	GOCO06s	2019	300	S(Goce), S(Grace), S(Lageos), S(Champ)
6	XGM2019e 2159	2019	2190	A, G, S(GOCO06s), T
7	XGM2019e 2160	2019	5540	A, G, S(GOCO06s), T
8	XGM2019e 2161	2019	760	A, G, S(GOCO06s), T
9	SGG-UGM-1	2018	2159	EGM2008, S(Goce)
10	IGGT R1C	2018	240	G, S(Goce), S(Grace)
11	EIGEN-6S4 (v2)	2016	300	S(Goce), S(Grace), S(Lageos)
12	ITU GGC16	2016	280	S(Goce), S(Grace)
13	GGM05G	2015	240	S(Goce), S(Grace)
14	GECO	2015	2190	EGM2008, S(Goce)
15	GGM05C	2015	360	A, G, S(Goce), S(Grace)
16	EIGEN-6C3stat	2014	1949	A, G, S(Goce), S(Grace), S(Lageos)
17	EIGEN-6S2	2014	260	S(Goce), S(Grace), S(Lageos)
18	GOGRA04S	2014	230	S(Goce), S(Grace)
19	GO CONS GCF 2 DIR R5	2014	300	S(Goce), S(Grace), S(Lageos)
20	EIGEN-6C4	2014	2190	A, G, S(Goce), S(Grace), S(Lageos)
21	GO CONS GCF 2 DIR R4	2013	260	S(Goce), S(Grace), S(Lageos)
22	GOGRA02S	2013	230	S(Goce), S(Grace)
23	GOCO03s	2012	250	S(Goce), S(Grace)
24	DGM-1S	2012	250	S(Goce), S(Grace)

Окончание табл. 3.9

25	EIGEN-6C2	2012	1949	A, G, S(Goce), S(Grace), S(Lageos)
26	GAO2012	2012	360	A, G, S(Goce), S(Grace)
27	GOCO02s	2011	250	S(Goce), S(Grace)
28	EIGEN-6S	2011	240	S(Goce), S(Grace), S(Lageos)
29	EIGEN-6C	2011	1420	A, G, S(Goce), S(Grace), S(Lageos)
30	GO CONS GCF 2 DIR R3	2011	240	S(Goce), S(Grace), S(Lageos)
31	EIGEN-51C	2010	359	A, G, S(Champ), S(Grace)
32	GOCO01S	2010	224	S(Champ), S(Grace)
33	EIGEN-5C	2008	360	A, G, S(Grace), S(Lageos)
34	EIGEN-5S	2008	150	S(Grace), S(Lageos)
35	EIGEN-GL04C	2006	360	A, G, S(Grace), S(Lageos)
36	EIGEN-GL04S1	2006	150	S(Grace), S(Lageos)
37	eigen-cg03c	2005	360	A, G, S(Champ), S(Grace)
38	EIGEN-CG01C	2004	360	A, G, S(Champ), S(Grace)
39	GGM02C	2004	200	A, G, S(Grace)
Примечание: А – альтиметрия, G – наземные данные, S – спутниковые данные				

В монографии представлены результаты вычисления чистых и смешанных аномалий силы тяжести по данным последних глобальных моделей геопотенциала: GOCO2025s и XGM2019e\_2159.

GOCO2025s – спутниковая глобальная модель гравитационного поля содержит сферические гармоники до 300-й степени, с вековыми и годовыми вариациями до 200-й степени, разрешением до градуса. Модель GOCO2025s – новейший релиз в серии Gravity Observation Combination (GOCO) – инициативе, направленной на создание высокоточных и высоко разрешающих статических моделей глобального гравитационного поля [20]. Модель основана на спутниковых данных, собранных в период с 2002 по 2024 год включительно. В разработке участвуют данные спутниковых миссий GOCE (градиентометрические наблюдения TIM6), GRACE и GRACE-FO (наблюдения KBR и LRI), а также данные CHAMP, GOCE, Swarm A/B/C, Sentinel-1A/1B/2A/2B/3A/3B/6A, TerraSAR-X, TanDEM-X и спутниковые лазерные дальномерные наблюдения (система отсчета ITRF2020) для AJISAI, BLITS, LAGEOS-1, LAGEOS-2, LARES, LARES-2, LARETS, Starlette и Stella. Временные вариации включают наблюдения до степени и порядка 150 и регуляризуются до степени и порядка 200 с использованием изотропного шума, разделенного масками суша/океан. Объединение отдельных источников данных основано на полной системе нормальных уравнений с относительным весом компонентов, определяемых с помощью оценки компонентов дисперсии.

Исходная информация, положенная в основу спутниковой модели GOCO2025s, приведена на рис. 3.18.

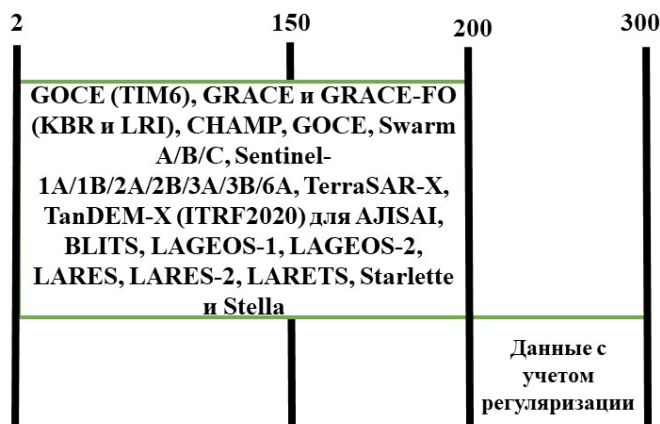


Рис. 3.18. Схема комбинации различных типов данных при создании модели GOCO2025s: 2, 150, 200, 300 – максимальные степени учитываемых гармонических коэффициентов геопотенциала

Комбинированная ультравысокостепенная глобальная модель геопотенциала XGM2019e\_2159 опубликована в 2019 г. в трех вариантах, гармонические коэффициенты которой предварительно определены в области сфероидальных гармоник, а затем, для соответствия стандарту ICGEM, преобразованы в сферические гармоники. На сайте ICGEM [21] варианты модели доступны до сферической гармоники степени  $N = 5\,540$  (XGM2019e), до  $N = 2\,190$  (XGM2019e\_2159) и до  $N = 760$  (XGM2019). Основная информация по трем вариантам модели геопотенциала XGM2019e\_2159 представлена в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Основная информация по трем вариантам  
модели геопотенциала XGM2019e\_2159

№	Модель	Год выхода	Степень N	Описание исходных данных
1	XGM2019e	2019	5 540	A, G, S(GOCO06s), T
2	XGM2019e_2159	2019	2 190	A, G, S(GOCO06s), T
3	XGM2019	2019	760	A, G, S(GOCO06s)
Примечание: A – альтиметрия, G – наземные данные, S – спутниковые данные, T – топография				

Модель геопотенциала XGM2019e содержит сферические гармоники включительно до степени 5 540, что соответствует пространственному разрешению 2' (~4 км). В этой модели длинноволновая часть до степени  $N = 300$  представлена набором гармонических коэффициентов геопотенциала спутниковой модели GOCO06s [8]. Для определения коротких волн использована гравиметрическая и альтиметрическая информация, а также топографические данные.

Спутниковая модель глобального гравитационного поля GOCO06s содержит сферические гармоники до 300-й степени, с вековыми и годовыми вариациями до 120-й степени. Эта модель получена по данным спутниковых гравитационных миссий GOCE (данные градиентометра – TIM6), GRACE (модель ITSG-Grace2018s), CHAMP и наблюдений лазерной локации спутников SLR (Satellite Laser Ranging) [22]. Наземные данные состоят из аномалий силы тяжести на суши и океане, предоставленных National Geospatial-Intelligence Agency (NGA), которые идентичны данным модели XGM2016 с разрешением 15'. Для повышения разрешающей способности модель дополнена гравиметрическим эффектом от топографических масс Земли по данным цифровой модели EARTH2014 [23]. Над океанами гравитационные аномалии получены с помощью спутниковой альтиметрии – DTU13, в соответствии с данными NGA. Вычисление гармонических коэффициентов геопотенциала путем комбинации спутниковых и гравиметрических данных с альтиметрическими выполнялось с использованием полных нормальных уравнений до степени 760, что соответствует пространственному разрешению 15'. Для спектрального диапазона выше 760-й степени применялось блочно-диагональное решение методом наименьших квадратов [17].

Исследования точности модели XGM2019e для различных территорий – Германия, США, Япония, Австралия, Бразилия, Мексика – по сравнению с предыдущими моделями XGM2016, EIGEN6с4 и EGM2008 показали [10]:

- на океане эта модель демонстрирует по всему спектру характеристики лучше, чем у предшествующих моделей;
- в спектральном диапазоне до степени 760 имеется улучшенное приближение к независимым данным GPS-нивелирования на суше по сравнению с предыдущими моделями;
- в спектральном диапазоне выше 760 точность модели XGM2019e ухудшается из-за отсутствия гравиметрических измерений с разрешением более 15'.

На рис. 3.19 приведена исходная информация, положенная в основу спутниковой модели XGM2019e\_2159.



Рис. 3.19. Схема комбинации различных типов данных при создании модели XGM2019e\_2159: 2, 300, 719, 2190 – максимальные степени учитываемых гармонических коэффициентов геопотенциала

Анализ чистых и смешанных аномалий силы тяжести, полученных по результатам работы космических гравиметрических миссий CHAMP, GRACE, GOCE представлен для территории Новосибирской области.

Для вычисления аномалий силы тяжести по данным глобальных моделей геопотенциала требуется знание геоцентрических радиусов-векторов точек на высотах рельефа. Для этого выполнено моделирование геодезических высот для исходных гравиметрических пунктов по формуле

$$H_{\Gamma} = H + \zeta, \quad (3.34)$$

где  $H_{\Gamma}$  – геодезическая высота;

$H$  – нормальная высота;

$\zeta$  – высота квазигеоида.

Высоты квазигеоида для каждой точки на поверхности Земли  $P$  вычислялись по данным глобальных моделей геопотенциала XGM2019e\_2159, GOCO2025s по формуле

$$\zeta_P = r_P \sum_{n=2}^{N_0} \left( \frac{a_e}{r_P} \right)^n \sum_{m=0}^n \left( \Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (3.35)$$

где  $r_P$  – соответственно геоцентрический вектор точки  $P$ ;

$a_e$  – большая полуось Земли;

$\varphi$  и  $\lambda$  – широта и долгота, сферические координаты точки  $P$ ;

$N_0$  – максимальная степень разложения модели геопотенциала, для XGM2019e\_2159 – 2190, для GOCO2025s – 300;

$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$  – полностью нормированные присоединенные полиномы Лежандра;

$$\Delta \bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{nm}^0;$$

$\bar{C}_{nm}$  и  $\bar{S}_{nm}$  – нормированные гармонические коэффициенты геопотенциала Земли;

$n$  и  $m$  – соответственно степень и порядок коэффициента;

$\bar{C}_{nm}^0$  – нормированные гармонические коэффициенты поля [1].

Вычисление чистых и смешанных аномалий силы тяжести по данным глобальных моделей геопотенциала выполнено по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta g_P^C &= \gamma_P \sum_{n=2}^{N_0} (n+1) \left( \frac{a_e}{r_P} \right)^n \cdot \\ &\cdot \sum_{m=0}^n \left( \Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \Bigg\}, \\ \Delta g_P^S &= \gamma_P \sum_{n=2}^{N_0} (n-1) \left( \frac{a_e}{r_P} \right)^n \cdot \\ &\cdot \sum_{m=0}^n \left( \Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \Bigg\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где  $\Delta g_P^C$  и  $\Delta g_P^S$  – соответственно чистые и смешанные аномалии силы тяжести;

$\gamma_P$  – нормальное значение силы тяжести в точке  $P$ ;

Вычисление аномалий силы тяжести по данным глобальных моделей геопотенциала выполнено с использованием программы SINTEGRAV v1.0, созданной в лаборатории физической геодезии СГУГиТ [24]. В программе осуществлены алгоритмы вычисления высоты квазигеоида (3.35) и аномалий силы тяжести по гармоническим коэффициентам геопотенциала (3.36).

В результате вычислений получены цифровые модели смешанных аномалий силы тяжести на исследуемую территорию по данным моделей геопотенциала XGM2019e\_2159 и GOCO2025s (рис. 3.20 и 3.21).

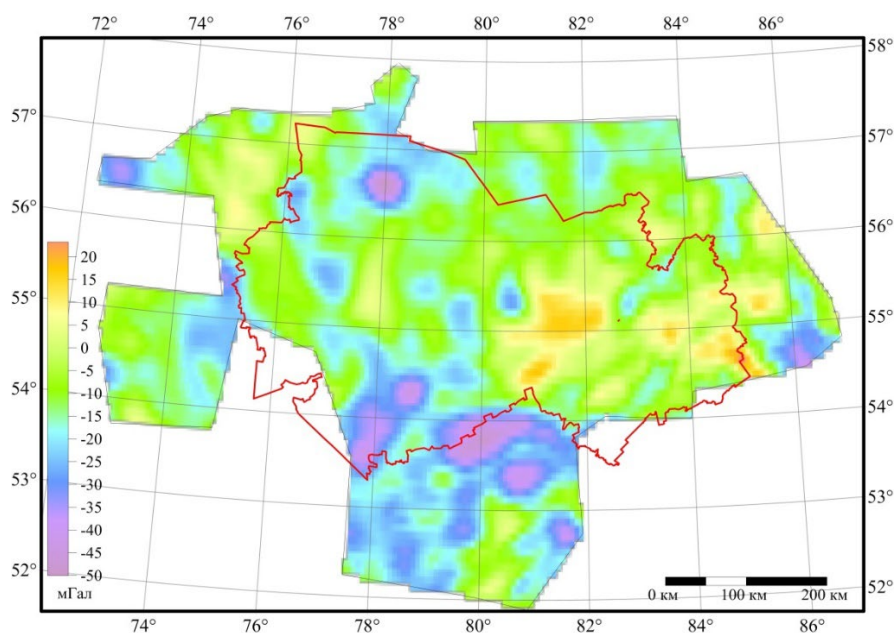


Рис. 3.20. Картограмма результатов определения смешанных аномалий силы тяжести по модели геопотенциала XGM2019e\_2159 на территорию Новосибирской области

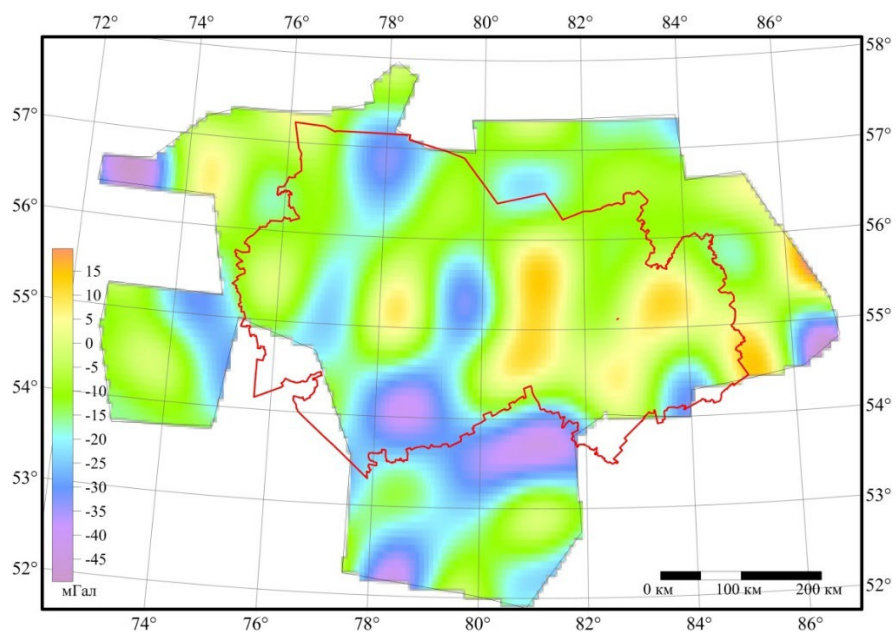


Рис. 3.21. Картограмма результатов определения смешанных аномалий силы тяжести по модели геопотенциала GOCO2025s на территорию Новосибирской области



В табл. 3.11 представлены разности значений между смешанными аномалиями силы тяжести, вычисленными по современным глобальным моделям геопотенциала, и наземными данными, приведенными в п.3.1.2. В таблице 3.11 даны максимальные разности  $X_{\max}$ , минимальные разности  $X_{\min}$ , диапазон разностей  $R$ , среднее значение разности  $\mu$ , средне-квадратические погрешности (СКП  $\sigma$ ).

*Таблица 3.11*

Разности значений между смешанными аномалиями силы тяжести, вычисленными по современным глобальным моделям геопотенциала, и наземными данными

Модели геопотенциала	$X_{\max}$ (мГал)	$X_{\min}$ (мГал)	$R$ (мГал)	$\mu$ (мГал)	СКП $\sigma$ (мГал)
XGM2019e_2159	12,30	-21,70	34,00	-4,30	5,20
GOCO2025s	37,02	-27,72	64,73	4,38	9,75

Результаты, представленные в табл. 3.11, позволяют сделать вывод, что ультравысокостепенная модель XGM2019e\_2159 является более точной моделью, демонстрируя СКП, равную 5,20 мГал. Спутниковая модель GOCO2025s показала СКП, равную 9,75 мГал.

Картосхемы разностей представлены на рис. 3.22 и 3.23.

По формуле 3.32 получены цифровые модели чистых аномалий силы тяжести на исследуемую территорию по данным моделей геопотенциала XGM2019e\_2159 и GOCO2025s (рис. 3.24 и 3.25).

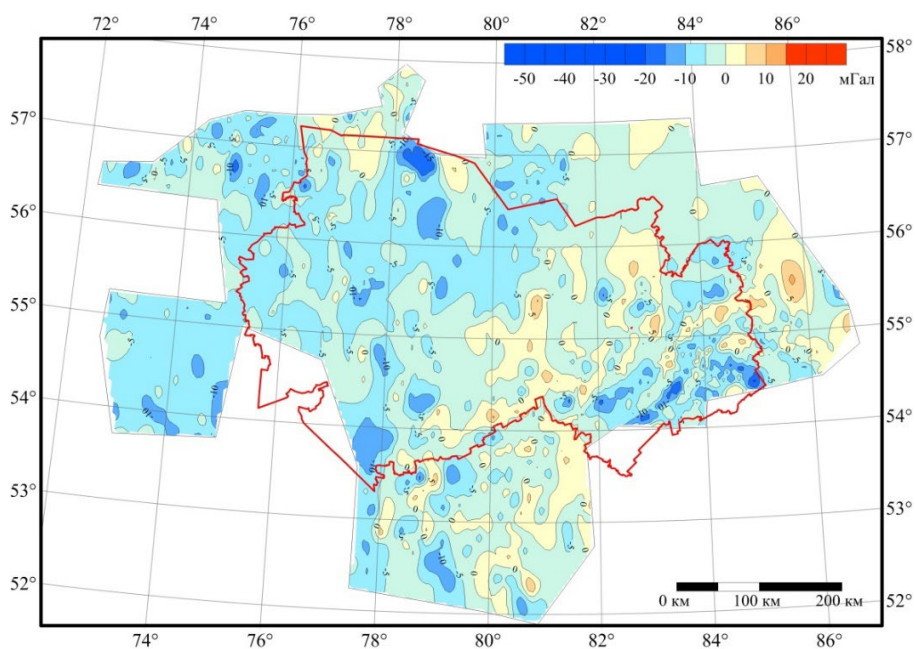


Рис. 3.22. Картохема разностей наземных значений и результатов определения смешанных аномалий силы тяжести по модели геопотенциала XGM2019e\_2159 на территорию Новосибирской области

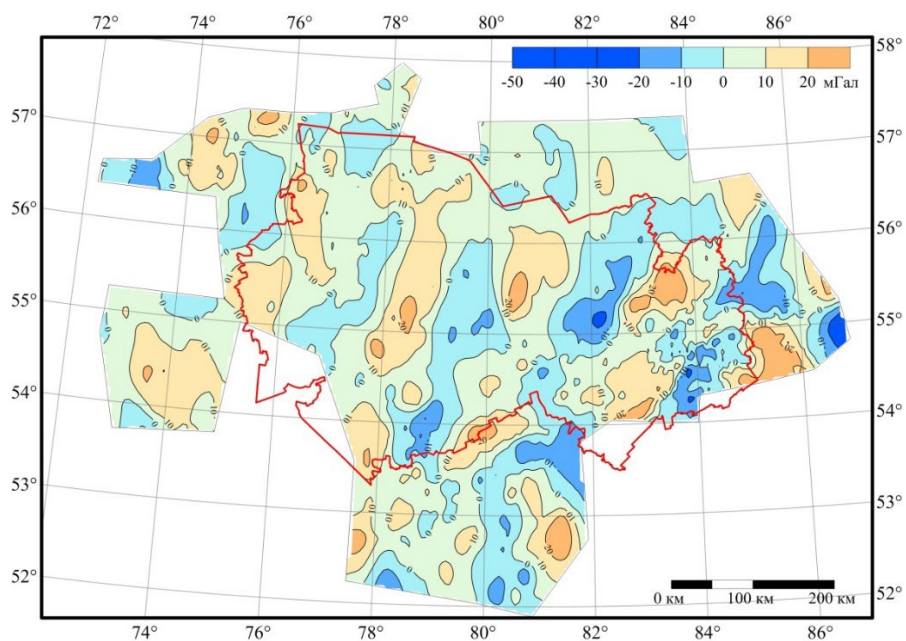


Рис. 3.23. Картохема разностей наземных значений и результатов определения смешанных аномалий силы тяжести по модели геопотенциала GOCO2025s на территорию Новосибирской области

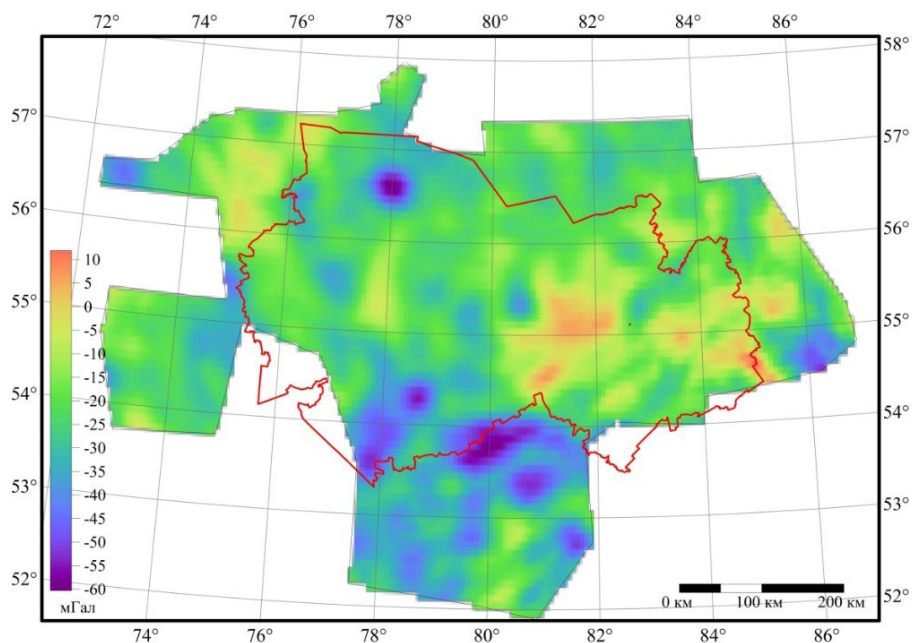


Рис. 3.24. Картограмма результатов определения чистых аномалий силы тяжести по модели геопотенциала XGM2019e\_2159 на территорию Новосибирской области

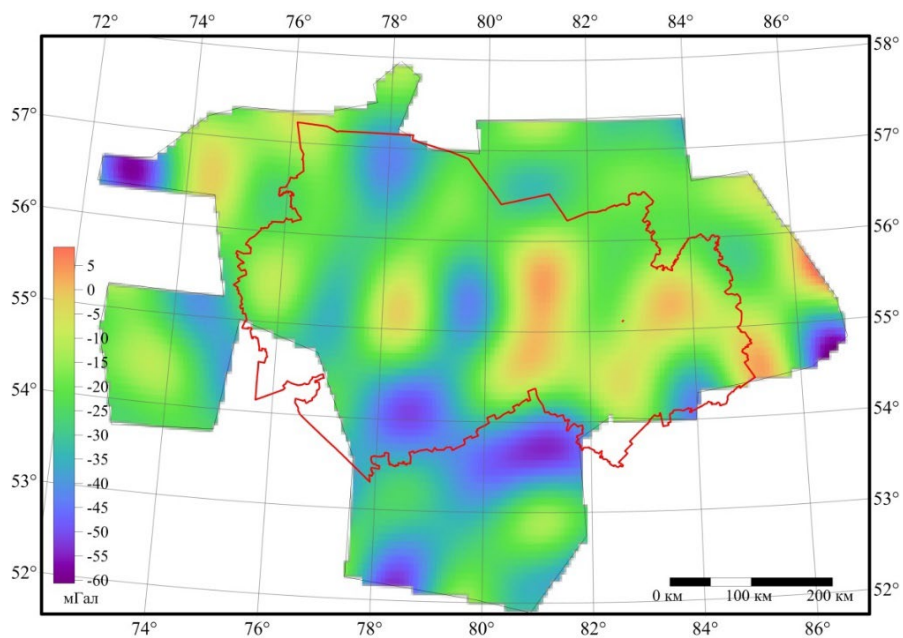


Рис. 3.25. Картограмма результатов определения ячтых аномалий силы тяжести по модели геопотенциала GOCO2025s на территорию Новосибирской области

В таблице 3.12 представлены разности значений между чистыми аномалиями силы тяжести, вычисленными по современным глобальным моделям геопотенциала, и наземными данными, приведенными в п.3.1.2. В табл. 3.12 даны максимальные разности  $X_{\max}$ , минимальные разности  $X_{\min}$ , диапазон разностей  $R$ , среднее значение разности  $\mu$ , среднеквадратические погрешности (СКП  $\sigma$ ).

Таблица 3.12

Разности значений между чистыми аномалиями силы тяжести, вычисленными по современным глобальным моделям геопотенциала, и наземными данными

Модели геопотенциала	$X_{\max}$ (мГал)	$X_{\min}$ (мГал)	$R$ (мГал)	$\mu$ (мГал)	СКП $\sigma$ (мГал)
XGM2019e_2159	21,71	-12,31	34,02	-4,31	5,20
GOCO2025s	37,19	-27,85	65,04	4,39	9,80

Результаты, представленные в табл. 3.12, позволяют сделать вывод, что СКП вычисления чистых аномалий силы тяжести по данным ультравысокостепенной модели XGM2019e\_2159 составляет 5,20 мГал, что на 45 % лучше результатов, полученных по данным спутниковой модели GOCO2025s. Спутниковая модель GOCO2025s показала СКП, равную 9,80 мГал.

Картосхемы разностей представлены на рис. 3.26 и 3.27.

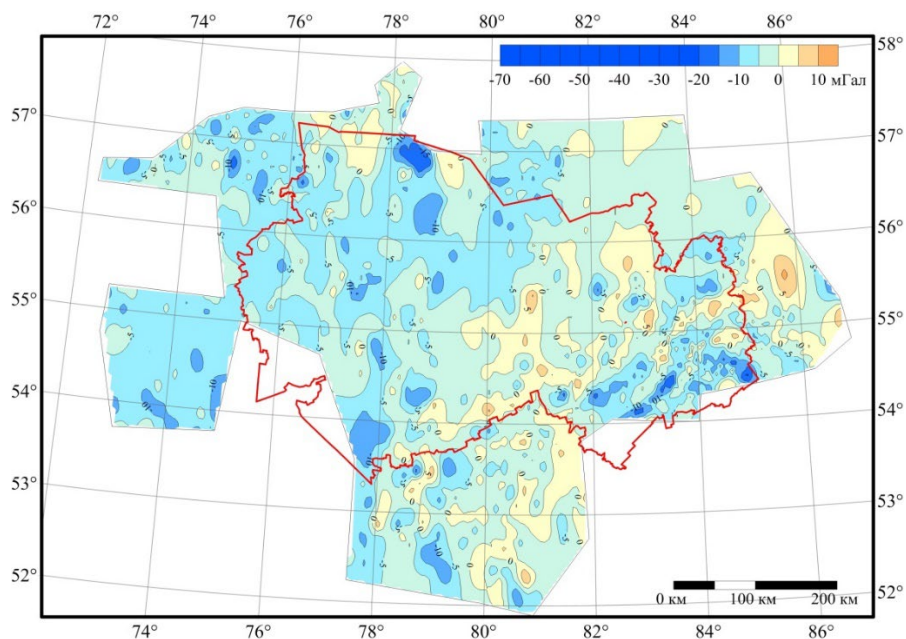


Рис. 3.26. Картохема разностей наземных значений и результатов определения чистых аномалий силы тяжести по модели геопотенциала XGM2019e\_2159 на территорию Новосибирской области

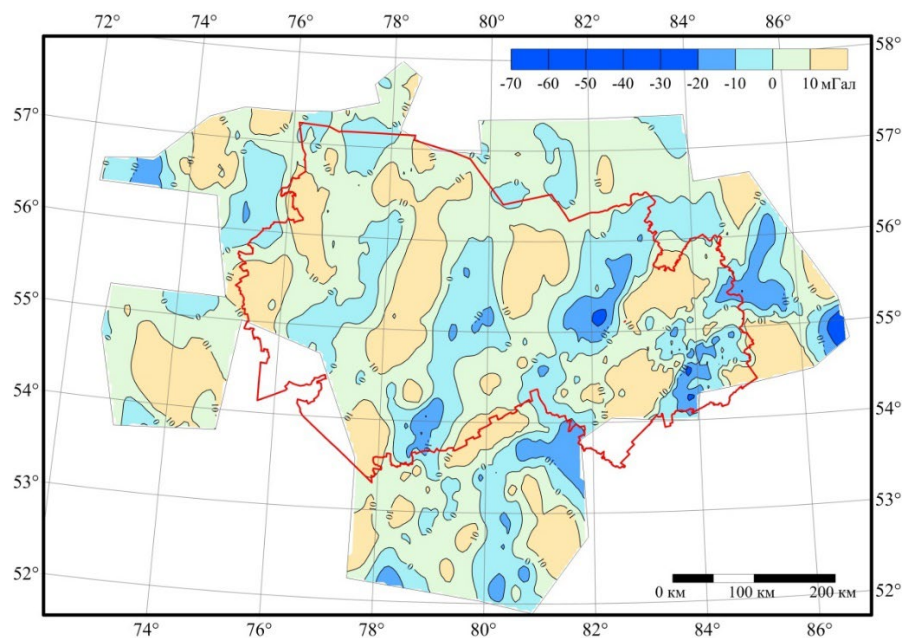


Рис. 3.27. Картохема разностей наземных значений и результатов определения чистых аномалий силы тяжести по модели геопотенциала GOCO2025s на территорию Новосибирской области

Точность восстановления значений смешанных и чистых аномалий силы тяжести по данным глобальной ультравысококачественной модели XGM2019e\_2159 составляет 5,2 мГал.

### ***3.2.3. Опыт определения изменения смешанных аномалий силы тяжести по данным миссии GRACE и GRACE FO на территории Новосибирской области***

Исходными данными для выполнения исследования являются временные модели гравитационного поля Земли в формате GFZ, созданные на основе результатов космических гравиметрических миссий GRACE и GRACE FO, представленных в открытом доступе на сайте международного центра International Center for Global Gravity Field Models (ICGEM) [18].

В экспериментальных исследованиях использованы данные 77 временных глобальных моделей гравитационного поля, по четыре модели в разные сезоны (март, июнь, сентябрь, декабрь) с 2002 по 2022 гг. Исключением является период с осени 2017 г., когда миссия GRACE завершилась, до весны 2018 г., когда начала работу GRACE FO. Выбор периодичности измерений обусловлен желанием выявить закономерности сезонных изменений аномалии силы тяжести (АСТ) на исследуемой территории [25].

Исследования изменений АСТ по данным космических миссий GRACE и GRACE FO выполнены для 28 пунктов территории Новосибирской области (рис. 3.28). Рельеф исследуемой территории неоднороден. Большая часть территории расположена на равнине Обь-Иртышского междуречья, где высоты пунктов не превышают 200 метров. Наиболее возвышенный район – Салаирский кряж – древние горы с абсолютными отметками высот до 450 м [26].



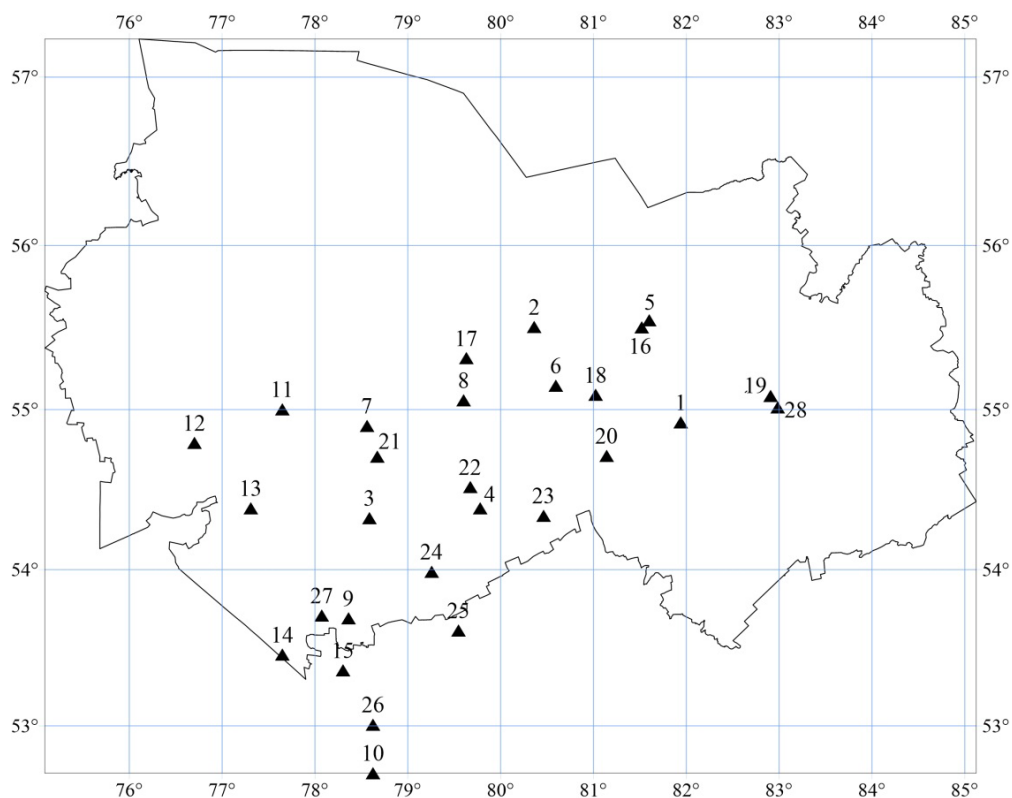


Рис. 3.28. Схема расположения гравиметрических пунктов на территории Новосибирской области

Вычисления характеристик гравитационного поля Земли выполнены в программе, разработанной в лаборатории физической геодезии СГУГиТ [27].

Значения АСТ для пунктов на исследуемой территории выполнено по формулам (3.35), (3.36).

Временные вариации АСТ в исследуемом регионе получены по данным миссии GRACE и GRACE FO с дискретностью 3 месяца за период с июня 2002 г. по июнь 2022 г.

Вариации АСТ по всем временным моделям геопотенциала вычисляются относительно значений, полученных по данным миссии GRACE в марте 2002 г. Исходные значения аномалии силы тяжести, вычисленные на март 2002 г., приняты за «нулевое» отчетное значение.

На рис. 3.29–3.31 приведены графики изменения среднегодовых значений аномалий силы тяжести на 28 пунктах территории Новосибирской области за период с 2002 по 2022 гг. (без учета сезонных вариаций). Также на графиках нанесены линии тренда с прогнозом изменения характеристики ГПЗ до 2024 гг.

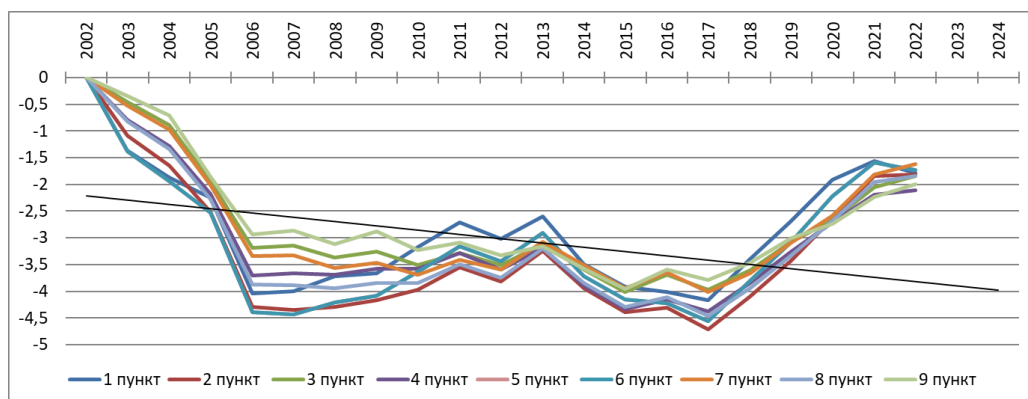


Рис. 3.29. Графики изменения среднегодовых значений аномалии силы тяжести на пунктах с 1 по 9 за период с 2002 по 2022 гг. (в мкГал)

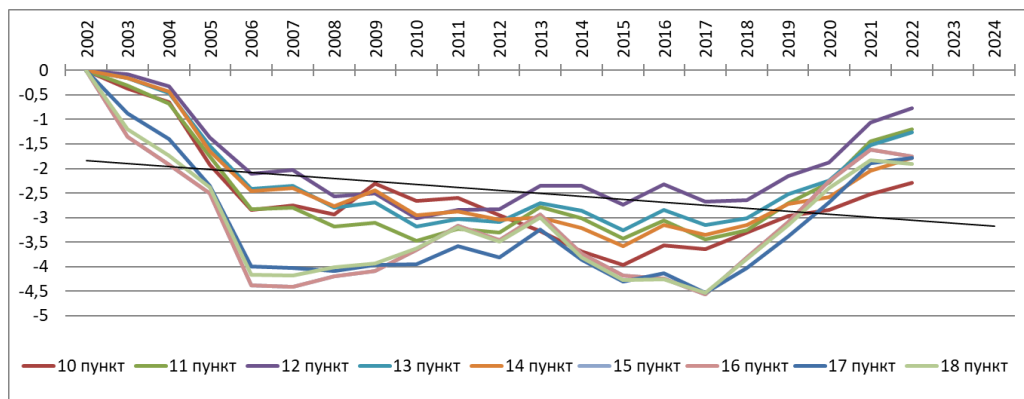


Рис. 3.30. Графики изменения среднегодовых значений аномалии силы тяжести на пунктах с 10 по 18 за период с 2002 по 2022 гг. (в мкГал)

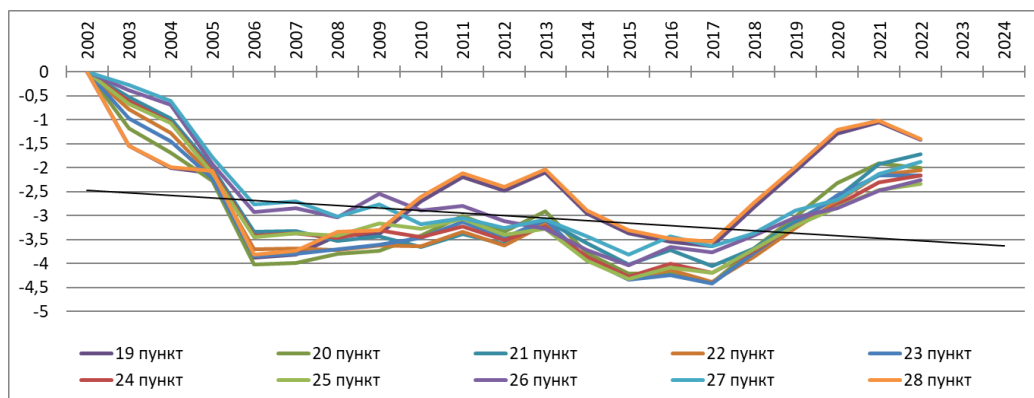


Рис. 3.31. Графики изменения среднегодовых значений аномалии силы тяжести на пунктах с 19 по 28 за период с 2002 по 2022 гг. (в мкГал)



Анализируя графики, приведенные на рис. 3.29–3.31, можно сделать следующие выводы:

- максимальные изменения среднегодовых значений аномалии силы тяжести для 28 пунктов территории Новосибирской области составили от –3,0 до –4,5 мкГал;
- с 2002 по 2006 гг. изменения средних значений аномалии силы тяжести уменьшались от –3,0 до –4,0 мкГал, с 2007 по 2022 гг. значения изменения изучаемой характеристики ГПЗ изменялись в пределах  $\pm 2,5$  мкГал;
- линия тренда характеризует уменьшение значений аномалии силы тяжести за исследуемый период вычислений;
- полученные вариации среднегодовых значений аномалий силы тяжести для 28 пунктов на территории Новосибирской области находятся на пределе точности гравиметрической аппаратуры, которая составляет 5 мкГал.

Для анализа изменений сезонных вариаций значений аномалии силы тяжести выполнены вычисления по данным 77 временных моделей геопотенциала для 28 пунктов на исследуемой территории.

Используя полученные результаты, для каждого пункта вычислен диапазон изменений характеристик ГПЗ в период с марта 2002 по март 2022 гг. Результаты представлены в табл. 3.13.

Таблица 3.13

Изменения характеристик гравитационного поля на пунктах территории Новосибирской области с марта 2002 по 2022 гг.

	Изменения аномалии силы тяжести (мкГал)		
	Максимальное значение	Минимальное значение	Диапазон
1	4,94	-9,70	14,63
2	5,94	-8,29	14,24
3	7,56	-6,20	13,76
4	7,10	-7,70	14,81
5	4,73	-9,38	14,12
6	6,04	-8,58	14,62
7	7,28	-6,20	13,48
8	6,80	-7,49	14,29
9	7,79	-5,79	13,57
10	7,95	-5,64	13,59
11	7,24	-5,07	12,31
12	8,27	-4,09	12,36
13	7,88	-4,60	12,48
14	7,77	-4,81	12,58
15	7,86	-5,60	13,46
16	4,86	-9,33	14,19

Изменения аномалии силы тяжести (мкГал)			
	Максимальное значение	Минимальное значение	Диапазон
17	6,61	-7,50	14,11
18	5,70	-9,00	14,70
19	3,90	-10,08	13,98
20	5,88	-9,13	15,01
21	7,37	-6,33	13,70
22	7,09	-7,58	14,67
23	6,69	-8,46	15,15
24	7,52	-7,00	14,52
25	7,53	-7,26	14,79
26	7,90	-5,84	13,74
27	7,78	-5,43	13,21
28	3,95	-10,09	14,04

Из табл. 3.13 видно, что максимальный диапазон вариаций аномалии силы тяжести за исследуемый период зафиксирован на пункте № 23 и составляет 15,15 мкГал, минимальный диапазон – на пункте № 11 и составляет 12,31 мкГал.

На рис. 3.32 приведен график сезонных изменений аномалии силы тяжести для точки № 23, на которой зафиксирован максимальный диапазон вариаций.

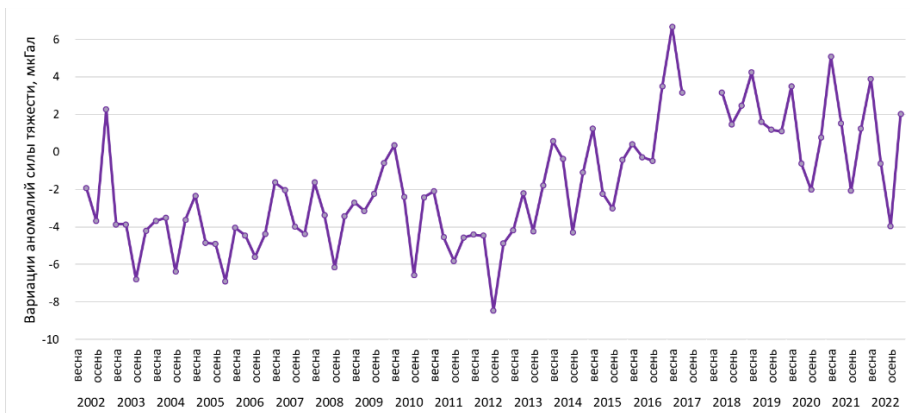


Рис. 3.32. График сезонных изменений значений аномалии силы тяжести для 23-го пункта за период с 2002 по 2022 гг. (в мкГал)

Анализируя график на рис. 3.36, можно отметить периодичность изменений исследуемой характеристики ГПЗ: с осени до весны изменения значений характеристики ГПЗ увеличивается, с весны до осени – уменьшение значений. Минимальное значение вариации аномалии силы тяжести в точке №23 зафиксировано осенью 2012 года и составило –8,46 мкГал, максимальное значение – весной 2017 года составило 6,69 мкГал.

Наблюдаемая закономерность на графике может быть объяснена сезонным перераспределением воздушных и водных масс – сезонными изменениями уровня воды в реках и озерах, а также колебаниями уровня Мирового океана, изменениями массы льда и снега на поверхности Земли [28].

### **3.2.4. Выводы по параграфу 3.2**

Средние квадратические погрешности восстановления смешанных и чистых аномалий силы тяжести по глобальной комбинированной модели гравитационного поля XGM2019e\_2159 отличаются на 0,17%. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что современные комбинированные глобальные модели гравитационного поля можно использовать для получения чистых аномалий силы тяжести на пунктах земной поверхности в пределах точности моделирования.

При создании комбинированных моделей привлекается информация о наземном гравитационном поле. Это позволяет получить величину СКП значений аномалий силы тяжести меньше, чем для чисто спутниковых моделей геопотенциала.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности изучения изменений АСТ во времени на основе данных космических гравиметрических миссий GRACE и GRACE FO. Космические проекты CRACE (CRACE FO) обеспечили не только высокую точность определения характеристик гравитационного поля Земли, но и выход на новый уровень изучения его временных вариаций в планетарных масштабах.

Для более полного изучения природы изменений АСТ на территории Новосибирской области необходимо продолжить исследования с использованием новых данных, полученных в ходе космических гравиметрических миссий и наземных измерений. Это позволит детальнее изучить природу изменений, создать высокоточные модели АСТ с учетом их изменения в пространстве и во времени на любую территорию, установить связи вариаций ГПЗ с различными геодинамическими процессами на поверхности Земли и в ее недрах, а также в околоземном пространстве.

Результаты исследования позволят оптимизировать деятельность по получению и использованию достоверной и качественной информации о характеристиках гравитационного поля Земли, которая является важной составляющей функционирования экономики и обороноспособности государства.

### **3.2.5. Список использованных источников к параграфу 3.2**

1. Исследование современных глобальных моделей гравитационного поля Земли: монография / В. Ф. Канушин, А. П. Карпик, И. Г. Ганагина [и др.]. – 2015. – 270 с.

2. Современные глобальные модели гравитационного поля Земли и их погрешности // В. Н. Конешов, В. Б. Непоклонов, Р. А. Сермягин [и др.]. // Гирскопия и навигация. – 2013. – № 1 (80). – С. 107–118.

3. Современные глобальные модели квазигеоида: точностные характеристики и разрешающая способность данных / В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин [и др.]. – 2017. – Т. 22. – №1. – С. 30-49.

4. Сравнение и анализ аномалий силы тяжести, полученных по данным глобальной модели EGM2008 и гравиметрическим измерениям на локальных участках земной поверхности / В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин [и др.]. // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. X Между-нар. науч. конгр. Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия». Новосибирск. –2014. – Т. 1. – С. 197–203.

5. Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology / GRACE FO : [сайт]. – URL: <https://gracefo.jpl.nasa.gov/mission> (дата обращения: 05.01.2024). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

6. Pail R. Combined satellite gravity field model GOCO01S derived from GOCE and GRACE // Journal of Geophysical Research. – 2010. – Vol. 37. – № 20. – pp. 401–421. – DOI: 10.1029/2010GL044906.

7. Pail R. CHAMP, GRACE, GOCE – Satellite Projects // Encyclopedia of Geodesy. Springer, Cham. – 2014. – pp. 10-21.

8. Rummel R., Yi W., Stummer C. GOCE gravitational gradiometry // Journal of Geodesy. – 2011. – Vol. 85 – pp. 777–790. DOI:10.1007/s00190-011-0500-0

9. Status of the GRACE Follow-On Mission / F. Flechtner, P. Morton, M. Watkins, F. Webb // Gravity, Geoid and Height Systems. International Association of Geodesy Symposia. Springer, Cham. – 2014. – Vol 141. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-10837-7\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-319-10837-7_15).

10. The combined global gravity field model XGM2019e / P. Zingerle, R. Pail, T. Gruber [et al.] // Journal of Geodesy. – 2020. – Vol. 94, № 66. DOI : 10.1007/s00190-020-01398-0.

11. Канушин, В. Ф. Современные проблемы физической геодезии : учеб. пособие / В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина // Сиб. гос. геодез. акад. – Новосибирск : СГГА, 2013. – 122 с. : – ISBN 978-5-87693-665-3

12. Dedicated gravity field missions – principles and aims/ R. Rummel, G. Balmino, J. Johannessen, P. Visser, P. Woodworth // Journal of Geodynamics. – 2002. – Vol. 33. – pp. 3-20. DOI:10.1016/S0264-3707(01)00050-3.

13. GRACE – Gravity Recovery and Climate Experiment : [сайт]. – URL: <http://www.csr.utexas.edu/grace/>. (дата обращения: 15.09.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

14. CRACE Gravity Recovery and Climate Experiment Model: [сайт]. – URL: <https://www2.csr.utexas.edu/grace/gravity/> (дата обращения: 05.01.2024). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

15. Decorrelated GRACE time-variable gravity solutions by GFZ, and their validation using a hydrological model / J. Kusche, R. Schmidt, S. Petrovic, R. Rietbroek // Journal of Geodesy. – 2009. – Vol. 83(10). – pp. 903–913. – DOI 10.1007/s00190-009-0308-3

16. Albertella F., Migliaccio E., Sanso G. GOCE: The Earth Gravity Field by Space Gradiometry / Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2002. – Vol. 83. – pp. 1–15. – DOI 10.1023/A:1020104624752.;

17. Global gravity field recovery using solely GPS tracking and accelerometer data from Champ / Ch. Reigber, G. Balmino, P. Schwintzer, R. Biancale [et al.] // Space Science Reviews. – 2003. – Vol. 108(1). – P. 55–66. – DOI 10.1023/A:1026217713133.

18. ICGEM – International Center for Global Gravity Field Models : [сайт]. – URL: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html/> (дата обращения: 05.01.2024). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

19. CHAMP (satellite) : [сайт]. – URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/CHAMP\\_\(satellite\)](http://en.wikipedia.org/wiki/CHAMP_(satellite)). (дата обращения: 15.09.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

20. Lehrstuhl für Astronomische und Physikalische Geodäsie TUM School of Engineering and Design Technische Universität München : [сайт]. – URL: <https://www.lrg.tum.de/iapg/forschung/schwerefeld/goco>. (дата обращения: 02.09.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

21. International Centre for Global Earth Models (ICGEM) : [сайт]. – URL: <http://icgem.gfz-potsdam.de/home>. (15.11.2025 сегодня дата обращения: 11.08.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

22. GOCO06s – a satellite-only global gravity field model / A. Kvas, J.M. Blockmann, S. Krauss, [и др.] // Earth System Science Data. – 2021. Vol. 13. – pp. 99–118. – DOI: 10.5194/essd-13-99-2021.

23. Earth2014 global topography (relief) model: [сайт]. – URL: <https://www.asg.ed.tum.de/en/iapg/forschung/topographie/earth2014/>. (дата обращения: 15.09.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

24. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ 2020618429 Российская Федерация. SINTEGRAV ver. 1.0 / Д. Н. Голдобин, В. Ф. Канушин, Н. С. Косарев; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет геосистем и технологий». – 2020617685; заявл. 14.07.2020; опубли. 28.07.2020. – 1 с.

25. Ганагина И. Г., Канушин В. Ф., Голдобин Д.Н. Анализ изменений характеристик гравитационного поля Земли по данным космических миссий GRACE и GRACE-FO // Вестник СГУГиТ. – 2024. – Т. 29. – №3. – С. 20-29.

26. Новосибирская область : [сайт]. – URL: [https://www.mnr.gov.ru/activity/regions/novosibirskaya\\_oblast/?sphrase\\_id=597314](https://www.mnr.gov.ru/activity/regions/novosibirskaya_oblast/?sphrase_id=597314) (дата обращения: 05.01.2024). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

27. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ 2018666260 Российская Федерация. Geo\_ABSGRAV ver. 1.0 / Д. Н. Голдобин; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет геосистем и технологий». – 2018663371; заявл. 26.11.2018; опубли. 13.12.2018. – 1 с.

28. Суздалев А. С., Вовк И. Г., Артемьева Н. П. Пространственно-временные вариации гравитационного поля Земли // Интерэкспо Гео-Сибирь, Новосибирск. – 2012. –Т. 3. – С. 20–25.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**  
(обязательное)  
**КАРТОГРАММЫ РЕЗУЛЬТАТОВ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ СЪЕМОК  
НА ТЕРРИТОРИЮ СИБИРСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА**

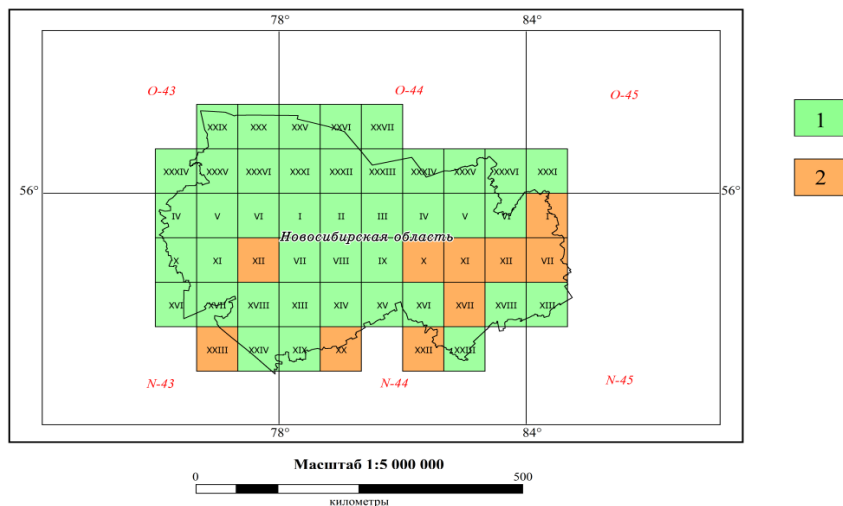


Рис. А.1. Картограмма результатов гравиметрических съемок на территорию Новосибирской области. Площади съемок масштаба 1:200 000: 1 – выполненные; 2 – съемка не выполнялась

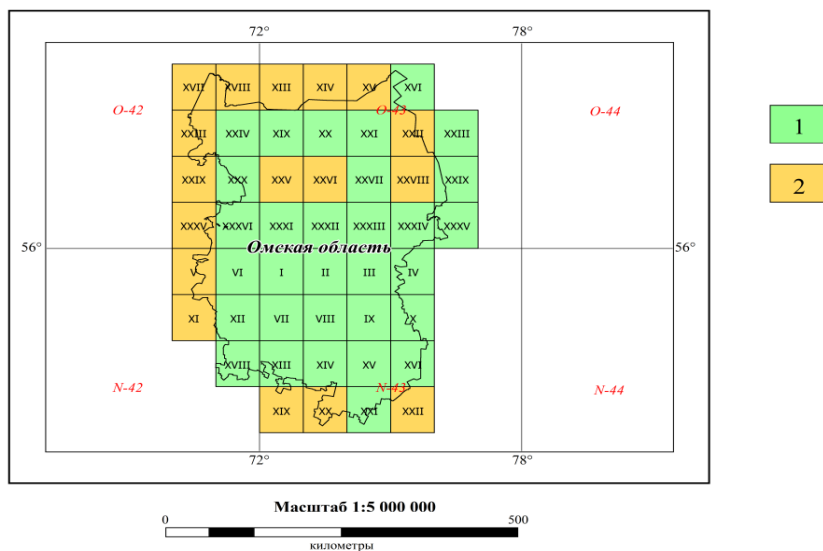


Рис. А.2. Картограмма результатов гравиметрических съемок на территорию Омской области. Площади съемок масштаба 1:200 000: 1 – выполненные; 2 – съемка не выполнялась

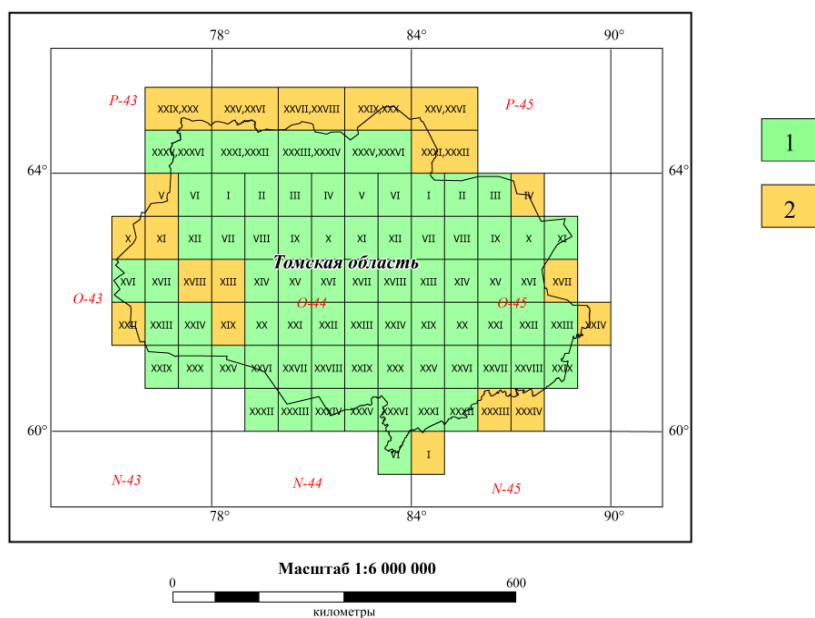


Рис. А.3. Картограмма результатов гравиметрических съемок на территорию Томской области. Площади съемок масштаба 1:200 000: 1 – выполненные; 2 – съемка не выполнялась

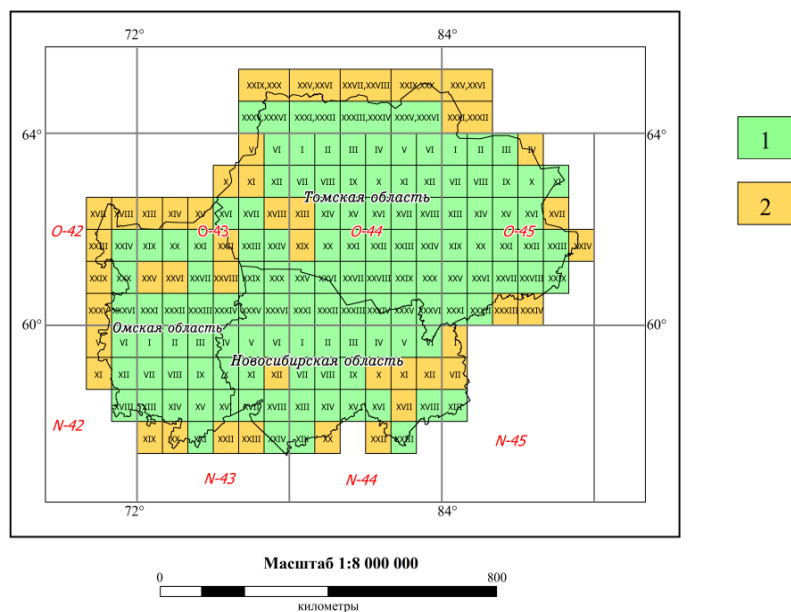


Рис. А.4. Картограмма результатов гравиметрических съемок на территорию Сибирского федерального округа. Площади съемок масштаба 1:200 000: 1 – выполненные; 2 – съемка не выполнялась

*Научное издание*

**Мазурова** Елена Михайловна

**Нейман** Юрий Михайлович  
**Канушин** Вадим Федорович  
**Ганагина** Ирина Геннадьевна

**Сугаипова** Лейла Супьяновна  
**Голдобин** Денис Николаевич  
**Мареев** Артем Владимирович

## **АНАЛИЗ НАПРАВЛЕНИЙ РАЗВИТИЯ МЕТОДОВ ИЗУЧЕНИЯ ВНЕШНЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ**

Издается в авторской редакции

Компьютерная верстка *Я. А. Лесных*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 09.12.2025. Формат 70 × 100 1/16.

Усл. печ. л. 15,81. Тираж 500 экз. Заказ 183.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Издательско-полиграфический центр СГУГиТ  
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 10.

Отпечатано в типографии

Новосибирского государственного технического университета  
630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20.