

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»  
(СГУГиТ)

С. В. Савелькаев

**ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
В ПОЛЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ**

Новосибирск  
СГУГиТ  
2026

Рецензенты: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН  
*П. А. Фомин*  
доктор физико-математических наук, профессор кафедры специальных устройств, инноватики и метрологии СГУГиТ *И. Б. Палымский*

**Савелькаев, С. В.**

С128 Динамический анализ механических систем в поле относительных сил инерции : монография / С. В. Савелькаев. – Новосибирск : СГУГиТ, 2026. – 161 с. – Текст : непосредственный.  
ISBN 978-5-907998-61-2

Монография обобщает результаты научных и практических исследований доктора технических наук, профессора СГУГиТ С. В. Савелькаева в области динамики механических систем с учетом относительных сил и их полей в диссипативной среде и вакууме. Результаты исследований можно условно разделить на две связанные между собой части, выполненные в 1990–2026 годах.

Первая часть исследований посвящена динамическому анализу двух- и трехмассовых механических систем с числом свободности не больше четырех с учетом относительных сил инерции в диссипативной среде и вакууме. Эта часть исследований базируется на принципе Д'Аламбера и аксиоме связей для относительных сил инерции. На их основе получено уравнение движения каждого из взаимодействующих тел механической системы в отдельности с учетом относительных сил инерции в диссипативной среде и вакууме. На основе полученных уравнений проведен динамический анализ трехмассового кривошипно-ползунного механизма типа «инерциоид Толчина». Показано, что механизм можно свести к двухмассовой, а затем к одномассовой системе. Особое внимание уделено амплитудному и фазовому анализу движения тел и центра масс механизма в активной и пассивной фазах его движения. Численно моделировалось смещение центра масс механизма и определен минимальный уровень диссипации внешней среды, до которого смещение остается постоянным, а ниже этого уровня обращается в нуль. Этот эффект может быть использован для создания устройств, обеспечивающих направленное дискретное перемещение в средах с малой диссипацией.

Во второй части исследования полученные результаты распространены на случай замкнутой двухмассовой механической системы с числом степеней свободы, равным пяти. Показано, что геодезическое движение взаимодействующих тел этой механической системы происходит в центральном динамическом силовом поле притяжения, которое образует инерционный домен. Его поле является следствием сложного переносно-относительного поступательного движения тел механической системы, скорость передачи импульса между которыми при таком движении является конечной величиной. Временные характеристики движения тел в их собственных системах отсчета и в системе отсчета их центра масс по отношению к абсолютному времени в инерциальной системе отсчета, связанной с силовым центром инерционного домена, зависят от соотношения масс этих тел и их распределения относительно силового центра инерционного домена. При радиальном распределении геодезическое движение центра масс тел происходит по замкнутой траектории в виде окружности относительно силового центра инерционного домена, что подтверждено математическим моделированием переходного процесса механической системы в ее стационарное состояние при заданных начальных условиях.

Монография расширяет представления механики Ньютона и будет полезна специалистам в области прикладной механики и машиностроения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 531.01

ISBN 978-5-907998-61-2

© СГУГиТ, 2026

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к изданию.....	5
1. Методы динамического анализа механических систем.....	9
1.1. Методы классической механики .....	9
1.2. Уравнение динамики двухмассовой механической системы с диаметральным распределением ее масс в поле инерционного домена .....	18
1.3. Уравнение динамики двухмассовой механической системы с радиальным распределением ее масс в поле инерционного домена .....	26
2. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом относительных сил инерции .....	34
2.1. Введение в главу.....	34
2.2. Принцип Д'Аламбера и аксиома связей для относительных сил инерции .....	36
2.3. Методика определения диссипативного угла и координат центра инерционного домена .....	47
2.4. Полная система уравнений.....	52
2.5. Выводы .....	55
3. Динамический анализ трехмассового кривошипно-ползунного механизма на базе его двухмассового аналога.....	57
3.1. Введение в главу.....	57
3.2. Динамический анализ .....	57
3.3. Математическая модель.....	60
3.4. Активная фаза движения .....	63
3.5. Пассивная фаза движения .....	65
3.6. Эффект смещения центра масс .....	67
3.7. Выводы .....	72
4. Динамический анализ двухмассовой механической системы с пятью степенями свободы и диаметральным распределением ее масс в поле инерционного домена.....	74
4.1. Введение в главу.....	74
4.2. Распределение импульсов .....	75

4.3. Инвариантность угловых перемещений .....	82
4.4. Энергетический анализ и принцип Д'Аламбера.....	86
4.5. Уравнения движения и их частное и общее решения .....	95
4.6. Сведение задачи двух тел к задаче одного тела.....	98
4.7. Выводы .....	101
5. Динамический анализ двухмассовой механической системы с пятью степенями свободы и радиальным распределением ее масс в поле инерционного домена.....	102
5.1. Введение в главу.....	102
5.2. Энергетический анализ и принцип Д'Аламбера.....	102
5.3. Инвариантность угловых перемещений и частное решение уравнений движения.....	110
5.4. Динамический анализ переходного процесса.....	112
5.5. Результаты математического моделирования.....	120
5.6. Выводы .....	122
6. Результаты экспериментальных исследований и практическое применение.....	123
6.1. Инерционная центрифуга.....	123
6.1.1. Конструкция.....	123
6.1.2. Результаты эксперимента .....	126
6.2. Эффект смещения центра масс .....	127
6.2.1. Конструкция трехмассового кривошипно-ползунного механизма.....	127
6.2.2. Математическое моделирование .....	129
6.2.3. Результаты эксперимента .....	130
6.3. Инерциоид.....	131
6.3.1. Конструкция, принцип действия и технические характеристики.....	131
6.3.2. Математическое моделирование работы инерциоида.....	134
6.3.3. Результаты эксперимента .....	144
Заключение.....	147
Список литературы .....	149
Приложение .....	152
Программы расчета на Маткад-14.....	152

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ИЗДАНИЮ

*Чтобы найти истину, каждый должен  
хоть раз в своей жизни освободиться от  
усвоенных им представлений и совершенно  
заново построить систему своих взглядов.*

*Декарт*

В 30-х годах, а позднее в 56-м году прошлого века изобретатели В. Н. Толчин (СССР) и Норман Дин (США) разработали устройства, которые получили название «Инерциоид Толчина» и «Центробежная машина Дина» [8, 9]. Эти устройства обеспечивали направленное движение на горизонтальной поверхности с линейным вязким либо с сухим трением. В терминах теории механизмов и машин инерциоид Толчина представляет собой трехмассовый кривошипно-ползунный механизм, а машина Дина – два эксцентрика, размещенные на общей платформе, подвешенной на пружинах в общем корпусе, взаимодействующим с внешней средой.

В результате анализа движения таких устройств была выдвинута гипотеза о существовании «четвертого закона динамики», согласно которому движение этих устройств совершается силами инерции их внутренних рабочих тел, взаимодействующих с опорным телом (основанием) этих устройств. Такой вид движения был классифицирован как «безопорное движение» [9].

В 1980-е годы с критикой «безопорного движения» выступил автор работы «Инерция» Н. В. Гулиа [10]. Главный вывод работы состоит в том, что силы инерции являются фиктивными силами, которых в механике не существует. Такой вывод, с одной стороны, отрицает возможность безопорного движения, а с другой – вступает в противоречие с принципом Д'Аламбера, где силы инерции являются реальными физическими силами. В терминах

фиктивности сил инерции в механике «безопорное движение» потеряло какой-либо физический смысл.

Идею «безопорного движения» в 1990-е годы вновь пытался возобновить автор работы «Теория физического вакуума» Г. И. Шипов, в которой он рассматривает инерциоид Толчина с позиции «торсионных полей» [11]. После длительных научных дискуссий, по силам инерции, и неоднозначных испытаний в 2008 году на борту спутника «Юбилейный» торсионного движителя Г. И. Шипова, принцип безопорного движения, как и сами инерциоиды, признали лженаучным направлением. При этом на опубликование любых материалов по этой тематике в периодической научно-технической литературе были установлены строгие цензурные ограничения, не зависимо от степени обоснованности материала, что ограничило дальнейшее развитие механики.

Несмотря на это, до настоящего времени предпринимается попытки обоснования возможности «безопорного движения», с позиций, различных необоснованных физических представлений. Так, например, в блогах «Вдумчиво о науке» Ю. Н. Иванов автор работы «Ритмодинамика», пытается обосновать возможность безопорного движения на основе «сжимаемости стоячих волн» в материальных телах, которая якобы вызывает потерю их веса [12]. Автор экспериментально показал что, давление акустической стоячей волны вызывает левитацию (зависание над опорной поверхностью) пробных тел с малой массой (пенопласт). На основе этого эффекта он выдвинул гипотезу о том, что управляя «сжимаемостью стоячих волн» можно обеспечить движение массивных тел в пространстве, заполненном «эфиром», в направлении противоположном действию силе тяготения Ньютона. Эта гипотеза математически не обоснована, экспериментально не подтверждена и вступает в противоречие с представлениями современной механики и общей теории относительности Эйнштейна [21].

Однозначное подтверждение или опровержение возможности «безопорного движения» в механике не удастся сделать потому, что для динамического анализа механических систем, например, состоящих из двух взаимодействующих материальных тел используют уравнение движения их центра масс, которое введено на основе второго закона Ньютона [1, 2]. Это уравнение применяют для анализа движения тел замкнутой механической системы в инерциальной системе отсчета, связанной с центром ее масс (задача двух тел). Если же механическая система не замкнута, то система отсчета центра масс не инерциальна. Это требует введения во второй закон Ньютона и следовательно в уравнение движения центра масс поправок в виде сил инерции, что расширяет область их применения на неинерциальные системы отсчета.

Необходимость этих поправок вызвана тем, что первоначально второй закон Ньютона был сформулирован для случая, когда одно из двух взаимодействующих тел механической системы было отброшено, а реакция его связи со вторым оставшимся телом заменена внешней активной силой  $\vec{R} = \vec{F}$ , являющейся мерой взаимодействия оставшегося и отброшенного тел, что позволяет решать большой класс задач механики, включая небесную, в инерциальных системах отсчета, например, в гелиоцентрической.

Необходимость поправок можно исключить, если в качестве меры взаимодействия двух материальных тел выбрать их относительные силы инерции, которые взаимно приложены к этим телам через их связь  $\vec{R} = \vec{\Phi}_r$ , которая может быть образована, как механически, так и каким-либо силовым полем. При этом принимая какое-либо из этих тел за опорное и применяя к нему аксиому связи  $\vec{R} = \vec{\Phi}_r$ , можно записать уравнение его движения в поле относительной силы инерции другого тела, которое принимается за рабочее [7]. Аналогичную процедуру можно выполнить и для рабочего тела условно поменяв рабочее и опорное тело местами.

Полученные уравнения движения, в отличие от известного уравнения движения центра масс, полученного из второго закона Ньютона, трансформируют механику Ньютона в корреляционную механику и дают возможность анализа движения любого из взаимодействующих тел механической системы, выбранного за опорное, в поле относительной силы инерции ее другого тела, выбранного за рабочее, в инерциальной системе отсчета, как в диссипативной среде, так и в вакууме [4–8]. При этом уравнение движения оставшихся рабочего тела и центра масс механической системы можно получить на основании известных преобразований координат по известным координатам опорного тела в инерциальной системе отсчета.

На основе полученных уравнений динамики с учетом относительных сил инерции показана двойственность термина «безопорное движение». Так, например, направленное движение трехмассового кривошипно-ползунного механизма «типа инерциоид Толчина» в диссипативной среде с линейным вязким коэффициентом сопротивления  $\mu = 0$  невозможно [13, 14]. Если же  $\mu \neq 0$  наблюдается эффект смещения центра масс при котором, величина смещения инерциоида не зависит от величины  $\mu$ , если только  $\mu > \mu_{\text{пор}}$ , где  $\mu_{\text{пор}}$  – пороговое значение коэффициента сопротивления, которое определяется конструкцией инерциоида и его математической моделью [3]. На основе этого эффекта можно получить некоторый эквивалент «безопорного движения» в среде с малой диссипацией  $\mu \rightarrow \mu_{\text{пор}}$ , где  $\mu_{\text{пор}} \approx 0$ , что можно широко использовать в машиностроении.

# 1. МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

## 1.1. Методы классической механики

В теоретической механике динамический анализ механических систем может осуществляться различными методами. Исторически он может проводиться с использованием трех законов механики, сформулированных Исааком Ньютоном в книге «Математические начала натуральной философии» (1687 год). Эти законы являются фундаментом классической механики и лежат в основе динамики – раздела теоретической механики, изучающего характеристики и причины механического движения [1, 2]. Применительно к небесной механике дополнительно используют закон всемирного тяготения, также сформулированный Ньютоном.

Формулировку законов Ньютона можно представить следующим образом.

Первый закон (закон инерции) – фундаментальный принцип в классической механике, который утверждает, что тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока внешние силы  $\vec{F}_i$  не заставят его изменить это состояние.

Второй закон (основной закон динамики) описывает зависимость ускорения  $\vec{a}$  тела с массой  $m$  от равнодействующей  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  всех приложенных к нему сил  $\vec{F}_i$

$$m\vec{a} = \vec{F} . \quad (1.1)$$

Закон выполняется только в инерциальных системах отсчета, но при добавлении к действующим внешним силам сил инерции, учитывающих неинерциальность систем отсчета, становится применимым и в них.

Выбор активной силы  $\vec{F}_i$  как меры взаимодействия  $i$ -го и  $j$ -го тел привел к необходимости формулировки третьего закона.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) – один из трех основных законов механики Ньютона. Утверждает, что сила  $\vec{F}_i$ , действующая со стороны одного тела на другое, равна силе  $\vec{F}_j$  действия другого тела на первое и направлена противоположно вдоль прямой, соединяющей данные тела

$$\vec{F}_i = -\vec{F}_j. \quad (1.2)$$

Закон всемирного тяготения утверждает, что любые два тела с массами  $m_i$  и  $m_j$  притягиваются друг к другу с силой, которая зависит от их масс и расстояния  $R$  между ними

$$F = G \frac{m_i m_j}{R^2}, \quad (1.3)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная.

Этот закон статичен и аналогичен закону Кулона [2]. В настоящее время всемирное тяготение и гравитацию принято отождествлять, что эквивалентно присвоению статическому электрическому полю статуса динамического магнитного поля, не имеющего магнитных зарядов. Однако по отношению к уравнениям Максвелла такое смешение понятий некорректно.

В классической механике время считается универсальным и неизменным. Оно не зависит от объектов или процессов и течет одинаково во всех системах отсчета. Такое время называют абсолютным временем – оно проти-

вопоставляется относительному времени, хотя само понятие относительности появилось позже, с развитием физики XX века на основе теории относительности, сформулированной Албертом Эйнштейном [21].

Взаимодействия в классической механике передаются мгновенно. Это следует из идеи действия на расстоянии: сила, действующая со стороны одного тела на другое в некоторый момент времени, определяется их положением в тот же момент времени. Например, если одно из двух небесных тел сместить в сторону, то, согласно закону всемирного тяготения, второе тело почувствует этот факт мгновенно, как только изменится расстояние от него до первого тела, что определяет мгновенную передачу взаимодействий в классической механике.

Второй закон Ньютона (1.1) с учетом аксиомы связей, утверждающей, что всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями, позволяет получить уравнение движения центра масс (ЦМ) механической системы [1, 2]. И действительно запишем второй закон Ньютона, например, для  $n = 2$  ее взаимодействующих тел  $m_1$  и  $m_2$ :

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{R}_{12} + \vec{F}_1; m_2 \vec{a}_2 = \vec{R}_{21} + \vec{F}_2. \quad (1.4)$$

где  $\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{21}$  – реакции связи взаимодействующих тел  $m_i$  и  $m_j$ , удовлетворяющие третьему закону Ньютона (1.2).

Почленное суммирование уравнений (1.4) дает уравнение движения ЦМ  $C$  механической системы

$$m \vec{a}_C = m \frac{d}{dt} \vec{v}_C = \vec{F}, \quad (1.5)$$

где  $\vec{a}_C$  и  $\vec{v}_C$  – ускорение и скорость ее ЦМ  $C$ ;  $m = m_1 + m_2$  – ее суммарная масса.

Уравнение (1.5) облегчает динамический анализ механической системы как материальной точки в виде ее ЦМ  $C$ . При этом это уравнение трудно применимо для непосредственного раздельного анализа движения тел  $m_1$  и  $m_2$  механической системы (внутреннего анализа), а также ее ЦМ  $C$  в особенности в диссипативных средах.

И действительно, в небесной механике динамический анализ движения двух тяготеющих тел сводят к задаче одного тела с приведенной массой  $m$  [2]. Рассмотрим эту задачу на примере замкнутой системы двух тел  $m_1$  и  $m_2$ , находящихся в поле их тяготения  $F$  (1.3), как показано на рис. 1.1, *а*.

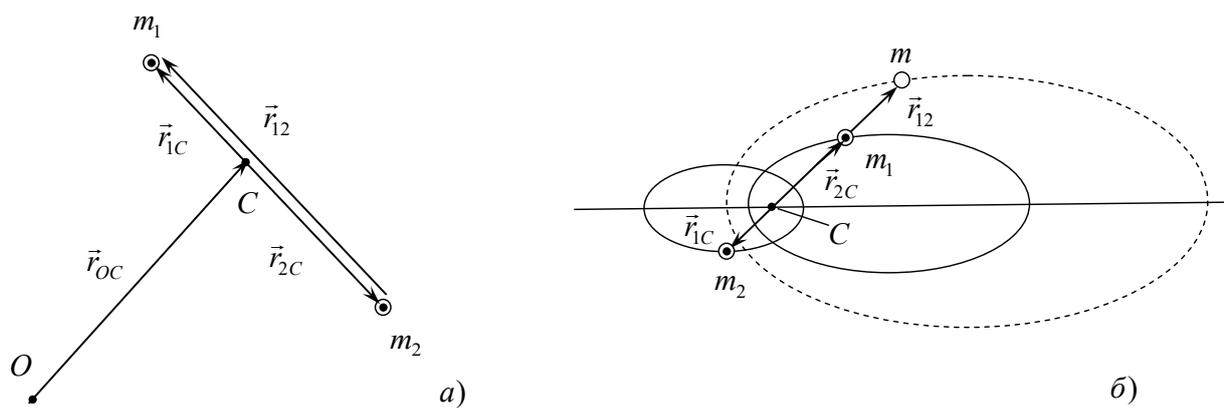


Рис. 1.1. Замкнутая система двух тел  $m_1$  и  $m_2$  в поле их тяготения – *а*; траектории движения тела с приведенной массой  $m$  и тел  $m_1$  и  $m_2$  – *б*)

Потенциальная энергия  $U = U(r_{12})$  такой системы зависит от расстояния между ее телами  $m_1$  и  $m_2$ , определяющегося модулем  $r_{12}$  радиус-вектора  $\vec{r}_{12}$ .

В плоском движении положение системы однозначно определяется двумя полярными координатами  $r_{OC}$ ,  $\varphi_{OC}$  ЦМ  $C$  и дополнительно двумя полярными координатами  $r_{12}$ ,  $\varphi_{12}$  тела  $m_1$  в собственной системе отсчета  $K_2$  тела  $m_2$  или же двумя полярными координатами  $r_{21}$ ,  $\varphi_{21}$  тела  $m_2$  в

собственной системе отсчета  $K_1$  тела  $m_1$  и дополнительно двумя полярными координатами  $r_{21}$ ,  $\varphi_{21}$  тела  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  тела  $m_1$ , последние из которых по отношению к координатам  $r_{12}$ ,  $\varphi_{12}$  являются зависимыми.

Таким образом, число независимых координат рассматриваемой системы двух тел  $m_1$  и  $m_2$  в ее плоском движении составляет  $N = 4$  из общего числа ее степеней свободы  $s = n + m - l = 3 + 3 = 6$ , где  $n = 3$  и  $m = 3$  – количество степеней свободы тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K$ .

Радиус-вектор  $\vec{r}_{12}$  есть разность

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{1C} - \vec{r}_{2C}, \quad (1.6)$$

где  $\vec{r}_{1C}$  и  $\vec{r}_{2C}$  – радиус-векторы тел  $m_1$  и  $m_2$  относительно их ЦМ  $C$  (центра инерции). В соответствии с определением центра инерции

$$m_1 \vec{r}_{1C} + m_2 \vec{r}_{2C} = 0. \quad (1.7)$$

Совместное решение уравнений (1.6) и (1.7) дает:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12}; \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12}. \quad (1.8)$$

С учетом (1.7) и (1.8) функцию Лагранжа можно выразить в виде [2]

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{r}}_{OC}^2 + \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_{12}^2 - U(r_{12}), \quad (1.9)$$

где приведенная масса равна

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.10)$$

Лагранжиан (1.9) распадается на два независимых слагаемых

$$L = L(\vec{r}_{OC}) + L(\vec{r}_{12}, \dot{\vec{r}}_{12}). \quad (1.11)$$

Для замкнутой системы справедливо

$$\vec{p}_C = (m_1 + m_2) \dot{\vec{r}}_{OC} = \overline{\text{const}}, \quad (1.12)$$

тогда

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_{12}^2 - U(r_{12}). \quad (1.13)$$

Функция Лагранжа (1.13) характеризует движение тела  $m$  в центральном поле с неподвижным центром, совпадающим ЦМ  $C$  тел  $m_1$  и  $m_2$ , как показано на рис. 1.1, б. Положение тела  $m$  относительно этого силового центра определяется радиус-вектором  $\vec{r}_{12}$ . В работе [2] показано, что в случае тяготения (1.3) когда  $U = a/r$ , где  $a = -Gm_1m_2$  – константа (отрицательная для тяготения), траекторией тела  $m$  будет коническое сечение. В зависимости от характера взаимодействия (притяжения) и величины полной энергии системы траекториями движения тел  $m$ ,  $m_1$  и  $m_2$  могут быть либо эллипсы (см. рис. 1.1, б), либо параболы или же гиперболы (последние на рис. 1.1 не показаны).

Траектория движения тела  $m_1$  в виде эллипса определяется уравнением

$$r_{1C} = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}, \quad (1.14)$$

где  $p_1 = pm_2 / (m_1 + m_2)$ ;  $p = \frac{M^2}{|a|m}$ ;  $M = [\vec{r}_{12} \vec{p}]$  – момент импульса тела  $m$ ;

$e = \sqrt{1 + 2EM^2 / ma^2}$ ;  $E = \frac{m}{2}(\dot{r}_{12}^2 + r_{12}^2 \dot{\varphi}) + U(r_{12})$  – энергия тела  $m$ ;  $\varphi = \varphi_1$  – фазы движения тел  $m$  и  $m_1$ . Модуль радиус-вектора  $\vec{r}_1$  в  $m_2 / (m_1 + m_2)$  раз больше модуля радиус-вектора  $\vec{r}_{12}$ .

Радиус-вектор  $\vec{r}_2$  в каждый момент времени направлен противоположно радиус-вектору  $\vec{r}_{12}$ . Поэтому, когда радиус-вектор  $\vec{r}_{12}$  ориентирован под углом  $\varphi_1$ , радиус-вектор  $\vec{r}_2$  ориентирован под углом  $\varphi_2 = \pi + \varphi_1$ . Модуль радиус-вектора  $\vec{r}_2$  в  $m_1 / (m_1 + m_2)$  раз больше модуля радиус-вектора  $\vec{r}_{12}$ . Следовательно, учтя, что  $\cos(\varphi_2 - \pi) = -\cos(\varphi_2)$  уравнение эллипса, по которому движется тело  $m_2$  можно записать в виде

$$r_{2C} = \frac{p_2}{1 - e \cos \varphi}, \quad (1.15)$$

где  $p_2 = p m_1 / (m_1 + m_2)$ .

Рассмотренный метод решения не применим к системе, которая находится в диссипативной среде, так как ее ЦМ  $C$  в этой среде движется ускоренно. Это требует введения поправок на неинерциальность системы отсчета  $K_C$ , связанной с ее ЦМ  $C$  в виде сил инерции, которые заранее не известны. Кроме того, такое решение не учитывает поля инерционного домена (ИД), которое является следствием сложного переносно-относительного поступательного движения взаимодействующих тел  $m_1$  и  $m_2$  и которое на примере двух-массовой механической системы (МС2) рассмотрено в монографии.

Для учета сил инерции французский ученый Жан Даламбер в сочинении «Динамика» (1743 год) ввел в рассмотрение принцип кинетостатики – один из основных принципов динамики в теоретической механике. Он назван как принцип Д'Аламбера [1]. Сущность этого принципа состоит в том, что если к действующим на механическую систему активным силам  $\vec{F}_i$  и реакциям связей  $\vec{R}_i$  добавить силы инерции  $\vec{\Phi}_i$ , то полученная система сил будет уравновешенной.

Исходя из этого условие равновесия каждого из тел  $m_i$  механической системы можно записать в виде принципа Д'Аламбера:

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i + \vec{F}_i &= 0; \\ M_O(\vec{\Phi}_i) + M_O(\vec{R}_i) + M_O(\vec{F}_i) &= 0; \quad i, j = 1, 2; i \neq j,\end{aligned}\tag{1.16}$$

где  $M_O(\vec{\Phi}_i)$ ,  $M_O(\vec{R}_i)$  и  $M_O(\vec{F}_i)$  – моменты сил инерции  $\vec{\Phi}_i$ , реакций  $\vec{R}_i$  связей и активных сил  $\vec{F}_i$  относительно произвольного центра  $O$ .

Недостатком принципа Д' Аламбера является то, что для получения уравнений движения  $i$ -го тела необходимо предварительно знать приложенные к нему реакции  $\vec{R}_i$ , которые заранее неизвестны. Кроме того, в современной теоретической механике на силы инерции нет единой точки зрения [1].

Так, например, согласно одной из них, сила инерции является фиктивной силой, условно приложенной к телу, чтобы придать уравнениям движения (1.4) более удобную форму равновесия [10]. Такая точка зрения противоречит с принципу Д' Аламбера (1.16), в котором сила инерции  $\vec{\Phi}_i$  имеет статус активной силы в теоретической механике.

Согласно другой точке зрения сила инерции считается приложенной по частям к ускоряющему телу и направлена по направлению силы инерции ускоряемого (рабочего) тела [1]. Для обоснования приводятся следующие рассуждения. Материальное тело движется с ускорением  $\vec{a}$  потому, что на него действует какие-то другие тела с силой  $\vec{F} + \vec{R}$ . По третьему закону Ньютона (1.2) материальная точка должна оказывать противодействие этим телам с такой же по модулю, но противоположной по направлению силой  $-\vec{F} - \vec{R}$ , которая согласно принципа Д' Аламбера (1.5) равна силе инерции  $\vec{\Phi} = -\vec{F} - \vec{R}$ .

Согласно третьей точке зрения, силу инерции считают приложенной к движущемуся телу противоположно его ускорению.

В монографии по отношению к МС2, состоящей из двух взаимодействующих тел  $m_i$  и  $m_j$  введены в рассмотрение три вида сил инерции.

Собственная сила инерции  $\vec{\Phi}_i = -m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i = -m_i \vec{a}_i$ ;  $i = 1, 2$  опорного (ускоряющего) тела  $m_i$ , входящая в принцип Д'Аламбера (1.16). Эта сила приложена к опорному телу  $m_i$ , которое вместе с его собственной системой отсчета  $K_i$  совершает абсолютное движение в лабораторной системе отсчета  $K$  и направлена противоположно его ускорению  $\vec{a}_i$ . Она характеризует физическое свойство опорного тела  $m_i$  противодействовать искривлению траектории его равномерного прямолинейного движения в системе отсчета  $K$ . Выбор опорного тела из двух тел МС2 при их равных массах  $m_i = m_j$  равноправен. Если  $m_i > m_j$ , то за опорное тело следует выбирать тело с большей массой.

Переносная сила инерции  $\vec{\Phi}_{je} = -\frac{d}{dt} m_j \vec{v}_{je} = -\frac{d}{dt} m_j \vec{a}_{je}$ ;  $i, j = 1, 2; i \neq j$  рабочего тела  $m_j$ . Она приложена к нему в лабораторной системе отсчета  $K$ , в которой это тело совершает переносное движение вместе собственной системой отсчета  $K_i$  опорного тела  $m_i$ .

Относительная сила инерции  $\vec{\Phi}_{ji} = -\frac{d}{dt} m_j \vec{v}_{ji} = -m_j \vec{a}_{ji}$ ;  $i, j = 1, 2; i \neq j$  рабочего тела  $m_j$ . Она приложена к нему в собственной системе отсчета  $K_i$  опорного тела  $m_i$  и, в соответствии с аксиомой связей для относительных сил инерции, оказывает влияние на движение опорного тела  $m_i$  в лабораторной системе отсчета  $K$ .

Кроме того, введено в рассмотрение поле относительных сил инерции  $\vec{F}_{iC,O}$  и  $\vec{F}_{jC,O}$  (центральное динамическое гравитационное поле притяжения в виде ИД с силовым центром  $O$ ). Это поле формируют взаимодействующие тела  $m_i$  и  $m_j$  из-за участия каждого из этих тел в сложном переносно-

относительном поступательном движении в лабораторной системе отсчета  $K$ .

Для начальных импульсов  $\vec{p}_i(0) = -\vec{p}_j(0)$  тел  $m_i$  и  $m_j$  с равными массами  $m_i = m_j$  их ЦМ  $C$  совпадает силовым центром  $O$  ИД. При этом в соответствии с аксиомой связей относительная сила инерции  $\vec{F}_{iC}$  тела  $m_i$  действует на тело  $m_j$ , а относительная сила инерции  $\vec{F}_{jC}$  тела  $m_j$  – на тело  $m_i$ .

Если же начальные импульсы этих тел составляют  $\vec{p}_i(0) = 0; \vec{p}_j(0) \neq 0$ , то ЦМ  $C$  МС2 не совпадает с силовым центром  $O$  ИД и совершает относительно этого центра равномерное движение по замкнутой геодезической траектории в виде окружности  $s_C$  под действием поля относительных сил инерции  $\vec{F}_{iO}$  и  $\vec{F}_{jO}$ .

## **1.2. Уравнение динамики двухмассовой механической системы с диаметрально распределением ее масс в поле инерционного домена**

Вывод уравнения динамики замкнутой МС2 в поле ее ИД с диаметрально распределением масс [15–18] осуществим на примере ее кинематической схемы, показанной на рис. 1.2, *a*. Ее тела  $m_1$  и  $m_2$  связаны между собой жестким прямолинейным стержнем  $R = r_{12} = r_{21}$ , который установлен на этих телах с помощью идеальных шарниров, и совершают в системе отсчета  $K_C$ , связанной с их ЦМ  $C$ , поступательное движение по траектории  $s_{1,2}$  (общей при массах  $m_1 = m_2$ ), а также одновременное поступательное движение в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$  по траекториям  $s_{12}$  и  $s_{21}$  в виде окружностей (на рис. 1.2, *a* показаны частично) так, что оси координат систем отсчета  $K_C, K_1$  и  $K_2$ , а также неподвижной лабораторной системы отсчета  $K$  всегда параллельны.

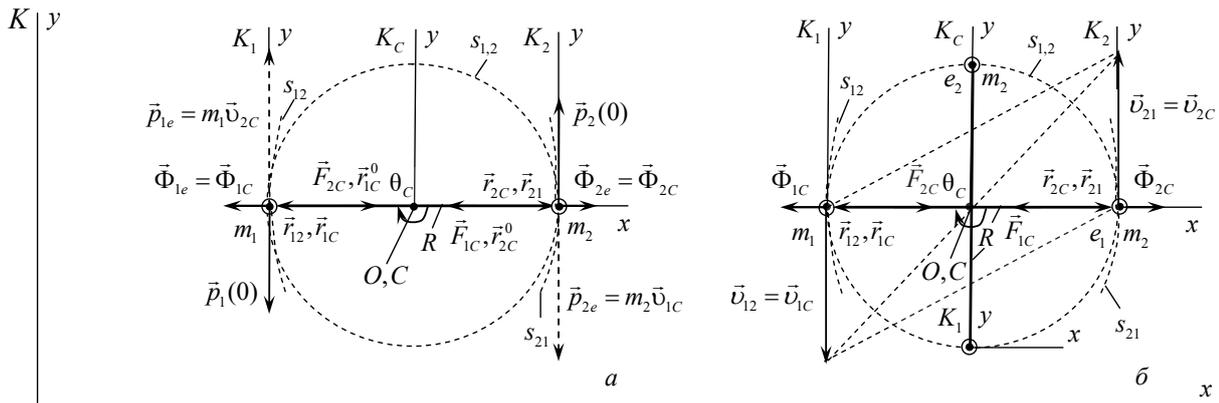


Рис. 1.2. Двухмассовая механическая система с диаметрально распределением тел  $m_1$  и  $m_2$  – а и карта событий  $e_1$  и  $e_2$  ее тела  $m_2$  – б

Количество независимых координат рассматриваемой МС2 в плоском движении при  $R = r_{12} = r_{21} = \text{const}$  определяется двумя полярными координатами  $r_{1C}$  и  $\varphi_{1C}$  тела  $m_1$  в системе отчета  $K_C$  ЦМ  $C$  и дополнительно одной полярной координатой  $\varphi_{21}$  тела  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  тела  $m_1$  или же двумя полярными координатами  $r_{2C}$  и  $\varphi_{2C}$  тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  ЦМ  $C$  и дополнительно одной полярной координатой  $\varphi_{12}$  тела  $m_1$  в собственной системе отсчета  $K_2$  тела  $m_2$ . Полярные координаты  $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$  являются зависимыми.

Таким образом, число независимых координат для однозначного описания плоского движения МС2 в системе отсчета  $K$  составляет  $N = 3$  из общего числа ее степеней свободы  $s = n + m - l = 2 + 2 - 1 = 5$ , где  $n = 3$  и  $m = 3$  – количество степеней свободы тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K$ ;  $l = 1$  – одна связь стержнем  $R$ . При этом общее число степеней свободы  $s = 5$  определяет полную энергию  $E$  МС2, которая включает в себя как кинетическую энергию  $T$  ее тел  $m_1$  и  $m_2$ , так и их потенциальную энергию  $U$  в поле их ИД.

И действительно, при  $s = 5$  тела  $m_1$  и  $m_2$  МС2 совершают в системе отсчета  $K$  сложное переносно-относительное поступательное движение с абсолютными скоростями:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{ie} + \vec{v}_{ij}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j, \quad (1.17)$$

где  $\vec{v}_{ie}$  и  $\vec{v}_{ij}$  – переносная скорость  $i$ -го тела в системе отсчета  $K$  и его относительная скорость в собственной системе отсчета  $K_j$   $j$ -го тела.

Для начальных импульсов тел  $m_1$  и  $m_2$  равных  $\vec{p}_i(0) = -\vec{p}_j(0)$  движение этих тел в системе отсчета  $K_C$  характеризуется диаметрально-распределением

$$\theta_C = \varphi_{21} - \varphi_{1C} = -\arccos(p_i(0) / p_j(0)) = -\pi, \quad (1.18)$$

характеризующим запаздывание фазы  $\varphi_{1C}$  поступательного движения тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_C$  относительно фазы  $\varphi_{21}$  поступательного движения тела  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  тела  $m_1$   $\varphi_{1C} = \varphi_{21} + \theta_O = \varphi_{21} - \pi$ .

В соответствии с принципом Д'Аламбера (1.16) каждое из тел рассматриваемой замкнутой МС2 удовлетворяет условию равновесия:

$$\vec{\Phi}_i + \vec{R}_{ij} = 0; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j, \quad (1.19)$$

где  $\vec{R}_{ij}$  – реакция связи  $i$ -го и  $j$ -го тел;  $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$  – собственная сила инерции опорного тела  $m_i$  при его движении в месте с собственной системой отсчета  $K_i$  в системе отсчета  $K$ .

Тогда согласно аксиоме связей можно условно отбросить рабочее тело  $m_j$  и заменить реакцию связи  $\vec{R}_{ij} = \vec{\Phi}_{ij}$  его относительной силой инерции  $\vec{\Phi}_{ij} = -m_j \vec{a}_{ij}$ . В результате получим уравнение динамики опорного тела  $m_i$

замкнутой МС2 в виде принципа Д'Аламбера или второго закона Ньютона в поле относительной силы инерции отброшенного рабочего тела  $m_j$ :

$$\vec{\Phi}_i + \vec{\Phi}_{ji} = 0; m_i \vec{a}_i = \vec{\Phi}_{ji}; i, j = 1, 2; i \neq j. \quad (1.20)$$

Определим относительные силы инерции  $\vec{\Phi}_{12}$  и  $\vec{\Phi}_{21}$  взаимодействующих тел  $m_1$  и  $m_2$  (1.20) для их сложного переносно-относительного поступательного движения в системе отсчета  $K$ . Для этого, с учетом абсолютных скоростей  $\vec{v}_i$  (1.17) этих тел выразим кинетическую энергию их переносно-относительного движения в виде [6, 15–17]

$$T_{er} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 + U, \quad (1.21)$$

где  $U$  – обобщенный кинетический потенциал [2]:

$$U = m_1 v_{1e} v_{12} \cos \theta_C + m_2 v_{2e} v_{21} \cos \theta_C = -(m_1 v_{2C} v_{12} + m_2 v_{1C} v_{21}), \quad (1.22)$$

характеризующий вклад относительного  $\vec{v}_{12r}, \vec{v}_{21r}$  движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в их переносное движение  $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C}, \vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C}$ ; где  $\theta_C = \widehat{\vec{v}_{2e} \vec{v}_{21}} = -\pi$  или же  $\theta_C = \widehat{\vec{v}_{1e} \vec{v}_{12}} = \pi$  – угол между векторами переносных  $\vec{v}_{1e}, \vec{v}_{2e}$  и относительных  $\vec{v}_{12}, \vec{v}_{21}$  скоростей (см. рис. 1.2, а).

Сумма первого и второго слагаемых, входящих в  $T_{er}$  (1.21), является кинетической энергией переносного движения тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2

$$T_{Ce} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2e}^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1C}^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_{Ce}^2, \quad (1.23)$$

которое характеризуется их переносными импульсами  $\vec{p}_{1e} = m_1 \vec{v}_{2C}$  и  $\vec{p}_{2e} = m_2 \vec{v}_{1C}$  вместе с собственными системами отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$ , что определяет физический смысл рассматриваемой суммы  $T_{Ce}$ .

Сумма третьего и четвертого слагаемых кинетической энергии  $T_{er}$  (1.21) является кинетической энергией  $T_r = \frac{1}{2} m_1 v_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{21}^2$  относительного движения тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_2$  и тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$ .

Потенциал  $U$  (1.22) определяет относительные силы инерции

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1C} &= -\frac{\partial U}{\partial r_{2C}} \cdot \vec{r}_{2C}^0 = m_1 \omega_{2C} \omega_{12} r_{12} \cdot \vec{r}_{2C}^0; \\ \vec{F}_{2C} &= -\frac{\partial U}{\partial r_{1C}} \cdot \vec{r}_{1C}^0 = m_2 \omega_{1C} \omega_{21} r_{21} \cdot \vec{r}_{1C}^0,\end{aligned}\tag{1.24}$$

образованного ими ИД, с силовым центром  $O$  с которым для диаметрального распределения  $\theta_C = -\pi$  (1.18) совпадает ЦМ  $C$  МС2 (см. рис. 1.2, а), где  $\vec{r}_{1C}^0 = -\vec{r}_{1C} / r_{1C}$  и  $\vec{r}_{2C}^0 = -\vec{r}_{2C} / r_{2C}$  — единичные векторы противоположно направленные радиус-векторам  $\vec{r}_{1C}$  и  $\vec{r}_{2C}$  и определяющие направление относительных сил инерции  $\vec{F}_{2C}$  и  $\vec{F}_{1C}$  к ЦМ  $C$  (см. рис. 1.2, а, где выбор направлений  $\vec{r}_{1C}^0$  и  $\vec{r}_{2C}^0$  подлежит дальнейшему обоснованию);  $\omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_C$  и  $\omega_{12}, \omega_{21}$  — угловые скорости движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  и их угловые скорости в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$ , которые в монографии выражены в виде:

$$\begin{aligned}\omega_C &= \omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_{12} + \omega_{21}; \\ \omega_{12} &= \frac{m_2 \omega_C}{m_1 + m_2}; \quad \omega_{21} = \frac{m_1 \omega_C}{m_1 + m_2}.\end{aligned}\tag{1.25}$$

Исходя из кинематической реализуемости движения тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2 без ее разрушения связи  $R$ , необходимо, чтобы угловые перемещения этих тел в системах отсчета  $K$ ,  $K_C$ ,  $K_1$  и  $K_2$  являлись инвариантом

$$\Delta\varphi = \omega_C \Delta t_C = \omega_{12} \Delta t_2 = \omega_{21} \Delta t_1, \quad (1.26)$$

где  $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ ,  $\Delta t_2 = t_2 - t_0$  и  $\Delta t_C = t_C - t_0$  – приращение времени;  $t_0$  – единое начальное время во всех системах отсчета.

Инвариант (1.26) определяет то, что при любом угловом перемещении тела  $m_1$  в системах отсчета  $K_C$  и  $K_2$ , а также тела  $m_2$  в системах отсчета  $K_C$  и  $K_1$  эти тела будут находиться в одной точке траектории  $s_{1,2}$  системы отсчета  $K$  как, например, для тела  $m_2$  при  $\Delta\varphi = \{0; \pi/2\}$  показано на рис. 1.2, б событиями  $e_1$  и  $e_2$ .

Преобразования (1.25) совместно с инвариантом  $\Delta\varphi$  (1.26) требуют введения собственного времени в системах отсчета  $K_1$  и  $K_2$

$$t_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} t; \quad t_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} t. \quad (1.27)$$

Время в системах отсчета  $K$  и  $K_C$  абсолютно  $t_C = t$ .

С учетом относительных сил инерции  $\vec{F}_{1C}$  и  $\vec{F}_{2C}$  (1.24), образующих ИД, уравнение динамики замкнутой МС2 (1.20) в форме принципа Д’Аламбера и второго закона Ньютона примут вид:

$$\vec{\Phi}_i + \vec{F}_{jC} = 0; \quad m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{jC}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (1.28)$$

где индекс  $C$  соответствует диаметральному распределению  $\theta_C = -\pi$  (1.18) тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$ .

Для равных масс  $m_1 = m_2$  тел МС2 переносную кинетическую энергию  $T_{Ce}$  (1.23) посредством перестановки  $m_1 \Leftrightarrow m_2$  можно свести к кинетической энергии  $T_C$  ее тел в системе отсчета  $K_C$

$$T_{Ce} = T_C = \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{2C}^2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_C^2. \quad (1.29)$$

Замена в (1.21)  $T_{Ce} = \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{1e}^2$  на  $T_C$  (1.29) дает лагранжиан  $L$  рассматриваемой МС2

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{21}^2 + U = \\ &= \frac{1}{2}m_1\omega_{1C}^2r_{1C}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{2C}^2r_{2C}^2 + \frac{1}{2}m_1\omega_{12}^2r_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{21}^2r_{21}^2 - \\ &\quad - (m_1\omega_{2C}r_{2C}\omega_{12}r_{12} + m_2\omega_{1C}r_{1C}\omega_{21}r_{21}) \end{aligned} \quad (1.30)$$

ее абсолютного движения в системе отсчета  $K$  при  $m_1 = m_2$ .

Частные дифференциалы от функции лагранжа  $L$  (1.30) вида  $-\frac{\partial L}{\partial r_{1C}} = 0$

и  $-\frac{\partial L}{\partial r_{2C}} = 0$  дают обобщенные силы

$$\begin{aligned} -m_1\omega_{1C}^2r_{1C} + m_2\omega_{1C}\omega_{21}r_{21} &= 0; \\ -m_2\omega_{2C}^2r_{2C} + m_1\omega_{2C}\omega_{12}r_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (1.31)$$

которые определяют уравнения (1.28).

И действительно первые слагаемые (1.31) определяют собственные силы инерции  $\vec{\Phi}_1 = \vec{\Phi}_{1C} = -m_1\omega_{1C}^2\vec{r}_{1C}$  и  $\vec{\Phi}_2 = \vec{\Phi}_{2C} = -m_2\omega_{2C}^2\vec{r}_{2C}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (см. рис.1.2, а), которые направлены от силового центра  $O$  с которым совпадает ЦМ  $C$ .

Для диаметрального распределения  $\theta_C = -\pi$  (1.18) относительные силы инерции  $\vec{F}_{1C}$  и  $\vec{F}_{2C}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (1.24), образующие ИД, действуют соответственно на диаметрально противоположные тела  $m_2$  и  $m_1$  в виде уравновешенной системы сил  $\vec{F}_{1C} + \vec{F}_{2C} = 0$ . Следовательно, в этом случае ИД не оказывает влияния на движение замкнутой МС2 в системе отсчета  $K$ , которое с учетом замены (1.29) является абсолютным, так как импульс ее ЦМ  $C$  с диаметральным распределением  $\theta_C = -\pi$  (1.18) сохраняется  $\vec{p}_C = \overline{\text{const}}$ .

При не равных массах  $m_1 \neq m_2$  тел МС2 ее необходимо свести к одному телу с массой  $m = m_1 + m_2$  с уравнениями его движения вида [7]:

$$m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1; \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1 = 0$$

или

$$m \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{\Phi}_{12} + \vec{F}_2; \vec{\Phi}_2 + \vec{\Phi}_{12} + \vec{F}_2 = 0. \quad (1.32)$$

Если  $m_1 > m_2$ , то тело  $m_1$  следует выбрать за опорное и в качестве независимых координат выбрать полярные координаты  $r_{1C}$ ,  $\varphi_{1C}$  и  $\varphi_{21}$  (первые два уравнения (1.32)), тогда как при  $m_2 > m_1$  за опорное тело следует выбрать тело  $m_2$ , а в качестве независимых координат – полярные координаты  $r_{2C}$ ,  $\varphi_{2C}$  и  $\varphi_{12}$  (последние два уравнения (1.32)).

Решения уравнений (1.28) и (1.32) даны в монографии.

### 1.3. Уравнение динамики двухмассовой механической системы с радиальным распределением ее масс в поле инерционного домена

Вывод уравнения динамики замкнутой МС2 с радиальным распределением масс в поле ее ИД [19] осуществим на примере замкнутой МС2, показанной на рис. 1.3.

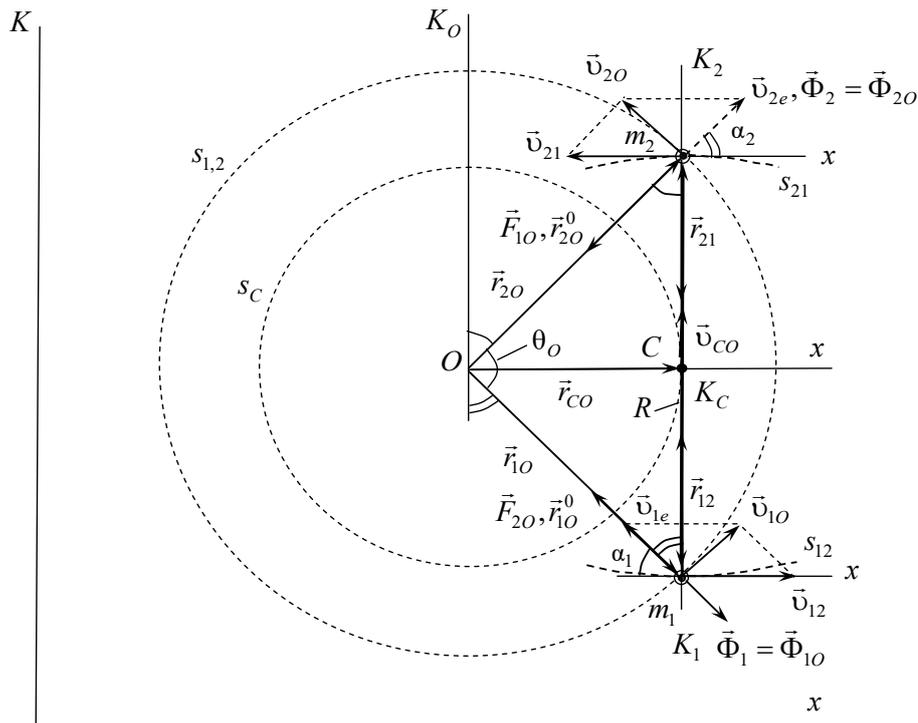


Рис. 1.3. Двухмассовая механическая система с радиальным распределением масс тел  $m_1$  и  $m_2$

Ее тела  $m_1$  и  $m_2$  связаны между собой жестким прямолинейным стержнем  $R = r_{12} = r_{21}$ , который установлен на этих телах с помощью идеальных шарниров, и совершают в системе отсчета  $K_O$ , связанной с силовым центром  $O$  ИД, поступательное движение по траектории  $s_{1,2}$  (общей при массах  $m_1 = m_2$ ), а также одновременное поступательное движение в собственных

системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$  по траекториям  $s_{12}$  и  $s_{21}$  в виде окружностей (на рис. 1.3 показаны частично) так, что оси координат систем отсчета  $K_O, K_1$  и  $K_2$ , а также неподвижной лабораторной системы отсчета  $K$  всегда параллельны.

Количество независимых координат рассматриваемой МС2 в плоском движении при  $R = r_{12} = r_{21} = \text{const}$  определяется двумя полярными координатами  $r_{1O}$  и  $\varphi_{1O}$  тела  $m_1$  в системе отчета  $K_O$  силового центра  $O$  ИД и дополнительно одной полярной координатой  $\varphi_{21}$  тела  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  тела  $m_1$  или же двумя полярными координатами  $r_{2O}$  и  $\varphi_{2O}$  тела  $m_2$  в системе отчета  $K_O$  силового центра  $O$  ИД и дополнительно одной полярной координатой  $\varphi_{12}$  тела  $m_1$  в собственной системе отсчета  $K_2$  тела  $m_2$ . Полярные координаты  $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$  являются зависимыми. Выбор опорного тела из двух тел  $m_1$  и  $m_2$  равноправен.

Таким образом, число независимых координат МС2 для плоского движения составляет  $N=3$  из общего числа ее степеней свободы  $s = n + m - l = 2 + 2 - 1 = 5$ , где  $n=3$  и  $m=3$  – количество степеней свободы тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K$ ;  $l=1$  – одна связь стержнем  $R$ . При этом общее число степеней свободы  $s=5$  определяет полную энергию  $E$  МС2, которая содержит как кинетическую энергию  $T$  ее тел  $m_1$  и  $m_2$ , так и их потенциальную энергию  $U$  в поле ИД, которое для радиального распределения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$  оказывает существенное влияние на движение МС2 в системе отсчета  $K$ , где согласно замены (1.29) оно является абсолютным, что необходимо учитывать.

И действительно, при  $s=5$  тела  $m_1$  и  $m_2$  МС2 совершают в системе отсчета  $K$  сложное переносно-относительное поступательное движение с абсолютными скоростями  $\vec{v}_i = \vec{v}_{ie} + \vec{v}_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2$ ;  $i \neq j$  (1.17), где  $\vec{v}_{ie}$  и  $\vec{v}_{ij}$  –

переносная скорость  $i$ -го тела в системе отсчета  $K$  и его относительная скорость в собственной системе отсчета  $K_j$   $j$ -го тела.

Для начальных импульсов тел  $m_1$  и  $m_2$  равных  $\vec{p}_1(0) = 0$  и  $\vec{p}_2(0) > 0$  движение этих тел в системе отсчета  $K_O$ , связанной с силовым центром  $O$  ИД, характеризуется диаметральной распределением

$$\theta_O = \arccos(p_1(0)/p_2(0)) = \pi / 2, \quad (1.33)$$

характеризующим запаздывание фазы  $\varphi_{1O}$  поступательного движения тела  $m_1$  относительно фазы  $\varphi_{2O}$  поступательного движения тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$   $\theta_O = \varphi_{2O} - \varphi_{1O} = \pi/2$  в стационарном состоянии МС2, как показано на рис. 1.3. Переходной процес происходящий в МС2 при переходе ее в стационарное состояние рассмотрен в монографии.

Для радиального распределения  $\theta_O = \pi / 2$  (1.33) уравнение динамики замкнутой МС2 (1.28) представим в виде:

$$\vec{\Phi}_i + \vec{F}_{jO} = 0; m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{jO}; i, j = 1, 2; i \neq j. \quad (1.34)$$

где  $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$  – собственная сила инерции  $i$ -го тела в месте с собственной системой отсчета  $K_i$  в системе отсчета  $K$ ;  $\vec{F}_{jO}$  – относительная сила инерции тела  $j$ -го тела при его сложном переносно-относительном движении; индекс  $O$  соответствует радиальному распределению  $\theta_O = \pi / 2$  (1.33) тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$ .

Определим относительные силы инерции  $\vec{F}_{1O}$  и  $\vec{F}_{2O}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  для их сложного переносно-относительного поступательного движения в системе отсчета  $K$  для радиального распределения  $\theta_O = \pi / 2$  (1.33).

С учетом абсолютных скоростей  $\vec{v}_i$  (1.17) тел  $m_i$  выразим кинетическую энергию относительного движения МС2 в виде [6, 15–17]

$$T_{er} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 + U, \quad (1.35)$$

где  $U$  – обобщенный кинетический потенциал [2]:

$$\begin{aligned} U = m_1 v_{1e} v_{12} \cos \varphi_1 + m_2 v_{2e} v_{21} \cos \varphi_2 = \\ - (m_1 v_{2C} v_{12} \cos \alpha_1 + m_2 v_{1C} v_{21} \cos \alpha_2) = \\ - (m_1 \omega_{2O} r_{2O} \omega_{12} r_{12} \cos \alpha_1 + m_2 \omega_{1O} r_{1O} \omega_{21} r_{21} \cos \alpha_2) \end{aligned}, \quad (1.36)$$

характеризующий вклад относительного  $\vec{v}_{12r}, \vec{v}_{21r}$  движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в их переносное движение  $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C}, \vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C}$ , где  $\varphi_1 = \widehat{\vec{v}_{1e} \vec{v}_{12}} = \pi - \alpha_1$  и  $\varphi_2 = \widehat{\vec{v}_{2e} \vec{v}_{21}} = \pi - \alpha_2$  – острый угол между векторами переносных  $\vec{v}_{1e}, \vec{v}_{2e}$  и относительных  $\vec{v}_{12}, \vec{v}_{21}$  скоростей;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы поворота переносных скоростей  $\vec{v}_{1e}$  и  $\vec{v}_{2e}$  относительно их ориентации при диаметральном распределении  $\theta_C = -\pi$  (см. рис. 1.2, а), которые в монографии с учетом того, что  $\alpha_1 + \alpha_2 = \theta_O = \pi/2$  определены как:

$$\alpha_1 = \text{arcctg}(\xi_1); \alpha_2 = \text{arctg}(\xi_2), \quad (1.37)$$

где  $\xi_1 = m_2 / m_1; \xi_2 = \xi_1^{-1} = m_1 / m_2$ , угол  $\alpha_1$  на рис 1.3 отмечен одной дугой, а угол  $\alpha_2$  – двумя.

Потенциал  $U$  (1.36) определяет относительные силы инерции

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1O} = - \frac{\partial U}{\partial r_{2O}} \cdot \vec{r}_{2O}^0 = m_1 \omega_{2O} \omega_{12} r_{12} \cos \alpha_1 \cdot \vec{r}_{2O}^0; \\ \vec{F}_{2O} = - \frac{\partial U}{\partial r_{1O}} \cdot \vec{r}_{1O}^0 = m_2 \omega_{1O} \omega_{21} r_{21} \cos \alpha_2 \cdot \vec{r}_{1O}^0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

образованного ими ИД с силовым центром  $O$ , с которым для радиального распределения  $\theta_O = \pi/2$  (1.33) не совпадает ЦМ  $C$  МС2 (см. рис. 1.3), где  $\vec{r}_{1O}^0 = -\vec{r}_{1O}/r_{1O}$  и  $\vec{r}_{2O}^0 = -\vec{r}_{2O}/r_{2O}$  – единичные векторы противоположно направленные радиус-векторам  $\vec{r}_{1O}$  и  $\vec{r}_{2O}$  и определяющие направление отнесенных сил инерции  $\vec{F}_{2O}$  и  $\vec{F}_{1O}$  к силовому центру  $O$  (см. рис. 1.3, где выбор направлений  $\vec{r}_{1O}^0$  и  $\vec{r}_{2O}^0$  подлежит дальнейшему обоснованию);  $\omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_C$  и  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{21}$  – угловые скорости движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  и в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$ , которые в монографии определены как:

$$\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_{12} + \omega_{21} = \omega_{CO} \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1 m_2}; \quad (1.39)$$

$$\omega_{12} = \omega_{CO} \frac{m_2}{m_1}; \omega_{21} = \omega_{CO} \frac{m_1}{m_2};$$

$\omega_{CO} = \omega_{1O} = \omega_{2O}$  – угловая скорость ЦМ  $C$  и тел  $m_2$  и  $m_1$  в системе отсчета  $K_O$ .

Для радиального распределения  $\theta_O = \pi/2$  (1.33) относительные силы инерции  $\vec{F}_{1O}$  и  $\vec{F}_{2O}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (1.39), образующие ИД, действуют соответственно на радиально противоположные тела  $m_2$  и  $m_1$ . Для радиального распределения  $\theta_O = \pi/2$  (1.33) их главный вектор не равен нулю  $\vec{F}_{1O} + \vec{F}_{2O} \neq 0$ .

Исходя из кинематической реализуемости движения тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2 без разрушения связи  $R$ , необходимо, чтобы угловые перемещения этих тел в системах отсчета  $K$ ,  $K_C$ ,  $K_1$  и  $K_2$  являлись инвариантом

$$\Delta\varphi = \omega_{CO}\Delta t_{CO} = \omega_C\Delta t_C = \omega_{12}\Delta t_2 = \omega_{21}\Delta t_1, \quad (1.40)$$

где  $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ ,  $\Delta t_2 = t_2 - t_0$  и  $\Delta t_C = t_C - t_0$  – приращение времени и  $t_0$  – единое начальное время во всех системах отсчета.

Инвариант  $\Delta\varphi$  (1.40) определяет то, что при любом угловом перемещении тела  $m_1$  в системах отсчета  $K_O$ ,  $K_C$  и  $K_2$ , а также тела  $m_2$  в системах отсчета  $K_O$ ,  $K_C$  и  $K_1$  эти тела будут находиться в одной точке траектории  $s_{1,2}$  системы отсчета  $K$  как, например, для тела  $m_2$  при  $\Delta\varphi = \{0; \pi/2\}$  показано на рис. 1.2, б событиями  $e_1$  и  $e_2$  для диаметрального распределения  $\theta_C = -\pi$  (1.18).

Преобразования (1.39) совместно с инвариантом  $\Delta\varphi$  (1.40) требуют введения собственного времени в системах отсчета  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_C$

$$t_1 = \frac{m_1}{m_2}t; t_2 = \frac{m_2}{m_1}t; t_C = \frac{m_1 m_2}{m_1^2 + m_2^2}t \quad t_{CO} = t \quad (1.41)$$

При  $m_1 = m_2$  время в системах отсчета  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_O$  и  $K$  абсолютно  $t_1 = t$ ,  $t_2 = t$  и  $t_{CO} = t$ .

Замена в (1.35)  $T_{Ce} = \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{1e}^2$  на  $T_C$  (1.29) дает лагранжиан  $L$  рассматриваемой МС2

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{1O}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{2O}^2 + \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{21}^2 + U = \\ &= \frac{1}{2}m_1\omega_{1O}^2 r_{1O}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{2O}^2 r_{2O}^2 + \frac{1}{2}m_1\omega_{12}^2 r_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{21}^2 r_{21}^2 - \\ &\quad - (m_1\omega_{2O}r_{2O}\omega_{12}r_{12} \cos\alpha_1 + m_2\omega_{1O}r_{1O}\omega_{21}r_{21} \cos\alpha_2) \end{aligned} \quad (1.42)$$

ее абсолютного движения в системе отсчета  $K$  при  $m_1 = m_2$ .

Частные дифференциалы от функции лагранжа  $L$  (1.42) вида  $-\frac{\partial L}{r_{1O}} = 0$

и  $-\frac{\partial L}{r_{2O}} = 0$  дают обобщенные силы

$$\begin{aligned} -m_1\omega_{1O}^2 r_{1O} + m_2\omega_{1O}\omega_{21}r_{21} \cos \alpha_2 &= 0; \\ -m_2\omega_{2O}^2 r_{2O} + m_1\omega_{2O}\omega_{12}r_{12} \cos \alpha_1 &= 0, \end{aligned} \quad (1.43)$$

которые определяют уравнения (1.34).

И действительно первые слагаемые (1.43) определяют собственные силы инерции  $\vec{\Phi}_1 = \vec{\Phi}_{1O} = -m_1\omega_{1O}^2 \vec{r}_{1O}$  и  $\vec{\Phi}_2 = \vec{\Phi}_{2O} = -m_2\omega_{2O}^2 \vec{r}_{2O}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (см. рис.1.3), которые направлены от силового центра  $O$ . Вторые слагаемые определяют относительные силы инерции  $\vec{F}_{1O} = m_1\omega_{2O}\omega_{12}r_{12} \cos \alpha_1 \cdot \vec{r}_{2O}^0$  и  $\vec{F}_{2O} = m_2\omega_{1O}\omega_{21}r_{21} \cos \alpha_2 \cdot \vec{r}_{1O}^0$  (1.38), где выбор направления единичных векторов  $\vec{r}_{1O}^0 = -\vec{r}_{1O} / r_{1O}$  и  $\vec{r}_{2O}^0 = -\vec{r}_{2O} / r_{2O}$  к силовому центру  $O$  (см. рис. 1.3) определен тем, что знаки слагаемых каждой из обобщенных сил (1.43) противоположны.

Таким образом, для радиального распределения  $\theta_O = \pi/2$  (1.33) равных масс  $m_1 = m_2$  тел МС2 с числом степеней свободы  $s = 5$  произведение ее суммарной массы МС2 на ускорение  $\vec{a}_C = \vec{a}_{CO}$  ее ЦМ  $C$  равно действию на неё поля относительных сил инерции  $\vec{F}_{1O}$  и  $\vec{F}_{2O}$  ее взаимодействующих тел так, что циркуляция импульса  $\vec{p}_C$  МС2 по замкнутому контуру  $s_C$  равна нулю:

$$d\vec{p}_C / dt = \vec{F}_{1O} + \vec{F}_{2O} \neq \overrightarrow{\text{const}}; \Gamma = \oint \vec{p}_C d\vec{l} = 0. \quad (1.44)$$

Решения уравнений (1.34) и (1.44) с учетом переходного процесса, протекающего в МС2 при заданных начальных условиях, даны в монографии.

Для не равных масс  $m_1 \neq m_2$  тел МС2 ее необходимо свести к одному телу с массой  $m = m_1 + m_2$  с уравнениями движения вида (1.32).

Уравнение движения ЦМ  $C \quad d\vec{p}_C / dt = \vec{F}_{1O} + \vec{F}_{2O}$  замкнутой МС2 (1.44), допускает возможность его движения по замкнутой геодезической траектории  $s_C$  в поле ИД. При этом равенство циркуляции импульса  $\vec{p}_C$  нулю  $\Gamma = 0$  свидетельствует о не возможности безопорного направленного движения механических систем с постоянным тяговым усилием, а известные вибродвигатели, обеспечивающие в диссипативной среде импульсное перемещение из-за циклического прохождения их скорости через нуль создают динамические нагрузки, которые накладывают существенные ограничения на их практическое применение.

## 2. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ

### 2.1. Введение в главу

В настоящее время силы инерции  $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_r + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k$  (относительные  $\vec{\Phi}_r$ , переносные  $\vec{\Phi}_e$ , Кориолиса  $\vec{\Phi}_k$  и др.) рассматривают с различных точек зрения [1].

Например, согласно одной из них, силы инерции  $\vec{\Phi}$  взаимодействующих тел механической системы (МС) рассматривают как фиктивные, условные, введенные для того, чтобы совместно с аксиомой связей придать уравнению Ньютона  $m\vec{a} = \vec{F}$  наиболее удобную форму равновесия в виде принципа Даламбера  $\vec{\Phi} + \vec{F} + \vec{R} = 0$  в неинерциальной системе отсчета одного из тел МС, где  $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$  и  $\vec{R} = \sum_{i \neq j} \vec{R}_{ij}$  – главный вектор внешних сил  $\vec{F}_i$ , приложенных к  $i$ -м телам МС, а также реакций  $\vec{R}_{ij}$  связи  $R$  ее  $i$ -го и  $j$ -го тел.

При этом движение МС в инерциальной системе отсчета рассматривают как движение ее центра масс (ЦМ)  $C$

$$m \frac{d}{dt} \vec{p}_C = \vec{F}, \quad (2.1)$$

где  $m = \sum_i m_i$  и  $m_i$  – суммарная масса МС и масса ее  $i$ -го тела;

$\vec{p}_C = m\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i$  и  $\vec{v}_C$ ,  $\vec{v}_i$  – импульс и скорость ее ЦМ  $C$  и ее  $i$ -го тела.

Уравнение (2.1) описывает движение ЦМ  $C$  (центра инерции) МС в инерциальной системе отсчета  $K$ . Если главный вектор  $\vec{F} = 0$ , то ЦМ  $C$  покоится, либо совершает равномерное прямолинейное движение. Исходя из этого в задаче двух тел [2] в качестве инерциальной системы отсчета выбирают систему отсчета  $K_C$ , связанную с ЦМ  $C$ , в которой главный вектор сил инерции равен нулю  $\vec{\Phi}_C = -d(\sum m_{iC} \vec{v}_{iC}) / dt = 0$ . В диссипативной среде (например, с линейным вязким сопротивлением движению опорного тела  $m_1$ ) внешняя сила  $\vec{F}_1 \neq 0$ , система отсчета  $K_C$  неинерциальна и решение задачи двух тел [2] некорректно. Поэтому для анализа движения тел  $m_1$  и  $m_2$ , а также их ЦМ  $C$  удобнее выбрать собственную систему отсчета  $K_1$  опорного тела  $m_1$  (тело  $m_2$  выбирается за рабочее [3–7]). При анализе необходимо учитывать относительную силу инерции  $\vec{\Phi}_r = \vec{\Phi}_{21}$  рабочего тела  $m_2$ , действующую в системе отсчета  $K_1$ . Она в инерциальной системе  $K$  оказывает влияние на движение тел  $m_1$  и  $m_2$  и является реальной (другая точка зрения [1, 3–7, 9]). Такая точка зрения не согласуется с уравнением движения МС (2.1), так как в него относительная сила инерции  $\vec{\Phi}_r = \vec{\Phi}_{21}$  в явном виде не входит.

Целью главы является исследование влияния относительной силы инерции  $\vec{\Phi}_r = \vec{\Phi}_{21}$  рабочего тела  $m_2$  МС2 на движение ее опорного тела  $m_1$ , находящегося в диссипативной среде. Результатом исследования является разработка описания, обеспечивающего анализ амплитудных и фазовых характеристик движения опорного  $m_1$  и рабочего тел  $m_2$  МС2, а также движения ее центра  $C$  в инерциальной системе отсчета  $K$  для различных значений коэффициента  $0 < \mu_1 \leq \infty$  линейного вязкого сопротивления движению опорного тела  $m_1$ .

## 2.2. Принцип Д' Аламбера и аксиома связей для относительных сил инерции

Рассмотрим МС2, которая показана на рис. 2.1. МС2 содержит опорное (ускоряющее) тело с массой  $m_1$ , на котором с помощью идеального шарнира установлен прямолинейный жесткий стержень с длиной  $R$ , на свободном конце которого жестко закреплено рабочее (ускоряемое) тело с массой  $m_2$ . Рабочее тело  $m_2$  совершает вращательное движение относительно опорного тела  $m_1$  в их в общей плоскости, которая перпендикулярна оси идеального шарнира опорного тела  $m_1$ . Движение совершается внутренним активным моментом  $M$ , действующим оси шарнира.

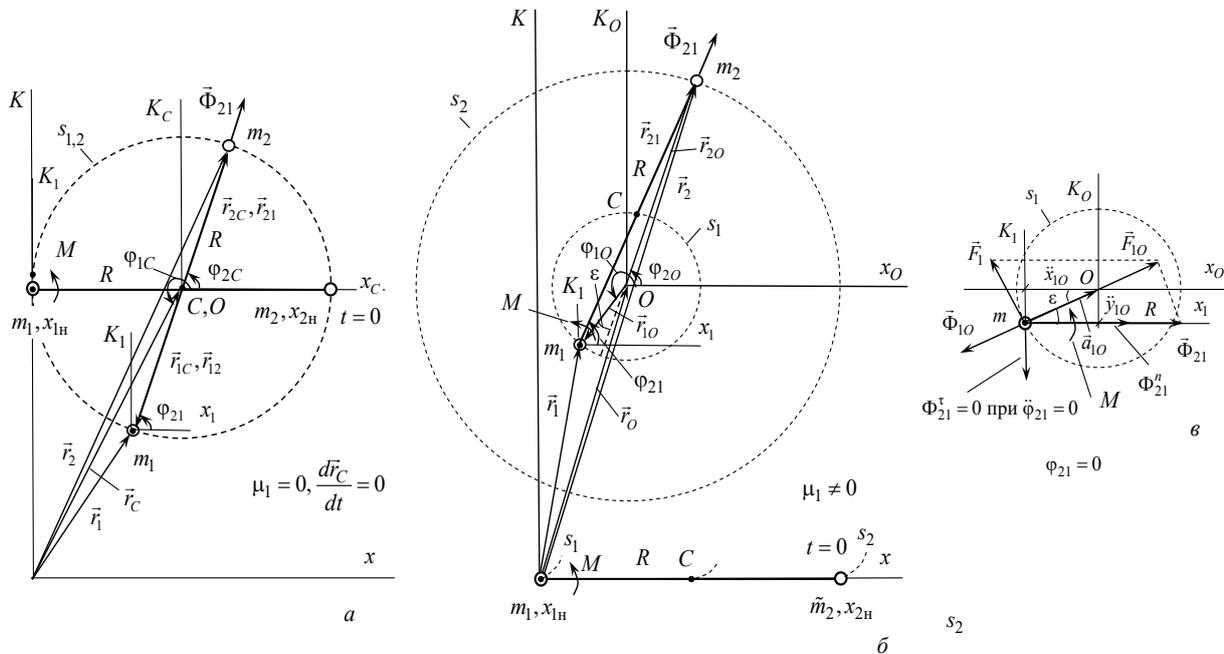


Рис. 2.1. Двухмассовая механическая система в среде без потерь ( $\mu_1 = 0$ ) – а; в среде с потерями ( $\mu_1 \neq 0$ ) – б и действующая на нее система сил – в

Коэффициент линейного вязкого сопротивления диссипативной среды  $\mu_1$  движению опорного тела  $m_1$  МС2 составляет  $\mu_1 = 0$  для рис. 2.1, *а* и  $\mu_1 \neq 0$  для рис. 2.1, *б*. Для рабочего тела  $m_2$  он всегда равен  $\mu_2 = 0$ .

Рассматривая МС2 имеет три степени свободы  $s = n + m - l = 2 + 2 - 1 = 3$ , где  $n = 2$  – количество степеней свободы опорного тела  $m_1$  в системе отсчета  $K$  за вычетом степени свободы по углу  $\varphi_{11}$  его поворота (отката);  $m = 2$  – количество степеней свободы рабочего тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$  и  $l = 1$  – одна связь стержнем  $R$ .

Для проведения динамического анализа МС2 введем неподвижную систему отсчета  $K$ , начало координат которой для случая  $\mu_1 = 0$  (см. рис. 2.1, *а*) выберем произвольно, а для случая  $\mu_1 \neq 0$  (см. рис. 2.1, *б*) свяжем с начальным положением  $x_{1н}$  опорного тела  $m_1$  в момент времени  $t = 0$ . При  $t = 0$  рабочее тело  $m_2$  также находится в начальном положении  $x_{2н}$ , как показано на рис. 2.1, *а* и *б*. Начальные скорости опорного  $m_1$  и рабочего  $m_2$  тел при  $t = 0$  нулевые:  $\dot{x}_{1н} = 0$ ,  $\dot{x}_{2н} = 0$ .

Кроме того, введем собственную систему  $K_1$  опорного тела  $m_1$ , которая вместе с ним может совершать поступательное движение по окружности  $s_1$  (см. рис. 2.1, *а* и *б*) в системе отсчета  $K$ .

Пусть в момент времени  $t = 0$  рабочее тело  $m_2$  приводится в движение активным моментом  $M$ , который за малый интервал времени  $dt \rightarrow 0$  достигает стационарного значения и одновременно достигает своего стационарного значения и относительная угловая скорость  $\omega_{21}$  вращательного движения рабочего тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$ . При этом опорное тело  $m_1$  при  $\mu_1 = 0$  вместе с собственной системой отсчета  $K_1$  будет совершать движение в системе отсчета  $K$  по окружности  $s_{1,2}$ , как показано на рис. 2.1, *а* (общей для тел  $m_1$  и  $m_2$  с равной массой  $m_1 = m_2$ ), а при  $\mu_1 \neq 0$  по окружности

$s_1$  (см. рис. 2.1, б). Рабочее тело  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$  будет совершать вращательное движение по траектории  $s_{1,2}$  (см. рис. 2.1, а) или  $s_2$  (см. рис. 2.1, б).

Траекторией движения опорного  $m_1$  и рабочего  $m_2$  тел в системе отсчета  $K$  при  $\mu_1 = 0$ , когда  $\vec{v}_C = d\vec{r}_C / dt = 0$  (см. рис. 2.1, а), также является окружность  $s_{1,2}$ , но при  $\mu_1 \neq 0$ , когда скорость  $\vec{v}_O = d\vec{r}_O / dt$  убывает экспоненциально от некоторого начального значения, зависящего от  $\mu_1$ , до нуля эти тела будут двигаться по спиральным траекториям  $s_1$  и  $s_2$  [4, 5, 7], переходящим в траектории  $s_1$  и  $s_2$  в виде окружностей (см. рис. 2.1, б, где спиральные траектории  $s_1$  и  $s_2$  показаны частично). Зависимость изменения скорости  $\vec{v}_O = d\vec{r}_O / dt$  от  $\mu_1$  подробно будет показана при дальнейшем анализе.

Момент  $M$  (см. рис. 2.1) возникает в результате приложения к стержню  $R$  пары сил. Эту пару можно представить как совокупность силы, действующей на рабочее тело  $m_2$ , а именно силы

$$F = M / R, \quad (2.2)$$

перпендикулярной к стержню  $R$ , и силы, равной

$$F = -M / R, \quad (2.3)$$

которая приложена к шарниру, соединяющему стержень и опорное тело  $m_1$ . Момент  $-M$  силы  $F$  (2.3) вызовет вращение (откат)  $dK_z^- / dt = -M$  опорного тела  $m_1$  в направлении, противоположном вращению рабочего тела  $m_2$ , где  $K_z^- = -I_z \dot{\phi}_{11}$  и  $I_z$  – кинетический момент и момент инерции опорного тела  $m_1$ ;  $\dot{\phi}_{11}$  – угловая скорость вращения опорного тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_1$  на

оси  $z$  его шарнира. Результирующий кинетический момент МС2  $K_Z = K_z^- + K_z^+$ , являющийся суммой ее кинетического момента  $K_z^+$  и кинетического момента  $K_z^-$  опорного тела  $m_1$  (см. рис. 2.1, *a*) при  $\mu_1 = 0$  и  $\mu_2 = 0$  сохраняется  $K_Z = \text{const}$ , а при  $\mu_1 \neq 0$  поддерживается постоянным в стационарном состоянии МС2 (когда угловая скорость вращательного движения рабочего тела  $m_2$  достигает своего стационарного значения  $\dot{\phi}_{21} = \text{const}$  за счет источника активного момента  $M$  [3–5, 7]). Величина стационарного значения  $\dot{\phi}_{21} = \text{const}$  определяется мощностью источника активного момента  $M$ .

Подробный анализ результирующего кинетического момента  $K_Z$  МС2 при  $\mu_1 \neq 0$  будет проведен при выводе полной системы уравнений ее движения.

В общем случае радиус-векторы, определяющие положение опорного  $m_1$  и рабочего  $m_2$  тел МС2 и ее ЦМ  $C$  (см. рис. 2.1) в системе отсчета  $K$ , можно представить в виде:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{C,O} + \vec{r}_{1C,O}; \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{21}; \vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.4)$$

где  $\vec{r}_{C,O}$  – радиус-векторы, которые при  $\mu_1 = 0$  имеют индекс  $\vec{r}_C$  и определяют положение начала координат собственной системы отсчета  $K_C$  ЦМ  $C$  МС2 (см. рис. 2.1, *a*), который, исходя из закона сохранения импульса  $\vec{r}_C = \overrightarrow{\text{const}}$ , а при  $\mu_1 \neq 0$  имеют индекс  $\vec{r}_O$  и определяют положение начала координат собственной системы отсчета  $K_O$  (см. рис. 2.1, *b*), связанной с силовым центром  $O$  ИД [4–7], физический смысл которого будет более подробно раскрыт при дальнейшем анализе;  $\vec{r}_{1C,O}$  и  $\vec{r}_{2C,O}$  – радиус-векторы, которые при  $\mu_1 = 0$  (см. рис. 2.1, *a*) имеют индекс  $\vec{r}_{1C}$ ,  $\vec{r}_{2C}$

и определяют положение опорного  $m_1$  и рабочего  $m_2$  тел в системе отсчета  $K_C$

$$\vec{r}_{1C} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{21}; \quad \vec{r}_{2C} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{21} \quad (2.5)$$

(получены из уравнений  $m_1 \vec{r}_{1C} + m_2 \vec{r}_{2C} = 0$  и  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{2C} - \vec{r}_{1C}$ , где  $\vec{r}_{21}$  – радиус-вектор рабочего тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$ ) и аналогичные радиус-векторы с индексом  $\vec{r}_{1O}$  и  $\vec{r}_{2O}$ , определяющие положение этих тел в системе отсчета  $K_O$  при  $\mu_1 \neq 0$  (см. рис. 2.1, б), подлежащие дальнейшему определению.

Абсолютные импульсы опорного и рабочего тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2 в системе отсчета  $K$ , выраженные соответственно через радиус-векторы  $\vec{r}_1 = \vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{21}$  (2.4), можно представить в виде:

$$\vec{p}_1 = m_1 \frac{d}{dt} \vec{r}_1; \quad \vec{p}_2 = m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_2 = m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_{21}. \quad (2.6)$$

Тогда суммарный (абсолютный) импульс МС2 можно определить в виде

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_C + \vec{p}_r = (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} \vec{r}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_{21}. \quad (2.7)$$

Он складывается из собственного импульса МС2 опорного тела  $m_1$  с приведенной массой  $m = m_1 + m_2$ , которое вместе с собственной системой отсчета  $K_1$  совершает абсолютное движение в системе отсчета  $K$  и относительного импульса рабочего тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$

$$\vec{p}_C = (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} \vec{r}_1, \quad \vec{p}_r = m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_{21}. \quad (2.8)$$

Используя импульсы  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$  (2.6) с учетом аксиомы связей и диссипативной силы

$$\vec{F}_1 = -\mu_1 \vec{v}_1, \quad (2.9)$$

действующей на опорное тело  $m_1$  МС2 (см. рис. 2.1, б), второй закон Ньютона отдельно для каждого из взаимодействующих тел  $m_1$  и  $m_2$  можно выразить в виде:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_1; \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{R}_{21}, \quad (2.10)$$

где  $\vec{v}_1$  – скорость опорного тела  $m_1$  в системе отсчета  $K$ ;  $\vec{R}_{12}$  и  $\vec{R}_{21}$  – реакции стержня  $R$ .

Суммируя левые и правые части уравнений (2.10) с учетом того, что по третьему закону Ньютона  $\sum_{i,j=1,2; i \neq j} \vec{R}_{ij} = 0$ , и того, что  $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_C + \vec{p}_r$  (2.7),

получим уравнение

$$\frac{d\vec{p}_C}{dt} + \frac{d\vec{p}_r}{dt} = \vec{F}_1, \quad (2.11)$$

которое записано в системе отсчета  $K$  в терминах собственного абсолютного  $\vec{p}_C$  и относительного  $\vec{p}_r$  импульсов (2.8).

Первые два члена уравнения (2.11) можно обозначить собственной  $\vec{\Phi}_1$  и относительной  $\vec{\Phi}_{21}$  силами инерции:

$$\vec{\Phi}_1 = -\frac{d\vec{p}_C}{dt} = -(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}; \vec{\Phi}_{21} = -\frac{d\vec{p}_r}{dt} = -m_2 \frac{d^2 \vec{r}_{21}}{dt^2}. \quad (2.12)$$

Для систем отсчета  $K_1$  и  $K$  с параллельными осями  $x_1 \parallel x$  и  $y_1 \parallel y$  проекции  $r_{21x} = R \cos \varphi_{21}$  и  $r_{21y} = R \sin \varphi_{21}$  радиус-вектора  $\vec{r}_{21}$  в системе отсчета  $K_1$  инвариантны этим же проекциям в системе отсчета  $K$   $r_{21x} = x_{21}$  и  $r_{21y} = y_{21}$ . Тогда уравнение (2.11), посредством раздельного или одновременного переноса сил инерции  $\vec{\Phi}_1$  и  $\vec{\Phi}_{21}$  (2.12) в его правую часть, можно свести как к форме второго закона Ньютона, так и к форме принципа Даламбера:

$$m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1; \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1 = 0. \quad (2.13)$$

Первое уравнение (2.13) является уравнением движения МС2 с тремя степенями свободы  $s \leq 3$  в поле ИД в котором реакции  $\vec{R}_{12}$  и  $\vec{R}_{21}$  стержня  $R$  заменены относительными силами инерции  $\vec{R}_{12} = \vec{\Phi}_{12}$  и  $\vec{R}_{21} = \vec{\Phi}_{21}$ . Таким образом, для МС2 с числом свободы  $s \leq 3$  аксиому связи  $R$  ее тел  $m_1$  и  $m_2$  можно сформулировать в виде: «*относительные силы инерции  $\vec{\Phi}_{12}$  и  $\vec{\Phi}_{21}$  двух взаимодействующих тел  $m_1$  и  $m_2$  взаимно приложены к этим телам и действуют на них через их связь, которую можно условно отбросить, а ее реакции  $\vec{R}_{12}$  и  $\vec{R}_{21}$  заменить относительными силами инерции  $\vec{R}_{12} = \vec{\Phi}_{12}$  и  $\vec{R}_{21} = \vec{\Phi}_{21}$  этих тел, при этом массу  $m_2$  отбрасываемого рабочего тела необходимо отнести к массе оставшегося опорного тела  $m_1 + m_2$* ».

Согласно (2.7) и (2.12) можно записать  $dp_C / dt = (m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \vec{\Phi}_{21}$ , что сводит первое уравнение (2.13) к известному уравнению движения ЦМ  $S$   $dp_C / dt = \vec{F}_1$  (2.1).

Для последующего анализа выберем следующие обобщенные координаты: декартовы координаты  $x_1$  и  $y_1$  опорного тела  $m_1$  в системе отсчета  $K$  и полярную координату  $\varphi_{21}$  рабочего тела  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  опорного тела  $m_1$ . Угол  $\varphi_{11}$  поворота (отката) опорного тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_1$  рассматривать не будем как, он в явном виде не влияет на координаты  $x_1$  и  $y_1$  этого тела в системе отсчета  $K$ .

Для выбранных обобщенных координат  $x_1$ ,  $y_1$  и  $\varphi_{21}$  первое уравнение (2.13) в проекциях на оси координат  $x$  и  $y$  системы отсчета  $K$  можно представить в виде:

$$m\ddot{x}_1 = m_2\omega_{21}^2 R \cos \varphi_{21} + F_{1x}; m\ddot{y}_1 = m_2\omega_{21}^2 R \sin \varphi_{21} + F_{1y}, \quad (2.14)$$

где  $R = r_{12} = r_{21}$ ;  $x_1 = r_{1x}$ ,  $y_1 = r_{1y}$ ;  $F_{1x} = -\mu_1 \dot{x}_1$  и  $F_{1y} = -\mu_1 \dot{y}_1$  – проекции диссипативной силы  $\vec{F}_1$  (2.9) на оси  $x$  и  $y$  системы отсчета  $K$ .

Согласно принципу Даламбера, на МС2 как на целую с массой  $m = m_1 + m_2$  в системе отсчета  $K_1$  действует уравновешенная система сил  $\vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1 = 0$ . При этом собственная сила инерции  $\vec{\Phi}_1$  тела  $m$  с массой  $m = m_1 + m_2$  определена абсолютным ускорением  $\vec{a}_1 = -d^2\vec{r}_1 / dt^2$  (2.13), взятым с обратным знаком. Согласно (2.4), абсолютное ускорение  $\vec{a}_1$  при  $\mu_1 \neq 0$  (см. рис. 2.1, б) определяется относительным ускорением  $d^2\vec{r}_{1O} / dt^2$  рабочего тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$ , связанной с центром  $O$  при ускорении центра  $O$  ИД, равным нулю  $d^2\vec{r}_O / dt^2 = 0$ .

Проанализируем систему сил действующих МС2 в системе отсчета  $K_O$ , показанную на рис. 2.1, в, где для наглядности принято  $\varphi_{21} = 0$ , когда связь  $R$  направлена по оси  $x_1$  системы отсчета  $K_1$ . В этой системе отсчета на тело  $m = m_1 + m_2$  действует относительная сила инерции  $\vec{\Phi}_{21} = \vec{\Phi}_{21}^n + \vec{\Phi}_{21}^t$  (2.12), где

$\vec{\Phi}_{21}^{\tau} = 0$  при  $\omega_{21} = \text{const}$ , а также диссипативная сила  $\vec{F}_1$  (2.9). Результирующая сила  $\vec{F}_{10} = \vec{F}_1 + \vec{\Phi}_{21}$  вызывает ускорение  $\vec{a}_{10}$  тела  $m$ , направленное в системе отсчета  $K_O$  к центру  $O$  ИД и, следовательно, силу инерции

$$\vec{\Phi}_{10} = -(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_{10}}{dt^2} \quad (2.15)$$

этого тела в этой же системе отсчета  $K_O$ , направленную в противоположном направлении, что будет подтверждено частным решением уравнений (2.14) относительно ускорений  $\ddot{x}_{10}$  и  $\ddot{y}_{10}$ , определяющих вектор ускорения  $\vec{a}_{10}$  (рис. 2.1, в).

Диссипативная сила  $\vec{F}_1$  (2.9) задает угол диссипативных потерь  $\varepsilon$ , который определяет угол запаздывания  $\varphi = \pi + \varepsilon$  вектора переносной силы инерции  $\vec{\Phi}_{10}$  по отношению к вектору относительной силы инерции  $\vec{\Phi}_{21}$ , который в системах отсчета  $K_1$  и  $K_O$  инвариантен, так как их оси  $x_1$  и  $x_O$  параллельны  $x_1 \parallel x_O$ . Методика определения угла  $\varepsilon$  будет предложена в следующем разделе главы.

При  $\vec{F}_1 = 0$  ( $\mu_1 = 0$ ) значение  $\varepsilon = 0$ , и движение тела  $m$  будет совершаться относительно ЦМ  $C$  МС2 (см. рис. 2.1, а), с которым в данном случае совпадает центр  $O$  ИД.

Таким образом, уравнения (2.13) и (2.14) сводят МС2 к материальной точке с суммарной массой ее тел  $m = m_1 + m_2$ , условно сосредоточенной в ее опорном теле  $m_1$ , которое движется под действием силы инерции  $\vec{\Phi}_{21} = \vec{\Phi}_{21}^n$  рабочего тела  $m_2$  и диссипативной силы  $\vec{F}_1$ , оказывающей сопротивление движению опорного тела  $m_1$ .

Определим вид частного решения уравнений (2.14). Согласно рис. 2.1, а, фаза  $\varphi_{1C}$  переносно-поступательного движения рабочего тела  $m_1$  в системе

отсчета  $K_C$  ЦМ  $C$  связана с фазой  $\varphi_{21}$  вращательного движения рабочего тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$  преобразованием

$$\varphi_{1C} = \varphi_{21} + \varphi, \quad (2.16)$$

где  $\varphi = \varphi_{1C} - \varphi_{2C} = \pi$  – угол запаздывания фазы  $\varphi_{1C}$  переносно-поступательного движения опорного тела  $m_1$  относительно фазы  $\varphi_{2C}$  вращательного движения рабочего тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  при  $\mu_1 = 0$  (см. рис. 2.1, *a*).

Для случая  $\mu_1 \neq 0$  (см. рис. 2.1, *б*) опорное  $m_1$  и рабочее  $m_2$  тело будут совершать вращательное движение в системе отсчета  $K_O$  центра  $O$  ИД по окружностям  $s_1$  и  $s_2$ , как показано на рис. 2.1, *б*. В этом случае фаза  $\varphi_{1O}$  переносно-поступательного движения рабочего тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_O$  связана с фазой вращательного движения рабочего тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$  преобразованием

$$\varphi_{1O} = \varphi_{21} + \varphi, \quad (2.17)$$

подобным (2.16), где теперь  $\varphi = \pi + \varepsilon$ , а  $\varepsilon$  – угол диссипативных потерь [3–7], учитывающий влияние действия на опорное тело  $m_1$  диссипативной силы  $\vec{F}_1$  (2.9).

С учетом преобразования (2.17) частное решение уравнений (2.14) для МС2 при  $\mu_1 \neq 0$  (рис. 2.1, *б*), когда  $\varepsilon \neq 0$ , в системе отсчета  $K_O$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x_{1O} &= A_1 \cos \varphi_{1O} = A_1 \cos(\varphi_{21} + \varphi) = A_1 \cos(\varphi_{21} + \pi + \varepsilon) = -A_1 \cos(\varphi_{21} + \varepsilon); \\ y_{1O} &= A_1 \sin \varphi_{1O} = A_1 \sin(\varphi_{21} + \varphi) = A_1 \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) = -A_1 \sin(\varphi_{21} + \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $A_1$  – амплитуда, подлежащая дальнейшему определению.

В среде без потерь при  $\mu_1 = 0$ , когда  $\varepsilon = 0$  (см. рис. 2.1, а), решения (2.18) определяют положение рабочего тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_C$  [3–5, 7]:

$$\begin{aligned} x_{1C} &= A_1 \cos \varphi_{1C} = A_1 \cos(\varphi_{21} + \pi) = -A_1 \cos \varphi_{21}; \\ y_{1C} &= A_1 \sin \varphi_{1C} = A_1 \sin(\varphi_{21} + \pi) = -A_1 \sin \varphi_{21}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

начало координат которой связано с ЦМ  $C$  МС2, где  $A_1 = a$  – амплитуда, равная амплитудному коэффициенту  $a = r_{1C} = m_2 R / (m_1 + m_2)$ , который определен радиусом  $r_{1C}$  (2.5).

Подстановка скоростей  $\dot{x}_1 = dx_{1C} / dt$  и  $\dot{y}_1 = dy_{1C} / dt$ , полученных из (2.19) при  $x_C = \text{const}$  и  $y_C = \text{const}$  (2.4) в импульс  $\vec{p}$  (2.7), выраженный в проекциях на оси  $x$  и  $y$  неподвижной системы отсчета  $K$

$$\begin{aligned} p_x &= p_{Cx} + p_{rx} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 - m_2 \omega_{21} R \sin(\varphi_{21}); \\ p_y &= p_{Cy} + p_{ry} = (m_1 + m_2)\dot{y}_1 + m_2 \omega_{21} R \cos(\varphi_{21}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

показывает, что  $p_x = 0$  и  $p_y = 0$  и, следовательно, при  $\mu_1 = 0$  он сохраняется

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \overrightarrow{\text{const}}. \quad (2.21)$$

Из (2.21) и (2.7) следует

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_C = -\frac{d}{dt} \vec{p}_r. \quad (2.22)$$

Таким образом, при любом характере изменения угловой скорости  $d\omega_{21}/dt$  относительного движения рабочего тела  $m_2$  (любом изменении относительного импульса  $\vec{p}_r$ ) абсолютный импульс  $\vec{p} = \vec{p}_C + \vec{p}_r$  (2.7)

замкнутой МС2 при  $\mu_1 = 0$  сохраняется (2.21). Следствием равенства (2.22) является то, что угол запаздывания  $\varphi$  (2.16) замкнутой МС2 равен  $\varphi = \varphi_{1C} - \varphi_{2C} = \pi$ .

### 2.3. Методика определения диссипативного угла и координат центра инерционного домена

Общее решение неоднородных дифференциальных уравнений вида (2.14) есть сумма его частного и общего решений [2]. Частное решение в системе отсчета  $K_C$  (при  $\varepsilon = 0$ ) или в системе отсчета  $K_O$  (при  $\varepsilon \neq 0$ ) будем искать в общем для этих случаев виде (2.18).

Для определения входящих в решения (2.18) амплитудного коэффициента  $A_1$  и угла  $\varepsilon$  представим уравнения (2.14) в характеристической комплексной форме

$$\ddot{q}_1 + 2\gamma_1 \dot{q}_1 = a\omega_{21}^2 \exp j\omega_{21}t \quad (2.23)$$

где  $q_1$  – обобщенная координата;  $\gamma_1 = \mu_1 / [2(m_1 + m_2)]$  – коэффициент затухания движения опорного тела  $m_1$ ;  $a = m_2 R / (m_1 + m_2)$  – амплитудный коэффициент.

Решение комплексного уравнения (2.23) будем искать в виде

$$q_1 = B_1 \exp j\omega_{21}t, \quad (2.24)$$

где  $B_1$  – комплексная амплитуда, подлежащая определению.

Дифференцирование (2.24) по времени  $t$  дает

$$\dot{q}_1 = jB_1\omega_{21} \exp j\omega_{21}t; \quad \ddot{q}_1 = -B_1\omega_{21}^2 \exp j\omega_{21}t. \quad (2.25)$$

Подстановка (2.25) в уравнение (2.23) сводит его к виду

$$-B_1\omega_{21}^2 + 2j\gamma_1 B_1\omega_{21} = a\omega_{21}^2. \quad (2.26)$$

Из (2.26) комплексную амплитуду  $B_1$  можно выразить в виде

$$B_1 = \frac{a\omega_{21}^2}{\omega_{21}^4 + 4\gamma_1^2\omega_{21}^2}(-\omega_{21}^2 - j2\gamma_1\omega_{21}) = A_1 \exp(j\varphi), \quad (2.27)$$

которая находится в III четверти ее комплексной плоскости, где  $A_1 = |B_1|$ .

С учетом того, что амплитуда  $B_1$  (2.27) находится в III четверти ее комплексной плоскости, ее модуль  $A_1 = |B_1|$  и фазу  $\varphi$  можно определить следующим образом:

$$A_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad \varphi = \pm\pi + \varepsilon; \quad \varepsilon = \arctg\xi, \quad (2.28)$$

где  $\xi = \text{Im} B_1 / \text{Re} B_1 = 2\gamma_1 / \omega_{21}$  – диссипативный параметр, зависящий как от коэффициента линейного вязкого сопротивления  $\mu_1$  внешней среды, так и от собственных параметров МС2  $m_1, m_2$  и  $\omega_{21}$ ; знак «+» или «-» соответствует равноценным по результату положительному и отрицательному отсчетам угла  $\varphi$ .

Подстановка (2.27) в (2.24) для положительного отсчета угла  $\varphi = \varphi_{10} = \pi + \varepsilon$  при  $\varphi_{21} = 0$  (см. рис. 2.1, б) дает

$$q_1 = A_1 \exp j\omega_{21}t \exp(j\varphi) = -A_1[\cos(\omega_{21}t + \varepsilon) + j \sin(\omega_{21}t + \varepsilon)]. \quad (2.29)$$

Действительная часть  $\text{Re} q_1$  (2.29) является частным решением дифференциальных уравнений (2.14) в виде (2.18) для  $\varepsilon \neq 0$  или в виде (2.19) для  $\varepsilon = 0$ .

Согласно (2.28) угол  $\varepsilon$  зависит как от коэффициента сопротивления  $\mu_1$ , входящего в коэффициент затухания  $\gamma_1$  (2.23), так и от собственных параметров ( $m_1$ ,  $m_2$  и  $\omega_{21}$ ) МС2.

Далее были записаны общие решения

$$x_O(t) = C_{1x} + C_{2x} \exp(-2\gamma_1 t); \quad y_O(t) = C_{1y} + C_{2y} \exp(-2\gamma_1 t) \quad (2.30)$$

однородных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_O + 2\gamma_1 \dot{x}_O = 0; \quad \ddot{y}_O + 2\gamma_1 \dot{y}_O = 0, \quad (2.31)$$

характеризующих переносную часть движения МС2 вместе с центром  $O$  ИД как  $\vec{v}_O = d\vec{r}_O / dt$  в системе отсчета  $K$  (см.рис. 2.1, б).

Сумма решений (2.18) и (2.30) дает решения дифференциальных уравнений (2.14) в системе отсчета  $K$  для опорного тела  $m_1$  с массой  $m = m_1 + m_2$  в виде:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_{1x} + C_{2x} \exp(-2\gamma_1 t) - A_1 \cos(\omega_{21} t + \varepsilon); \\ \dot{x}_1(t) &= -2C_{2x} \gamma_1 \exp(-2\gamma_1 t) + A_1 \omega_{21} \sin(\omega_{21} t + \varepsilon); \\ y_1(t) &= C_{1y} + C_{2y} \exp(-2\gamma_1 t) - A_1 \sin(\omega_{21} t + \varepsilon); \\ \dot{y}_1(t) &= -2C_{2y} \gamma_1 \exp(-2\gamma_1 t) - A_1 \omega_{21} \cos(\omega_{21} t + \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Для нулевых начальных условий опорного тела  $m_1$  примем  $x_1(t=0) = 0$ ,  $\dot{x}_1(t=0) = 0$  и  $y_1(t=0) = 0$ ,  $\dot{y}_1(t=0) = 0$ . Тогда из (2.32) найдем:

$$\begin{aligned} C_{1x} &= A_1 \left( \cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \sin \varepsilon \right); \quad C_{2x} = A_1 \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \sin \varepsilon; \\ C_{1y} &= A_1 \left( \sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \cos \varepsilon \right); \quad C_{2y} = -A_1 \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Подставив (2.33) в (2.32), получим общее решение дифференциальных уравнений (2.14):

$$\begin{aligned}
 x_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left( \cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\
 \dot{x}_1(\varphi_{21}) &= -A_1 \omega_{21} \left( \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \sin \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\
 y_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left( \sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \cos \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\
 \dot{y}_1(\varphi_{21}) &= A_1 \omega_{21} \left( \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \cos \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right).
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Координаты и скорость ЦМ  $C$  МС2 в системе отсчета  $K$  можно определить по формулам:

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}; \\
 \dot{x}_C &= \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2}; \dot{y}_C = \frac{m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2}{m_1 + m_2},
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

где координаты  $x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}$ ,  $y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}$  рабочего тела  $m_2$  и определенные по ним его скорости  $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \omega_{21} R \sin \varphi_{21}$  и  $\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \omega_{21} R \cos \varphi_{21}$  в системе отсчета  $K$ .

Траектории движения  $s_1, s_2$  и  $s_C$  опорного  $m_1$ , рабочего  $m_2$  тел и ЦМ  $C$  МС2 в системе отсчета  $K$ , рассчитанные по решениям (2.34) и формулам (2.35) при  $\mu_1 = 3,77; \infty$  Н·с/см, показаны на рис. 2.2.

Координаты силового центра  $O$  ИД можно определить из решений (2.34) в виде:

$$\begin{aligned}
 x_O(\varphi_{21}) &= A_1 \left( \cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon \right); \\
 y_O(\varphi_{21}) &= A_1 \left( \sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \cos \varepsilon \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

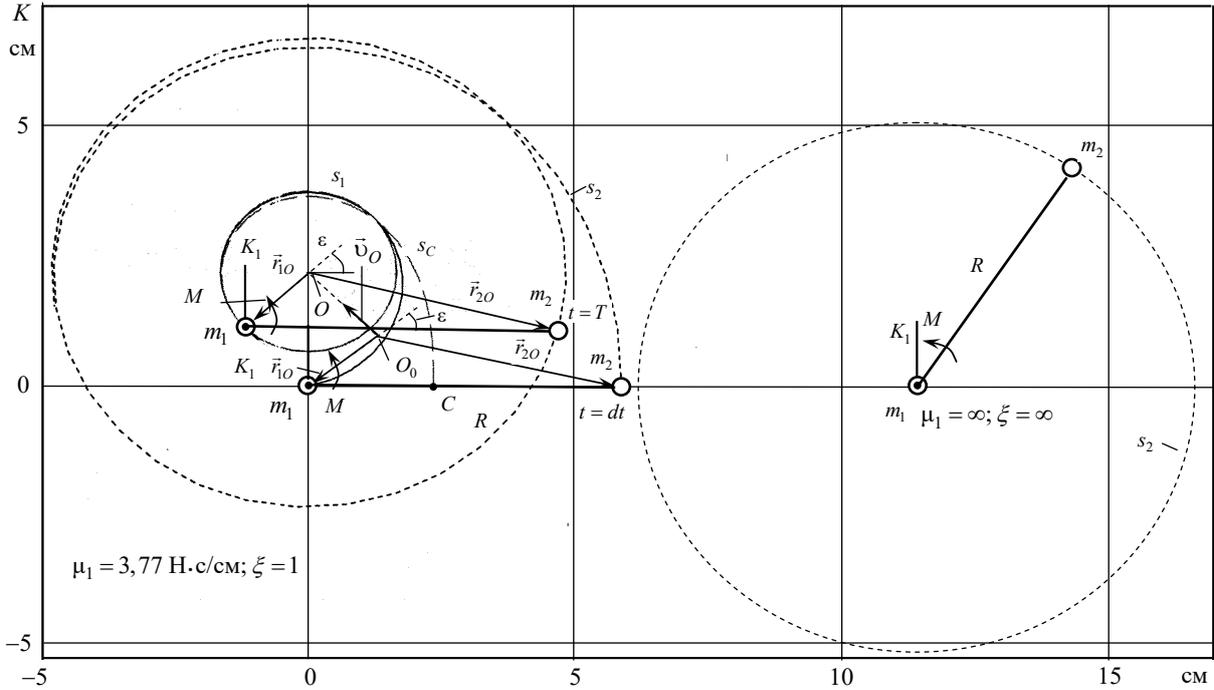


Рис. 2.2. Движение МС2 в системе отсчета  $K$  для различных значений  $\mu_1$

Образование ИД за малый интервал времени  $dt \rightarrow 0$  при  $\mu_1 = 3,77$  Н·с/см соответствует представлению о мгновенной передаче взаимодействий по стержню конечной длины  $R$ . Скорость передачи импульса  $\vec{p}_2$  от рабочего тела  $m_2$  опорному телу  $m_1$  будет оценена в пятой главе. Координаты центра  $O$  ИД в системе отсчета  $K$ , определенные из (2.36) при  $\varphi_{21} = \omega_{21}t = 0$ , составляют  $x_O = \cos \varepsilon = 0,707$  см и  $y_O = \sin \varepsilon = 0,707$  см, где угол  $\varepsilon$  равен  $\varepsilon = 45^\circ$  (см. рис. 2.2).

Согласно выражениям (2.36), центр  $O$  ИД при  $\mu_1 \neq 0$  и  $\varphi_{21} < \pi$  дрейфует по затухающему закону из положения  $O_0$  в положение  $O$  (см. рис. 2.2) со скоростью  $v_O = \sqrt{\dot{x}_O^2 + \dot{y}_O^2}$ , где скорости  $\dot{x}_O$  и  $\dot{y}_O$  можно определить дифференцированием выражений (2.36) по времени  $t$ .

Таким образом, в системе отсчета  $K$  опорное  $m_1$  и рабочее  $m_2$  тела, а также их ЦМ  $C$  будут двигаться по спиральным траекториям  $s_1, s_2$  и  $s_C$  в стационарное состояние [4, 5, 7]. При этом постоянное значение угловой скорости  $\omega_{21} = \text{const}$  поддерживается активным моментом  $M$ .

При  $\mu_1 = 0$  ЦМ  $C$  МС2 совпадает с силовым центром  $O$  ИД и опорное  $m_1$  и рабочее  $m_2$  тела будут двигаться относительно ЦМ  $C$  (см. рис. 2.1, а).

При  $\mu_1 = \infty$  рабочее тело  $m_2$  будет совершать движение по окружности  $s_2$  относительно неподвижного опорного тела  $m_1$  (см. рис. 2.2).

## 2.4. Полная система уравнений

Координаты и скорости тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2 в системе отсчета  $K$  выразим в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1; x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}; \dot{x}_1 = \dot{x}_1; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R\dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}; \\ y_1 &= y_1; y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}; \dot{y}_1 = \dot{y}_1; \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R\dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Кинетическую энергию МС2 в этой системе отсчета  $K$  определим как

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}I_z\dot{\varphi}_{11}^2. \quad (2.38)$$

Подстановка в скоростей (2.37) в (2.38) определяет лагранжиан МС2

$$L = T - U(R) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_{21}^2 R^2 - m_2\dot{\varphi}_{21}R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}) + \frac{1}{2}I_z\dot{\varphi}_{11}^2 - U(R), \quad (1.39)$$

где  $U(R)$  – неизвестная потенциальная функция взаимодействия тел  $m_1$  и  $m_2$  стержня с длиной  $R$ .

Составляя уравнения Лагранжа по координатам  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $\varphi_{21}$  и углу отката  $\varphi_{11}$  тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_1$ , получим следующую систему уравнений движения МС2 для ее нестационарного – (2.40, а) и стационарного – (2.40, б) состояний [4, 5]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1\dot{x}_1 = a(\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21} + \ddot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}); \ddot{y}_1 + 2\gamma_1\dot{y}_1 = a(\dot{\varphi}_{21}^2 \sin \varphi_{21} - \ddot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}); \\ \frac{dK_z^+}{dt} = 2m_2\gamma_1R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}) = M^+; \frac{dK_z^-}{dt} = -I\dot{\varphi}_{11} = M^-, \quad a \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1\dot{x}_1 = a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}; \ddot{y}_1 + 2\gamma_1\dot{y}_1 = a\dot{\varphi}_{21}^2 \sin \varphi_{21}; \\ \frac{dK_z^+}{dt} = 2m_2\gamma_1R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}) = M^+; \frac{dK_z^-}{dt} = M^-, \quad б \end{cases}$$

где члены, содержащие угловые ускорения  $\ddot{\varphi}_{21}$  и  $\ddot{\varphi}_{11}$  в стационарном состоянии (2.40, б), упущены;  $\chi_1 = \mu_{1в}S$  и  $\mu_{1в} = \pi\eta r$  – обобщенный коэффициент сопротивления внешней среды вращению (откату) тела  $m_1$  в виде сферы с радиусом сферы  $r$  и коэффициент сопротивления его вращению (формула Стокса);  $S = 4\pi r^2$  – площадь сферической поверхности тела  $m_1$ ;  $\eta$  – вязкость внешней среды;  $M^+$  – активный момент  $M$ , действующий на оси шарнира тела  $m_1$ ;  $M^- = -M + \chi_1\dot{\varphi}_{11}$  – момент отката.

Согласно рис. 2.1, в первые слагаемые  $a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}$  и  $a\dot{\varphi}_{21}^2 \sin \varphi_{21}$  правой части первых двух уравнений (2.40, а) образованы проекциями радиальной компоненты  $\Phi_{21}^n = m_2\dot{\varphi}_{21}^2 R$ , а вторые  $a\ddot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}$  и  $a\ddot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}$  – проекциями

тангенциальной компоненты  $\Phi_{21}^{\tau} = m_2 \ddot{\varphi}_{21} R$  силы инерции  $\vec{\Phi}_{21}$  на оси  $x_1, x_O$  и  $y_1, y_O$  параллельных систем отсчета  $K_1$  и  $K_O$ , при делении этих проекций на  $m_1 + m_2$ . В стационарном состоянии  $\ddot{\varphi}_{21} = 0$  и влияние компонент  $a\ddot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21} = 0$  и  $-a\ddot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21} = 0$  в (2.40, а) равно нулю ( $\Phi_{21}^{\tau} = 0$ ) и (2.40, а) переходит (2.40, б). Если  $\vec{F}_1 = 0$ , то согласно принципу наименьшего действия МС2 будет совершать движение относительно ее ЦМ  $C$  (см. рис 1.1, а) при  $\Phi_{21}^{\tau} = 0$ , когда ее кинетический момент  $K_z = \text{const}$ .

Силы инерции  $\vec{\Phi}_{1к}$  и  $\vec{\Phi}_{2к}$  Кориолиса опорного  $m_1$  и рабочего  $m_2$  тел в систему уравнений (2.40) не входят, так как по правилу Жуковского они направлены вдоль связи  $R$  и образуют равновесную систему сил  $\vec{\Phi}_{1к} + \vec{\Phi}_{2к} = 0$ .

Четвертое уравнение (2.40, а) записано с учетом теоремы о кинетическом моменте тела  $m_1$  в неинерциальной системе  $K_1$ , ось  $z$  которой скреплена с ЦМ этого тела, движущейся в неподвижной системе отсчета  $K$  поступательно.

Первые два уравнения (2.40, б) МС2 для ее стационарного состояния при  $\mu_1 = 0$  имеют решения (2.19), а при  $\mu_1 \neq 0$  (2.18).

Суммируя последние два уравнения (2.40, б), почленно найдем

$$\frac{d}{dt} K_z = \frac{d}{dt} K_z^+ + \frac{d}{dt} K_z^- = M^+ - M^-. \quad (2.41)$$

Так как стационарному значению  $\omega_{21} = \text{const}$  соответствует  $\dot{\varphi}_{11} = \text{const}$ , то из (2.41) получим

$$\frac{d}{dt} K_z = 0. \quad (2.42)$$

Таким образом, исходя из мгновенной передачи взаимодействий в механике, любому изменению угловой скорости  $\omega_{21}$  (кинетического момента  $dK_z^+ / dt$  МС2) относительно оси  $z_C$  системы отсчета  $K_C$  при  $\mu_1 = 0$ , вызванному действием активного момента  $M$ , соответствует равное по величине и обратное по знаку изменение откатного кинетического момента  $-dK_z^- / dt$  опорного тела  $m_1$ . При этом результирующий кинетический момент МС2 сохраняется  $K_z = \text{const}$  при  $\mu_1 = 0$ , а при  $\mu_1 \neq 0$  поддерживается постоянным за счет источника активного момента  $M$ , обеспечивающего  $\omega_{21} = \text{const}$ .

При  $\mu_1 = \infty$  рабочее тело  $m_2$  будет совершать вращательное движение вокруг неподвижной оси  $z$  системы отсчета  $K$  при  $K_z \neq \text{const}$  до перехода в стационарный режим  $\omega_{21} = \text{const}$ , когда  $K_z = \text{const}$ . При этом источник активного момента  $M$  компенсирует потери кинетической энергии МС2 в диссипативной среде, поддерживая стационарное значение угловой скорости  $\omega_{21} = \text{const}$ , величина которого зависит от мощности этого источника.

## 2.5. Выводы

Таким образом, исходя из принципа Д'Аламбера (2.13) и аксимы связей, примененной для относительных сил инерции  $\vec{R}_{12} = \vec{\Phi}_{12}$ ,  $\vec{R}_{21} = \vec{\Phi}_{21}$  двух взаимодействующих тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2 с тремя степенями свободы  $s \leq 3$  она сведена к одномассовому эквиваленту с массой  $m = m_1 + m_2$ . Получено уравнение его движения в диссипативной среде (2.14), оказывающей линейное вязкое сопротивление ( $\mu_1 \neq 0$ ) движению опорного тела  $m_1$  МС2 с учетом относительной силы инерции  $\vec{\Phi}_{21}$  рабочего тела  $m_2$ , влияющей на абсолютное движение одномассового эквивалента  $m$ .

Полученные теоретические выводы и результаты, в отличие от выводов работ [10–12], позволяют записать уравнение движения трехмассовой механи-

ческой системы МСЗ с числом степеней свободы  $s \leq 3$  [3–7], типа инерциоид Толчина [9], а также построить его математическую модель [4, 13, 14] и обосновать независимость величины смещения ЦМ  $S$  МСЗ от диссипативного параметра МСЗ  $\xi$  (28), лежащего в пределах  $0 < \xi \leq \infty$  [12, 13], чему посвящена следующая глава.

### 3. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТРЕХМАССОВОГО КРИВОШИПНО-ПОЛЗУННОГО МЕХАНИЗМА НА БАЗЕ ЕГО ДВУХМАССОВОГО АНАЛОГА

#### 3.1. Введение в главу

Глава посвящена динамическому анализу плоского трехмассового кривошипно-ползунного механизма (КПМ) [13, 14], типа «инерциод Толчина» [9]. Он сведен к двухмассовому аналогу, а затем к одномассовому эквиваленту с уравнением движения, учитывающим действие относительных сил инерции рабочих тел этого механизма и диссипативных сил, действующих на его ползун. Исследована зависимость смещения центра масс механизма от диссипации внешней среды и найден ее минимальный уровень, до которого смещение центра масс механизма постоянно, а ниже которого всегда стремиться к нулю.

#### 3.2. Динамический анализ

Кинематическая схема и конструкция КПМ показаны на рис. 3.1, *а* и *б*.

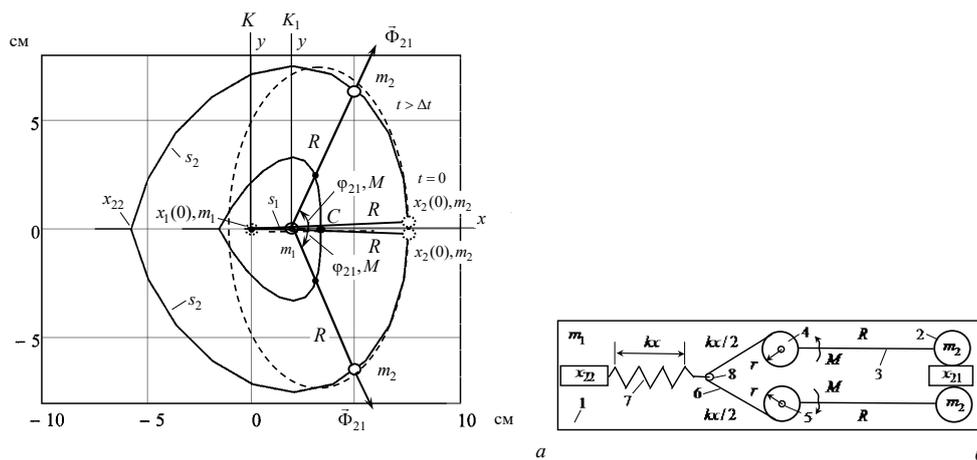


Рис. 3.1. Кинематическая схема КПМ – *а* и его конструкция – *б*:  
1 – основание с массой  $m_1$ ; 2 – рабочее тело с массой  $m_2$ ; 3 – кривошип с длиной  $R$ ;  
4 – шкив с радиусом  $r$ ; 5 – ось; 6 – нить; 7 – пружина с жесткостью  $k$ ; 8 – ролик

Основными элементами КПМ (см. рис. 3.1, б) являются ползун 1 с массой  $m_1$  и два рабочих тела 2 с одинаковой массой  $m_2$ , которые с помощью кривошипов 3 с длиной  $R = \text{const}$  и шкивов 4 с радиусом  $r$  установлены на осях 5 ползуна 1 с возможностью их встречного синхронного вращательного движения в его плоскости из положения  $x_{21}$  в положение  $x_{22}$  с помощью нити 6 и пружины 7 с жесткостью  $k$ .

Для проведения динамического анализа КПМ введем неподвижную систему отсчета  $K$ , лежащую в плоскости рисунка (см. рис. 3.1, а). Начало координат этой системы отсчета  $K$  свяжем с начальным положением  $x_{1н}$  ползуна  $m_1$  в момент времени  $t = 0$ . Также введем собственную систему  $K_1$  ползуна  $m_1$ , лежащую в его плоскости, которая вместе с ним может совершать движение вдоль оси  $x$  неподвижной системы отсчета  $K$ .

Коэффициент линейного вязкого сопротивления движению ползуна  $m_1$  составляет  $\mu_1$ . Его величина лежит в пределах  $0 \leq \mu_1 \leq \infty$  и зависит от геометрической формы и размеров ползуна  $m_1$ . Для рабочих тел  $m_2$  его величина всегда равна нулю  $\mu_2 = 0$ , что можно обеспечить, выполнив ползун  $m_1$  в виде герметичного полого корпуса, в котором размещены рабочие тела  $m_2$ .

КПМ имеет две степени свободы, по следующим обобщенным координатам: декартовой координате  $x_1$  поступательного движения ползуна  $m_1$  вдоль оси  $x$  неподвижной системы отсчета  $K$  и двум зависимым полярным координатам  $\pm\varphi_{21}$  встречного синхронного вращательного движения тел  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  ползуна  $m_1$ , где знак  $+\varphi_{21}$  для верхнего тела  $m_2$ , а знак  $-\varphi_{21}$  для нижнего. Рабочие тела  $m_2$  установлены на ползуне  $m_1$  с помощью прямолинейных кривошипов 3 с массой  $m_R \ll m_2$  каждого, которые закреплены на шкивах 4 с массой  $m_{ш} \ll m_2$  каждого. Сами шкивы 4 шарнирно установлены на осях 5 ползуна  $m_1$  (см. рис. 3.1, б), что обеспечивает

возможность встречного синхронного вращательного движения рабочих тел  $m_2$  в плоскости ползуна  $m_1$  из положения  $x_{21}$  в положение  $x_{22}$  с помощью нерастяжимой нити 6 (ее свободные концы намотаны на шкивы 4) и пружины 7.

В неподвижной системе отсчета  $K$  (см. рис. 3.1, *а*) для момента времени  $t = 0$  центр ползуна (обозначенный как  $m_1$ ) находится в начальном положении  $x_1(0) = 0$ , а рабочие тела  $m_2$  в положении  $x_2(0) = R$ .

В собственной системе отсчета  $K_1$  ползуна  $m_1$  (см. рис. 3.1, *б*) в начальный момент времени  $t = 0$  тела  $m_2$  заблокированы в положении  $x_{21}$ . Пружина 7 растянута. Ролик 8 на конце пружины 7 обеспечивает одинаковое натяжение  $T$  нити 6, концы которой намотаны на симметрично расположенных шкивах 4. При разблокировке тел  $m_2$  пружина 7 будет сжиматься. И так как один ее конец закреплен на опоре  $x_{21}$  ползуна  $m_1$ , на котором одновременно закреплены и оси 5 шкивов 4, то ролик 8 посредством одинаковых натяжений  $T$  нити 6 создаст на шкивах 4 двунаправленный уравновешенный момент  $M = \pm \frac{kxr}{2 \cos \alpha}$ , где  $k$  – жесткость пружины 7;

$x = r(\pi - \varphi_{21})$  – величина ее растяжения в зависимости от угла  $\varphi_{21}$  поворота рабочих тел  $m_2$ ;  $\alpha \approx 30^\circ$  – угол наклона нити 6 к оси  $x$  системы отсчета  $K_1$ .

Под действием двунаправленного момента  $M$  тела  $m_2$  будут совершать встречное синхронное вращательное движение из положения  $x_{21}$  в положение  $x_{22}$  на угол  $\varphi_{21} = \pm \pi$ . (аналогичное положению  $x_{22}$  в неподвижной системе отсчета  $K$  на рис. 3.1, *а*).

При вращательном перемещении тел  $m_2$  угол  $\alpha$  изменяется на малую величину  $\Delta \alpha = \pm 3^\circ$ . Так как натяжения  $T$  нити 6 для верхнего и нижнего шкивов 4 равны, то они создают равные, но различные по знаку моменты  $M = \pm \frac{kxr}{2 \cos \alpha}$ . При этом результирующий активный момент, действующий на ползуне  $m_1$ , будет равен нулю  $\sum M = 0$  и,

следовательно, будет сохраняться кинетический момент  $dK_z / dt = \text{const}$  КПМ относительно оси  $z$  системы отсчета  $K_1$  (ось  $z$  направлена ортогонально к плоскости чертежа в сторону наблюдателя и на рис. 3.1 не показана). Сохранность  $dK_z / dt = \text{const}$  будет подробно проанализирована при математическом моделировании КПМ.

Жесткость  $k$  пружины 7 выбирается так, чтобы время поворота тел  $m_2$  на угол  $\varphi_{21} = \pm\pi$  для любых  $\mu_1$  и параметров КПМ составляло  $t_1 \leq 2\pi / \omega_{21} \leq 0,5$  с. Такой выбор сводит к минимуму влияние малого трения скольжения в шарнирном соединении шкивов 4 и осей 5 и влияние диссипативных потерь КПМ при его движении в диссипативной среде на угловую скорость  $\omega_{21}$  вращательного движения тел  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$ .

По завершению вращательного перемещения тел  $m_2$  на угол  $\varphi_{21} = \pm\pi$  КПМ будет совершать в диссипативной среде системы отсчета  $K$  затухающее движение как единое целое при стремлении его ползуна в положение  $x_1(0) = 0$ , когда смещение ЦМ  $K$  КПМ при диссипативном параметре  $\xi \leq \xi_{\text{п}} = 6.367 \cdot 10^{-13}$  (3.28) составит  $\Delta x_C = -6.6 \text{ см} = \text{const}$ , где  $\xi_{\text{п}}$  – пороговое значение диссипативного параметра  $\xi$ , подлежащее дальнейшему определению.

### 3.3. Математическая модель

Выразим кинетическую энергию КПМ через сумму кинетических энергий ее двух зеркальных относительно  $x$  частей с массами  $\frac{1}{2}m_1$  и  $m_2$ .

Для этого выразим скорости этих масс  $m_1 \frac{1}{2}$  и  $m_2$  через их координаты в системе отсчета  $K$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_1; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R\dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}; x_1 = x_1; x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}; \\ \dot{y}_1 &= \dot{y}_1; \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R\dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}; y_1 = y_1; y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Скорости  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$  (3.1) позволяют выразить кинетическую энергию КПМ

$$T = T^+ + T^- = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{m}_2\dot{\varphi}_{21}^2R^2 - \tilde{m}_2\dot{x}_1\dot{\varphi}_{21}R \sin \varphi_{21}, \quad (3.2)$$

здесь суммарная масса КПМ  $m = m_1 + \tilde{m}_2$  условно сосредоточена в опорном теле  $m_1$ , в которой  $\tilde{m}_2 = 2m_2$  – суммарная масса рабочих тел  $m_2$ ;

$T^\pm = \frac{1}{2}(0,5m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_{21}^2R^2 - m_2\dot{x}_1\dot{\varphi}_{21}R \sin \varphi_{21}$  – кинетическая энергия верхней и нижней части КПМ.

Записывая лагранжиан  $L = T - \Pi(x)$ , где  $\Pi(x) = \frac{1}{2}0.5kx^2$  – потенциальная энергия пружины 7 (см. рис. 3.1, б) для каждой из двух симметричных частей КПМ, а также составляя уравнения Лагранжа по обобщенным координатам  $x_1$ ,  $y_1$  и  $\varphi_{21}$ , получим следующую систему уравнений движения КПМ [13, 14]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1\dot{x}_1 = a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}; y_1 = 0; \\ \frac{d}{dt}K_z^\pm = \pm m_2R[\ddot{\varphi}_{21}R + \sin \varphi_{21}(2\gamma_1\dot{x}_1 - a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21})] = \pm M, \end{cases} \quad (3.3)$$

где  $\gamma_1 = \frac{\mu_1}{2(m_1 + \tilde{m}_2)}$  – коэффициент затухания и  $a = \frac{\tilde{m}_2R}{m_1 + \tilde{m}_2}$ . Для стационарного состояния в уравнении для кинетического момента  $K_z^\pm$  (3.3) следует принять  $\ddot{\varphi}_{21} = 0$ .

Система уравнений (3.3) сводит КПМ к ее двухмассовому аналогу МС2 с массами  $m_1$  и  $\tilde{m}_2 = 2m_2$ . При этом система сил, действующая на КПМ в стационарном состоянии, образует ИД с равнодействующей  $\vec{F}_{10} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1$  (2.13) (см. рис. 2.1, в), образованный проекцией оносительной силы инерции  $\vec{\Phi}_{21} = \tilde{m}_2 \omega_{21}^2 \vec{r}_{21}$  одного верхнего тела с условной массой  $\tilde{m}_2 = 2m_2$  (для которой нижнее тело не рассматривается) в собственной системе отсчета  $K_1$  ползуна  $m_1$  на ось координат  $x$  системы отсчета  $K$  и диссипативной силой  $\vec{F}_1 = -\mu_1 \vec{v}_1$ , действующей на ползун  $m_1$  вдоль этой же оси  $x$ . То, что в ползуне условно сосредоточена вся масса  $m = m_1 + \tilde{m}_2$  (3.2), сводит трехмассовую КПМ к одно-массовому эквиваленту ( $m = m_1 + \tilde{m}_2$ ) с двумя с двумя степенями свободы по обобщенным координатам  $x_1$  и  $\varphi_{21}$  (3.1), движущемуся в поле ИД под действием силы  $\vec{F}_{10} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1$  (2.13).

Суммирование последнего уравнения (3.3) для двух зеркальных относительно  $x$  частей КПМ дает

$$\frac{d}{dt} K_z = \frac{d}{dt} K_z^+ + \frac{d}{dt} K_z^- = M - M = 0. \quad (3.4)$$

Из него следует равенство  $dK_z^+ / dt = -dK_z^- / dt$ , показывающее, что любому изменению кинетического момента  $dK_z^+ / dt$  верхней части КПМ (изменению  $\ddot{\varphi}_{21} = \dot{\omega}_{21}$  угловой скорости  $\omega_{21}$  его рабочего тела  $m_2$ , которое вызвано действием момента  $M$  (см. рис. 3.1, а)) соответствует равное по величине и обратное по знаку изменение кинетического момента  $-dK_z^- / dt$  нижней его зеркальной части так, что результирующий кинетический момент КПМ для любых постоянных значений  $\mu_1$ , лежащих в пределах  $0 \leq \mu_1 \leq \infty$ , сохраняется  $K_z = \text{const}$ , что обосновывает приемлемость допущения  $\omega_{21} = \omega_{cp} = \text{const}$ . В результате чего у трехмассового КПМ (в отличие от

МС2, показанной рис. 2.1) для любых  $\ddot{\phi}_{21}$  отсутствует вращение (откат) ползуна  $m_1$ .

При учете факторов не идеальности в виде веса шкива 4 и кривошипа 3 с длиной  $R$  следует:

– добавить к массе ползуна  $m_1$  суммарную массу  $2m_{\text{ш}}$  шкивов 4 ( $m_1 + 2m_{\text{ш}}$ );

– учесть смещение центра тяжести системы кривошип 3 – тело  $m_2$  в сторону шкива 4 по формуле  $R_{\text{э}} = (m_R x_R + m_2 x_2) / (m_R + m_2)$ , где  $R_{\text{э}}$  – эквивалентная длина кривошипа 3;  $x_R = R / 2$  – координата центра тяжести кривошипа 3, отсчитываемая от шкива 4;  $x_2 = R + l_2 / 2$  – координата центра тяжести тела  $m_2$ , также отсчитываемая от шкива 4;  $l_2$  – длина рабочего тела  $m_2$ .

Весом нити 6 и пружины 7 можно пренебречь, так как вес каждой из них более чем на 5–10 порядков меньше суммарного веса КПМ.

Для продолжения динамического анализа КПМ выделим из общего времени  $0 \leq t \leq \infty$  его движения в системе отсчета  $K$  вдоль ее оси  $x$  две фазы. Активная фаза – это движение КПМ за время  $0 \leq t < t_1$  (см. рис. 3.1, *a*), когда осуществляется вращательное перемещение его рабочих тел  $m_2$  из положения  $x_2(0)$  (на рис. 3.1, *б* соответствует положению  $x_{21}$ ) в положение  $x_{22}$  (соответствующее этому же положению на рис. 3.1, *б*). Пассивная фаза движения – это затухающее движение КПМ за время  $t_1 \leq t \leq \infty$  как целого после абсолютно неупругого уравновешенного центрального удара рабочих тел  $m_2$  в положении  $x_{22}$  (см. рис. 3.1, *a* и *б*).

### 3.4. Активная фаза движения

Движение основания  $m_1$  КПМ в системе отсчета  $K$  (рис. 3.1, *a*) описывается первым уравнением (3.3). Оно имеет решения (2.34):

$$\begin{aligned}
x_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left( \cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\
\dot{x}_1(\varphi_{21}) &= -A_1 \omega_{21} \left( \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \sin \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где  $A_1 = a / \sqrt{1 + \xi^2}$  – амплитудный коэффициент;  $\varepsilon = \text{arctg}(\xi)$  – угол диссипативных потерь;  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$  – диссипативный параметр.

Координаты  $x_1(\varphi_{21})$  и скорости  $\dot{x}_1(\varphi_{21})$  ползуна  $m_1$  во время  $0 \leq t < t_1$  с (где  $t_1 = 0,5$  с) активной фазы движения КПМ были рассчитаны по решениям (3.5), а координаты  $x_C$  и скорости  $\dot{x}_C$  его ЦМ  $C$  – по формулам (2.35):

$$\begin{aligned}
x_C &= \frac{m_1 x_1 + \tilde{m}_2 x_2}{m_1 + \tilde{m}_2}; y_C = y_C^+ + y_C^- = 0; \\
\dot{x}_C &= \frac{m_1 \dot{x}_1 + \tilde{m}_2 \dot{x}_2}{m_1 + \tilde{m}_2}; \dot{y}_C = \dot{y}_C^+ + \dot{y}_C^- = 0,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где координаты  $x_2 = x_1 + \cos \varphi_{21}$ ,  $y_2 = \sin \varphi_{21}$  и определенные по ним скорости  $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \omega_{21} \sin \varphi_{21}$ ,  $\dot{y}_2 = \omega_{21} \cos \varphi_{21}$ ;  $y_C^\pm = \frac{\tilde{m}_2 y_2}{m_1 + \tilde{m}_2}$  и  $\dot{y}_C^\pm = \pm \frac{\tilde{m}_2 \dot{y}_2}{m_1 + \tilde{m}_2}$  – координаты и скорости ЦМ  $C$  отдельно для верхней и нижней, зеркальных относительно  $x$  частей КПМ.

На рис. 3.2, *a* и *б* показаны траектории движения ползуна  $m_1$  и тел  $m_2$ , а также ЦМ  $C$ , а на рис. 3.2, *в* и *г* – графики рассчитанных из (3.5) и (3.6) координат (положений)  $x_1(\varphi_{21})$ ,  $x_C(\varphi_{21})$  и скоростей  $\dot{x}_1(\varphi_{21})$  ползуна  $m_1$  и тел  $m_2$ , для углов их встречного поворота на угол  $0 \leq \varphi_{21}(t) \leq \pi$  за время  $0 \leq t < t_1$ ;  $t_1 = 0,5$  с активной фазы. Их расчет выполнен для собственных параметров КПМ:  $m_1 = 0,14$  кг;  $\tilde{m}_2 = 2m_2 = 0,11$  кг;  $R = 7,5$  см, которые в дальнейшем неизменны.

### 3.5. Пассивная фаза движения

В результате встречного абсолютно неупругого центрального удара рабочих тел  $m_2$  в положении  $x_{22}$  (см. рис. 3.1, *a* и *б*) при их повороте на угол  $\varphi_{21} = \omega_{21}t_1 = \pi$  угловая скорость  $\omega_{21}$  их вращательного перемещения обратится в нуль  $\omega_{21} = 0$ . Тогда во время  $t_1 \leq t \leq \infty$ ; (где  $t_1 = 0,5$  с) пассивной фазы движения КПМ он будет совершать совместно с его ЦМ  $C$  в системе отсчета  $K$  вдоль ее оси  $x$  затухающее поступательное движение (рис. 3.2, *в* и *г*) по инерции как единое целое со скоростью

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = \dot{x}_C(t). \quad (3.7)$$

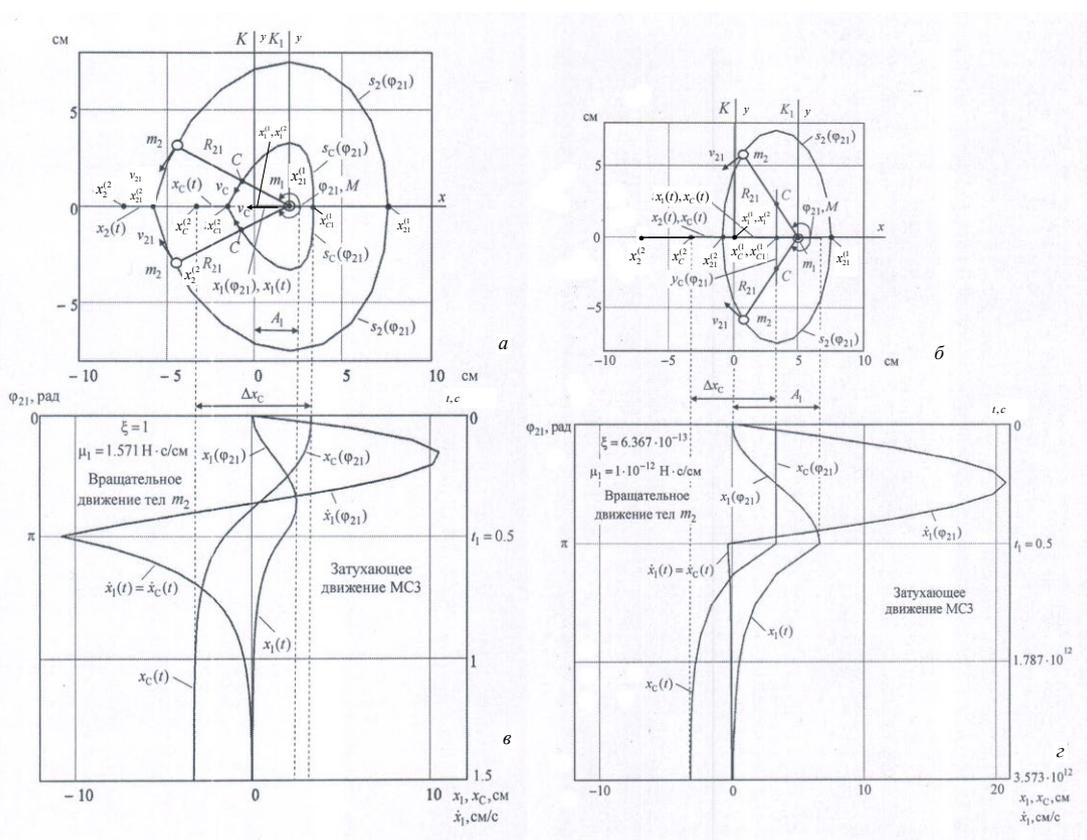


Рис. 3.2. Кинематическая схема КПМ – *a*, *б* и графики положения  $x_1$  и скорости  $\dot{x}_1$  его ползуна  $m_1$ , а также положения  $x_C$  его ЦМ  $C$  за общее время активной и пассивной фаз его движения:

$$0 \leq t \leq 1,5 \text{ с при } \xi = 1 (\mu_1 = 1,571 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{см}) - \text{в};$$

$$0 \leq t \leq 3,573 \cdot 10^{12} \text{ с при } \xi = 6,367 \cdot 10^{-13} (\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{см}) - \text{г}$$

Как известно, затухающее движение КПМ во время  $t_1 \leq t \leq \infty$ ; (где  $t_1 = 0,5$  с) пассивной фазы движения можно представить однородным уравнением  $\ddot{x}_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 = 0$  с решениями:

$$x_1(t) = C_1 + C_2 \exp(-2\gamma_1(t - t_1)); \quad x_C(t) = C_3 + C_2 \exp(-2\gamma_1(t - t_1)). \quad (3.8)$$

Дифференцирование  $dx_1(t)/dt$  и  $dx_C(t)/dt$  решений (3.8) по времени  $t$  позволяет представить равенство (3.7) в виде

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_C(t) = -2C_2\gamma_1 \exp(-2\gamma_1(t - t_1)). \quad (3.9)$$

Подстановка времени  $t = t_1$  в решения (3.8) и равенство (3.9) позволяет определить коэффициенты  $C_1 - C_3$  в виде:

$$\begin{aligned} x_1(t_1) = x_1(\alpha) = C_1 + C_2; \quad x_C(t_1) = x_C(\alpha) = C_3 + C_2; \\ \dot{x}_1(t) = \dot{x}_C(t_1) = \dot{x}_C(\alpha) = -2C_2\gamma_1 \end{aligned}, \quad (3.10)$$

здесь начальное положение  $x_1(\alpha)$  и  $x_C(\alpha)$  ползуна  $m_1$  и ЦМ  $C$ , а также его начальная скорость  $\dot{x}_C(\alpha)$  определены решениями (3.5) и формулами (3.6) при фиксированном повороте рабочих тел  $m_2$  на угол  $\varphi_{21} = \omega_{21}t = \alpha = \pi$ .

Решая уравнения (3.10), получим:

$$C_1 = x_1(\alpha) + \dot{x}_C(\alpha) / 2\gamma_1; \quad C_2 = -\dot{x}_C(\alpha) / 2\gamma_1; \quad C_3 = x_C(\alpha) + \dot{x}_C(\alpha) / 2\gamma_1. \quad (3.11)$$

Подстановка (3.11) в (3.8) и (3.9) дает:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))]; \\ \dot{x}_1(t) &= \dot{x}_C(t) = \dot{x}_C(\alpha) \exp(-2\gamma_1(t - t_1)); \\ x_C(t) &= x_C(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В решении (3.12) область определения времени  $t \geq t_1$ . Положения  $x_1(\alpha)$ ,  $x_C(\alpha)$  и скорость  $\dot{x}_C(\alpha)$  рассчитаны из (3.5) и (3.6) при  $t_1 = 0,5$  с,  $\alpha = \pi$ . Их рассчитанные значения составляют: для рис. 3.2, в при  $\xi = 1$  –  $x_1(\pi) = 1,72$  см,  $x_C(\pi) = -1,58$  см и  $\dot{x}_C(\pi) = -10,82$  см/с, и для рис. 3.2, г при  $\xi = 1$  –  $x_1(\pi) = 6,6$  см,  $x_C(\pi) = 3,3$  см и  $\dot{x}_C(\pi) = -2,64 \cdot 10^{-11}$ .

Рассчитанные из решений (3.5), (3.12) и формул (3.6) значения  $x_1(t)$ ,  $\dot{x}_1(t)$ ,  $x_C(t)$  показаны графиками на рис. 3.2, в в системе отсчета  $K$  для времени  $t_1 \leq t \leq 1,5$ ; (где  $t_1 = 0,5$  с) активной фазы движения КПМ и на рис. 3.2, г для времени  $t_1 \leq t \leq 3,573 \cdot 10^{12}$ ; (где  $t_1 = 0,5$  с) пассивной фазы его движения. Расчет произведен с использованием двух значений диссипативного параметра  $\xi$  (5): для рис. 2, в –  $\xi = 1$ ,  $\mu_1 = 1,571$  Н·с/см и для рис. 2, г –  $\xi = 6,367 \cdot 10^{-13}$ ,  $\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12}$  Н·с/см при ранее заданных собственных параметрах КПМ.

### 3.6. Эффект смещения центра масс

Величину смещения  $\Delta x_C$  ЦМ  $C$  МСЗ в системе отсчета  $K$  выразим для двух значений диссипативного параметра  $\xi = 1$  и  $\xi = 6,367 \cdot 10^{-13}$ , которые приведены на рис. 3.2, в и г. Для  $\xi = 1$  (см. рис. 2, в) его величина за общее время  $0 \leq t \leq 1,5$  с складывается из времени  $0 \leq t < 0,5$  с активной фазы движения КПМ и времени  $0,5 \leq t \leq 1,5$  с пассивной фазы его движения (см. рис. 2, в). И аналогично для  $\xi = 6,367 \cdot 10^{-13}$  за общее время  $0 \leq t \leq 3,573 \cdot 10^{12}$  с активной  $0 \leq t < 0,5$  с и пассивной  $0,5 \leq t \leq 3,573 \cdot 10^{12}$  с фаз (см. рис. 2, г). Для этих двух случаев величина смещения  $\Delta x_C$  ЦМ  $C$  составляет [3, 5, 13, 14]

$$\Delta x_1 = \Delta x_e = x_1^{(2)} - x_1^{(1)} = 0; \Delta x_C = \Delta x_1 + \Delta x_r \quad (3.13)$$

где  $\Delta x_1 = x_1^{(2)} - x_1^{(1)} = \Delta x_e$  – смещение опорного тела  $m_1$  в системе отсчета  $K$  за общее время активной и пассивной фаз движения КПМ;  $\Delta x_r = x_{C1}^{(2)} - x_{C1}^{(1)} = -a(1 - \cos \alpha)$  – относительное смещение ЦМ  $C$  в системе отсчета  $K_1$  за время  $0 \leq t < 0,5$  с активной фазы движения КПМ, где знак «минус» указывает на то, что смещение ЦМ  $C$  происходит в сторону отрицательных значений координатной оси  $x$  системы отсчета  $K_1$ ;  $\alpha = \Delta \varphi_{21}$  угол поворота тел  $m_2$  за время активной фазы.

Согласно рис. 3.2, *в* и *г*, смещение  $\Delta x_1$  опорного тела  $m_1$  за общее время действия и последействия  $0 \leq t \leq 1,5$  с (для рис. 2, *в*) и  $0 \leq t \leq 3,573 \cdot 10^{12}$  с (для рис. 2, *г*) при  $1 \cdot 10^{-12} \leq \mu_1 \leq 1,571$  Н·с/см ( $\xi_{\text{п}} \leq \xi \leq \infty$ ) равно нулю  $\Delta x_1 = 0$ . Величина  $\xi_{\text{п}}$  является некоторым пороговым значением диссипативного параметра  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$  (3.5). Это пороговое значение  $\xi_{\text{п}}$  для выбранной модели МСЗ будет определено ниже. При  $\xi \geq \xi_{\text{п}}$  смещение ЦМ  $C$   $\Delta x_C = \Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$  и не зависит от коэффициента сопротивления  $\mu_1$  диссипативной среды движению ползуна  $m_1$  [13, 14].

Эффект постоянного смещения  $\Delta x_C = \Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$  (3.13) ЦМ  $C$  при  $\xi_{\text{п}} \leq \xi \leq \infty$  обеспечивает вклад угла диссипативных потерь  $\varepsilon = \text{arctg}(\xi)$  (3.5) в угол  $\varphi = \varphi_{10} - \varphi_{21} = \pi + \varepsilon$ , характеризующий запаздывание фазы  $\varphi_{10} = \varphi_{21} + \pi + \varepsilon$  прямолинейного движения ползуна  $m_1$  (вдоль оси  $x$ ) относительно фазы  $\varphi_{21}$  встречного вращательного движения рабочих тел  $m_2$  в системе координат  $K_O$ , связанной с центром  $O$  ИД (2.18). При таком запаздывании скорость  $\dot{x}_1(\varphi_{21} = \pi) = \dot{x}_C(\varphi_{21} = \pi) < 0$  основания  $m_1$  при  $\varphi_{21} = \alpha = \pi$  является отрицательной, как показано на рис. 3.2, *в* и *г*. Для отрицательного значения скорости  $\dot{x}_1(\varphi_{21} = \pi) = \dot{x}_C(\varphi_{21} = \pi) < 0$  всегда выполняется условие

$$x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))] \right] = x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} = 0; \xi \geq \xi_{\text{п}}. \quad (3.14)$$

Условие (3.14) получено из (3.12) при  $t \rightarrow \infty$ . Согласно ему, смещение  $\Delta x_C$  ЦМ С КПМ для всех  $\xi \geq \xi_{\text{п}}$  равно  $\Delta x_C = \text{const}$ , а при  $\xi < \xi_{\text{п}}$  оно  $\Delta x_C \rightarrow 0$ .

Это условие отражает тот факт, что ползун  $m_1$  при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к началу координат неподвижной системы отсчета  $K$ , которое определено начальном положением ползуна  $m_1$  в момент времени  $t = 0$  (см. рис. 3.2, *в* и *г*). Такое поведение КПМ не противоречит выводам работ [3–5, 13, 14].

Пороговое значение  $\xi_{\text{п}}$  было найдено на основе численного моделирования смещения  $\Delta x_C$  (3.13) ЦМ С. Оно искалось как функция от коэффициента сопротивления  $\mu_1$ , который определяет коэффициент затухания  $\gamma_1 = \mu_1 / [2(m_1 + \tilde{m}_2)]$  (3.3) и одновременно диссипативный параметр  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$  (3.5). На рис. 3.3 приведен алгоритм численного моделирования.

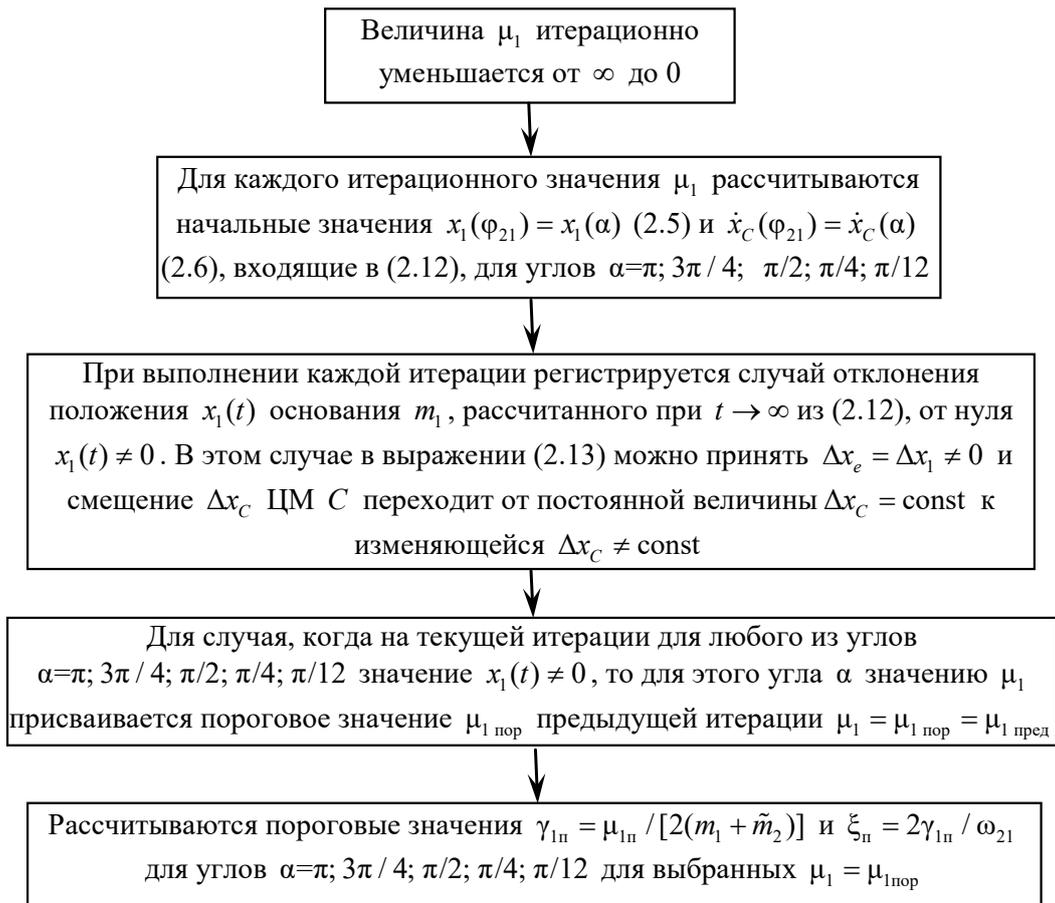


Рис. 3.3. Блок-схема алгоритма численного моделирования

Результаты численного моделирования приведены на рис. 3.4.

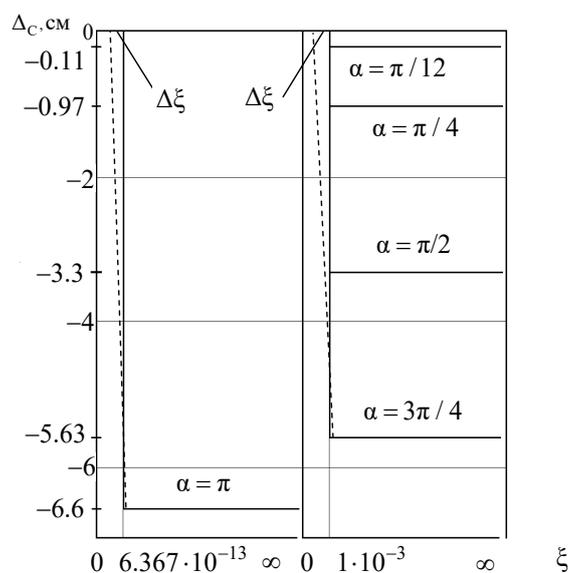


Рис. 3.4. Смещение  $\Delta x_C$  ЦМ  $C$  для фиксированных углов  $\alpha$  в виде функции от диссипативного параметра  $\xi$

В дополнение к рис. 3.4 ниже в табл. 3.1 приведены рассчитанные значения смещений  $\Delta x_C$  ЦМ  $C$  МСЗ для различных углов поворота  $\alpha$  в виде функций от диссипативного параметра  $\xi \geq \xi_{\pi}$ .

Таблица 3.1

Рисунок	Угол	Диссипативный параметр	Смещение ЦМ $C$	Общее время
Рис. 3.2, <i>в</i>	$\alpha = \pi$	$\xi = 1$	$\Delta x_C = -6.6$ см = const	$t = 1.5$ с
Рис. 3.2, <i>г</i>	$\alpha = \pi$	$\xi = \xi_{\pi} = 6.367 \cdot 10^{-13}$	$\Delta x_C = -6.6$ см = const	$t = 3.543 \cdot 10^{12}$ с
Рис. 3.4	$\alpha = 3\pi/4; \pi/2;$ $\pi/4; \pi/12$	$\xi_{\pi} \leq \xi \leq 1$ $\xi_{\pi} = 1 \cdot 10^{-3}$	$\Delta x_C = -5.633;$ $-3.3; -0.967;$ $-0.112$ см	$t = 2 \cdot 10^3$ с

Согласно рис. 3.4 и табл. 2.1, величина смещения  $\Delta x_C$  ЦМ  $C$  для каждого из углов  $\alpha = \pi; 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$  в диапазоне изменения  $\xi_{\pi} \leq \xi \leq \infty$  диссипативного параметра  $\xi$  сохраняется постоянным  $\Delta x_C = \text{const}$ . Из рис. 3.4 видно, что в малом интервале  $\Delta \xi = 0,061 \cdot 10^{-13} - \alpha = \pi$  и  $\Delta \xi = 0,084 \cdot 10^{-4} - \alpha = 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$  уменьшения диссипативного параметра  $\xi$  смещение  $\Delta x_C$  ЦМ  $C$  линейно стремится к нулю  $\Delta x_C \rightarrow 0$  (в интервале  $\Delta \xi$  график на рис. 3.4 показан штрихпунктирной линией).

Также согласно рис. 3.4, рис. 3.2, *в, г* и табл. 3.1, наименьшее пороговое значение  $\xi_{\pi \text{ min}} = 6,367 \cdot 10^{-13}$  диссипативного параметра  $\xi$  наблюдается при угле  $\alpha = \pi$ , когда смещение  $\Delta x_{C \text{ max}} = -6,6 \text{ см} = \text{const}$ , ЦМ  $C$  максимально. При стремлении  $\xi \rightarrow \xi_{\pi}$  начальная скорость  $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi)$ , изменяясь по закону  $-\sin 2\alpha$ , стремится к нулю  $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi) \rightarrow 0$ . Она за малый интервал  $\Delta \xi$  приращения  $\xi$  обращается в нуль  $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi) = 0$ . При этом в этом же малом интервале  $\Delta \xi$  смещение ЦМ  $C$   $\Delta x_C$  также стремится к нулю  $\Delta x_C \rightarrow 0$ , обращаясь в нуль  $\Delta x_C = 0$  при  $\xi_{\pi} - \Delta \xi$  (см. рис. 3.4).

### 3.7. Выводы

Таким образом, получено решение задачи для трехмассового КПМ типа «инерциоид Толчина» [9]. Показано, что КПМ сводится к двухмассовому аналогу, а затем к одномассовому эквиваленту [5, 7], масса  $m$  которого движется в центральном поле ИД с уравнением движения (3.3) и его решением (3.5). Показано, что смещение  $\Delta x_C$  (3.13) центра  $O_C$  масс  $C$  КПМ в среде со значением диссипативного параметра больше порогового  $\xi_{\pi} \leq \xi \leq \infty$  остается постоянным  $\Delta x_C = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$ , что согласуется с работами [3–5, 13, 14]. Это обеспечивает пульсирующее движение инерциоида Толчина [9] посредством выбора

разных угловых скоростей  $\omega_{21}$  для прямого и обратного перемещения его рачих тел  $m_2$ . Например, для одного из них  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} \geq \xi_{\text{п}}$ , когда смещение  $\Delta x_C$  его ЦМ  $C$  постоянно  $\Delta x_C = \text{const}$ , а для другого  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} < \xi_{\text{п}}$ , когда оно стремится к нулю  $\Delta x_C \rightarrow 0$ .

## 4. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЯТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ И ДИАМЕТРАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЕЕ МАСС В ПОЛЕ ИНЕРЦИОННОГО ДОМЕНА

### 4.1. Введение в главу

Взаимодействие двух тел в механике Ньютона удовлетворяет третьему закону о действии и противодействии [1, 2]. Он дополняет второй закон Ньютона, сформулированный для случая, когда одно из двух взаимодействующих тел механической системы отброшено, а реакция связи этих тел заменена активной силой  $\vec{R} = \vec{F}$ , являющейся мерой взаимодействия оставшегося и отброшенного тел в инерциальной системе отсчета, что позволило решать большой класс задач механики, включая небесную в гелиоцентрической системе отсчета. Таким образом, второй закон Ньютона описывает действие, которого в отличие от взаимодействия, включающего противодействие отбрасываемого тела, в природе без учета третьего закона Ньютона не существует, что компенсируется введением во второй закон Ньютона поправок в виде сил инерции, учитывающих неинерциальность системы отсчета наблюдателя.

В рассматриваемой главе показано, что закон движения каждого из двух взаимодействующих материальных тел можно получить, если в качестве меры взаимодействия двух тел выбрать их относительные силы инерции  $\vec{\Phi}_r$  [5–7], которые взаимно приложены к этим телам через их связь  $\vec{R} = \vec{\Phi}_r$ , которая может быть образована механически, или же каким-либо силовым полем. При этом принимая тело с большей массой за опорное и аксиому связи для относительно силы инерции отбрасываемого рабочего тела, можно получить уравнение движения опорного тела в поле отно-

сительной силы инерции  $\vec{R} = \vec{\Phi}_r$  рабочего тела, в виде принципа Д'Аламбера или же в форме второго закона Ньютона для инерциальной системы отсчета. При равной массе тел выбор из них опорного тела равноправен.

Полученные уравнения движения, в отличие от известного уравнения движения центра масс, полученного на основе второго закона Ньютона, дают возможность отдельного анализа движения каждого из взаимодействующих материальных тел и их центра масс в поле относительных сил инерции как в вакууме, так и в диссипативной среде [4, 15–18].

## 4.2. Распределение импульсов

Выделим в лабораторной системе отсчета  $K$  систему из двух не взаимодействующих материальных тел  $m_1$  и  $m_2$ , с массами  $m_1 = m_2$ , показанную на рис. 4.1 [7, 15–18].

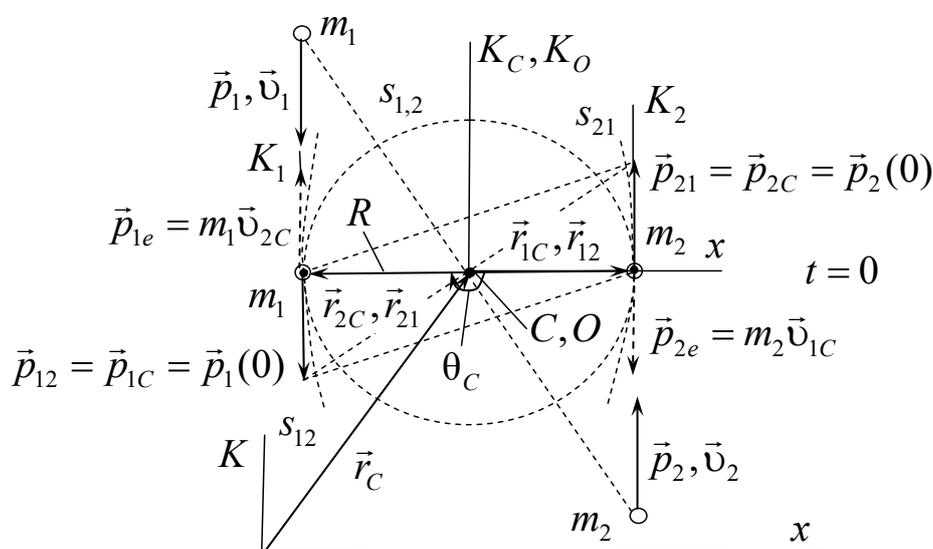


Рис. 4.1. Формирование замкнутой МС2 в системе отсчета  $K$

До вступления во взаимодействие эти тела движутся прямолинейно и равномерно навстречу друг другу в системе отсчета  $K$  со скоростями  $\vec{v}_1$

и  $\vec{v}_2$  с импульсами  $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = -\vec{p}_2$  и  $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$ , для которых, суммарный импульс  $\vec{p}_C = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m \vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$  системы сохраняется

$$d\vec{p}_C / dt = d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / dt = \text{const}, \quad (4.1)$$

где  $\vec{v}_C = d\vec{r}_C / dt = 0$  – скорость ее центра масс ЦМ  $C$  в системе отсчета  $K$  и  $m = m_1 + m_2$  – суммарная масса тел.

Примем для момента времени  $t = 0$  импульсы  $m_1$  и  $m_2$   $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$  за начальные  $\vec{p}_1(0) = \vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2(0) = \vec{p}_2$ , соответствующие началу взаимодействия этих тел через прямолинейный жесткий стержень длиной  $R = \text{const}$ , как показано на рис. 4.1. Концы этого стержня закреплены на телах  $m_1$  и  $m_2$  с помощью идеальных шарниров и вместе образуют замкнутую МС2.

Согласно (4.1) скорость  $\vec{v}_C$  ЦМ  $C$  МС2 для начальных импульсов  $\vec{p}_1(0) = \vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2(0) = \vec{p}_2$  в момент времени  $t = 0$  начала взаимодействия ее тел  $m_1$  и  $m_2$ , а также во время  $t > 0$  их последующего взаимодействия будет равна нулю

$$\vec{v}_C = (\vec{p}_1(0) + \vec{p}_2(0)) / m = 0, \quad (4.2)$$

что характеризует мгновенный переход МС2 (без переходного процесса) в ее стационарное состояние для которого при  $t \geq 0$   $r_{1C} = \text{const}$  и  $r_{2C} = \text{const}$ .

Для кинематического анализа МС2 введем в момент времени  $t = 0$  собственные системы отсчета  $K_1$  и  $K_2$  тел  $m_1$  и  $m_2$ , а также систему отсчета  $K_C$  их ЦМ  $C$  так, что оси координат  $x$  и  $y$  введенных систем отсчета и лабораторной системы отсчета  $K$  при  $t \geq 0$  всегда параллельны. Тогда движение взаимодействующих тел  $m_1$  и  $m_2$  при  $t > 0$  будет совершается в системе отсчета  $K$ , а также неподвижной по ней системе отсчета  $K_C$ , по окружности  $s_{1,2}$  (общей при  $m_1 = m_2$ ) с диаметральной распределением

$$\theta_C = \varphi_{2C} - \varphi_{1C} = -\arccos(p_1(0) / p_2(0)) = -\pi, \quad (4.3)$$

которое определяется начальными импульсами  $\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$  этих тел.

Движение тела  $m_1$  вместе с собственной системой отсчета  $K_2$  диаметрально противоположного тела  $m_2$  и движение тела  $m_2$  вместе с собственной системой отсчета  $K_1$  диаметрально противоположного тела  $m_1$  является общепринятым в механике переносным поступательным движением этих тел в системе отсчета  $K$  с переносными импульсами:

$$\vec{p}_{1e} = m_1 \vec{v}_{1e} = m_1 \vec{v}_{2C} = m_1 \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{2C}, \quad \vec{p}_{2e} = m_2 \vec{v}_{2e} = m_2 \vec{v}_{1C} = m_2 \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{1C}, \quad (4.4)$$

тогда как движение этих тел  $m_1$  и  $m_2$  вместе с их собственными системами отсчета  $K_1$  и  $K_2$  по отношению к этой же системе отсчета  $K$  по аналогии с (2.8) будем рассматривать как их поступательное движение с собственными импульсами:

$$\vec{p}_{1C} = m_1 \vec{v}_{1C} = m_1 \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{1C}, \quad \vec{p}_{2C} = m_2 \vec{v}_{2C} = m_2 \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{2C}, \quad (4.5)$$

которые инвариантны в системе отсчета  $K$  и неподвижной в ней системе отсчета  $K_C$ , где

$$\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_{1C} = \vec{\omega}_{2C} \quad (4.6)$$

– вектор угловой скорости поступательного движения тел  $m_1$ ,  $m_2$  и  $\vec{\omega}_{1C}$ ,  $\vec{\omega}_{2C}$

– вектора угловых скоростей этих тел в системе отсчета  $K_C$ ;

$$\vec{r}_{1C} = m_2 \vec{r}_{12} / m; \quad \vec{r}_{2C} = m_1 \vec{r}_{21} / m; \quad (4.7)$$

– радиус-векторы окружностей  $s_{1,2}$  их поступательного движения в системе отсчета  $K_C$ , которые определены из уравнений  $m_1 \vec{r}_{1C} + m_2 \vec{r}_{2C} = 0$  и  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{2C} - \vec{r}_{1C}$  в работах [1, 2].

Движение тел  $m_1$  и  $m_2$  в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$  по окружностям  $s_{12}$  и  $s_{21}$  (на рис.

4.1 показаны частично) является общепринятым в механике относительным поступательным движением с относительными импульсами

$$\vec{p}_{12} = m_1 \vec{v}_{12} = m_1 \vec{\omega}_{12} \times \vec{r}_{12} \text{ и } \vec{p}_{21} = m_2 \vec{v}_{21} = m_2 \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_{21}, \quad (4.8)$$

где  $\vec{\omega}_{12}$  и  $\vec{\omega}_{21}$  – векторы угловых скоростей тел  $m_1$  и  $m_2$  в системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$ ;  $\vec{r}_{12}$  и  $\vec{r}_{21}$  – радиус-векторы относительного поступательного движения этих тел в этих системах отсчета.

Распределение импульсов  $\vec{p}_{1C}$ ,  $\vec{p}_{2C}$  (4.5) и  $\vec{p}_{12}$ ,  $\vec{p}_{21}$  (4.8) тел  $m_1$  и  $m_2$  во введенных системах отсчета  $K_C$ ,  $K_1$  и  $K_2$  определено их начальными импульсами  $\vec{p}_1(0)$  и  $\vec{p}_2(0)$  в момент времени  $t = 0$ :

$$\vec{p}_{12} = \vec{p}_{1C} = \vec{p}_1(0); \quad \vec{p}_{21} = \vec{p}_{2C} = \vec{p}_2(0), \quad (4.9)$$

Из начальных условий (4.9) при  $\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$  следует, что при  $t > 0$  должны выполняться равенства:

$$\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{2C}; \quad \vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}. \quad (4.10)$$

Первое равенство (4.10) с учетом (4.4) и (4.5) при  $m_1 = m_2$  определяет связь между переносными импульсами:

$$\vec{p}_{1e} = -\vec{p}_{2e}. \quad (4.11)$$

С учетом абсолютных импульсов

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_{1e} + \vec{p}_{12}; \quad \vec{p}_2 = \vec{p}_{2e} + \vec{p}_{21} \quad (4.12)$$

тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K$  и связи их относительных импульсов  $\vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}$  (4.10) скорость ЦМ  $C$  замкнутой МС2 в системе отсчета  $K$  можно выразить в виде:

$$\vec{v}_C = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / m = (\vec{p}_{1e} + \vec{p}_{2e}) / m \quad (4.13)$$

Из этого выражения следует что, как абсолютные  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$  так и переносные  $\vec{p}_{1e}$  и  $\vec{p}_{2e}$  импульсы (4.4) тел  $m_1$  и  $m_2$  при их массах  $m_1 = m_2$  одинаковым образом определяют скорость ЦМ  $C$   $\vec{v}_C$  в системе отсчета  $K$ .

И действительно для начальных импульсов  $\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$  тел  $m_1$  и  $m_2$  при их массах  $m_1 = m_2$ , когда  $\vec{p}_{1e} = -\vec{p}_{2e}$  (4.11) скорость ЦМ  $C$  в этой системе отсчета равна нулю  $\vec{v}_C = d\vec{r}_C / dt = 0$ , что согласуется с определением (4.2). Это вызвано тем, что для диаметрального распределения  $\theta_C = -\pi$  (4.3) положение ЦМ  $C$  при  $t \geq 0$  совпадает с неподвижным мгновенным центром  $O$  начальных импульсов  $\vec{p}_1(0)$  и  $\vec{p}_2(0)$  тел  $m_1$  и  $m_2$ , положение которого можно зафиксировать момент времени  $t = 0$  посредством введения вспомогательной системы отсчета  $K_O$  (см. рис. 4.1). Факт совпадения ЦМ  $C$  с неподвижным центром  $O$  удовлетворяет сохранению импульса  $\vec{p}_C = m\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_{iC} = 0$

$$\vec{v}_C = d\vec{r}_C / dt = \sum_i m_i \vec{v}_{iC} / m = (\vec{p}_1(0) + \vec{p}_2(0)) / m = 0, \quad (4.14)$$

рассматриваемой замкнутой МС2 и согласуется с равенством  $\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{2C}$  (4.10).

Таким образом для начальных импульсов  $\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$  тел  $m_1$  и  $m_2$  при их массах  $m_1 = m_2$  скорость ЦМ  $C$   $\vec{v}_C = 0$  и движение замкнутой МС2 будет состоять из движения ее тел  $m_1$  и  $m_2$  относительно их неподвижного ЦМ  $C$ , который совпадает положением мгновенного центра  $O$  их начальных импульсов  $\vec{p}_1(0)$  и  $\vec{p}_2(0)$  и относительного движения тел этих тел в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$ .

Количество независимых координат рассматриваемой МС2 в плоском движении при  $R = r_{12} = r_{21} = \text{const}$  определяется двумя полярными координатами  $r_{1C}$  и  $\varphi_{1C}$  тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_C$  ЦМ  $C$  и дополнительно одной

полярной координатой  $\varphi_{21}$  тела  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  тела  $m_1$  или же двумя полярными координатами  $r_{2C}$  и  $\varphi_{2C}$  тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  ЦМ  $C$  и дополнительно одной полярной координатой  $\varphi_{12}$  тела  $m_1$  в собственной системе отсчета  $K_2$  тела  $m_2$ . Полярные координаты  $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$  являются зависимыми.

Таким образом, число независимых координат однозначно определяющих плоское движение МС2 в системе отсчета  $K$  составляет  $N = 3$  из общего числа ее степеней свободы  $s = n + m - l = 2 + 2 - 1 = 5$ , где  $n = 3$  и  $m = 3$  – количество степеней свободы тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K$ ;  $l = 1$  – одна связь стержнем  $R$ . При этом общее число степеней свободы  $s = 5$  определяет полную энергию  $E$  МС2, которая содержит как кинетическую энергию  $T$  ее тел  $m_1$  и  $m_2$ , так и потенциальную энергию  $U$  (подлежащую определению) поля их относительных сил инерции в виде ИД, который может оказывать существенное влияние на переносное движение МС2 в системе отсчета  $K$  в поле их ИД.

Группируя равенства импульсов  $\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{2C}$ ;  $\vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}$  (4.10) и  $\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{21}$ ,  $\vec{p}_{2C} = -\vec{p}_{12}$  (см. (2.22) и работы [5–7]) для времени  $t \geq 0$  в виде [15–18] получим *главный вывод раздела по распределению импульсов*:

$$\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{2C}; \vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{21}; \vec{p}_{2C} = -\vec{p}_{12}; \vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}, \quad (4.15)$$

Эти равенства удовлетворяют сохранности импульса

$$\vec{p}_C = \vec{p}_{1C} + \vec{p}_{2C} + \vec{p}_{12} + \vec{p}_{21} = \text{const} = 0. \quad (4.16)$$

рассматриваемой замкнутой МС2 при  $\vec{v}_C = 0$ .

Подтвердим физическую реальность равенств  $\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{21}$  и  $\vec{p}_{2C} = -\vec{p}_{12}$  (4.15) собственных переносных и относительных импульсов применительно к рассматриваемой МС2. Для этого выразим собственные переносные  $\vec{p}_{1C}, \vec{p}_{2C}$  и относительные  $\vec{p}_{12}, \vec{p}_{21}$  импульсы в проекциях на координатную ось  $x$  системы отсчета  $K$ :

$$\begin{aligned} p_{1Cx} &= -m_1\omega_C r_{1C} \cos \varphi_{1C}; p_{2Cx} = -m_2\omega_C r_{2C} \cos \varphi_{2C}; \\ p_{12x} &= m_1\omega_{12} r_{12} \cos \varphi_{12}; p_{21x} = m_2\omega_{21} r_{21} \cos \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

где  $\varphi_{1C} = \omega_{1C} t_C$  и  $\varphi_{2C} = \omega_{2C} t_C$  – фазы поступательного движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$ ;  $\varphi_{12} = \omega_{12} t_2$  и  $\varphi_{21} = \omega_{21} t_1$  при  $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$  – фазы поступательного движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$ ;  $t_1$  и  $t_2$  – собственное время в системах отсчета  $K_1$  и  $K_2$ , связь которых с абсолютным временем  $t_C = t$  в систем отсчета  $K_C$  и  $K$  будет установлена в следующем разделе.

В проекциях (4.17) учтено, что фазы  $\varphi_{1C}$  и  $\varphi_{2C}$  запаздывают относительно фаз  $\varphi_{21}$  и  $\varphi_{12}$  на величину  $\theta_C = \mp\pi$  (см. рис. 4.1).

Для диаметрального распределения  $\theta_C = -\pi$  (4.3) фаза  $\varphi_{1C}$  поступательного движения тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_C$  связана с фазой  $\varphi_{21}$  поступательного движения тела  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  тела  $m_1$  (и по аналогии фаза  $\varphi_{2C}$  поступательного движения тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  – с фазой  $\varphi_{12}$  поступательного движения тела  $m_1$  в собственной системе отсчета  $K_2$  тела  $m_2$ ) преобразованиями [5–7]:

$$\varphi_{1C} = \varphi_{21} - \pi; \varphi_{2C} = \varphi_{12} - \pi, \quad (4.18)$$

что иллюстрируется рис. 4.1.

Используя равенство импульсов  $\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{21}$  и  $\vec{p}_{2C} = -\vec{p}_{12}$  (4.15) для их проекций (4.17) при одновременном учете преобразований (4.7) и (4.18) определяет угловые скорости:

$$\omega_{12} = m_2\omega_C / m; \omega_{21} = m_1\omega_C / m, \quad (4.19)$$

для которых равенства проекций удовлетворены.

Относительные угловые скорости  $\omega_{12}$  и  $\omega_{21}$  (4.19) поступательного движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системах отсчета  $K_1$  и  $K_2$  можно выразить через их

начальные скорости  $\dot{y}_1(0) = p_1(0) / m_1$  и  $\dot{y}_2(0) = p_2(0) / m_2$  в момент времени  $t = 0$ :

$$\omega_{12} = \dot{y}_1(0) / R; \omega_{21} = \dot{y}_2(0) / R. \quad (4.20)$$

Угловая скорость  $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$  (4.6) поступательного движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  определяется суммой относительных угловых скоростей  $\omega_{12}$  и  $\omega_{21}$  (4.20)

$$\omega_C = \omega_{12} + \omega_{21} = (\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0)) / R \quad (4.21)$$

### 4.3. Инвариантность угловых перемещений

Как известно из [1] угол поворота  $\Delta\varphi$  точек твердого тела во времени  $t$ , лежащих на одной радиальной прямой, является инвариантом для всех этих точек

$$\Delta\varphi = \omega_1 t = \omega_2 t = \dots = \omega_n t, \quad (4.22)$$

где за начало отсчета времени принято время  $t_0 = 0$ ;

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n \quad (4.23)$$

– угловые скорости точек относительно полюса вращения  $O$ .

У рассматриваемой МС2 (см. рис. 4.1) тела  $m_1$  и  $m_2$  закреплены на концах стержня  $R$  с помощью идеальных шарниров. В результате чего эти тела вместе с системами отсчета  $K_2$  и  $K_1$  совершают в системе отсчета  $K$  сложное движение: переносное поступательное движение с собственными переносными импульсами  $\vec{p}_{1C}$ ,  $\vec{p}_{2C}$  (4.5) и относительное поступательное движение в этих системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  с относительными импульсами  $\vec{p}_{12}$ ,  $\vec{p}_{21}$  (4.8), как показано на рис. 4.2, а.

Установим связь угловой скорости  $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$  (4.6) переносного поступательного движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  с угловыми скоростями  $\omega_{12}$  и  $\omega_{21}$  их относительного поступательного движения в системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$ .

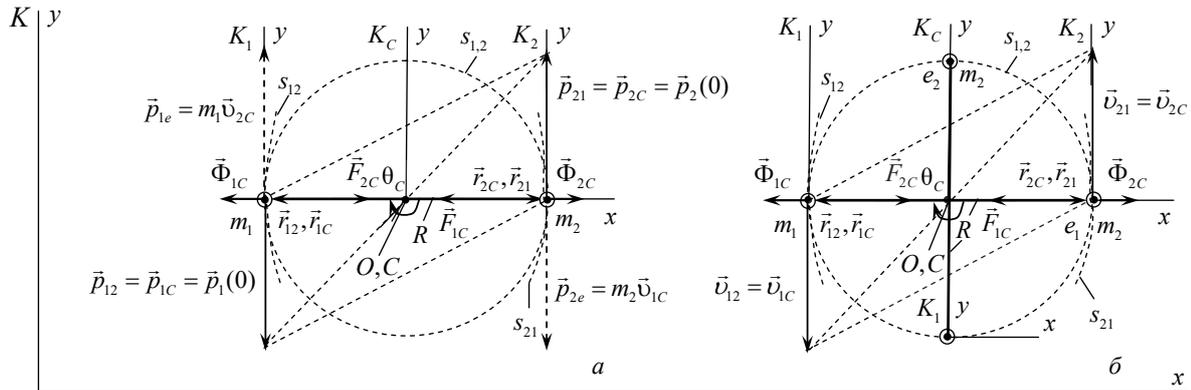


Рис. 4.2. Двухмассовая механическая система с диаметральной распределением тел  $m_1$  и  $m_2$  – *a* и карта событий  $e_1$  и  $e_2$  ее тела  $m_2$  – *б*

Запишем связь между относительными импульсами  $\vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}$  (4.15) в криволинейных координатах

$$m_1 \omega_{12} R = m_2 \omega_{21} R. \quad (4.24)$$

Из (4.24) с учетом преобразований (4.7) при  $r_{12} = r_{21} = R$  следует

$$r_{1C} / r_{2C} = m_2 / m_1 = \omega_{12} / \omega_{21}. \quad (4.25)$$

Также в криволинейных координатах запишем связь собственных и относительных импульсов  $\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{21}$ ;  $\vec{p}_{2C} = -\vec{p}_{12}$  (4.15):

$$m_1 \omega_{1C} r_{1C} = m_2 \omega_{21} R; \quad m_2 \omega_{2C} r_{2C} = m_1 \omega_{12} R, \quad (4.26)$$

из которой следует равенство скоростей:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_{1C} \text{ и } \vec{v}_{21} = \vec{v}_{2C}, \quad (4.27)$$

при  $m_1 = m_2$ , как показано на рис. 4.2, б.

Из (4.26) с учетом (4.7) при  $r_{12} = r_{21} = R$  следуют преобразования

$$\omega_{12} = m_2 \omega_C / m; \quad \omega_{21} = m_1 \omega_C / m, \quad (4.28)$$

аналогичные полученным ранее (4.19).

Суммирование правых и левых частей преобразований (4.28) дает выражение, входящее в (4.21)

$$\omega_C = \omega_{12} + \omega_{21}. \quad (4.29)$$

Преобразования (4.25), (4.28) и выражение для абсолютной угловой скорости  $\omega_C$  (4.29) известны из работы [1], где они записаны для сложного вращения твердого тела вокруг параллельных осей (осей координат  $y$  систем отсчета  $K_C$ ,  $K_1$  и  $K_2$ ) в одинаковых направлениях (см. рис. 4.2, а, где оси координат  $y$  перпендикулярны плоскости чертежа). Эти преобразования определяют распределение кинетической  $T$  и потенциальной  $U$  энергий МС2 в ее полной энергии  $E$ .

Так как согласно (4.28)  $\omega_C \neq \omega_{12}$  и  $\omega_C \neq \omega_{21}$ , то для сохранения инвариантности угловых перемещений  $\Delta\varphi$  (4.22) необходимо, чтобы собственное время  $t_1$  и  $t_2$  в системах отсчета  $K_1$  и  $K_2$  по отношению к времени  $t_C$  в системе отсчета  $K_C$  протекало по-разному и удовлетворяло инварианту вида

$$\Delta\varphi = \omega_C \Delta t_C = \omega_{12} \Delta t_2 = \omega_{21} \Delta t_1, \quad (4.30)$$

где  $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ ,  $\Delta t_2 = t_2 - t_0$  и  $\Delta t_C = t_C - t_0$  — приращение времени;  $t_0$  — единое начальное время во всех системах отсчета.

Инвариант (4.30) определяет то, что при любом угловом перемещении тела  $m_1$  в системах отсчета  $K_C$  и  $K_2$ , а также тела  $m_2$  в системах отсчета  $K_C$

и  $K_1$  эти тела будут находиться в одной точке траектории  $s_{1,2}$  системы отсчета  $K$  как, например, для тела  $m_2$  при  $\Delta\varphi = \{0; \pi/2\}$  показано на рис. 4.2, б событиями  $e_1$  и  $e_2$  при  $\vec{v}_{12} = \vec{v}_{1C}; \vec{v}_{21} = \vec{v}_{2C}$  (4.27). Одновременность событий  $e_1$  и  $e_2$  удовлетворяет физической реализуемости МС2, так как исключает возможность разрушения стержня  $R$ .

Преобразования (4.28) совместно с инвариантом  $\Delta\varphi$  (4.30) требуют введения относительного времени в системах отсчета  $K_1$  и  $K_2$

$$t_1 = \frac{m}{m_1} t_C; t_2 = \frac{m}{m_2} t_C; \quad (4.31)$$

Время в системах отсчета  $K$  и  $K_C$  абсолютно  $t_C = t$ , так как система отсчета  $K_C$  в системе отсчета  $K$  при  $\vec{p}_1(0) + \vec{p}_2(0) = 0$  неподвижна  $\vec{v}_C = 0$  (4.14).

Таким образом, для обеспечения инвариантности угловых перемещений  $\Delta\varphi$  (4.30) необходимо, чтобы время  $t_1$  и  $t_2$  (4.31) в собственных системах отсчета  $K_1$  и  $K_2$  взаимодействующих тел  $m_1$  и  $m_2$  по отношению ко времени  $t_C$  в системе отсчета  $K_C$  их ЦМ  $S$  протекало по разному, что вызвано одновременным участием каждого из взаимодействующих тел при числе степеней свободы  $s = 5$  в переносном  $m_1 \vec{\omega}_C \cdot \vec{r}_{1C}$ ,  $m_2 \vec{\omega}_C \cdot \vec{r}_{2C}$  и относительном  $m_1 \vec{\omega}_{12} \cdot \vec{r}_{12}$ ,  $m_2 \vec{\omega}_{21} \cdot \vec{r}_{21}$  поступательных движениях по замкнутым траекториям в виде окружностей. Время в системе отсчета  $K_C$  и в какой-либо другой инерциальной системе отсчета  $K$  абсолютно  $t_C = t$ .

Важным значением преобразований (4.18), (4.28) и инварианта  $\Delta\varphi$  (4.30) является то, что они обеспечивают возможность динамического анализа многомассовых механических систем с числом степеней свободы  $s = 5$  в поле относительных сил инерции в инерциальной системе отсчета  $K$  в абсолютном времени  $t$  посредством снижения числа независимых обобщенных координат для динамического анализа МС2 до  $N \leq 3$ . При этом для анализа плоского движения МС2 достаточно выписать уравнения движения одного из ее тел

используя выбранные независимые обобщенные координаты, характеризующие его состояние, а анализ движения других ее тел и ЦМ  $C$  осуществить по известным в механике преобразованиям координат и скоростей (2.35). В случае когда  $m_1 \neq m_2$  возможен переход от двух тел МС2 к одному ее телу с массой  $m = m_1 + m_2$  (2.13), что будет дополнительно рассмотрено в разделе 4.6.

#### 4.4. Энергетический анализ и принцип Д'Аламбера

С учетом абсолютных скоростей (1.17):

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1e} + \vec{v}_{12}; \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_{2e} + \vec{v}_{21} \quad (4.32)$$

тел  $m_1$  и  $m_2$  кинетическую энергию их сложного переносно-относительного поступательного движения в системе отсчета  $K$  выразим в виде

$$T_{er} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{21}^2 + U, \quad (4.33)$$

где  $U$  – обобщенный кинетический потенциал:

$$\begin{aligned} U = m_1v_{1e}v_{12} \cos\theta_C + m_2v_{2e}v_{21} \cos\theta_C = \\ - (m_1v_{2C}v_{12} + m_2v_{1C}v_{21}) = \\ - (m_1\omega_{2C}r_{2C}\omega_{12}r_{12} + m_2\omega_{1C}r_{1C}\omega_{21}r_{21}), \end{aligned} \quad (4.34)$$

характеризующий влияние относительного  $\vec{v}_{12r}, \vec{v}_{21r}$  движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в их переносное движение  $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C}, \vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C}$ ; где  $\theta_C = \widehat{\vec{v}_{2e}\vec{v}_{21}} = -\pi$  или  $\theta_C = \widehat{\vec{v}_{1e}\vec{v}_{12}} = \pi$  – угол между векторами переносных  $\vec{v}_{1e}, \vec{v}_{2e}$  и относительных  $\vec{v}_{12}, \vec{v}_{21}$  скоростей (см. рис. 4.2, а).

Угол  $\theta_C = -\pi$  является углом запаздывания (4.3), характеризующим запаздывание фазы  $\varphi_{1C}$  поступательного движения тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_C$  относительно фазы  $\varphi_{21}$  поступательного движения тела  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  тела  $m_1$  (4.18).

Сумма первого и второго слагаемых, входящих в  $T_{er}$  (4.33) является кинетической энергией

$$T_{Ce} = \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{2e}^2 = \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{1C}^2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_{Ce}^2, \quad (4.35)$$

переносного движения тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2, которое характеризуется их переносными импульсами  $\bar{p}_{1e} = m_1\bar{v}_{2C}$  и  $\bar{p}_{2e} = m_2\bar{v}_{1C}$  (4.4) вместе с собственными системами отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$ . Эти импульсы определяют переносную скорость  $\bar{v}_{Ce}$  ЦМ  $C$  МС2 в системе отсчета  $K$  и, следовательно, физический смысл рассматриваемой суммы слагаемых  $T_{Ce}$ .

Сумма третьего и четвертого слагаемых, входящих в  $T_{er}$  (4.33), является кинетической энергией  $T_r = \frac{1}{2}m_1v_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{21}^2$  относительного движения тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_2$  и тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$ .

В зависимости от начальных импульсов  $\bar{p}_1(0)$  и  $\bar{p}_2(0)$  можно выделить три наиболее характерных случая, которые показаны на рис. 4.3.

Первый случай показан на рис. 4.3, *a*. Здесь начальные импульсы  $\bar{p}_1(0)$  и  $\bar{p}_2(0)$  тел  $m_1$  и  $m_2$  при их массах  $m_1 = m_2$  составляют  $\bar{p}_1(0) = -\bar{p}_2(0)$ . Для таких начальных условий ЦМ  $C$  совпадает с неподвижным мгновенным центром  $O$  начальных импульсов  $\bar{p}_1(0)$  и  $\bar{p}_2(0)$  тел  $m_1$  и  $m_2$ , положение которого в системе отсчета  $K$  можно зафиксировать в момент времени  $t = 0$ . Этот мгновенный центр  $O$  для любых  $t > 0$  при диаметрально распределении  $\theta_C = -\pi$  (4.3) является силовым центром ИД (см. рис. 4.3, *b*), в котором действует поле относительных сил инерции  $\vec{F}_{1C}$  и  $\vec{F}_{2C}$  взаимодействующих тел, подлежащее дальнейшему определению.

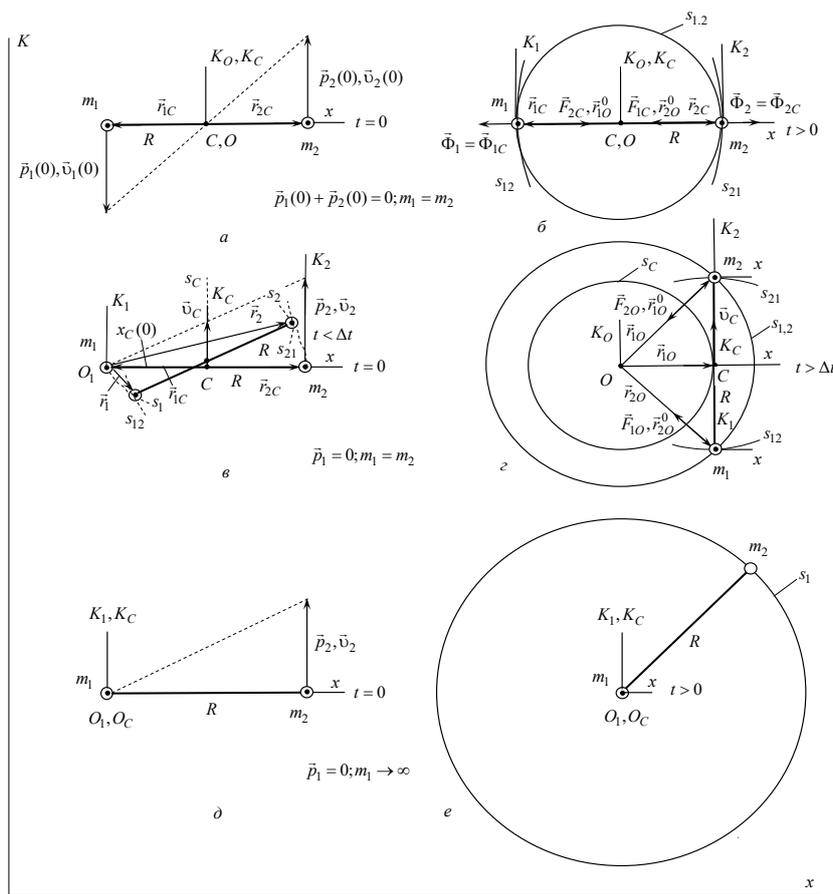


Рис. 4.3. Начальные импульсы  $\vec{p}_1(0)$  и  $\vec{p}_2(0)$  тел  $m_1$  и  $m_2$  в момент времени  $t = 0$  – *a*, *в*, *д* и их траектории движения  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_{12}$  и  $s_{21}$  для времени  $t > 0$  – *б*, *г*, *е*

Совпадение ЦМ  $C$  и мгновенного центра  $O$  для начальных импульсов  $\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$  при  $m_1 = m_2$  является следствием того, что скорость  $\vec{v}_C$  (4.13) ЦМ  $C$  (см. 4.3, *a* и *б*) для времени  $t \geq 0$  равна нулю

$$\vec{v}_C = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m} = \frac{m_1 \vec{v}_{1e} + m_2 \vec{v}_{2e} + m_1 \vec{v}_{12} + m_2 \vec{v}_{21}}{m} = \frac{m_1 \vec{v}_{1e} + m_2 \vec{v}_{2e}}{m} = \frac{m_1 \vec{v}_{2C} + m_2 \vec{v}_{1C}}{m} = 0, \quad (4.36)$$

что удовлетворяет (4.14).

В результате чего для любых  $t > 0$  тела  $m_1$  и  $m_2$  будут совершать в системе отсчета  $K_O$  (связанной с неподвижным силовым центром  $O$  ИД) и в совпадающей с ней системе отсчета  $K_C$  движение по окружности  $s_{1,2}$  (см. рис 3.3, б) с радиусами  $\vec{r}_{1C} = -\vec{r}_{2C}$ , а также их относительное движение по окружностям  $s_{12}$  и  $s_{21}$  с радиусом  $R = r_{12} = r_{21}$  в системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$ , где с целью уменьшения насыщенности изображений мгновенный центр  $O$  начальных импульсов  $\vec{p}_1(0)$  и  $\vec{p}_2(0)$  тел  $m_1$  и  $m_2$  и траектории  $s_{1,2}, s_{12}$  и  $s_{21}$  их движения для начального времени  $t = 0$  и текущего времени  $t > 0$  разнесены отдельно на два рисунка рис. 4.3, а и б, где на рис. 4.3, б центр  $O$ , является силовым центром ИД.

Второй случай отличается от первого тем, что при равных массах  $m_1 = m_2$  начальный импульс тела  $m_1$  в момент времени  $t = 0$  составляет  $\vec{p}_1(0) = 0$ , а импульс тела  $m_2 - \vec{p}_2(0) > 0$  (см. рис. 3.3, в). В результате чего ЦМ  $C$  не будет совпадать с мгновенным центром  $O_1$  импульсов  $\vec{p}_1(0)$  и  $\vec{p}_2(0)$  и получит в системе отсчета  $K$  начальную скорость

$$\vec{v}_C = \vec{p}_2(0) / m, \quad (4.37)$$

где как и ранее  $m = m_1 + m_2$ .

Далее в МС2 будет происходить переходной процесс с длительностью  $\Delta t$  (см. рис. 4.3, в), который в системе отсчета  $K$  будет характеризоваться движением ЦМ  $C$  по траектории  $s_C$  (показана частично), удаленной от оси

$y$  системы отсчета  $K_1$  на  $x_C = \frac{m_2 R}{m} = \text{const}$ , и одновременным переменным по

тангенциальным ускорением  $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21}$  относительным движением тел  $m_1$  и  $m_2$  по окружностям  $s_{12}$  и  $s_{21}$  (показаны частично) в системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$ . Такое сложное движение будет наблюдаться в системе отсчета  $K$  как движение по траекториям  $s_1$  и  $s_2$  с радиус-векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , которые имеют переменные модули и фазы. Переходной процесс завершится при установлении равенства между модулями  $p_{1O} = p_{2O}$  импульсов  $\vec{p}_{1O} = m_1 \vec{\omega}_{CO} \times \vec{r}_{1O}$

и  $\vec{p}_{2O} = m_2 \vec{\omega}_{CO} \times \vec{r}_{2O}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$  (см. рис. 4.3, з), где  $r_{CO} = x_C = \text{const}$  – радиус движения ЦМ  $C$  МС2 в этой системе отсчета.

Подробный математический анализ переходного процесса будет дан в пятой главе.

По завершению переходного процесса МС2 перейдет в стационарное состояние, когда ее тела  $m_1$  и  $m_2$  и их ЦМ  $C$  для любых  $t > \Delta t$  будут совершать в системе отсчета  $K_O$ , которая связана с неподвижным (в системе отсчета  $K$ ) силовым центром  $O$  ИД, движение по окружностям  $s_{1,2}$  и  $s_C$  (см. рис 4.3, б) с радиусами  $\vec{r}_{1O}, \vec{r}_{2O}$  и  $\vec{r}_{CO}$ , а также их относительное движение по окружностям  $s_{12}$  и  $s_{21}$  с радиусом  $R$  в поле ИД, образованного относительными силами инерции  $\vec{F}_{1O}$  и  $\vec{F}_{2O}$ , подлежащими дальнейшему определению.

В третьем случае  $\vec{p}_1(0) = 0; m_1 \rightarrow \infty$ . Здесь положение неподвижного мгновенного центра  $O_1$  начальных импульсов  $\vec{p}_1(0)$  и  $\vec{p}_2(0)$  совпадает с положением тела  $m_1$ , в котором также находится и ЦМ  $C$  (см. рис. 4.3, д). Этот случай эквивалентен движению тела  $m_2$  относительно неподвижной оси (см. рис. 4.3, е), которое подробно рассмотрено в работе [1].

Продолжим рассмотрение первого случая показанного на рис. 4.3, а. Здесь начальные импульсы  $\vec{p}_1(0)$  и  $\vec{p}_2(0)$  тел  $m_1$  и  $m_2$  при их массах  $m_1 = m_2$  составляют  $\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$ . Для таких начальных условий ЦМ  $C$  совпадает с неподвижным мгновенным центром  $O$  начальных импульсов  $\vec{p}_1(0)$  и  $\vec{p}_2(0)$  тел  $m_1$  и  $m_2$ , положение которого в системе отсчета  $K$  можно зафиксировать в момент времени  $t = 0$  (см. рис. 4.3, а). Этот мгновенный центр  $O$  при диаметральной распределении  $\theta_C = -\pi$  (4.3) для любых  $t > 0$  является неподвижным силовым центром  $O$  ИД, с которым совпадает ЦМ  $C$  МС2 (см. рис. 4.3, б). В ИД действует поле относительных сил инерции  $\vec{F}_{1C}$  и  $\vec{F}_{2C}$ , которые можно выразить через потенциал  $U$  (4.34):

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1C} &= -\frac{\partial U}{\partial r_{2C}} \cdot \vec{r}_{2C}^0 = m_1 \omega_{2C} \omega_{12} r_{12} \cdot \vec{r}_{2C}^0; \\ \vec{F}_{2C} &= -\frac{\partial U}{\partial r_{1C}} \cdot \vec{r}_{1C}^0 = m_2 \omega_{1C} \omega_{21} r_{21} \cdot \vec{r}_{1C}^0,\end{aligned}\tag{4.38}$$

где  $\vec{r}_{1C}^0 = -\vec{r}_{1C} / r_{1C}$  и  $\vec{r}_{2C}^0 = -\vec{r}_{2C} / r_{2C}$  – единичные векторы противоположно направленные радиус-векторам  $\vec{r}_{1C}$  и  $\vec{r}_{2C}$  и определяющие направление относительных сил инерции  $\vec{F}_{2C}$  и  $\vec{F}_{1C}$  к ЦМ  $C$  (см. рис. 4.3, б), где выбор направлений  $\vec{r}_{1C}^0$  и  $\vec{r}_{2C}^0$  подлежит дальнейшему обоснованию);  $\omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_C$  и  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{21}$  – угловые скорости тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  и их угловые скорости в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$  (4.28) и (4.29).

С учетом аксиомы связей применительно к относительным силам инерции  $\vec{F}_{1C}$  и  $\vec{F}_{2C}$  (4.38) уравнения динамики рассматриваемой замкнутой МС2 в виде принципа Д’Аламбера (1.16) или второго закона (1.1) в системе отсчета  $K$  примут вид:

$$\vec{\Phi}_i + \vec{F}_{jC} = 0; m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{jC}; i, j = 1, 2; i \neq j.\tag{4.39}$$

где  $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i = -m_i \vec{a}_{iC} = m_i \omega_{iC}^2 \vec{r}_{iC}$  – собственная сила инерции поступательного движения тела  $m_i$  вместе с собственной системой отсчета  $K_i$  в системе отсчета  $K$  (см. рис. 4.2, а и б); индекс  $C$  соответствует диаметральному распределению  $\theta_C = -\pi$  (4.3) тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$ .

Применение аксиомы связей к относительным силам инерции  $\vec{F}_{1C}$  и  $\vec{F}_{2C}$  (4.38) сделано исходя из того, что они являются компонентами сил инерции  $\vec{\Phi}_{12}$  и  $\vec{\Phi}_{21}$  на направления  $\vec{r}_{2C}^0$  и  $\vec{r}_{1C}^0$  (4.38), что согласуется с рис. 4.3, б).

Для равных масс  $m_1 = m_2$  тел МС2 переносную кинетическую энергию  $T_{Ce}$  (4.35) посредством перестановки  $m_1 \Leftrightarrow m_2$  можно свести к собственной

кинетической энергии  $T_C$  ее тел в системе отсчета  $K$  и неподвижной в ней системе отсчета  $K_C$

$$T_{Ce} = T_C = \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{2C}^2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_C^2. \quad (4.40)$$

Замена в (4.33)  $T_{Ce} = \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{2e}^2$  на  $T_C$  в соответствии с равенством (4.40) дает лагранжиан  $L$  рассматриваемой МС2

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2}m_1\bar{v}_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{v}_{21}^2 + U = \\ &= \frac{1}{2}m_1\omega_{1C}^2r_{1C}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{2C}^2r_{2C}^2 + \frac{1}{2}m_1\omega_{12}^2r_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{21}^2r_{21}^2 - \\ &\quad - (m_1\omega_{2C}r_{2C}\omega_{12}r_{12} + m_2\omega_{1C}r_{1C}\omega_{21}r_{21}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

ее абсолютного движения в системе отсчета  $K$  при  $m_1 = m_2$ .

Частные дифференциалы от функции лагранжа  $L$  (4.41) вида  $-\frac{\partial L}{\partial r_{1C}} = 0$

и  $-\frac{\partial L}{\partial r_{2C}} = 0$  дают обобщенные силы

$$\begin{aligned} -m_1\omega_{1C}^2r_{1C} + m_2\omega_{1C}\omega_{21}r_{21} &= 0; \\ -m_2\omega_{2C}^2r_{2C} + m_1\omega_{2C}\omega_{12}r_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

которые определяют уравнения (4.39).

И действительно первые слагаемые (4.42) определяют собственные силы инерции  $\vec{\Phi}_1 = \vec{\Phi}_{1C} = -m_1\omega_{1C}^2\vec{r}_{1C}$  и  $\vec{\Phi}_2 = \vec{\Phi}_{2C} = -m_2\omega_{1C}^2\vec{r}_{2C}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (см. рис.4.3, б), которые направлены от силового центра  $O$  с которым совпадает ЦМ  $C$ .

Вторые слагаемые определяют относительные силы инерции  $\vec{F}_{1C} = m_1\omega_{2C}\omega_{12}r_{12} \cdot \vec{r}_{2C}^0$  и  $\vec{F}_{2C} = m_2\omega_{1C}\omega_{21}r_{21} \cdot \vec{r}_{1C}^0$  (4.38), где выбор направления единичных векторов  $\vec{r}_{1C}^0 = -\vec{r}_{1C} / r_{1C}$  и  $\vec{r}_{2C}^0 = -\vec{r}_{2C} / r_{2C}$  к силовому центру  $O$

(см. рис. 4.3, б) определен тем, что знаки слагаемых каждой из обобщенных сил (4.42) противоположны.

Таким образом, для МС2 с числом степеней свободы  $s = 5$  поле относительных сил инерции  $\vec{F}_{1C}$  и  $\vec{F}_{2C}$  (4.38) образует ИД, который является результатом одновременного участия тел  $m_1$  и  $m_2$  в переносно-относительном поступательном движениях  $m_1 \vec{v}_{2C} \cdot \vec{v}_{12}$  и  $m_2 \vec{v}_{1C} \cdot \vec{v}_{21}$ . В работах [15, 20, 24] поле такого ИД рассматривается как динамическое гравитационное поле. Физически оно является разновидностью поля Кориолиса [1, 2].

Так как для диаметрального распределения  $\theta_C = -\pi$  (4.3) обобщенные силы (4.42) равны нулю, то относительные силы инерции  $\vec{F}_{1C}$  и  $\vec{F}_{2C}$  (4.38) образуют уравновешенную систему сил  $\vec{F}_{1C} + \vec{F}_{2C} = 0$  для которой импульс и кинетический момент замкнутой МС2 сохраняется:

$$d\vec{p}_C / dt = \vec{F}_{1C} + \vec{F}_{2C} = 0; d\vec{K}_C / dt = 0. \quad (4.43)$$

Уравновешенность компонент  $\vec{F}_{1C} + \vec{F}_{2C} = 0$  можно показать с помощью преобразований (4.28) и (4.7), которые сводят эти компоненты к силам инерции  $\vec{\Phi}_{1C}$  и  $\vec{\Phi}_{2C}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$ :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1C} &= -m_1 \omega_C \omega_{12} \vec{r}_{12} = -m_1 \omega_C^2 \frac{m_2}{m} \vec{r}_{12} = -m_1 \omega_C^2 \vec{r}_{1C}; \\ \vec{F}_{2C} &= -m_2 \omega_C \omega_{21} \vec{r}_{21} = -m_2 \omega_C^2 \frac{m_1}{m} \vec{r}_{21} = -m_2 \omega_C^2 \vec{r}_{2C}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

где  $\vec{\Phi}_{1C} + \vec{\Phi}_{2C} = 0$ .

Значение лагранжиана  $L$  (4.41) для тестовых параметров МС2:  $m_1 = m_2 = 1$  кг;  $R = 1$  м;  $r_{1C} = r_{2C} = 0,5$  м;  $\omega_C = 2$  с<sup>-1</sup>;  $\omega_{12} = \omega_{21} = 1$  с<sup>-1</sup> находится в минимуме  $L = T_C + T_r - U = 0 \Rightarrow \min$ . Это характеризует то, что движение МС2 удовлетворяет принципу наименьшего действия [1, 2], а ее тела  $m_1$  и  $m_2$  во всех системах отсчета  $K$ ,  $K_C$ ,  $K_1$  и  $K_2$  совершают движение по геодезическим траекториям  $s_{1,2}$ ,  $s_{12}$  и  $s_{21}$ .

Проверим удовлетворение принципа Д' Аламбера (4.39) преобразованиям (4.28). Для этого запишем его в криволинейных координатах:

$$m_1 \omega_C^2 r_{1C} = m_2 \omega_C \omega_{21} R; m_2 \omega_C^2 r_{2C} = m_1 \omega_C \omega_{12} R \quad (4.45)$$

Далее применяя к нему преобразования (4.28), получим известные радиусы (4.7)

$$r_{1C} = m_2 R / m; r_{2C} = m_1 R / m, \quad (4.46)$$

для которых, совместно с преобразованиями (4.28), принцип Д' Аламбера (4.39) в виде (4.45) удовлетворен и которые при рассмотрении движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  как гармонического колебания относительно их ЦМ  $C$  являются амплитудами  $A_1 = r_{1C}$  и  $A_2 = r_{2C}$  их движения.

Таким образом, преобразования (4.28) удовлетворяют принципу Д' Аламбера (4.39) и, следовательно, связи между собственными переносными  $\vec{p}_{1C}$ ,  $\vec{p}_{2C}$  и относительными  $\vec{p}_{12}$ ,  $\vec{p}_{21}$  импульсами (4.15), для которой импульс  $\vec{p}_C$  замкнутой МС2 с пятью  $s = 5$  степенями свободы сохраняется  $\vec{p}_C = \overrightarrow{\text{const}}$  (4.16).

Взаимодействие тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2 посредством стержня  $R$  (что также справедливо для их взаимодействия по закону Ньютона или Кулона) приводит к искривлению траекторий движения  $s_{1,2}$ ,  $s_{12}$  и  $s_{21}$  этих тел (см. рис. 4.2, а). При этом каждое из тел оказывается вовлеченным в сложное переносно-относительное поступательное движение  $m_1 \vec{v}_{2C} \cdot \vec{v}_{12}$  и  $m_2 \vec{v}_{1C} \cdot \vec{v}_{21}$  которое формирует поле относительных сил инерции  $\vec{F}_{1C}$  и  $\vec{F}_{2C}$ , формирующих ИД. Для диаметрального распределения  $\theta_C = -\pi$  (4.3) поле относительных сил инерции уравновешенно  $\vec{F}_{1C} + \vec{F}_{2C} = 0$  (4.43), так что импульс замкнутой МС2  $\vec{p}_C$  сохраняется  $d\vec{p}_C / dt = \text{const}$ .

## 4.5. Уравнения движения и их частное и общее решения

Выпишем принцип Д' Аламбера, представленный в виде второго закона Ньютона (4.39) в дифференциальной форме:

$$d\vec{p}_{1C} / dt = \vec{F}_{2C}; \quad d\vec{p}_{2C} / dt = \vec{F}_{1C}, \quad (4.47)$$

где  $d\vec{p}_{1C} / dt = m_1\vec{a}_1 = -m_1\omega_C^2\vec{r}_{1C} = -\vec{\Phi}_{1C}$  и  $d\vec{p}_{2C} / dt = m_2\vec{a}_2 = -m_2\omega_C^2\vec{r}_{2C} = -\vec{\Phi}_2$  – собственные силы инерции поступательного движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K$ .

Для отыскания решений уравнений (4.47) в системе отчета  $K$  представим их в виде исходного принципа Д' Аламбера (4.39) в проекциях на ось  $x$  этой системы отсчета

$$\begin{aligned} m_1\omega_C^2 r_{1C} \cos \varphi_{1C} + m_2\omega_C\omega_{21}r_{21} \cos \varphi_{21} &= 0; \\ m_2\omega_C^2 r_{2C} \cos \varphi_{2C} + m_1\omega_C\omega_{12}r_{12} \cos \varphi_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

где  $\varphi_{1C} = \omega_C t_C - \pi$ ,  $\varphi_{2C} = \omega_C t_C$ ,  $\varphi_{12} = \omega_{12} t_2 + \pi$  и  $\varphi_{21} = \omega_{21} t_1$  – угловые координаты, последовательное приращение которых удовлетворяет инварианту  $\Delta\varphi = \omega_C dt_C = \omega_{12} dt_2 = \omega_{21} dt_1$  при едином начальном времени  $t_0 = 0$  (4.30).

С помощью преобразований  $\varphi_{1C} = \varphi_{21} - \pi$ ,  $\varphi_{2C} = \varphi_{12} - \pi$  (4.18) сведем полярные координаты уравнений (4.48) к координатам  $\varphi_{1C} = \omega_C t - \pi$  и  $\varphi_{2C} = \omega_C t$  в едином абсолютном времени  $t$ :

$$\begin{aligned} m_1\omega_C^2 r_{1C} \cos \varphi_{1C} - m_2\omega_C\omega_{21}r_{21} \cos \varphi_{1C} &= 0 \\ m_2\omega_C^2 r_{2C} \cos \varphi_{2C} - m_1\omega_C\omega_{12}r_{12} \cos \varphi_{2C} &= 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Интегрирование уравнений (4.49) по времени  $t$  дает проекции  $p_{1Cx}$  и  $p_{2Cx}$ , переносных импульсов  $\vec{p}_{1C}$  и  $\vec{p}_{2C}$  тел  $m_1$  и  $m_2$ , а также проекции  $p_{12x}$  и  $p_{21x}$  импульсов  $\vec{p}_{12}$  и  $\vec{p}_{21}$  сложного переносно-относительного

поступательного движения этих тел на оси координат  $x$  и  $y$  системы отсчета  $K$ :

$$\begin{aligned}
 p_{1Cx} &= m_1 \omega_C^2 r_{1C} \int \cos \varphi_{1C} dt = m_1 \omega_C r_{1C} \sin \varphi_{1C} + c; \\
 p_{2Cx} &= m_2 \omega_C^2 r_{2C} \int \cos \varphi_{2C} dt = m_2 \omega_C r_{2C} \sin \varphi_{2C} + c; \\
 p_{12x} &= -m_1 \omega_C \omega_{12} r_{12} \int \cos \varphi_{2C} dt = -m_1 \omega_{12} r_{12} \sin \varphi_{2C} + c; \\
 p_{21x} &= -m_2 \omega_C \omega_{21} r_{21} \int \cos \varphi_{1C} dt = -m_2 \omega_{21} r_{21} \sin \varphi_{1C} + c.
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Значение постоянной интегрирования  $c$  в (4.50) определим исходя из того, что в соответствии с рис. 4.2,  $a$  при  $t = 0$ , когда  $\varphi_{1C} = \omega_C t - \pi = -\pi$  и  $\varphi_{2C} = \omega_C t = 0$  выполняется  $p_{1Cx} = p_{2Cx} = p_{12x} = p_{21x} = 0$ , что определяет эту постоянную как  $c = 0$ . Тогда из (4.50) определим проекции:

$$\begin{aligned}
 p_{1Cx} &= m_1 \omega_C r_{1C} \sin \varphi_{1C}; p_{2Cx} = m_2 \omega_C r_{2C} \sin \varphi_{2C}; \\
 p_{12x} &= -m_1 \omega_{12} r_{12} \sin \varphi_{2C}; p_{21x} = -m_2 \omega_{21} r_{21} \sin \varphi_{1C},
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

которые удовлетворяют сохранности импульса замкнутой МС2 в виде:

$$p_{1Cx} + p_{21x} = \text{const} = 0; p_{2Cx} + p_{12x} = \text{const} = 0, \tag{4.52}$$

Аналогичным образом можно найти проекции импульсов  $\vec{p}_{1C}$  и  $\vec{p}_{2C}$  на координатную ось  $y$  этой же системы отсчета  $K$  при повороте МС2 на угол  $\pi/2$ .

Подстановка (4.51) в (4.52) с учетом преобразований (4.28) и того, что  $R = r_{12} = r_{21}$  дает уравнения:

$$r_{1C} - m_2 R / m = 0; r_{2C} - m_1 R / m = 0. \tag{4.53}$$

Уравнения (4.53) удовлетворены, если амплитуды движения тел  $m_1$  и  $m_2$  (при рассмотрении их движения как гармонического колебания относительно ЦМ  $C$ ), выраженные через радиусы (4.7) равны

$$A_1 = r_{1C} = m_2 R / m; A_2 = r_{2C} = m_1 R / m. \quad (4.54)$$

Аналогичный результат можно получить наиболее простым способом – непосредственным одновременным применением преобразований (4.28) и (4.18) к уравнениям (4.48).

По амплитудам (4.54) с учетом преобразований (4.18) и того, что  $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$  представим частные решения уравнений (4.47) в системе отсчета  $K_C$ :

$$\begin{aligned} x_{1C} &= A_1 \cos \varphi_{1C} = A_1 \cos(\varphi_{21} - \pi) = -A_1 \cos \varphi_{21}; \\ y_{1C} &= A_1 \sin \varphi_{1C} = A_1 \sin(\varphi_{21} - \pi) = -A_1 \sin \varphi_{21}; \\ x_{2C} &= A_2 \cos \varphi_{2C} = A_2 \cos(\varphi_{12} - \pi) = -A_2 \cos \varphi_{12} = -A_2 \cos \varphi_{21}; \\ y_{2C} &= A_2 \sin \varphi_{2C} = A_2 \sin(\varphi_{12} - \pi) = -A_2 \sin \varphi_{12} = A_2 \sin \varphi_{21}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

Где  $\varphi_{12} = \omega_{12} t_2$  и  $\varphi_{21} = \omega_{21} t_1$  можно заменить на  $\varphi_{12} = \omega_{1C} t$  и  $\varphi_{21} = \omega_{2C} t$  – полярные координаты, приращение которых по абсолютному времени  $t_C = t$  (4.31) удовлетворяет угловому инварианту  $\Delta\varphi = \Delta\varphi_C = \Delta\varphi_{12} = \Delta\varphi_{21}$  (4.30) для единого начального времени  $t_0 = 0$ ;  $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C} = (\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0)) / R$  – угловая скорость поступательного движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  (4.21).

Таким образом преобразования (4.28), (4.18) и инвариант  $\Delta\varphi$  (4.30) позволяют свести решение уравнений (4.47), например, первого для МС2 с пятью числом степеней свободы  $s = 5$  при диаметральной распределении  $\theta_C = -\pi$ , (4.3) к решению уравнения МС2  $(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{\Phi}_{21}$  (2.13) в абсолютном времени  $t$  с числом свободы  $N \leq 3$  при  $\vec{F} = 0$  с амплитудой  $A_1 = r_{1C} = m_2 R / m$  (4.54).

Общие решения первого уравнения (4.47) в системе отсчета  $K$  с учетом (4.55) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{CO} - A_1 \cos \varphi_{21}; y_1 = y_{CO} - A_1 \sin \varphi_{21}; \\ \dot{x}_1 &= A_1 \omega_{21} \sin \varphi_{21}; \dot{y}_1 = A_1 \omega_{21} \cos \varphi_{21},\end{aligned}\tag{4.56}$$

где  $x_C(0)$  и  $y_C(0)$  – координаты ЦМ  $C$ , которые определены положением мгновенного центра  $O$  начальных импульсов  $\vec{p}_1(0)$  и  $\vec{p}_2(0)$  в момент времени  $t = 0$  (см. рис. 4.3, *a*).

На практике необходимость в нахождении общего решения (4.56) второго уравнения (4.47) по координатам  $x_2$  и  $y_2$  и скоростям  $\dot{x}_2$  и  $\dot{y}_2$  тела  $m_2$  отсутствует, так как их можно определить по координатам  $x_1$  и  $y_1$  тела  $m_1$  с помощью известных преобразований координат:  $x_{2C} = x_{1C} + R \cos \varphi_{21}$  и  $y_{2C} = y_{1C} + R \sin \varphi_{21}$  и их производных по времени  $t$ .

#### 4.6. Сведение задачи двух тел к задаче одного тела

В случае  $m_1 \neq m_2$ , когда МС2 имеет  $s \leq 3$  степеней свободы можно выполнить переход к задаче одного опорного тела с массой  $m = m_1 + m_2$  [3–5, 7]. При  $m_1 \geq m_2$  тело  $m_1$  выбирается как опорное (укоряемое), а тело  $m_2$  – как рабочее (ускоряющее); при  $m_2 \geq m_1$  наоборот:  $m_2$  – как опорное и  $m_1$  – как рабочее.

Предположим, что при  $m_1 > m_2$  тело  $m_2$  рассматриваемой МС2 (рис. 4.2, *a*) жестко закреплено на стержне  $R$ . В этом случае его собственную систему отсчета  $K_2$  можно исключить из рассмотрения, поскольку в ней относительная угловая скорость  $\omega_{12}$  тела  $m_1$  равна нулю  $\omega_{12} = 0$ . Тогда из (4.29) следует равенство угловых скоростей

$$\omega_{21} = \omega_C,\tag{4.57}$$

и одновременно из инварианта  $\Delta\varphi = \omega_C t_C = \omega_{21} t_1$  (4.30) то, что время в системах отсчета  $K_1$ ,  $K_C$  и  $K$  МС2 с  $s \leq 3$  степенями свободы абсолютно

$$t_1 = t_C = t. \quad (4.58)$$

Введем декартовы координаты  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K$ , а также полярную координату  $\varphi_{21} = \omega_{21}t$  тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$ , где  $\omega_{21}$  – угловая скорость вращательного движения тела  $m_2$  относительно опорного тела  $m_1$ . Тогда кинетическую энергию  $T$  МС2 с числом степеней свободы  $s = 3$  в системе отсчета  $K$  можно выразить в виде

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2), \quad (4.59)$$

где скорости  $\dot{x}_1, \dot{y}_1$  и  $\dot{x}_2, \dot{y}_2$  тел  $m_1$  и  $m_2$  можно определить через их координаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1; x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}; \dot{x}_1 = \dot{x}_1; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R\omega_{21} \sin \varphi_{21}; \\ y_1 &= y_1; y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}; \dot{y}_1 = \dot{y}_1; \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R\omega_{21} \cos \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Подстановка скоростей (4.60) в кинетическую энергию  $T$  (4.59) при  $\omega_{21} = \text{const}$  дает лагранжиан рассматриваемой МС2 в виде

$$L = T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{21}^2R^2 - U, \quad (4.61)$$

где  $m = m_1 + m_2$  – суммарная масса МС2, условно сосредоточенная в рабочем теле  $m_1$ ;  $U$  – обобщенный потенциал [4, 7]:

$$U = m_2\omega_{21}R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}). \quad (4.62)$$

На основе лагранжиана  $L$  (4.61) можно получить два координатных уравнения:

$$m\ddot{x}_1 = m_2\omega_{21}^2R \cos \varphi_{21}; m\ddot{y}_1 = m_2\omega_{21}^2R \sin \varphi_{21}, \quad (4.63)$$

которые для замкнутой МС2 с тремя степенями свободы  $s = 3$  по аналогии с (4.47) можно записать в виде

$$m d^2 \vec{r}_1 / dt^2 = \vec{\Phi}_{21}, \quad (4.64)$$

где  $\vec{\Phi}_{21} = -d\vec{p}_{21} / dt = m_2 \omega_{21}^2 \vec{r}_{21}$  – относительная сила инерции тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$ , которая инвариантна для системы отсчета  $K$  [7].

Решениями уравнения (4.64) являются частные решения (4.55).

В первой главе также найдено решение уравнения (4.64) в системе отсчета  $K$  с учетом диссипативности внешней среды

$$m d^2 \vec{r}_1 / dt^2 = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1, \quad (4.65)$$

для МС2 с тремя степенями свободы  $s = 3$ , где  $\vec{F}_1 = \mu_1 \vec{v}_1$  – диссипативная сила, создаваемая внешней средой с вязким линейным сопротивлением  $\mu_1$  движению опорного тела  $m_1$  со скоростью  $\vec{v}_1$ . При опускании в частном решении (4.52) координат  $x_{2C}$  и  $y_{2C}$  число степеней свободы МС2 уменьшится до  $s = 2$ . В этом случае опорное тело  $m_1$  характеризуется возвратно-поступательным движением вдоль оси координат  $x$  системы отсчета  $K$ , что позволяет представить относительную силу инерции  $\vec{\Phi}_{21} = m_2 \omega_{21}^2 \vec{r}_{21}$  (4.64) тела  $m_2$  как силу инерции его вращательного движения в системе отсчета  $K_1$ , для которой МС2 можно свести к одному телу с массой  $m = m_1 + m_2$  (4.63). При  $s > 2$  решение уравнения (4.47) для диаметрального распределения  $\theta_C = -\pi$  (4.3) и решение уравнения (4.64) инвариантны.

## 4.7. Выводы

Таким образом, получены уравнения динамики МС2 в поле ИД, что указывает на несостоятельность работы [10]. Эти уравнения в сравнении с уравнением движения ее ЦМ  $C$  позволяют анализировать движение каждого из тел МС2 и ее ЦМ  $C$  в отдельности при числе степеней ее свободы  $s \leq 5$  так, например, при  $s = 3$  они записаны для вакуума (4.64) и диссипативной среды (4.65), а при  $s = 5$  – для вакуума (4.47).

## 5. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЯТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ И РАДИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЕЕ МАСС В ПОЛЕ ИНЕРЦИОННОГО ДОМЕНА

### 5.1. Введение в главу

Образование ИД в МС2 с числом степеней свободы  $s = 5$  может существенно влиять на ее динамику. Так, например, при равенстве одного из начальных импульсов нулю  $\vec{p}_1 = 0$  и  $\vec{p}_2 \neq 0$  (см. рис. 4.3, в) движение тел  $m_1$  и  $m_2$  замкнутой МС2 в системе отсчета  $K_O$  будет совершаться при их радиальном распределении  $\theta_O \neq -\pi$  (см. рис. 4.3, з) [19]. Для такого распределения понятие сохранныости импульса  $\vec{p}_C = \overline{\text{const}}$  (4.43) замкнутой механической системы требует уточнения, так как равнодействующая поля относительных сил инерции относительно силового центра  $O$  ИД будет отлична от нуля  $\vec{F}_{1O} + \vec{F}_{2O} \neq 0$ .

### 5.2. Энергетический анализ и принцип Д'Аламбера

Проведем анализ случая, когда начальный импульс тела  $m_1$  в системе отсчета  $K$  в момент времени  $t = 0$  равен  $\vec{p}_1(0) = 0$ , а тела  $m_2 - \vec{p}_2(0) > 0$ , как показано на рис. 5.1, б.

В этом случае при равных массах  $m_1 = m_2$  положение мгновенного центра  $O_1(0)$  начальных импульсов  $\vec{p}_1(0)$  и  $\vec{p}_2(0)$  тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2 будет совпадать с начальным положением тела  $m_1$  и ЦМ  $C$  получит в системе отсчета  $K$  начальную скорость

$$\vec{v}_C = \vec{p}_2(0) / m, \quad (5.1)$$

Динамический анализ замкнутой МС2 начнем с ее стационарного состояния для которого система отсчета  $K_O$  силового центра  $O$  ИД для времени  $t \geq \Delta t$  неподвижна в системе отсчета  $K$  (см. рис. 5.1, *a*).

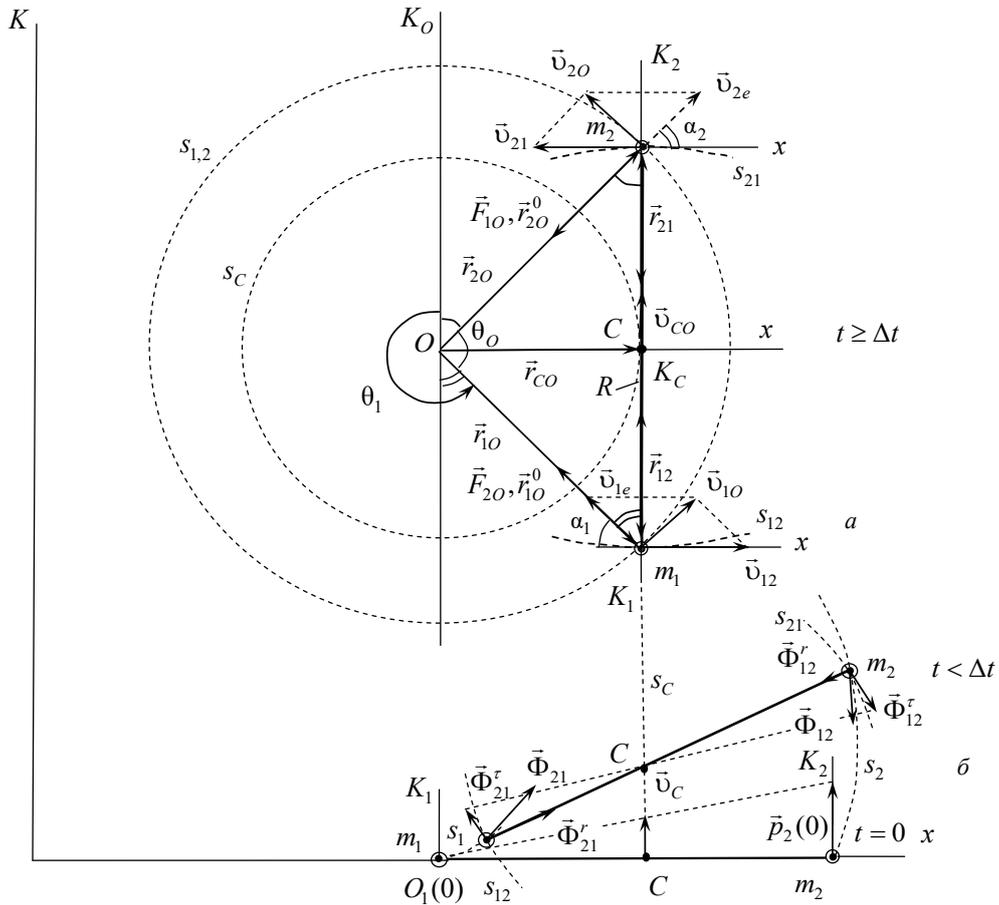


Рис. 5.1. Двухмассовая механическая система в стационарном состоянии с радиальным распределением масс тел  $m_1$  и  $m_2$  – *a* и ее переходной процесс – *б*

Количество независимых координат рассматриваемой МС2 в плоском движении при  $R = r_{12} = r_{21} = \text{const}$  определяется двумя полярными координатами  $r_{10}$  и  $\varphi_{10}$  тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_O$  силового центра  $O$  ИД

и дополнительно одной полярной координатой  $\varphi_{21}$  тела  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  тела  $m_1$  или же двумя полярными координатами  $r_{2O}$  и  $\varphi_{2O}$  тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$  силового центра  $O$  ИД и дополнительно одной полярной координатой  $\varphi_{12}$  тела  $m_1$  в собственной системе отсчета  $K_2$  тела  $m_2$ . Полярные координаты  $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$  являются зависимыми. При равных массах  $m_1 = m_2$  выбор опорного тела из двух тел  $m_1$  и  $m_2$  равноправен.

Таким образом, число независимых координат МС2 для плоского движения составляет  $N = 3$  из общего числа ее степеней свободы  $s = n + m - l = 2 + 2 - 1 = 5$ , где  $n = 3$  и  $m = 3$  – количество степеней свободы тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K$ ;  $l = 1$  – одна связь стержнем  $R$ . При этом общее число степеней свободы  $s = 5$  определяет полную энергию  $E_{МС2}$ , которая содержит как кинетическую энергию  $T$  ее тел  $m_1$  и  $m_2$ , так и потенциальную энергию  $U$  этих тел в поле их ИД, который для их радиального распределения в системе отсчета  $K_O$  оказывает существенное влияние на движение МС2 в системе отсчета  $K$ , где согласно замены (4.40) оно является абсолютным, что необходимо учитывать.

И действительно, при  $s = 5$  тела  $m_1$  и  $m_2$  МС2 совершают в системе отсчета  $K$  сложное переносно-относительное поступательное движение с абсолютными скоростями  $\vec{v}_i = \vec{v}_{ie} + \vec{v}_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2$ ;  $i \neq j$  (4.32), где  $\vec{v}_{ie}$  и  $\vec{v}_{ij}$  – переносная скорость  $i$ -го тела в системе отсчета  $K$  и его относительная скорость в собственной системе отсчета  $K_j$   $j$ -го тела.

Для начальных импульсов тел  $m_1$  и  $m_2$  равных  $\vec{p}_1(0) = 0$  и  $\vec{p}_2(0) > 0$  движение этих тел в системе отсчета  $K_O$ , связанной с силовым центром  $O$  ИД, характеризуется радиальным распределением

$$\theta_O = \arccos(p_1(0)/p_2(0)) = \pi / 2, \quad (5.2)$$

определяющим запаздывание  $\theta_O = \varphi_{2O} - \varphi_{1O} = \pi/2$  фазы  $\varphi_{1O}$  поступательного движения тела  $m_1$  относительно фазы  $\varphi_{2O}$  поступательного движения тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$  в стационарном состоянии МС2, как показано на рис. 5.1, а.

Для радиального распределения  $\theta_O = \pi/2$  (5.2) уравнение динамики замкнутой МС2 (4.39) в виде принципа Д'Аламбера или второго закона Ньютона примут вид:

$$\vec{\Phi}_i + \vec{F}_{jO} = 0; m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{jO}; i, j = 1, 2; i \neq j. \quad (5.3)$$

где  $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$  – собственная сила инерции поступательного движения  $i$ -го тела в месте с собственной системой отсчета  $K_i$  в системе отсчета  $K$ ;  $\vec{F}_{jO}$  – относительная сила инерции тела  $j$ -го тела при его сложном переносно-относительном движении в системе отсчета  $K$ ; индекс  $O$  соответствует радиальному распределению  $\theta_O = \pi/2$  (5.2) тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$ .

Для определения относительных сил инерции  $\vec{F}_{1O}$  и  $\vec{F}_{2O}$  (5.3) тел  $m_1$  и  $m_2$  при их радиальном распределении  $\theta_O = \pi/2$  (5.2) выразим кинетическую энергию переносно-относительного движения МС2 с учетом абсолютных скоростей  $\vec{v}_i$  (4.32) ее тел  $m_i$  в виде

$$T_{er} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 + U, \quad (5.4)$$

где  $U$  – обобщенный кинетический потенциал:

$$\begin{aligned} U &= m_1 v_{1e} v_{12} \cos \varphi_1 + m_2 v_{2e} v_{21} \cos \varphi_2 = \\ &= - (m_1 v_{2c} v_{12} \cos \alpha_1 + m_2 v_{1c} v_{21} \cos \alpha_2) = \\ &= - (m_1 \omega_{2O} r_{2O} \omega_{12} r_{12} \cos \alpha_1 + m_2 \omega_{1O} r_{1O} \omega_{21} r_{21} \cos \alpha_2), \end{aligned} \quad (5.5)$$

характеризующий влияние относительного  $\vec{v}_{12r}, \vec{v}_{21r}$  движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в их переносное движение  $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C}, \vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C}$ , где  $\varphi_1 = \widehat{\vec{v}_{1e} \vec{v}_{12}} = \pi - \alpha_1$  и  $\varphi_2 = \widehat{\vec{v}_{2e} \vec{v}_{21}} = \pi - \alpha_2$  – острый угол между векторами переносных  $\vec{v}_{1e}, \vec{v}_{2e}$  и относительных  $\vec{v}_{12}, \vec{v}_{21}$  скоростей;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы поворота переносных скоростей  $\vec{v}_{1e}$  и  $\vec{v}_{2e}$  относительно их ориентации при диаметральном распределении  $\theta_C = -\pi$  (см. рис. 4.2, а), углы  $\alpha_1$  отмечены на рис. 5.1, а одной дугой, а  $\alpha_2$  – двумя.

Для определения углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (5.5) примем за условие стационарного состояния МС2 равенство модулей импульсов  $p_{1O} = p_{2O}$  ее тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$ , которое в криволинейных координатах представим равенством

$$m_1 \omega_{CO} r_{1O} = m_2 \omega_{CO} r_{2O}, \quad (5.6)$$

где радиусы  $r_{1O}$  и  $r_{2O}$  которые с учетом рис. 5.1, а выразим в виде:

$$r_{1O} = R \cos \alpha_2 \text{ и } r_{2O} = R \cos \alpha_1. \quad (5.7)$$

Поочередная подстановка радиусов  $r_{1O}$  и  $r_{2O}$  (5.7) в (5.6) позволяет определить амплитуды:

$$A_1 = c_1 \cos \alpha_1; A_2 = c_2 \cos \alpha_2, \quad (5.8)$$

стационарного переносно-относительного поступательного движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$  (при рассмотрении их движения как гармонического колебания относительно центра  $O$  ИД), где

$$c_1 = \frac{m_2}{m_1} R; c_2 = \frac{m_1}{m_2} R \quad (5.9)$$

– амплитудные коэффициенты.

Одновременная подстановка радиусов  $r_{1O}$  и  $r_{2O}$  (5.7) в (5.6) с учетом того, что  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi / 2$  позволяет определить углы:

$$\alpha_1 = \arctg(\xi_1); \alpha_2 = \arctg(\xi_2), \quad (5.10)$$

в зависимости от соотношения масс тел  $m_1$  и  $m_2$ :

$$\xi_1 = m_2 / m_1; \xi_2 = \xi_1^{-1} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (5.11)$$

Согласно рис. 5.1,  $a$  фаза  $\varphi_{iO}$  поступательного движения тела  $m_i$  в системе отсчета  $K_O$  связана с фазой  $\varphi_{ji}$ ;  $i, j = 1, 2$ ;  $i \neq j$  поступательного движения тела  $m_j$  в системе отсчета  $K_i$  преобразованиями:

$$\varphi_{1O} = \varphi_{21} + \theta_1; \varphi_{2O} = \varphi_{12} + \theta_2, \quad (5.12)$$

где  $\theta_1 = \pi + \alpha_2$  – угол запаздывания фазы  $\varphi_{1O}$  переносно-относительного поступательного движения тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_O$  относительно фазы  $\varphi_{21}$  поступательного движения тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$  (см. рис. 5.1,  $a$ ) и  $\theta_2 = \pi + \alpha_1$  – аналогичный угол запаздывания (на рис. 5.1,  $a$  не показан) тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$  относительно фазы  $\varphi_{12}$  поступательного движения тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_2$ .

Потенциал  $U$  (5.5) определяет относительные силы инерции

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1O} &= -\frac{\partial U}{\partial r_{2O}} \cdot \vec{r}_{2O}^0 = m_1 \omega_{2O} \omega_{12} r_{12} \cos \alpha_1 \cdot \vec{r}_{2O}^0; \\ \vec{F}_{2O} &= -\frac{\partial U}{\partial r_{1O}} \cdot \vec{r}_{1O}^0 = m_2 \omega_{1O} \omega_{21} r_{21} \cos \alpha_2 \cdot \vec{r}_{1O}^0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

образованного ими ИД с силовым центром  $O$ , с которым для радиального распределения  $\theta_O = \pi / 2$  (5.2) не совпадает ЦМ  $C$  МС2 (см. рис. 5.1,  $a$ ), где  $\vec{r}_{1O}^0 = -\vec{r}_{1O} / r_{1O}$  и  $\vec{r}_{2O}^0 = -\vec{r}_{2O} / r_{2O}$  – единичные векторы противоположно направленные радиус-векторам  $\vec{r}_{1O}$  и  $\vec{r}_{2O}$  и определяющие направление относительных сил инерции  $\vec{F}_{2O}$  и  $\vec{F}_{1O}$  к силовому центру  $O$  (см. рис. 5.1,  $a$ , где выбор направлений  $\vec{r}_{1O}^0$  и  $\vec{r}_{2O}^0$  подлежит дальнейшему обоснованию);  $\omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_C$  и  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{21}$  – угловые скорости движения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$  и в собственных системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  диаметрально противоположных тел  $m_2$  и  $m_1$ , которые будут определены в следующем разделе.

Замена в (5.4)  $T_{Ce} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{1e}^2$  на  $T_O = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1O}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2O}^2$ , полученную при  $m_1 = m_2$  в соответствии с (4.40), дает лагранжиан  $L$  рассматриваемой МС2

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1O}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2O}^2 + \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{21}^2 + U = \\
 &= \frac{1}{2}m_1\omega_{1O}^2r_{1O}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{2O}^2r_{2O}^2 + \frac{1}{2}m_1\omega_{12}^2r_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{21}^2r_{21}^2 - \\
 &\quad - (m_1\omega_{2O}r_{2O}\omega_{12}r_{12} \cos \alpha_1 + m_2\omega_{1O}r_{1O}\omega_{21}r_{21} \cos \alpha_2)
 \end{aligned} \quad (5.14)$$

при  $m_1 = m_2$ .

Частные дифференциалы от функции лагранжа  $L$  (5.14) вида  $-\frac{\partial L}{\partial r_{1O}} = 0$

и  $-\frac{\partial L}{\partial r_{2O}} = 0$  дают обобщенные силы

$$\begin{aligned}
 -m_1\omega_{1O}^2r_{1O} + m_2\omega_{1O}\omega_{21}r_{21} \cos \alpha_2 &= 0; \\
 -m_2\omega_{2O}^2r_{2O} + m_1\omega_{2O}\omega_{12}r_{12} \cos \alpha_1 &= 0,
 \end{aligned} \quad (5.15)$$

определяющие уравнения (5.3).

И действительно первые слагаемые (5.15) определяют собственные силы инерции  $\vec{\Phi}_1 = \vec{\Phi}_{1O} = -m_1\omega_{1O}^2\vec{r}_{1O}$  и  $\vec{\Phi}_2 = \vec{\Phi}_{2O} = -m_2\omega_{2O}^2\vec{r}_{2O}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (на рис. 5.1, *a* не показаны), которые направлены от силового центра  $O$  (см. рис. 1.3). Вторые слагаемые определяют относительные силы инерции  $\vec{F}_{1O} = m_1\omega_{2O}\omega_{12}r_{12}\cos\alpha_1 \cdot \vec{r}_{2O}^0$  и  $\vec{F}_{2O} = m_2\omega_{1O}\omega_{21}r_{21}\cos\alpha_2 \cdot \vec{r}_{1O}^0$  (5.13), где выбор направления единичных векторов  $\vec{r}_{1O}^0 = -\vec{r}_{1O}/r_{1O}$  и  $\vec{r}_{2O}^0 = -\vec{r}_{2O}/r_{2O}$  к силовому центру  $O$  (см. рис. 5.1, *a*) определен тем, что слагаемые каждой из обобщенных сил (5.15) имеют противоположные знаки.

Для не равных масс  $m_1 \neq m_2$  тел рассматриваемую МС2 необходимо свести к одному телу с массой  $m = m_1 + m_2$  с уравнениями движения вида (4.64).

Относительные силы инерции  $\vec{F}_{1O}$  и  $\vec{F}_{2O}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  (5.13) образуют ИД, с силовым центром  $O$  которого для радиального распределения  $\theta_O = \pi/2$  (5.2) не совпадает с ЦМ  $C$  МС2, и действуют соответственно на радиально противоположные тела  $m_2$  и  $m_1$ , так что главный вектор этих сил не равен нулю  $\vec{F}_{1O} + \vec{F}_{2O} \neq 0$ . Решение уравнений (5.3) для такого случая с учетом переходного процесса, протекающего в МС2 при заданных начальных условиях, дано в следующем разделе.

Таким образом, для радиального распределения  $\theta_O = \pi/2$  (5.2) равных масс  $m_1 = m_2$  тел МС2 с числом степеней свободы  $s = 5$  произведение ее суммарной массы МС2 на ускорение  $\vec{a}_C = \vec{a}_{CO}$  ее ЦМ  $C$  равно действию на нее поля относительных сил инерции  $\vec{F}_{1O}$  и  $\vec{F}_{2O}$  ее взаимодействующих тел так, что циркуляция импульса  $\vec{p}_C$  МС2 по замкнутому контуру  $s_C$  равна нулю:

$$d\vec{p}_C / dt = \vec{F}_{1O} + \vec{F}_{2O} \neq \overline{\text{const}}; \Gamma = \oint \vec{p}_C d\vec{l} = 0. \quad (5.16)$$

Согласно формулировке принципа Д'Аламбера (1.16) в форме второго закона Ньютона выразим (5.3) в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_{1O} &= \vec{F}_{2O}; m_2 \vec{a}_{2O} = \vec{F}_{1O}; \\ K_{Oz} &= m_1 \omega_O r_{1O}^2 + m_2 \omega_O r_{2O}^2 + m_1 \omega_{12} R^2 + m_2 \omega_{21} R^2 + \\ & m_1 \omega_{12} r_{1O} R \cos \alpha_1 + m_2 \omega_{21} r_{2O} R \cos \alpha_2, \end{aligned} \quad (5.17)$$

которая описывает движение каждого из тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2 в системе отсчета  $K_O$ , где  $K_{Oz} = \text{const}$  – кинетический момент МС2 в системе отсчета  $K_O$ , в котором первые два члена являются моментом импульса  $p_C = m v_C$  ЦМ  $C$  относительно оси  $z$  системы отсчета  $K_O$ , третий и четвертый члены – моментами импульсов  $p_{12} = m_1 v_{12}$  и  $p_{21} = m_2 v_{21}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  относительно оси  $z$  систем отсчета  $K_2$  и  $K_1$  и пятый и шестой – моментами импульсов  $m_1 \omega_{12} R \cos \alpha_{12}$  и  $m_2 \omega_{21} R \cos \alpha_{21}$  поля относительных сил инерции  $\vec{F}_{1O}$  и  $\vec{F}_{2O}$  относительно оси  $z$  системы отсчета  $K_O$ .

Почленное суммирование первых двух уравнений (5.17) дает уравнение движения ЦМ  $C$  МС2 в виде (5.16).

### 5.3. Инвариантность угловых перемещений и частное решение уравнений движения

Так как при радиальном распределении  $\theta_O = \pi / 2$  (5.2) система отсчета  $K_C$  ЦМ  $C$  не является инерциальной, то необходимо установить связь абсолютного времени системы отсчета  $K$  с относительным временем в системах отсчета  $K_C$ ,  $K_1$  и  $K_2$  [19]. Для этого выпишем уравнение динамики МС2 в виде принципа Д'Аламбера (5.3) для ее тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K$  в криволинейных координатах:

$$m_1 \omega_{10}^2 r_{10} = m_2 \omega_{10} \omega_{21} R \cos \alpha_2; m_2 \omega_{20}^2 r_{20} = m_1 \omega_{20} \omega_{12} R \cos \alpha_1. \quad (5.18)$$

Подставляя в (5.18) радиусы  $r_{1O}$  и  $r_{2O}$  (5.7) с учетом того, что в стационарном состоянии МС2  $\omega_{CO} = \omega_{1O} = \omega_{2O}$  найдем:

$$\omega_C = \omega_{12} + \omega_{21} = \omega_{CO} \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1 m_2}; \omega_{12} = \omega_{CO} \frac{m_2}{m_1}; \omega_{21} = \omega_{CO} \frac{m_1}{m_2}, \quad (5.19)$$

где  $\omega_{CO}$ ,  $\omega_{1O}$  и  $\omega_{2O}$  – угловая скорость ЦМ  $C$ , тела  $m_1$  и тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_O$ ;  $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$  – как и ранее угловая скорость тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_C$ .

Угловые перемещение тел  $m_1$  и  $m_2$  в системах отсчета  $K_O$ ,  $K_C$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K$  должны удовлетворять инварианту

$$\Delta\varphi = \omega_{CO}\Delta t_{CO} = \omega_C\Delta t_C = \omega_{12}\Delta t_2 = \omega_{21}\Delta t_1, \quad (5.20)$$

где  $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ ,  $\Delta t_2 = t_2 - t_0$ ,  $\Delta t_C = t_C - t_0$  и  $\Delta t_{CO} = t_{CO} - t_0$  – приращение времени и  $t_0$  – единое начальное время во всех системах отсчета.

Ивариант  $\Delta\varphi$  (5.20) определяет то, что при любом угловом перемещении тела  $m_1$  в системах отсчета  $K_O$ ,  $K_C$  и  $K_2$ , а также тела  $m_2$  в системах отсчета  $K_O$ ,  $K_C$  и  $K_1$  эти тела будут находиться в одной точке траектории  $s_{1,2}$  системы отсчета  $K$  как, например, для тела  $m_2$  при  $\Delta\varphi = \{0; \pi/2\}$  для диаметрального распределения  $\theta_C = -\pi$  (4.3) показано на рис. 4.2, б событиями  $e_1$  и  $e_2$ .

Совместно с преобразованиями (5.19) инвариант  $\Delta\varphi$  (5.20) требует введения собственного времени в системах отсчета  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_C$

$$t_1 = \frac{m_1}{m_2}t; t_2 = \frac{m_2}{m_1}t; t_C = \frac{m_1 m_2}{m_1^2 + m_2^2}t \quad t_{CO} = t \quad (5.21)$$

При  $m_1 = m_2$  время в системах отсчета  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_O$  и  $K$   $t_1 = t, t_2 = t$  и  $t_{CO} = t$  абсолютно.

Таким образом, для обеспечения инвариантности угловых перемещений  $\Delta\varphi$  (5.20) необходимо, чтобы время  $t_1$  и  $t_2$  в собственных системах

отсчета  $K_1$  и  $K_2$  взаимодействующих тел  $m_1$  и  $m_2$  и в системе отсчета  $K_C$  их центра масс по отношению ко времени  $t_0$  в системе отсчета  $K_0$  их инерционного домена протекало по разному. Время в системе отсчета  $K_0$  для радиального распределения  $\theta_0 = \pi/2$  (5.2) и в какой-либо другой инерциальной системе отсчета  $K$  абсолютно  $t_0 = t$ .

Частное решение уравнений движения тел  $m_1$  и  $m_2$  (5.17) в системе отсчета  $K_0$  для радиального распределения  $\theta_0 = \pi/2$  (5.2) с учетом преобразований (5.12) и амплитуд (5.8) по аналогии с (4.55) представим в виде:

$$\begin{aligned} x_{10} &= A_1 \cos \varphi_{10} = -A_1 \cos(\varphi_{21} + \alpha_2); \\ y_{10} &= A_1 \sin \varphi_{10} = -A_1 \sin(\varphi_{21} + \alpha_2); \\ x_{20} &= A_2 \cos \varphi_{20} = -A_2 \cos(\varphi_{12} + \alpha_1); \\ y_{20} &= A_2 \sin \varphi_{20} = -A_2 \sin(\varphi_{12} + \alpha_1), \end{aligned} \quad (5.22)$$

где  $\varphi_{21} = \omega_{21}t_1$  – полярная координата в собственном времени времени  $t_1$  системы отсчета  $K_1$ , которую с учетом (5.21) при  $m_1 = m_2$  можно представить в абсолютном времени  $\varphi_{21} = \omega_{21}t$ .

#### 5.4. Динамический анализ переходного процесса

Так как в момент времени  $t = 0$  телу  $m_2$  сообщен начальный импульс  $\vec{p}_2(0)$ , направленный параллельно оси  $y$  системы отсчета  $K$ , как показано на рис. 5.1, б, то скорость  $\vec{v}_C$  ЦМ  $C$  тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K$  и их начальные угловые скорости  $\omega_{12}$  и  $\omega_{21}$  в системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  составят:

$$\vec{v}_C = \frac{\vec{p}_2(0)}{mR}; \omega_{12}(0) = 0; \omega_{21}(0) = \frac{p_2(0)}{m_2R}, \quad (5.23)$$

где  $m = m_1 + m_2$ .

В результате взаимодействия тел  $m_1$  и  $m_2$  стержнем  $R$  скалярное значение импульса  $p_{21} = m_2\omega_{21}R$  тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$  будет уменьшаться, тогда как скалярное значение импульса  $p_{12} = m_1\omega_{12}R$  тела  $m_1$  в системе отсчета  $K_2$  будет увеличиваться. Передача импульса  $p_{21}$  тела  $m_2$  телу  $m_1$  выполняется при соблюдении принципа наименьшего действия и прои-

сходит во времени  $t < \Delta t$  при уменьшении  $\omega_{21}$  и увеличении  $\omega_{12}$  с сохранением суммарного кинетического момента МС2 относительно силового центра  $O$  ИД  $dK_{Oz} / dt = \text{const}$  (5.17), а также при постоянном и прямолинейном его движении  $\vec{v}_C = \overrightarrow{\text{const}}$  параллельно оси  $y$  (на расстоянии  $y_C = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} = \text{const}$ ) системы отсчета  $K$ .

Приближенную математическую модель переходного процесса в системе отсчета  $K$  построим в абсолютном времени  $t_1 = t_O = t$  (определено преобразованиями (5.21) при  $m_1 = m_2$ ) исходя из принципа Д'Аламбера  $\vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_{21} = 0$  (1.20), записанного с учетом аксиомы связи для относительной силы инерции  $\vec{R}_{21} = \vec{\Phi}_{21}$ . Выбор такого уравнения динамики вызван тем, что траектория  $s_1$  движения опорного тела  $m_1$  во время  $t < \Delta t$  переходного процесса не является окружностью (см. рис. 5.1, б). Тогда относительную силу инерции  $\vec{\Phi}_{21} = m_2 \omega_{21}^2 \vec{r}_{21}$  рабочего тела  $m_2$  можно выразить через квадрат его относительной угловой скорости  $\omega_{21}^2$ .

С учетом этого для анализа движения тела  $m_1$  в системе отсчета  $K$  применим координатные уравнения вида:

$$m_1 \ddot{x}_1 = \Phi_{21x}; \quad m_1 \ddot{y}_1 = \Phi_{21y}, \quad (5.24)$$

где

$$\Phi_{21x} = -m_2 \omega_{21}^2 R \cos \varphi_{21}; \quad \Phi_{21y} = -m_2 \omega_{21}^2 R \sin \varphi_{21} \quad (5.25)$$

– проекции относительной силы инерции  $\vec{\Phi}_{21} = m_2 \omega_{21}^2 \vec{r}_{21}$  на ось  $x$  и  $y$  системы отсчета  $K$ , которые в развернутой форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{21x} &= -dp_{21x} / dt = -m_2 d^2 R \cos \varphi_{21} / dt^2 = \\ &= m_2 R (\omega_{21}^2 \cos \varphi_{21} + \varepsilon_{21} \sin \varphi_{21}); \\ \Phi_{21y} &= -dp_{21y} / dt = -m_2 d^2 R \sin \varphi_{21} / dt^2 = \\ &= m_2 R (\omega_{21}^2 \sin \varphi_{21} - \varepsilon_{21} \cos \varphi_{21}), \end{aligned} \quad (5.26)$$

здесь первые слагаемые  $\Phi_{21x}^r = m_2 R \omega_{21}^2 \cos \varphi_{21}$  и  $\Phi_{21y}^r = m_2 R \omega_{21}^2 \sin \varphi_{21}$  являются проекциями радиальной компоненты  $\Phi_{21}^r = m_2 \omega_{21}^2 R$  относительной силы инерции  $\vec{\Phi}_{21} = m_2 \omega_{21}^2 \vec{r}_{21}$  на оси  $x$  и  $y$  системы отсчета  $K$  (см. рис. 5.1, б), а вторые – аналогичными проекциями  $\Phi_{21x}^t = m_2 \varepsilon_{21} R \sin \varphi_{21}$  и  $\Phi_{21y}^t = m_2 \varepsilon_{21} R \cos \varphi_{21}$  ее тангенциальной компоненты  $\Phi_{21}^t = m_2 \varepsilon_{21} R$  на эти же оси  $x$  и  $y$  системы отсчета  $K$ ;  $\varepsilon_{12}$  и  $\varepsilon_{21}$  – угловые ускорения тел  $m_1$  и  $m_2$  в системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$ ;  $\varphi_{21} = \omega_{21} t$  – полярная координата в рабочем теле  $m_2$  в абсолютном времени времени  $t_1 = t$  в системе отсчета  $K_1$ .

Тангенциальная компонента  $\Phi_{21}^t$  характеризует передачу части модуля относительного импульса  $p_{21} = m_2 v_{21}$  рабочего тела  $m_2$  опорному телу  $m_1$ , которое за счет этой передачи получает приращение переносного импульса  $\Delta p_1 = m_1 \Delta v_1$ . Радиальные компоненты  $\Phi_{12}^r$  и  $\Phi_{21}^r$  влияют только на изменение фаз импульсов  $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$  и  $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$  тел  $m_2$  и  $m_1$ .

Переходной процесс МС2 завершается в момент времени  $t = \Delta t$  при выполнении условия стационарности в виде равенства модулей импульсов  $p_{10} = p_{20}$  тел  $m_1$  и  $m_2$  в системе отсчета  $K_0$ , которая в текущем времени  $t \geq \Delta t$  стационарного состояния МС2 неподвижна в системе отсчета  $K$ . Завершению переходного процесса соответствует выравнивание угловых скоростей  $\omega_{12} = \omega_{21}$  и обнуление тангенциальных компонент  $\Phi_{12}^t = \Phi_{21}^t = 0$ .

Для завершения построения математической модели переходного процесса МС2 введем еще одно допущение. Считаем, что передача относительного импульса  $\vec{p}_{21} = m_2 \vec{v}_{21}$  рабочего тела  $m_2$  опорному телу  $m_1$  осуществляется по линейному закону  $d\vec{p}_1 / dt = -d\vec{p}_{21} / dt$  в абсолютном времени  $t$ . Такое допущение обеспечивает возможность исключения тангенциальной компоненты  $\vec{\Phi}_{21}^t$  (5.26) из правой части уравнений (5.24) путем добавления к их левым частям линейной функции вида  $\mu_1 \vec{v}_1$ , что позволяет свести эти уравнения к характеристическому виду:

$$\ddot{q}_1 + 2\gamma_{21}\dot{q}_1 = c_1 \hat{\omega}_{21}^2 \cos \varphi_{21}, \quad (5.27)$$

где  $\gamma_{21} = \mu_1 / 2m_1$  – коэффициент передачи относительного импульса  $\vec{p}_{21} = m_2 \vec{v}_{21}$  от рабочего тела  $m_2$  опорному телу  $m_1$ , подлежащий определению;  $\mu_1$  – некоторый неизвестный коэффициент, характеризующий приращение скорости  $\vec{v}_1$  опорного тела  $m_1$  за счет приращения его импульса  $\Delta \vec{p}_1 = m_1 \Delta \vec{v}_1$ ;  $c_1 = m_2 R / m_1 = \xi_1 R$  – амплитудный коэффициент вида (5.9);  $\varphi_{21} = \hat{\omega}_{21} t$  – полярная координата, выраженная через угловую скорость  $\hat{\omega}_{21} = \text{const}$  поступательного движения рабочего тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$ .

Переход от изменяющейся во времени  $0 < t < \Delta t$  угловой скорости  $\omega_{21}$  рабочего тела  $m_2$  к его угловой скорости с постоянным значением  $\hat{\omega}_{21} = \text{const}$ , например, равным значению в стационарном состоянии МС2, выполнен следующим образом. Начальная угловая скорость  $\omega_{CO}$  ЦМ  $C$  МС2 и угловая скорость  $\omega_{21}(0)$  рабочего тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$  определяются его начальным импульсом  $p_2(0)$ :

$$\omega_{CO}(0) = \omega_{21}(0) = \frac{p_2(0)}{m_2 R}; \quad r_{CO} = x_C(0), \quad (5.28)$$

в момент времени  $t = 0$ , где  $x_C(0)$  и  $r_{CO}$  – координата ЦМ  $C$  в системе отсчета  $K$  при  $t = 0$  и радиус его движения в системе отсчета  $K_O$  во время  $t \geq \Delta t$  стационарного состояния МС2 (см. рис. 5.1, а).

При завершении переходного процесса МС2 в момент времени  $t = \Delta t$ , угловые скорости тел ее  $m_1$  и  $m_2$  в системах отсчета  $K_2$  и  $K_1$  при  $m_2 = m_2$  становятся равными

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \omega_{21}(0) / 2 \quad (5.29)$$

что в соответствии с преобразованиями угловых скоростей (5.19) устанавливает баланс угловых скоростей МС2:

$$\omega_{CO} = \omega_{21} = \omega_{21} = \omega_{21}(0) / 2; \quad \omega_C = \omega_{12} + \omega_{21}. \quad (5.30)$$

в ее стационарном состоянии, который определяет распределение кинетической  $T$  и потенциальной  $U$  энергий МС2 в ее полной энергии  $E$ .

При этом исходя из равенства (5.29) скорость  $\hat{\omega}_{21}$ , входящую в уравнение (5.27), можно принять равной

$$\hat{\omega}_{21} = \omega_{21}(0) / 2 = \text{const}. \quad (5.31)$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вида (5.27) есть сумма частного и общего решений [2]. Его частное решение в системе отсчета  $K_O$  в абсолютном времени  $t_1 = t$  будем искать в виде (5.22):

$$\begin{aligned} x_{1O} &= -A_1 \cos \varphi_{1O} = -A_1 \cos(\varphi_{21} + \alpha_2); \\ y_{1O} &= -A_1 \sin \varphi_{1O} = -A_1 \sin(\varphi_{21} + \alpha_2), \end{aligned} \quad (5.32)$$

где  $A_1$  – амплитуда, которая в первом приближении определена выражением (5.8);  $\varphi_{21} = \hat{\omega}_{21}t$  – полярная координата, которая при  $m_2 = m_2$  выражена через абсолютное время  $t_1 = t$  (5.21) в системе отсчета  $K_1$ .

Определим амплитуду  $A_1$ , входящую в решение (5.32). Для этого представим уравнение (5.27) в комплексной форме

$$\ddot{q}_1 + 2\gamma_{21}\dot{q}_1 = c_1\hat{\omega}_{21}^2 \exp j\hat{\omega}_{21}t, \quad (5.33)$$

где  $q_1$  – обобщенная координата.

Решение комплексного уравнения (5.33) будем искать в виде

$$q_1 = B_1 \exp j\hat{\omega}_{21}t, \quad (5.34)$$

где  $B_1$  – комплексная амплитуда, подлежащая определению.

Дифференцирование (5.34) по времени  $t$  дает

$$\dot{q}_1 = jB_1\hat{\omega}_{21} \exp j\hat{\omega}_{21}t; \quad \ddot{q}_1 = -B_1\hat{\omega}_{21}^2 \exp j\hat{\omega}_{21}t. \quad (5.35)$$

Подстановка (5.35) в уравнение (5.33) сводит его к виду

$$-B_1 \hat{\omega}_{21}^2 + 2j\gamma_{21} B_1 \hat{\omega}_{21} = c_1 \hat{\omega}_{21}^2. \quad (5.36)$$

Из (5.36) комплексную амплитуду  $B_1$  можно выразить в виде

$$B_1 = \frac{c_1 \hat{\omega}_{21}^2}{\hat{\omega}_{21}^4 + 4\gamma_{21}^2 \hat{\omega}_{21}^2} (-\hat{\omega}_{21}^2 - j2\gamma_{21} \hat{\omega}_{21}) = A_1 \exp(j\varphi_1), \quad (5.37)$$

которая находится в III четверти ее комплексной плоскости, где  $A_1 = |B_1|$ .

С учетом того, что амплитуда  $B_1$  (5.37) находится в III четверти ее комплексной плоскости ее модуль  $A_1 = |B_1|$  и угол запаздывания  $\theta_1$  (5.12) определим как:

$$A_1 = c_1 / \sqrt{1 + \xi_1^2}; \quad \theta_1 = \pi + \alpha_2; \quad \alpha_2 = \arctg \xi_2, \quad (5.38)$$

где  $\xi_1 = \text{Im } B_1 / \text{Re } B_1 = 2\gamma_{21} / \hat{\omega}_{21}$  – параметр передачи, который принят равным отношению масс  $\xi_1 = m_2 / m_1$  (5.11)

$$\xi_1 = \text{Im } B_1 / \text{Re } B_1 = 2\gamma_{21} / \hat{\omega}_{21} = m_2 / m_1, \quad (5.39)$$

что подлежит дальнейшему обоснованию.

Выражение (5.39) определяет коэффициент передачи  $\gamma_{21}$  в виде

$$\gamma_{21} = m_2 \hat{\omega}_{21} / 2m_1, \quad (5.40)$$

что исключает необходимость непосредственного определения коэффициента  $\mu_1$  (5.27).

Согласно связи круговых функций можно записать

$$\arctg \xi_1 = \arccos(1 / \sqrt{1 + \xi_1^2}); \quad \arctg \xi_2 = \arccos(1 / \sqrt{1 + \xi_2^2}). \quad (5.41)$$

С учетом того, что согласно (5.10) и (5.38)  $\arctg \xi_1 = \alpha_1$  и  $\arctg \xi_2 = \alpha_2$  из (5.41) получим:

$$\cos \alpha_1 = 1 / \sqrt{1 + \xi_1^2}; \cos \alpha_2 = 1 / \sqrt{1 + \xi_2^2}. \quad (5.42)$$

С учетом (5.42) амплитуду  $A_1$  (5.38), как и не выписанную амплитуду  $A_2$ , можно представить в первоначально определенном виде (5.8)

$$A_1 = c_1 \cos \alpha_1; A_2 = c_2 \cos \alpha_2, \quad (5.43)$$

что обосновывает приемлемость допущения  $\xi_1 = 2\gamma_{21} / \hat{\omega}_{21} = m_2 / m_1$ , принятого в (5.39).

Равенство вида

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \arctg \xi_1 = \arctg \xi_2 = \arccos(1 / \sqrt{1 + \xi_1^2}) = \arccos(1 / \sqrt{1 + \xi_2^2}) \quad (5.44)$$

при  $m_1 = m_2$  выражает баланс фаз и амплитуд рассматриваемой МС2 в ее стационарном состоянии.

Далее были записаны общие решения

$$x_O(t) = C_{1x} + C_{2x} \exp(-2\gamma_1 t); y_O(t) = C_{1y} + C_{2y} \exp(-2\gamma_1 t) \quad (5.45)$$

однородных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_O + 2\gamma_1 q_O = 0, \quad (5.46)$$

которые, как будет показано в следующем разделе главы, характеризуют переносную часть движения МС2 вместе с центром  $O$  ИД во время ее переходного процесса.

Сумма решений (5.32) и (5.45) дает решения дифференциальных уравнений (5.24) в системе отсчета  $K$  в виде:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_{1x} + C_{2x} \exp(-2\gamma_{21} t) - A_1 \cos(\varphi_{21} + \alpha_2); \\ \dot{x}_1(t) &= -2C_{2x} \gamma_{21} \exp(-2\gamma_{21} t) + A_1 \hat{\omega}_{21} \sin(\varphi_{21} + \alpha_2); \\ y_1(t) &= C_{1y} + C_{2y} \exp(-2\gamma_{21} t) - A_1 \sin(\varphi_{21} + \alpha_2); \\ \dot{y}_1(t) &= -2C_{2y} \gamma_{21} \exp(-2\gamma_{21} t) - A_1 \hat{\omega}_{21} \cos(\varphi_{21} + \alpha_2). \end{aligned} \quad (5.47)$$

В качестве нулевых начальных условий опорного тела  $m_1$  примем  $x_1(t=0) = 0$ ,  $\dot{x}_1(t=0) = 0$  и  $y_1(t=0) = 0$ ,  $\dot{y}_1(t=0) = 0$ . Тогда с учетом того, что  $2\gamma_{21}t = \frac{2\gamma_{21}}{\hat{\omega}_{21}}\varphi_{21} = \xi_1\varphi_{21}$  из (5.47) найдем:

$$\begin{aligned} C_{1x} &= A_1(\cos \alpha_2 - \xi_1^{-1} \sin \alpha_2); C_{2x} = A_1 \xi_1^{-1} \sin \alpha_2; \\ C_{1y} &= A_1(\sin \alpha_2 + \xi_1^{-1} \cos \alpha_2); C_{2y} = -A_1 \xi_1^{-1} \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Подставив (5.48) в (5.47), получим общее решение дифференциальных уравнений (5.24) как функции от полярной координаты  $\varphi_{21}$ :

$$\begin{aligned} x_1(\varphi_{21}) &= A_1(\cos \alpha_2 - \xi_1^{-1}(1 - \exp(-\xi_1\varphi_{21}))\sin \alpha_2 - \cos(\varphi_{21} + \alpha_2)); \\ \dot{x}_1(\varphi_{21}) &= -A_1\omega_{21}(\exp(-\xi_1\varphi_{21})\sin \alpha_2 - \sin(\varphi_{21} + \alpha_2)); \\ y_1(\varphi_{21}) &= A_1(\sin \alpha_2 + \xi_1^{-1}(1 - \exp(-\xi_1\varphi_{21}))\cos \alpha_2 - \sin(\varphi_{21} + \alpha_2)); \\ \dot{y}_1(\varphi_{21}) &= A_1\omega_{21}(\exp(-\xi_1\varphi_{21})\cos \alpha_2 - \cos(\varphi_{21} + \alpha_2)). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Инвариатность амплитуды  $A_1$  (5.8), входящей в частное решение (5.22) второго уравнения (5.3), и амплитуды  $A_1$  (5.38), входящая в частное решение (5.32) приближенного уравнения переходного процесса (5.24), обеспечивает согласованность решений этих уравнений на границе переходного процесса и стационарного состояния МС2, а также позволяет выразить решения уравнений (5.3) и (5.24) одним решением (5.49).

Координаты и скорость ЦМ  $C$  МС2 в системе отсчета  $K$  можно определить по формулам:

$$\begin{aligned} x_C &= (m_1x_1 + m_2x_2) / m; y_C = (m_1y_1 + m_2y_2) / m; \\ \dot{x}_C &= (m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2) / m; \dot{y}_C = (m_1\dot{y}_1 + m_2\dot{y}_2) / m, \end{aligned} \quad (5.50)$$

где координаты  $x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}$ ,  $y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}$  и определенные по ним скорости  $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \hat{\omega}_{21}R \sin \varphi_{21}$ ,  $\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \hat{\omega}_{21}R \cos \varphi_{21}$ .

## 5.5. Результаты математического моделирования

Траектории движения  $s_1, s_2$  и  $s_C$  опорного  $m_1$ , рабочего  $m_2$  тел и ЦМ  $C$  МС2 в системе отсчета  $K$ , рассчитанные по решениям (5.49) и формулам (5.50) для  $m_1 = m_2 = 1$  кг,  $R = 1$  м и  $\dot{y}_2(0) = 1$  м/с приведены на рис. 5.2, а и для  $m_1 = 1000$  кг;  $m_2 = 1$  кг,  $R = 1$  м и  $\dot{y}_2(0) = 1$  м/с – на рис. 5.2, б.

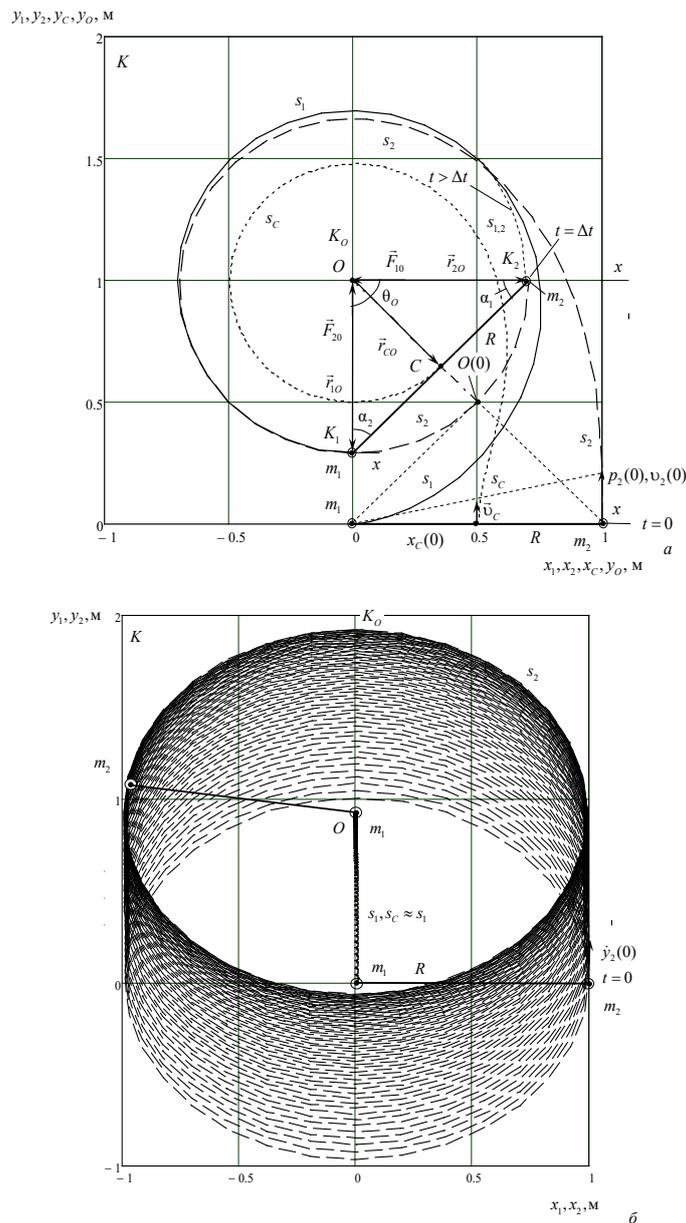


Рис. 5.2. Траектории движения  $s_1, s_2$  и  $s_C$  опорного  $m_1$ , рабочего  $m_2$  тел и ЦМ  $C$  МС2: для  $m_1 = m_2 = 1$  кг,  $R = 1$  м и  $\dot{y}_2(0) = 1$  м/с – а; и для  $m_1 = 1000$  кг;  $m_2 = 1$  кг,  $R = 1$  м и  $\dot{y}_2(0) = 1$  м/с – б

Согласно решениям (5.49) и расчетам, показанным на рис. 5.2, а, Движение МС2 можно рассматривать как сложное движение состоящее из ее движения относительно центра  $O$  ИД и ее переносного движения вместе с этим центром  $O$ . ИД формируется в момент времени  $t = 0$ , что согласуется с представлением о мгновенной передаче взаимодействий по стержню конечной длины  $R$ . Начальное положение центра  $O(0)$  ИД и его траектория движения (пунктирная линия) в положение  $O$  показаны на рис. 5.2, а.

Текущие значения координат центра  $O$  ИД можно определить из решений (5.49) в виде:

$$\begin{aligned} x_O(\varphi_{21}) &= A_1 \left( \cos \alpha_1 - \xi_1^{-1} (1 - \exp(-\xi_{21} \varphi_{21})) \sin \alpha_1 \right); \\ y_O(\varphi_{21}) &= A_1 \left( \sin \alpha_1 + \xi_1^{-1} (1 - \exp(-\xi_{21} \varphi_{21})) \cos \alpha_1 \right). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Они в системе отсчета  $K$  при  $\varphi_{21} = \omega_{21} t = 0$  составляют  $x_O = A_1 \cos \alpha_{21} = 0,5$  м и  $y_O = A_1 \sin \alpha_{21} = 0,5$  м (см. рис. 5.2, а), а для  $\varphi_{21} = \omega_{21} t = \infty$  —  $x_O = 0$  и  $y_O = \sin \varepsilon = 1$  м.

Скорость  $v_O = \sqrt{\dot{x}^2(\varphi_{21}) + \dot{y}^2(\varphi_{21})}$  центра  $O$  ИД может быть определена дифференцированием (5.51) по времени  $t$ .

На рис. 5.2, а наблюдается отклонение траектории движения ЦМ  $C$  от прямолинейного, направленного вдоль оси  $y$  в системе отсчета  $K$  при переходном процессе МС2. Это вызвано погрешностью математической модели переходного процесса МС2 из-за принятия  $\hat{\omega}_{21} = \omega_{21}(0) / 2 = \text{const}$  (5.31).

Время перехода МС2 в стационарное состояние при  $m_1 = m_2 = 1$  кг и  $v_2(0) = 1$  м/с (для рис. 5.2, а) составляет

$$t = \Delta \varphi_{21} / \omega_{21} = \Delta \varphi_{21} / \omega_{CO} = 7,069 \text{ с}, \quad (5.52)$$

а при  $m_1 = 1000$  кг;  $m_2 = 1$  кг и  $v_2(0) = 1$  м/с (для рис. 5.2, б) —

$$t = \Delta \varphi_{21} / \omega_{21} = \Delta \varphi_{21} / \omega_C = 392,306 \text{ с}, \quad (5.53)$$

где  $\Delta\varphi_{21}$  – суммарный угол поворота тела  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$  к моменту перехода МС2 в стационарное состояние, когда  $y_O(\varphi_{21}) = \max$ .

## 5.6. Выводы

Основным результатом главы является расширение представлений о динамике механических систем в поле ИД:

– для радиального распределения  $\theta_O = \pi / 2$  (5.2) тел замкнутой МС2 с равными массами  $m_1 = m_2$  и числом степеней свободы  $s = 5$  импульс ее ЦМ  $S$  изменяется по фазе по гармоническому закону, так что его циркуляция по замкнутому контуру равна нулю, что обеспечивает сохранность энергии замкнутой МС2.

– скорость передачи импульса между двумя взаимодействующими телами при мгновенной передаче взаимодействия по связи конечной длины  $R$  зависит от соотношения масс этих тел.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

### 6.1. Инерционная центрифуга

#### 6.1.1. Конструкция

Экспериментальная проверка уравнения (2.13), полученного на основе принципа Д, Аламбера с учетом аксиомы связей для относительной силы инерции  $\vec{R}_{21} = \vec{\Phi}_{21}$ , была проведена на двухмассовой инерционной центрифуге [4, 20], которая показана на рис. 6.1.

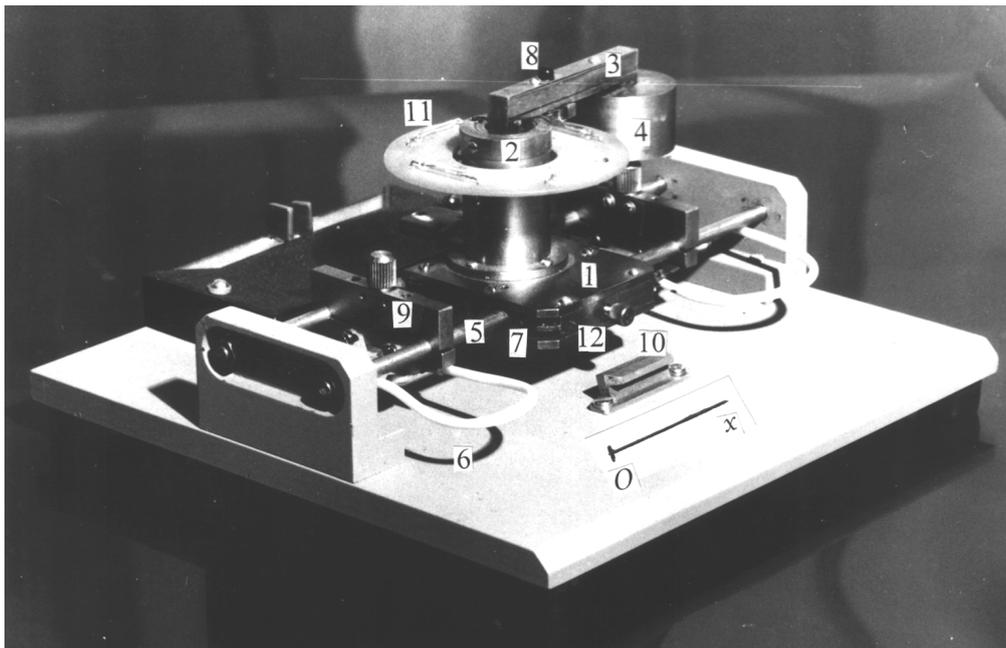


Рис. 6.1. Инерционная центрифуга

Центрифуга содержит каретку 1 с массой  $m_1 = 0,18$  кг, на валу электродвигателя 2 которой посредством кулисы 3 с длиной  $R = 6$  см установлено рабочее тело 4 с массой  $m_2 = 0,12$  кг, которое в собственной системе отсчета

$K_1$  каретки 1 имеет возможность его вращательного движения по обобщенной полярной координате  $\varphi_{21}$ .

Каретка 1 установлена на направляющих 5 основания 6 с возможностью ее перемещения по этим направляющим на роликах 7 по оси  $x$  системы отсчета  $K$ , скрепленной с основанием 6. ЦМ  $C$  системы каретка 1 – рабочее тело 4 индицируется светодиодом 8, установленным на кулисе 3. Положение каретки 1 на направляющих 5 в системе отсчета  $K$  контролируется датчиками ее положения 9, которые установлены на этих направляющих 5, а также нониусом 10. Угол  $\varphi_{21}$  поворота рабочего тела 4 в системе отсчета  $K_1$  контролируется датчиками 11.

Коэффициент вязкого трения каретки 1 о направляющие 5 можно регулировать с помощью тормозного устройства 12, содержащего тормозную колодку, с нанесенным на нее слоем смазки, обеспечивающим приближение к вязкому трению.

Перед проведением эксперимента по решениям (2.34) для  $x_1(\varphi_{21})$ ,  $\dot{x}_1(\varphi_{21})$  при  $y_1 = 0, \dot{y}_1 = 0$  и формулам (2.35) были рассчитаны траектории поступательного движения каретки 1, а также траектории относительного движения рабочего тела 4 и ЦМ  $C$  системы каретка 1 – рабочее тело 4, которые показаны на рис. 6.2, а.

Кроме того, были построены графики  $x_1(\varphi_{21})$ ,  $x_2(\varphi_{21})$ ,  $x_C(\varphi_{21})$  движения каретки 1 и ЦМ  $C$  как функции полярной координаты  $\varphi_{21}$  рабочего тела 4 в его собственной системе отсчета  $K_1$ , которые показаны на рис. 6.2, б.

Первоначально траектории движения и графики, показанные на рис. 6.2 были построены непрерывными линиями, а в последующем были заменены на пунктирные на основе результатов эксперимента.

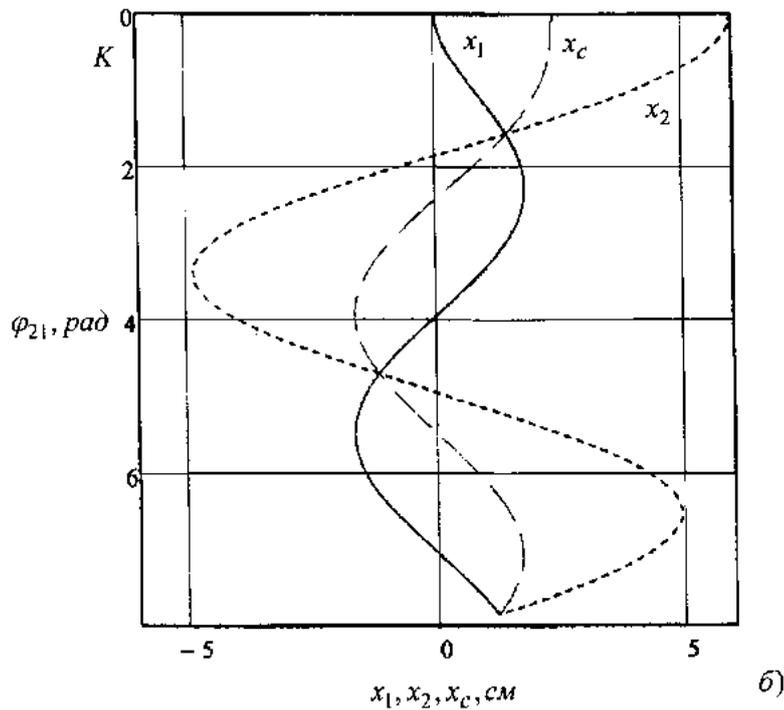
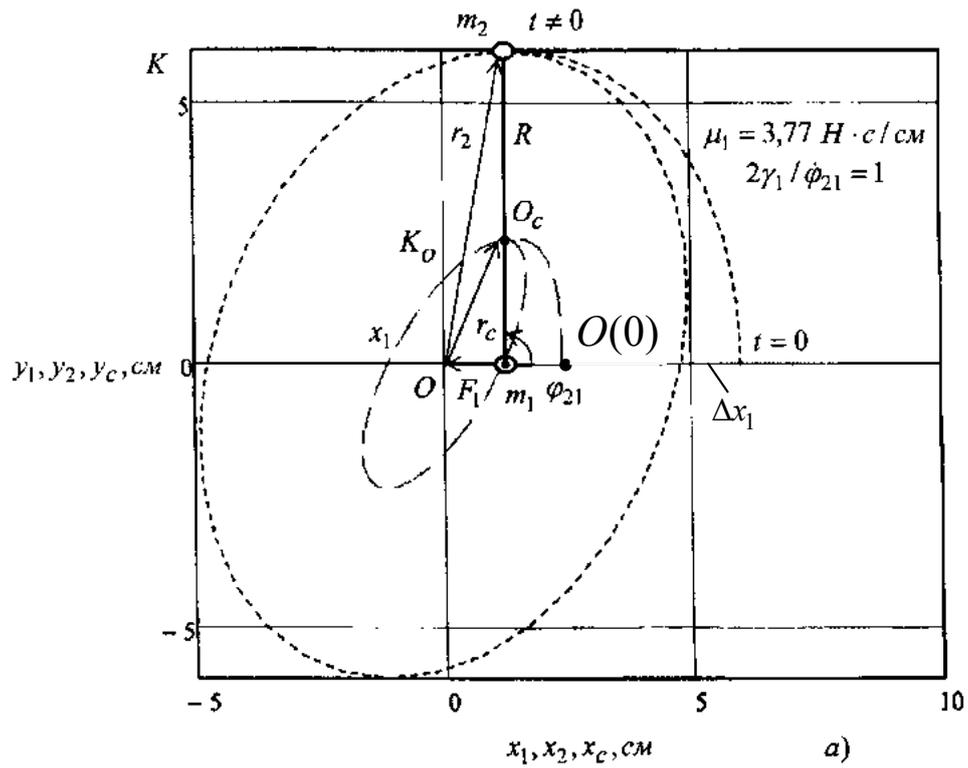


Рис. 6.2. Траектории переносного поступательного движения каретки 1 и ЦМ  $S$  масс системы каретка 1 – рабочее тело 4 – а и графики  $x_1(\phi_{21})$ ,  $x_2(\phi_{21})$ ,  $x_c(\phi_{21})$  их движения как функции от полярной координаты  $\phi_{21}$  – б

Как видно из рис. 6.2, а, каретка 1 центрифуги при  $\varphi_{21} > \pi/2$  совершает в неподвижной системе отсчета  $K_O$ , связанной с силовым центром  $O$  ИД, переносное поступательное движение по оси ее координат  $x$ , а рабочее тело 4 совершает сложное переносно-вращательное движение в этой же системе отсчета  $K_O$ . Вращательная часть сложного движения рабочего тела 4 определена его вращением в собственной системе отсчета  $K_1$  каретки 1 с угловой скоростью  $\omega_{21}$ . Текущую координату силового центра  $O$  ИД относительно начального положения рабочего тела 4 можно определить по формуле

$$x_O(\varphi_{21}) = A_1 \left[ \cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon \right], \quad (6.1)$$

следующей из решения (2.34).

Из (6.1) начальную координату, определяющую начальное положение центра  $O(0)$  ИД (см. рис. 6.2, а) при  $\varphi_{21} = 0$  можно определить в виде  $x_O(0) = A_1 \cos \varepsilon$ . При увеличении угла  $\varphi_{21} \rightarrow \infty$  величина  $x_O(\infty) \rightarrow 0$  и центр  $O$  ИД стягивается к начальному положению каретки 1 с массой  $m_1$ .

Таким образом при увеличении угла  $\varphi_{21} \rightarrow \infty$  происходит стягивание  $\Delta x_1 = -A_1 \cos \varepsilon$  силового центра  $O$  ИД к начальному положению каретки 1, что вызвано действием на нее диссипативной силы  $\vec{F}_1 = \mu_1 \vec{v}_1$  (2.13). Согласно рис. 6,2, а стягивание завершается при угле  $\varphi_{21} \approx \pi/2$ .

### 6.1.2. Результаты эксперимента

Эксперимент проводился следующим образом. С помощью откалиброванного регулируемого тормозного устройства 12 центрифуги, показанной на рис. 6.1, выбиралось фиксированное значение сопротивления  $0 < \mu_1 \leq \infty$  движению каретки 1. Затем рабочее тело 4 при начальном угловом положении  $\varphi_{21} = 0$  приводилось во вращательное движение электродвигателем 2 с постоянной угловой скоростью  $\omega_{21} = 12,57$  рад/с. Траектория каретки 1 регистрировалась визуально, а ее крайние положения – датчиками 9, траектория рабочего тела 4 в зависимости от его полярной координаты  $\varphi_{21}$  также

регистровалась визуально, а в дискретных точках со сдвигом  $\pi/4$  – датчиками 11. Траектория ЦМ  $S$  системы каретка 1 ( $m_1$ ) – тело 4 ( $m_2$ ) регистрировалась визуально по положению светодиода 8. По относительной задержке импульсов датчиков 9 и 11 вычислялся угол запаздывания  $\varphi(\mu_1) = \pi + \varepsilon$  (2.17) переносного поступательного движения каретки 1 относительно вращательного движения рабочего тела 4.

Визуальные траектории движения каретки 1, рабочего тела 4 и их ЦМ  $S$ , наблюдаемые для фиксированных  $0 < \mu_1 \leq \infty$ , накладывались на расчетные. Если отклонение визуальных траектории от расчетных не превышало величину 5–10% то, непрерывные расчетные траектории заменялись пунктирными, как для  $\mu_1 = 3,77$  Н·с/см показано на рис. 6.2.

Совпадение теоретических и экспериментальных траекторий движения каретки 1, рабочего тела 4 и их ЦМ  $S$  (см. рис. 6.2) с точностью до величины  $< 5-10\%$  обосновывает достоверность уравнения (2.13), записанного на основе принципа Д'Аламбера с учетом аксиомы связей для относительной силы инерции  $\vec{R}_{21} = \vec{\Phi}_{21}$ :

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1, \quad (6.2)$$

а также достоверность его решений (2.34) и обоснованность применения сопутствующих формул (2.35).

## 6.2. Эффект смещения центра масс

### 6.2.1. Конструкция трехмассового кривошипно-ползунного механизма

Эффект смещения ЦМ  $S$  был экспериментально подтвержден с использованием КПМ [3–5, 20], который показан на рис. 6.3. Он содержит опорное тело в виде основания 1, на котором посредством стержней 2 с длиной  $R$ , шарнирных по отношению к основанию 1, установлены два рабочих тела 3 с возможностью их встречного синхронного вращательного перемещения в плоскости основания 1 из положения  $x_{21}^{(1)}$  в положение  $x_{21}^{(2)}$  на

угол  $\alpha = \varphi_{21} = \pi$  в системе отсчета  $K_1$  основания 1. Положениям  $x_{21}^{(1)}$  и  $x_{21}^{(2)}$  тел 3 соответствуют положения  $x_C^{(1)}$  и  $x_C^{(2)}$  ЦМ С КППМ в этой же системе отсчета  $K_1$ . Вращательное перемещение тел 3 осуществляется пружиной 4 через гибкую связь (нить) и приводных шкивов с радиусом  $r$ , а фиксация этих тел в начальном положении  $x_{21}^{(1)}$  – с помощью фиксирующего устройства 5, или же посредством нити, намотанной на тела 3, которую без непосредственного к ней касания пережигают. Синхронное вращательное перемещение рабочих тел 3 на угол  $\alpha = \varphi_{21} = \pi$  завершается их мгновенным торможением в положении  $x_{21}^{(2)}$ , что обеспечивается выступом 6 и встроенными в него магнитом с наложенными на него демпфирующими прокладками, обеспечивающими абсолютно неупругий встречный удар рабочих тел 3. Основание 1 установлено на сменных опорах 7.

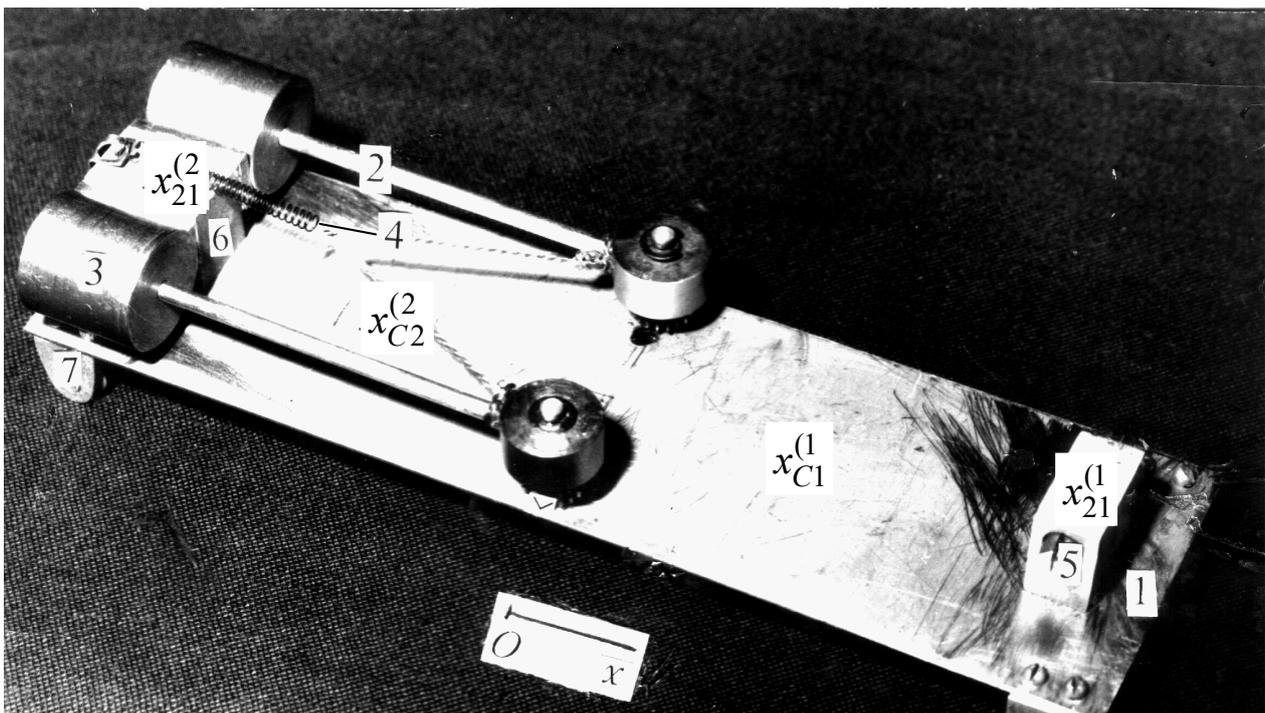


Рис. 6.3. Трехмассовый кривошипно-ползунный механизм

Технические характеристики КППМ приведены в табл. 6.1

Таблица 6.1.

Наименование технической характеристики	Значение	
Масса основания 1, $m_1$	0,14 кг	
Общая масса рабочих тел 3, $\tilde{m}_2$	0,11 кг	
Длина стержней, $R$	7,5 см	
Радиус приводных шкивов, $r$	1,0 см	
Коэффициент жесткости пружины, $k$	610,68 Н/с <sup>2</sup>	
Коэффициент сопротивления, $\mu_1$	1,57 Н·с/см	
Смещение основания 1 и ЦМ $C$ КПМ при угле поворота рабочих тел $m_2$ на угол $\alpha = \pi$	$\Delta x_1$ , см	$\Delta x_C$ , см
– скользящие опоры	0	– 6.6
– подшипники (шариковые, скольжения)	0	– 6.6
– жидкостная опора	0	– 6.6
– газовая опора	– 6.6	0

### 6.2.2. Математическое моделирование

Приближенная математическая модель КПМ рассмотрена в третьей главе. На рис. 6.4 показаны траектории движения его ползуна 1 ( $m_1$ ) и рабочих тел 3 ( $m_2$ ), а также его ЦМ  $C$ , которые рассчитаны по решениям (3.5), (3.12) и формулам (3.6) за общее время  $0 \leq t \leq 1,5$  с активной и пассивной фаз его движения, когда смещение ползуна  $m_1$  КПМ и его ЦМ  $C$  при  $\xi = 1$  (для  $\mu_1 = 1,571$  Н·с/см) и  $t \rightarrow \infty$  составляют  $\Delta x_1 = 2,588 \cdot 10^{-7}$  см и  $\Delta x_C = 6,6$  см.



в интервале времени  $0 \leq t \leq 1,5$  с, где  $x_1^{(1)}$ ,  $x_C^{(1)}$  и  $x_1^{(2)}$ ,  $x_C^{(2)}$  – начальные положения основания 1 и ЦМ С и их положения после вращательного перемещения рабочих тел 3 из положения  $x_{21}^{(1)}$  в положение  $x_{21}^{(2)}$  на угол  $\alpha = \pi$  в системе отсчета  $K_1$  (см. рис. 6.4, а).

Величина смещения  $\Delta x_C$  (6.3) ЦМ С КПМ в системе отсчета  $K$  при повороте рабочих тел 3 на угол  $\alpha = \pi$  для различных опор приведена табл. 6.1.

Согласно табл. 6.1 эксперимент подтвердил, что смещение ЦМ С КПМ для любого из фиксированных углов  $\alpha$  встречного вращательного перемещения ее рабочих тел  $m_2$  при  $\xi = 2\gamma_1 / \dot{\phi}_{21} \geq \xi_{\text{п}}$  не зависит от сопротивления внешней среды  $\mu_1$  и всегда остается постоянным  $\Delta x_C(\alpha) = \text{const}$ . При бесконечно малом и нулевом сопротивлении  $\mu_1 \rightarrow 0$  оно обращается в нуль  $\Delta x_C = 0$ .

### 6.3. Инерциоид

#### 6.3.1. Конструкция, принцип действия и технические характеристики

Конструкция инерциоида, предложенная в работах [4, 20, 22, 23], показана на рис. 6.5.

Инерциоид содержит основание 1 с массой  $m_1$  и два рабочих тела 2 с общей массой  $\tilde{m}_2$ , которые установлены в направляющие 3 и 4 основания 1.

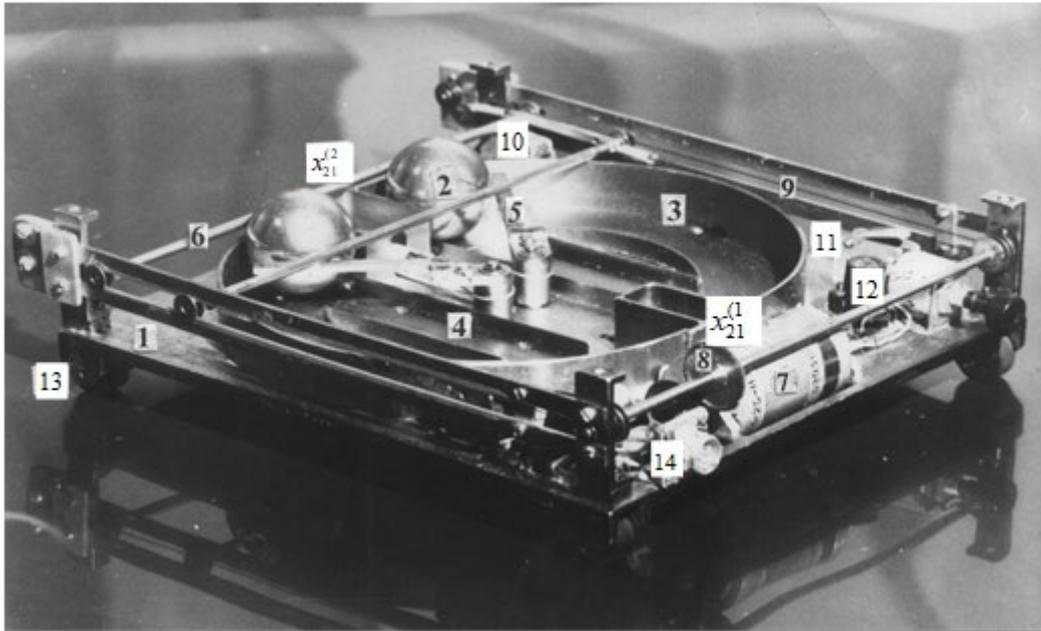


Рис. 6.5. Конструкция инерциоида

Кроме того, инерциоид снабжен подпружиненными клапанами 5, обеспечивающими встречное вращательное перемещение рабочих тел 2 по направляющим 3 при прямом цикле его работы и их обратное прямолинейное перемещение по направляющим 4 при обратном цикле его работы. Также инерциоид содержит толкатели 6, электродвигатель 7, редуктор 8 и гибкую кинематическую связь 9, которые обеспечивают линейное перемещение рабочих тел 2 при прямом обратном цикле работы инерциоида из положения  $x_{21}^{(1)}$  в положение  $x_{21}^{(2)}$  и обратно.

Положения  $x_{21}^{(1)}$  и  $x_{21}^{(2)}$  рабочих тел 2 при прямом и обратном цикле контролируются датчиками 10 и 11, а длительность прямого и обратного циклов задается посредством регулируемого реле времени 12. Инерциоид размещен на роликовых опорах 13. Его электропитание осуществляется с помощью разъема 14.

При прямом цикле осуществляется встречное вращательное перемещение рабочих тел 2 из положения  $x_{21}^{(1)}$  в положение  $x_{21}^{(2)}$  по направляющим 3 с радиусом изгиба  $R$  на угол  $\varphi_{21} = \pi$  посредством подпружиненных клапанов 5 и толкателей 6. После абсолютно неупругого встречного удара рабочих тел 2 в положении  $x_{21}^{(2)}$  клапана 5 переводят эти тела на направляющие 4 и

толкатели 6 возвращают их в исходное положение  $x_{21}^{(1)}$  посредством прямолинейного движения.

Длительность  $t_1 = 0,5$  с вращательного перемещения рабочих тел 2 определяется коэффициентом жесткости  $k = 1114,24$  Н/с<sup>2</sup> пружины подпружиненных клапанов 5, а общая длительность  $\Delta t_{\text{пр}} = t_1 + \Delta t_{\text{пр}}$  прямого цикла (с учетом длительности  $\Delta t_{\text{пр}}$  пассивной фазы движения инерциоида при прямом цикле) задается регулируемым реле времени 12, которое запускается датчиком 10, регистрирующим, то что в момент времени  $t_1$  рабочие тела 2 находятся в положения  $x_{21}^{(2)}$ .

При обратном цикле, длительность которого составляет  $\Delta t_2 = 0,5$  с, осуществляется прямолинейное перемещение рабочих тел 2 из положения  $x_{21}^{(2)}$  в положение  $x_{21}^{(1)}$  по направляющим 4 на расстояние  $2R$  посредством толкателя 6, который приводится в движение электродвигателем 7 через редуктор 8 и гибкую кинематическую связь 9. При прямолинейном перемещении рабочих тел 2 осуществляется взвод подпружиненных клапанов 5, которые в положении  $x_{21}^{(1)}$  этих тел переводят их на направляющие 3. Общая длительность  $\Delta t_{\text{обр}} = t_2 + t_{\text{по}}$  обратного цикла (с учетом длительности  $t_{\text{по}}$  пассивной фазы движения инерциоида при обратном цикле) задается регулируемым реле времени 12, которое запускается датчиком 11, регистрирующим, то что в момент времени  $t_2$  рабочие тела 2 находятся в положения  $x_{21}^{(1)}$ .

Длительность полного цикла работы инерциоида складывается из длительности его прямого и обратного циклов  $\Delta t = \Delta t_{\text{пр}} + t_{\text{обр}}$ .

Технические характеристики инерциоида приведены в табл. 6.2.

Таблица 6. 2.

Технические характеристики инерциоида

Наименование технической характеристики	Значение
Масса основания, $m_1$	0,19 кг
Общая масса рабочих тел $\tilde{m}_2$	0,49 кг
Радиус изгиба направляющих 3, $R$	4,8 см

Наименование технической характеристики	Значение
Радиус приводных шкивов, $r$	1,0 см
Коэффициент жесткости пружины, $k$	1114,24 Н/с <sup>2</sup>
Коэффициент сопротивления движению на четырех опорах качения 13, $\mu_1$	23,642 Н·с/см
Длительность вращательного и линейного перемещения рабочих тел $\tilde{m}_2$ при прямом и обратном цикле, $t_1; t_2$	0,5; 0,5 с
Длительность пассивной фазы движения КПМ при прямом цикле, $t_{пп}$	0,1 с
Длительность пассивной фазы движения КПМ при обратном цикле, $t_{по}$	0,1 с
Длительность полного цикла работы, $\Delta t$	1,2 с
Перемещение инерциоида за полный цикл его работы, $\Delta x_1$	– 2,5 см

### 6.3.2. Математическое моделирование работы инерциоида

#### 6.3.2.1. Прямой цикл работы

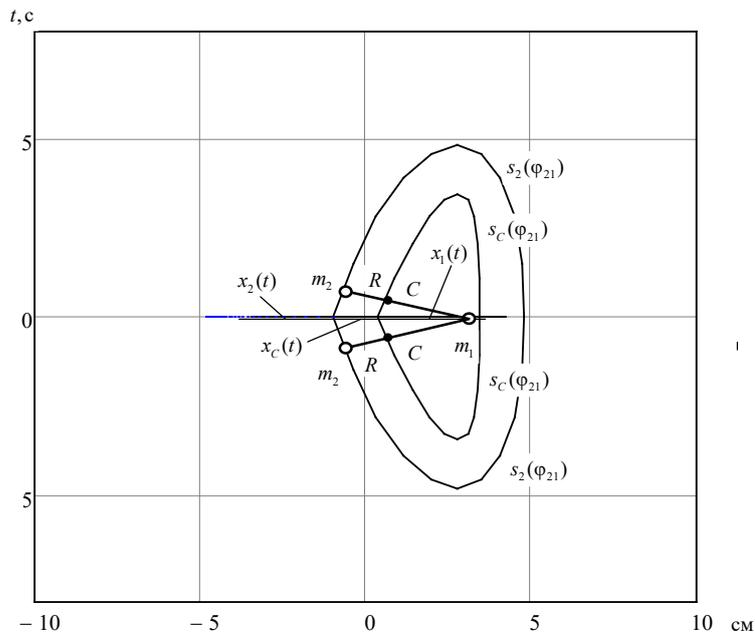
Эквивалентная кинематическая схема инерциоида при прямом цикле его работы показана на рис. 6.6, а. Здесь основание инерциоида обозначено как  $m_1$ , а рабочие тела как  $m_2$ . Рабочие тела  $m_2$  с помощью шарнирных стержней  $R$  установлены на основании  $m_1$  с возможностью их синхронного встречного вращательного перемещения в плоскости основания  $m_1$  из положения  $x_{21}^{(1)}$  в положение  $x_{21}^{(2)}$  на угол  $\varphi_{21} = \pi$ .

Математическая модель инерциоида при прямом цикле его работы включает решения (3.5) и формулы (3.6) активной фазы его движения (встречного синхронного вращательного перемещения рабочих тел  $m_2$  из

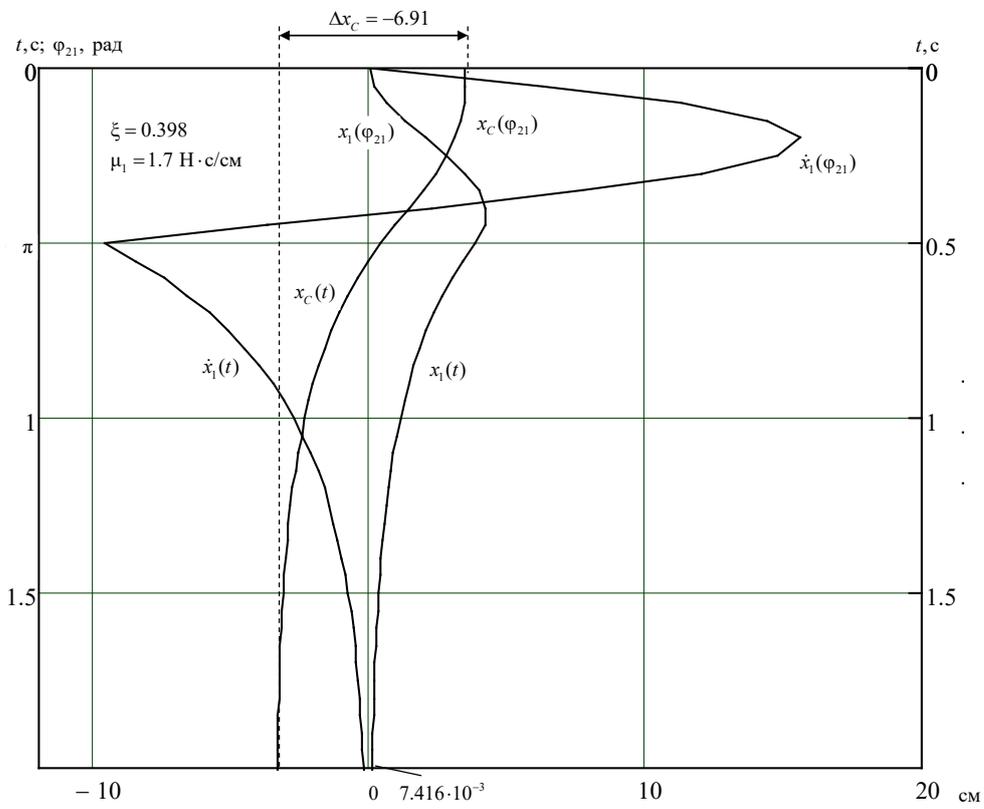
положения  $x_{21}^{(1)}$  в положение  $x_{21}^{(2)}$  на угол  $\varphi_{21} = \pi$ ) и решения (3.12) пассивной фазы движения инерциоида (затухающего движения как целого).

Графики положения  $s_1(\varphi_{21}), x_1(t)$  и скорости  $\dot{x}_1(t)$  основания  $m_1$  инерциоида, а также положения  $s_C(t), x_C(t)$  его ЦМ  $C$  в системе отсчета  $K$ , рассчитанные по решениям (3.5), (3.12) и формулам (3.6) для прямого цикла его работы с длительностью  $t_{\text{ци}} = 2,0$  с при  $\mu_1 = 1,7$  Н·с/см;  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} = 0,398$  и его собственных параметрах  $m_1 = 0,19$  кг;  $\tilde{m}_2 = 0,49$  кг;  $R = 4,8$  см, показаны на рис. 6.6, а и б.

Аналогичные графики, рассчитанные для прямого цикла инерциоида при  $\mu_1 = 9,7$  Н·с/см;  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} = 2,27$  длительностью  $t_{\text{ци}} = 1,0$  с и его приведенных выше собственных параметрах, показаны на рис. 6.6, в и г.



a)



b)

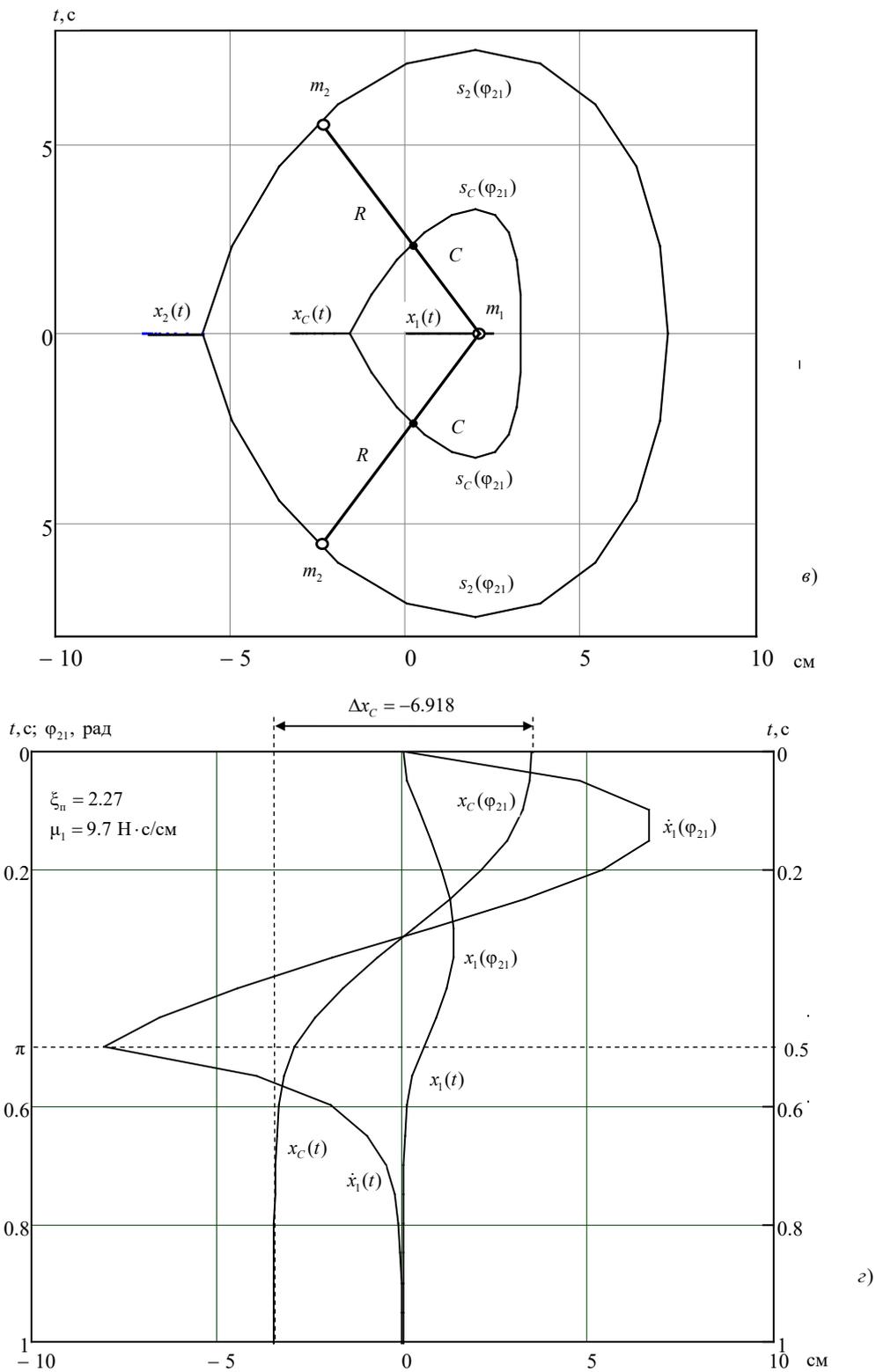


Рис. 6.6. Инерциоид:  
 эквивалентная кинематическая схема инерциоида – а, в;  
 графики положения  $x_1(t)$  и скорости  $\dot{x}_1(t)$  его основания  $m_1$ ,  
 а также положения  $x_C(t)$  его ЦМ  $C$  – б, г

Согласно графикам показанным на рис. 6.6, *a – z* при встречном синхронном вращательном перемещении рабочих тел  $m_2$  на угол  $\alpha = \varphi_{21} = \pi$ , при  $t_1 = 0,5$  с происходит их мгновенное торможение в виде абсолютно неупругого встречного удара с линией удара ортогональной оси  $x$ , так, что их угловая скорость  $\omega_{21}$  мгновенно обращается в нуль  $\omega_{21} = 0$ . При этом скорость  $\dot{x}_1$  основания  $m_1$  за время этого удара не изменяет своего числового значения, как показано на рис. 6.6, *б* и *z*. В результате обращения угловой скорости  $\omega_{21}$  вращательного перемещения рабочих тел  $m_2$  при  $\varphi_{21} = \pi$  в нуль  $\omega_{21} = 0$  инерциоид как единое целое (совместно с его ЦМ  $C$ ) совершает в системе отсчета  $K$  затухающее поступательное движение. Это вызвано тем, что положение  $x_1(\varphi_{21})$  и скорость  $\dot{x}_1(\varphi_{21})$  основания  $m_1$  при  $\alpha = \varphi_{21} = \pi$  имеют различные знаки: соответственно положительный  $x_1(\alpha) = 3,842; 0,562$  см и отрицательный  $\dot{x}_1(\alpha) = \dot{x}_C(\alpha) = -9,604; -8,023$  см/с, где первые значения указаны для рис. 6.6, *б*, а вторые для 6.6, *z*.

Графики затухающего положения  $x_1(t)$  и скорости  $\dot{x}_1(t)$  основания  $m_1$  инерциоида, а также затухающего движения  $x_C(t)$  его ЦМ  $C$  в системе отсчета  $K$ , рассчитанные по решениям (3.12) для времени  $t_1 \leq t \leq 2,0$  с, показаны на рис. 6.6, *б* и *z*. Смещение ЦМ  $C$  при  $\mu_1 = 1,7$  Н·с/см и  $\xi = 0,398$  составило  $\Delta x_C = -6,91$  см, а при  $\mu_1 = 9,7$  Н·с/см и  $\xi_{II} = 2,27$  –  $\Delta x_{C \max} = -a(1 - \cos \alpha) = -2a = -6,918$  см, где  $a = \tilde{m}_2 / R(m_1 + \tilde{m}_2) = 3,459$  см. Смещение  $\Delta x_1$  основания  $m_1$  инерциоида для этих двух случаев составило  $\Delta x_1 = 7,416 \cdot 10^{-3}$  и  $\Delta x_1 = 0$

### 6.3.2.2. Обратный цикл работы

Эквивалентная кинематическая схема инерциоида при обратном цикле его работы показана на рис. 6.7, *a*.

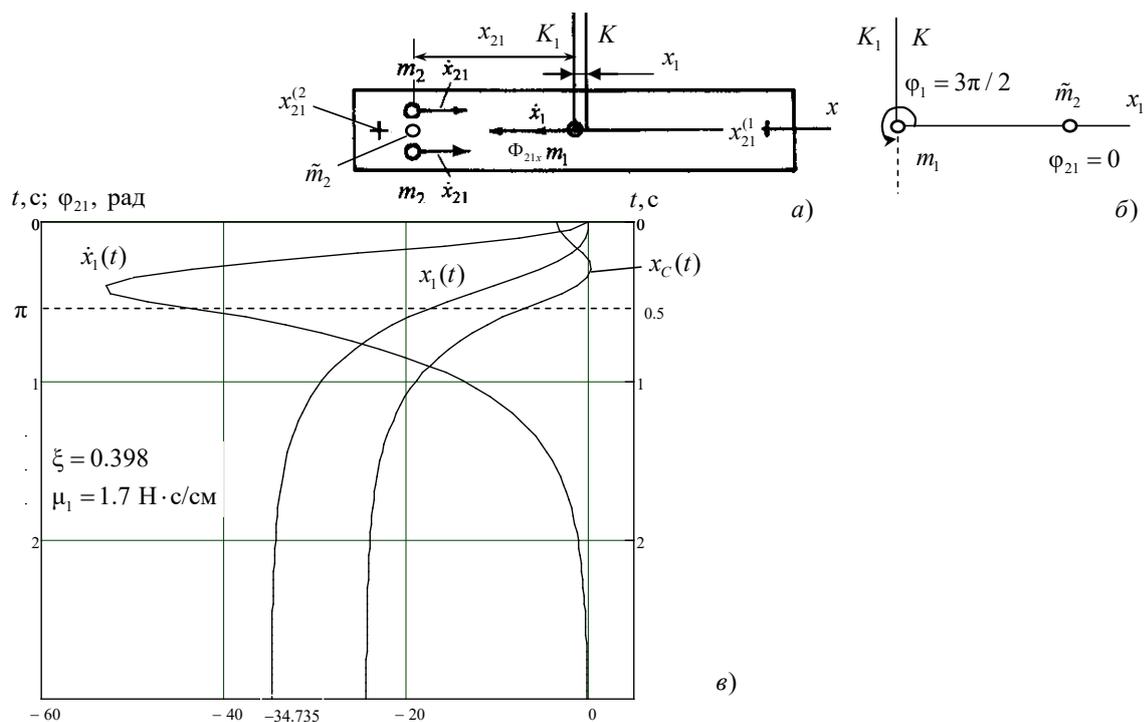


Рис. 6.7. Инерциоид:

упрощенная кинематическая схема инерциоида при обратном цикле его работы – а; диаграмма фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_{21}$  движения его основания  $m_1$  и рабочего тела  $\tilde{m}_2$  – б; графики положения  $x_1(t)$  и скорости  $\dot{x}_1(t)$  его опорного тела  $m_1$ , а также положения  $x_C(t)$  его ЦМ  $C$  масс при линейном перемещении рабочего тела  $\tilde{m}_2$  из положения  $x_{21}^{(1)}$  в положение  $x_{21}^{(2)}$  – в

Переносное движение основания  $m_1$  в системе отсчета  $K$  и относительное движение рабочего тела с приведенной массой  $\tilde{m}_2 = 2m_2$  в системе отсчета  $K_1$  основания  $m_1$  будем рассматривать как гармоническое колебание с фазами  $\varphi_1$  и  $\varphi_{21}$  вдоль оси  $x$  этих систем отсчета. В качестве обобщенных независимых координат инерциоида выберем декартовы координаты  $x_1$  и  $x_{21}$  соответственно основания  $m_1$  в системе отсчета  $K$  и рабочего тела  $\tilde{m}_2$  в системе отсчета  $K_1$ , как показано на рис. 6.7, а.

Полагаем, что положение  $x_{21}$  и скорость  $\dot{x}_{21}$  рабочего тела  $\tilde{m}_2$  в системе отсчета  $K_1$  при его линейном перемещении из положения  $x_{21}^{(2)}$  в положение  $x_{21}^{(1)}$  за время  $t = t_2$  на расстояние  $2R$  определяется уравнениями:

$$x_{21} = R_{21}(1 - 2 \cos \omega_{21}t); \dot{x}_{21} = 2\omega_{21}R_{21} \sin \omega_{21}t, \quad (6.4)$$

где  $\omega_{21}$  – угловая скорость условного вращательного движения рабочего тела  $\tilde{m}_2$  относительно основания  $m_1$  в проекциях на ось  $x$  его собственной системы рисчета  $K_1$ , которая для  $\cos(\omega_{21}t = \pi) = 0$  при  $t = t_2 = 0,5$  с равна

$$\omega_{21} = \pi / t_2, \quad (6.5)$$

где  $t_2$  – время линейного перемещения рабочего тела  $\tilde{m}_2$  из положения  $x_{21}^{(2)}$  в положение  $x_{21}^{(1)}$ .

С учетом (6.4) положение  $x_2$  и скорость  $\dot{x}_2$  рабочего тела  $\tilde{m}_2$  в неподвижной системе отсчета  $K$  можно определить в виде:

$$x_2 = x_1 + R(1 - 2 \cos \omega_{21}t); \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + 2\omega_{21}R \sin \omega_{21}t, \quad (6.6)$$

где  $x_1$  и  $\dot{x}_1$  – положение и скорость основания  $m_1$  инерциоида в системе отсчета  $K$ .

С учетом скорости  $\dot{x}_1$ , а также скорости  $\dot{x}_2$  (6.6) выразим кинетическую энергию инерциоида для обратного цикла его работы в виде

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + \tilde{m}_2\dot{x}_2^2) = \frac{1}{2}(m_1 + \tilde{m}_2)\dot{x}_1^2 + 2\tilde{m}_2\omega_{21}^2 R^2 \sin^2 \omega_{21}t + U, \quad (6.7)$$

где

$$U = 2\tilde{m}_2\dot{x}_1\omega_{21}R \sin \omega_{21}t \quad (6.8)$$

– обобщенный кинетический потенциал.

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1}, \quad (6.9)$$

записанное с учетом (6.7) и диссипативной функции

$$D = \frac{1}{2} \mu_1 \dot{x}_1, \quad (6.10)$$

дает неоднородное дифференциальное уравнение вида

$$(m_1 + \tilde{m}_2) \ddot{x}_1 + \mu_1 \dot{x}_1 = \Phi_{21x}, \quad (6.11)$$

где  $\Phi_{21x}$  – компонента относительной силы инерции  $\vec{\Phi}_{21}$  рабочего тела  $\tilde{m}_2$  на ось  $x$  системы отсчета  $K$ :

$$\Phi_{21x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_1} = 2\tilde{m}_2 \omega_{21}^2 R \cos \omega_{21} t. \quad (6.12)$$

Частное решение неоднородного уравнения (6.11) будем искать в виде реальной части решения (2.29)

$$x_1(t) = A_1 \cos(\varphi_1) = A_1 \sin(\omega_{21} t + \varepsilon), \quad (6.13)$$

где коэффициенты

$$A_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + 4\gamma_1^2 / \omega_{21}^2}}; \varepsilon = \arctg(2\gamma_1 / \omega_{21}) \quad (6.14)$$

были определены при представлении неоднородного уравнения (6.11) в комплексной форме (2.23) с переопределением коэффициента  $a = 2\tilde{m}_2 R / (m_1 + \tilde{m}_2)$ ;  $\varphi_1 = \varphi_{21} + 3\pi / 2 + \varepsilon$  – фаза движения основания  $m_1$  в системе отсчета  $K$ , выраженная через фазу  $\varphi_{21}$  условного вращательного движения рабочего тела  $\tilde{m}_2$  в системе отсчета  $K_1$ , как показано на рис. 6.7, б, где для упрощения изображения диссипативный угол  $\varepsilon$  (6.14) не показан.

Решение неоднородного дифференциального уравнения (6.11) было записано в виде (2.32):

$$\begin{aligned}x_1(t) &= C_1 + C_2 \exp(-2\gamma_1 t) + A_1 \sin(\omega_{21} t + \varepsilon); \\ \dot{x}_1(t) &= -2C_2 \gamma_1 \exp(-2\gamma_1 t) + A_1 \cos(\omega_{21} t + \varepsilon).\end{aligned}\quad (6.15)$$

Для начальных нулевых условий  $x_1(t=0) = 0$  и  $\dot{x}_1(t=0) = 0$  из (6.15) были найдены коэффициенты:

$$C_1 = -A_1 \left( \sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \cos \varepsilon \right); \quad C_2 = -A_1 \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \cos \varepsilon. \quad (6.16)$$

Подстановка (6.16) в (6.15) дает решения:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -A_1 \left[ \sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \cos \varepsilon (1 - \exp(-2\gamma_1 t)) - \sin(\omega_{21} t + \varepsilon) \right]; \\ \dot{x}_1(t) &= -A_1 \omega_{21} [\cos \varepsilon \exp(-2\gamma_1 t) - \cos(\omega_{21} t + \varepsilon)].\end{aligned}\quad (6.17)$$

Графики положения  $x_1(t)$  и скорости  $\dot{x}_1(t)$  основания  $m_1$  инерциоида, а также положения  $x_C(t)$  его ЦМ  $C$  в системе отсчета  $K$ , рассчитанные по решениям (6.17), (3.12) и формулам (3.6) для обратного цикла его работы с длительностью  $\Delta t_{\text{оц}} = t_2 + t_{\text{по}} = 0,5 + 2,5 = 3,0$  с при  $\mu_1 = 1,7$  Н·с/см;  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} = 0,398$  и его собственных параметрах  $m_1 = 0,19$  кг;  $\tilde{m}_2 = 0,49$  кг;  $R = 4,8$  см, показаны на рис. 6.7, в. Для сравнения аналогичные графики при  $\mu_1 = 9,7$  Н·с/см;  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} = 2,27$ , когда  $\Delta t_{\text{оц}} = t_2 + t_{\text{по}} = 0,5 + 0,5 = 1,0$  с показаны на рис. 6.8.

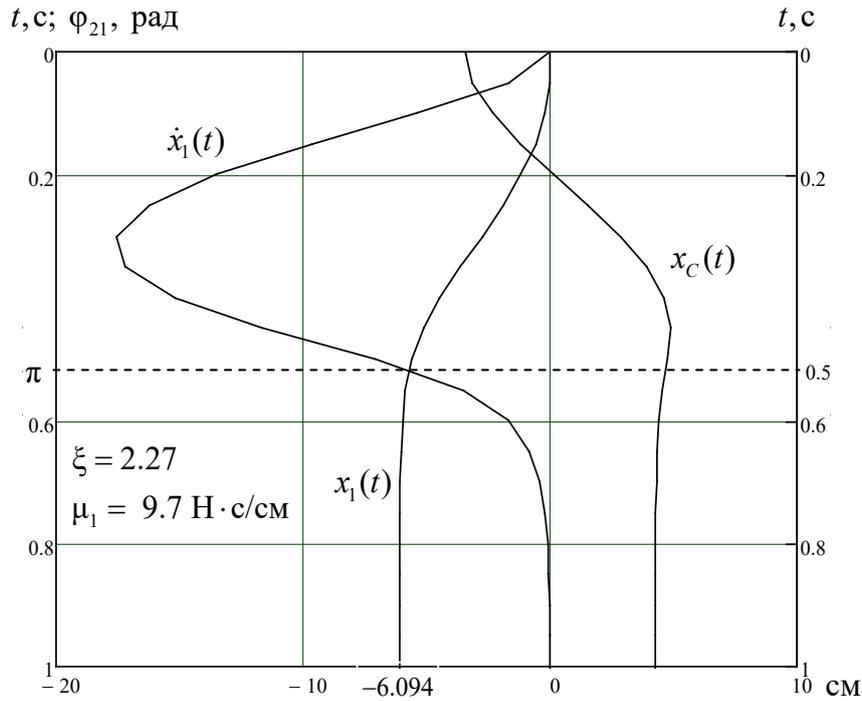


Рис. 6.8. Графики положения  $x_1(t)$  и скорости  $\dot{x}_1(t)$  его опорного тела  $m_1$ , а также положения  $x_C(t)$  его ЦМ  $C$  масс при затухающем движении инерциоида

Согласно графикам, показанным на рис. 6.7, в для  $\mu_1 = 1,7 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{см}$ ;  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} = 0,398$  смещение  $\Delta x_1$  основания  $m_1$  инерциоида в системе отсчета  $K$  при  $t \rightarrow 3,0 \text{ с}$  составляет  $\Delta x_1 = -34,735 \text{ см}$ . Для  $\mu_1 = 9,7 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{см}$ ;  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} = 2,27$  и  $t \rightarrow 1,0 \text{ с}$  оно уменьшается до величины  $\Delta x_1 = -6,094 \text{ см}$  (см. рис. 6.8).

Для эффективной работы инерциоида величину  $\xi$  необходимо выбрать так, чтобы смещение его ЦМ  $C$  при прямом цикле работы стремилось  $\Delta x_C \rightarrow -2a$ , тогда как смещение  $\Delta x_1$  его основания  $m_1$  при обратном цикле работы достигало своего максимума  $\Delta x_1 = \max$ . При уменьшении  $\xi < \xi_{\text{п}}$  эффективность работы инерциоида снижается. Это является следствием того, смещение  $\Delta x_C$  ЦМ  $C$  инерциоида и смещение  $\Delta x_1$  его основания для полного цикла работы при  $\xi \rightarrow 0$  стремятся к нулю  $\Delta x_C \rightarrow 0$  и  $\Delta x_1 \rightarrow 0$ .

Так например для случая с малой диссипацией  $\mu_1 = 1,7 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{см}$ ;  $\xi = 0,398$  из графиков, показанных на рис. 6.6, б и рис. 6.7, в смещение  $\Delta x_{1\text{лц}}$  и  $\Delta x_{1\text{оц}}$

основания  $m_1$  инерциоида за время  $0 \leq t \leq 3,0$  с прямого и обратного циклов его работы можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta x_{1\text{пц}} &= x_1(t = 2 \text{ с}) - x_1(t = 0) = 7,416 \cdot 10^{-3} \text{ см}; \\ \Delta x_{1\text{оц}} &= x_1(t = 3 \text{ с}) - x_1(t = 0) = -34,735 \text{ см}.\end{aligned}\quad (6.18)$$

Смещение ЦМ  $C$  инерциоида по модулю составляет

$$|\Delta x_C| = x_1(t = 0) - x_1(t = 2 \text{ с}) = 6,1 < 2a \text{ см};$$

Оно меньше максимально возможного  $\Delta x_{C \text{ max}} = 2\tilde{m}_2 R / (m_1 + \tilde{m}_2) = 6.918$  см (для рис. 6.6,  $\varepsilon$ ) так как для него  $\xi = 0,398 < \xi_{\text{п}} \approx 2,27$ .

При этом смещение инерциоида за полный цикл работы составит

$$\Delta x_1 = \Delta x_{1\text{пц}} + \Delta x_{1\text{оц}} = -34,7 \text{ см}.\quad (6.19)$$

Дальнейшее уменьшение  $\mu_1 < 1,7$  Н·с/см, для которого  $\xi < 0,398$  эквивалентно стремлению  $\Delta x_C \rightarrow 0$  и  $\Delta x_1 \rightarrow 0$ , что существенно снижает эффективность движения инерциоида.

Перемещение  $\Delta x_1$  инерциоида для многократного повторения полного цикла его работы можно определить по формуле

$$\Delta x_1 = n \Delta x_1, \quad (6.20)$$

где  $n$  – кратность повторения полного цикла работы.

### 6.3.3. Результаты эксперимента

Для каждого полного цикла работы измерялось смещение инерциоида, показанного на рис. 6.5, который установлен на четыре опоры качения содержащие подшипники скольжения с парой латунь-сталь. Смещение инерциоида на этих четырех опорах за один полный цикл его работы составило  $\Delta x_1 \approx -2,5$  см в направлении левого верхнего угла по рис. 6.5. Такому смещению соответствует значение коэффициента сопротивления опор  $\mu_1 = 23,642$  Н·с/см, когда  $\xi = 5,533$ , который заранее неизвестен и был подобран итерационно при математическом моделировании инерциоида. При этом средняя скорость инерциоида составила  $\Delta \dot{x}_1 \approx \Delta x_1 / 1,2 = 2,5 / 1,2 = 2,08$

см/с, где  $\Delta x_1 = \Delta x_{1\text{пц}} + \Delta x_{1\text{оц}} = 0 - 2,5 = -2,5$  см;  $\Delta x_{1\text{пц}}$  и  $\Delta x_{1\text{оц}}$  определены из графиков показанных на рис 6.9, б и рис. 6.10; 1,2 с – длительность полного цикла работы инерциоида, выбранная для  $\mu_1 = 23,642$  Н·с/см (см. табл. 6.2). Смещение ЦМ  $C$  инерциоида при  $\xi = 5,533 > \xi_{\text{п}} = 2,27$  составило  $\Delta x_C \text{ max} = 2\tilde{m}_2 R / (m_1 + \tilde{m}_2) = 6,918$  см, что подтверждает эффект смещения ЦМ  $C$ , рассмотренной в третьей главе.

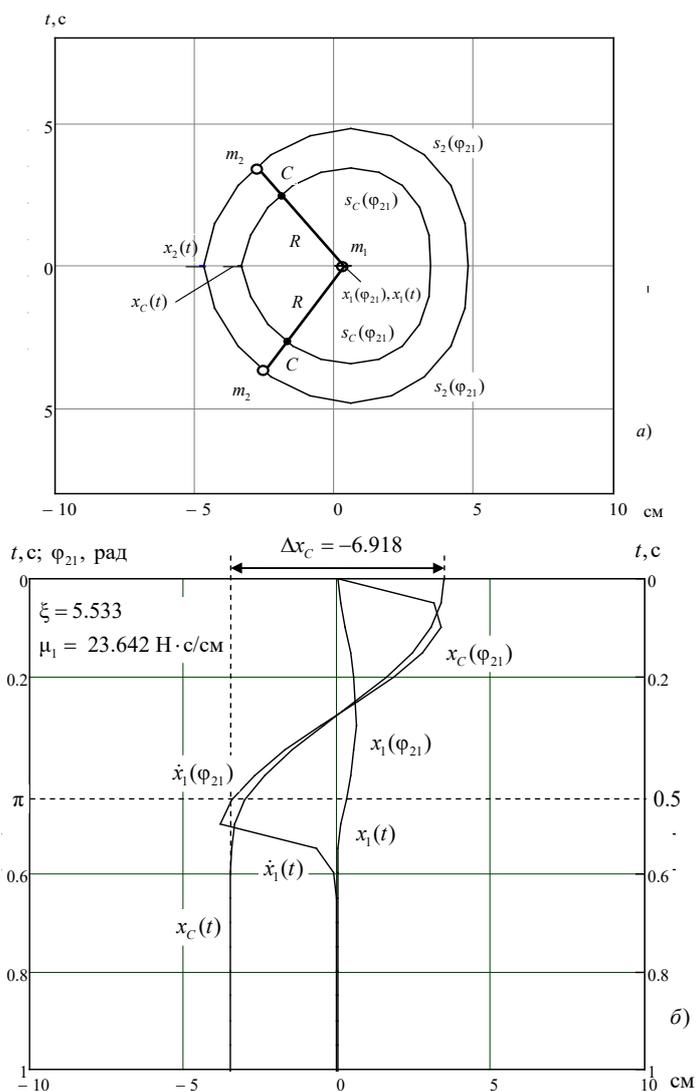


Рис. 6.9. Инерциоид:

упрощенная кинематическая схема инерциоида

при прямом цикле его работы – а; графики положения и скорости  $\dot{x}_1(t)$

его основания  $m_1$ , а также положения  $x_C(t)$  его ЦМ  $C$

при  $\mu_1 = 23,642$  Н·с/см, когда  $\xi=5,533$  – б

Графики положения  $x_1(t)$  и скорости  $\dot{x}_1(t)$  основания  $m_1$  инерциоида, а также положения  $x_C(t)$  его ЦМ  $C$  при обратном цикле его работы при  $\mu_1 = 23,642 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{см}$ , когда  $\xi=5,533$  показаны на рис. 6.10.

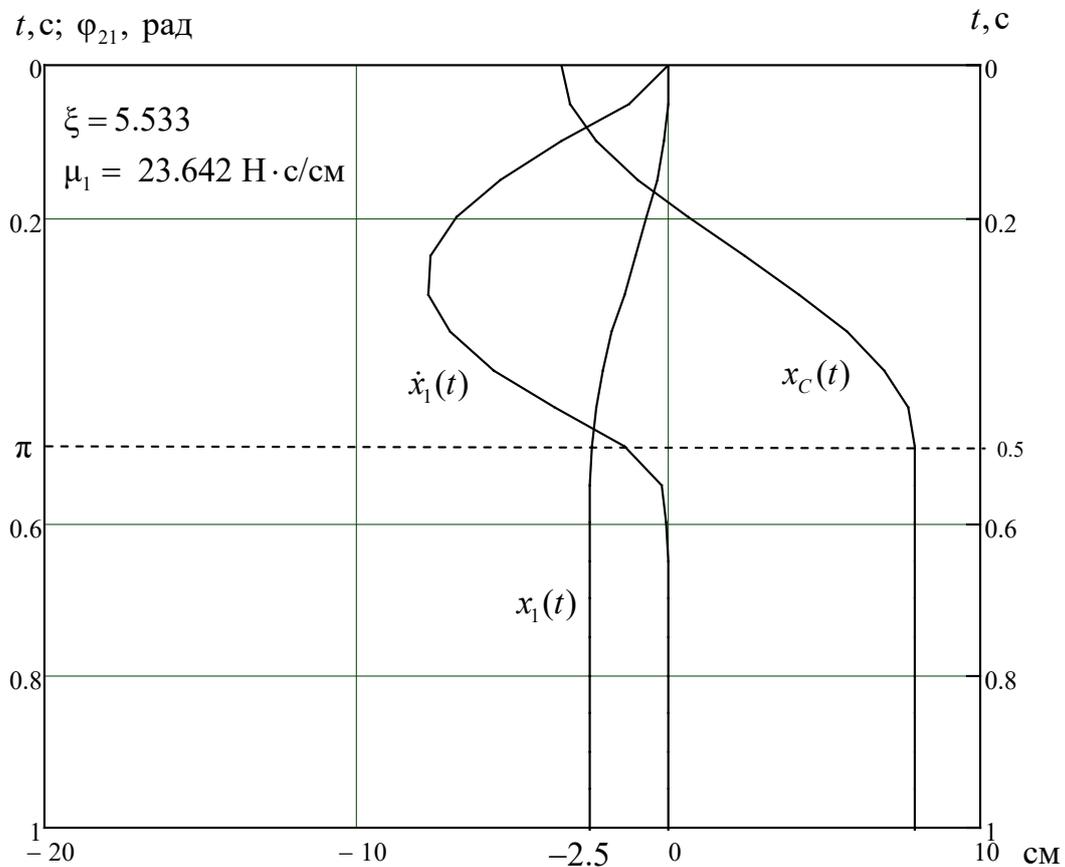


Рис. 6.10. Графики положения  $x_1(t)$  и скорости  $\dot{x}_1(t)$  основания  $m_1$  инерциоида, а также положения  $x_C(t)$  его ЦМ  $C$  при обратном цикле его работы при  $\mu_1 = 23,642 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{см}$ , когда  $\xi=5,533$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно принципу эквивалентности гравитации и инерции по Эйнштейну [21], движение тел  $m_1$  и  $m_2$  по траекториям  $s_{1,2}$  и  $s_{12}, s_{21}$  можно рассматривать как движение по замкнутым геодезическим траекториям [5–7, 14–19] в поле относительных сил инерции (динамическом гравитационном поле [15, 20, 24]). Это также справедливо при взаимодействии этих тел тяготением Ньютона. При  $m_i \gg m_j$  тело  $m_i$  можно рассматривать как неподвижное, а динамическую гравитацию и тяготение – эквивалентными. В случае когда  $R = \text{const}$  и  $s \leq 3$  для решения задачи двух тел [2], находящихся в диссипативной среде, можно использовать уравнение (4.65).

Основные результаты монографии базируются на принципе Д'Аламбера и аксиоме связей для относительных сил инерции.

1. Силы инерции это фундаментальное свойство материальных тел противодействовать изменению состояния их покоя либо равномерного прямолинейного движения при их взаимодействии любой природы (по закону Ньютона, Кулона или Гука). Так, например, взаимодействие материальных тел тяготением Ньютона искривляет траектории их движения. При этом непосредственной первопричиной искривления траекторий движения материальных тел является их взаимодействие, а не массы (по Эйнштейну [21]), вызывающие это взаимодействие.

2. Связь тел двух тел механической системы (механическую или полем) можно условно отбросить, а ее реакцию заменить относительной силой инерции отбрасываемого тела, которой всегда будет противодействовать собственная сила инерции оставшегося опорного тела, оказывающая сопротивление искривлению траектории его движения [7].

3. Движение системы взаимодействующих материальных тел в поле относительных сил инерции является геодезическим и при отсутствии внешних воздействий – замкнутым, что допускает возможность безопорного движения только в области локально-искривленного взаимодействием пространства, что ставит под сомнение выводы работ [8, 9, 11, 12].

4. Для двухмассовой механической системы с пятью степенями свободы время в собственных системах отсчета ее взаимодействующих материальных тел при их сложном переносно-относительном поступательном движении по отношению ко времени в системе отсчета их центра масс протекает по-разному и зависит от масс этих тел [16–18]. Время в системе отсчета центра масс этих тел при их диаметральной распределении и в какой-либо другой инерциальной системе отсчета абсолютно, тогда как для радиального распределения этих тел время в системе отсчета их центра масс и по отношению к времени в системе отсчета, связанной с силовым центром относительных сил инерции, протекает по-разному и зависит от масс тел. Время в системе отсчета этого силового центра и в какой-либо другой инерциальной системе отсчета абсолютно [19].

5. Время передачи импульса от одного тела к другому при мгновенной передаче их взаимодействия посредством связи конечной длины  $R$  определяется отношением массами тел [19].

6. Для двухмассовой механической системы с равными массами и их радиальным распределением, при числе ее степеней свободы равным пяти, произведение суммарной массы этой механической системы на ускорение ее центра масс равно действию на нее поля относительных сил инерции ее взаимодействующих тел так, что циркуляция импульса ее центра масс по замкнутому контуру равна нулю [19].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 1990. 607 с.
2. Савельев И. В. Основы теоретической физики. Механика и электродинамика // М.: Наука, 1991. Т. 1. 496 с.
3. Савелькаев С. В. Эффект независимости величины смещения центра масс механической системы от диссипативности внешней среды (эффект Савелькаева) // Механика машин, механизмов и материалов. Минск: Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси. 2011. № 4 (17). С. 42–48.
4. Савелькаев С. В. Механика. Корреляционная механика механических систем: препринт // Новосибирск: СГГА, 2013. 67 с.
5. Савелькаев С. В. Влияние сил инерции взаимодействующих тел механической системы на ее движение в диссипативной среде и особенности движения [Текст] / С. В. Савелькаев // Новосибирск: Вестник СГУГиТ. – 2022. –Т. 27. – №5. – С. 183–202. <https://doi.org/10.33764/2411-1759-2022-27-5-183-202> (2022).
6. Савелькаев С. В. Влияние силы инерции относительного движения двух взаимодействующих тел на их движение в диссипативной среде // Фундаментальные основы механики (ФОМ-23-12), г. Санкт-Петербург: Научно-исследовательский центр «МашиноСтроение» (НИЦ МС), Том 12. С. 43 – 48. <https://dio.org/10.26160/2542-0127-2023-12-43-48>
7. Савелькаев С. В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 135–149. <https://doi.org/10.17223/19988621/87/11>
8. Patent 2,886,976 US System For Converting Rotary Motion Into Unidirectional Motion / Norman L. Dean – 1956.

9. Толчин В. Н. Инерциоид. Силы инерции как источник поступательного движения. Пермь: Кн. Изд., 1977. С. 89, 90.
10. Гулиа Н. В. Инерция: [Предисловие А. Ю. Ишлинского]. Москва: Наука. Серия Наука и технический прогресс, 1982. 152 с.
11. Шипов Г. И. Теория физического вакуума. М.: НТ-Центр, 1993. 362 с.
12. Иванов Н. И. Ритмодинамика. Москва: Издательско-аналитический центр «Энергия», 2007. 221 с.
13. Савелькаев С. В. Динамический анализ трехмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции. Научно-исследовательский центр «Машиностроение» (НИЦ МС). Материалы VIII международной научно-практической конференции Мехатроника, автоматика и робототехника (ФОМ-24-13), 13 марта, г. Санкт-Петербург, Том 13. С. 5 – 13. <https://dio.org/10.26160/2542-0127-2024-13-5-13>
14. Савелькаев С. В. Динамический анализ трехмассового кривошипно-ползунного механизма на базе его двухмассового аналога // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 118–130. <https://doi: 10.17223/19988621/96/10>
15. Савелькаев С. В. Динамическая гравитация как эквивалент инерции в механике и единица ее измерения [Текст] / С. В. Савелькаев // Новосибирск: Вестник СГУГиТ. – 2025. –Т. 30. – №1. – С. 169–185. <https://doi.org/10.33764/2411-1759-2025-30-1-169-185>
16. Савелькаев С. В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в поле относительных сил инерции ее взаимодействующих тел // Journal of Advanced Research in Technical Science. – Seattle, USA: SRC MS, AmazonKDP. – 2025. – Issue 46 – С. 16–33. <https://doi.org/10.26160/2474-5901-2025-46-16-33>
17. Савелькаев С. В. Динамический анализ двухмассовой механической системы с пятью степенями свободы в поле относительных сил инерции // Фундаментальные основы механики (ФОМ-25-15), г. Санкт-Петербург: Научно-исследовательский центр «МашиноСтроение» (НИЦ МС), Том 15. С. 15 – 30. <https://doi.org/10.26160/2542-0127-2025-15-15-30>

18. Савелькаев С. В. Динамический анализ многомассовых механических систем в поле относительных сил инерции : препринт / С. В. Савелькаев. – Новосибирск, СГУГиТ, 2025. – 66 с.

19. Савелькаев С. В. Динамический анализ двухмассовой механической системы с пятью степенями свободы в поле относительных сил инерции с радиальным распределением ее масс // Journal of Advanced Research in Technical Science. – Seattle, USA: SRC MS, AmazonKDP. – 2025. – Issue 51 – С. 23–39. <https://doi.org/10.26160/2474-5901-2025-51-23-39>

20. Савелькаев С. В. Теория гравитации. Москва: МЭИ, 1993. – 106 с.

21. Эйнштейн А. О специальной и общей теории относительности // Собр. науч. тр. в 4-х томах. Т. 1. Москва, Наука, 1965. – 563 с.

22. Пат. 2056524. Российская федерация. *F 03 G 3/00*. Гравитационный движитель Савелькаева / Савелькаев С. В.; заявитель и патентообладатель Савелькаев С. В. – 1996.

23. Пат. 2147595. Российская федерация. *F 03 G 3/00*. Гравитационный движитель Савелькаева / Савелькаев С. В.; заявитель и патентообладатель Савелькаев С. В. – 2000.

24. Заявка на открытие № ОТ-МЗ-177 Россия. Закономерность гравитационной динамики замкнутых систем / Савелькаев С.В. – заявл. 12.10.93 (с присоединением к заявке ОТ №106074 заявл. 21.10.91).

Программы расчета на Маткад-14

П.1. Программа расчета смещения ЦМ С КПМ при пороговом значении коэффициента сопротивления внешней среды  $\mu_{\Pi} = 0,156 \text{ Н} \cdot \text{с/см}$

$$\begin{aligned}
 T &:= .5 & z1 &:= 0.156 & m1 &:= .14 & m2 &:= .11 & R21 &:= 7.5 \\
 \gamma1 &:= \frac{z1}{2 \cdot (m1 + m2)} & \omega21 &:= \frac{4 \cdot \text{atan}(1)}{T} & \xi &:= \frac{2\gamma1}{\omega21} & a &:= \frac{m2R21}{m1 + m2} & A1 &:= \frac{a}{\sqrt{1 + \xi^2}} \\
 \beta &:= \text{atan}(\xi) & \alpha &:= \beta \cdot \frac{180}{\pi} & i &:= 0 \dots 10 & t_1 &:= \frac{i}{20} & c21_i &:= i \cdot \frac{\pi}{20T} & f21_i &:= c21_i \cdot \frac{180}{\pi} \\
 x1 &:= A1 \cdot \left( \cos(\beta) - \omega21 \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{1 - \exp(-\xi \cdot c21)}{2 \cdot \gamma1} - \cos(c21 + \beta) \right) \\
 v1 &:= -A1 \cdot \omega21 \cdot (\sin(\beta) \cdot \exp(-\xi \cdot c21) - \sin(c21 + \beta)) & y1_i &:= 0 \\
 x2 &:= x1 + R21 \cdot \cos(c21) & y2 &:= R21 \cdot \sin(c21) & v2 &:= v1 - R21 \cdot \omega21 \cdot \sin(c21) \\
 xc &:= \frac{m1 \cdot x1 + m2 \cdot x2}{m1 + m2} & vc &:= \frac{m1 \cdot v1 + m2 \cdot v2}{m1 + m2} & yc &:= \frac{m1 \cdot y1 + m2 \cdot y2}{m1 + m2} \\
 i &:= 0 \dots 300 & u_i &:= \frac{i}{20} & d1 &:= x1_{10} + \frac{v1_{10}}{2 \cdot \gamma1} \cdot (1 - \exp(-2 \cdot \gamma1 \cdot u)) & y_i &:= 0 \\
 d2 &:= x2_{10} + \frac{v1_{10}}{2 \cdot \gamma1} \cdot (1 - \exp(-2 \cdot \gamma1 \cdot u)) \\
 dc &:= xc_{10} + \frac{v1_{10}}{2 \cdot \gamma1} \cdot (1 - \exp(-2 \cdot \gamma1 \cdot u)) & vdc &:= v1_{10} \cdot \exp(-2 \cdot \gamma1 \cdot u) & u_i &:= \frac{i}{20} + .5 & xc_0 &= 3.3 \\
 dc_{300} &= -3.3 & \Delta \tilde{N} &:= dc_{300} - xc_0 = -6.6 & \Delta x1 &:= d1_{300} - x1_0 = 4.873 \times 10^{-4}
 \end{aligned}$$

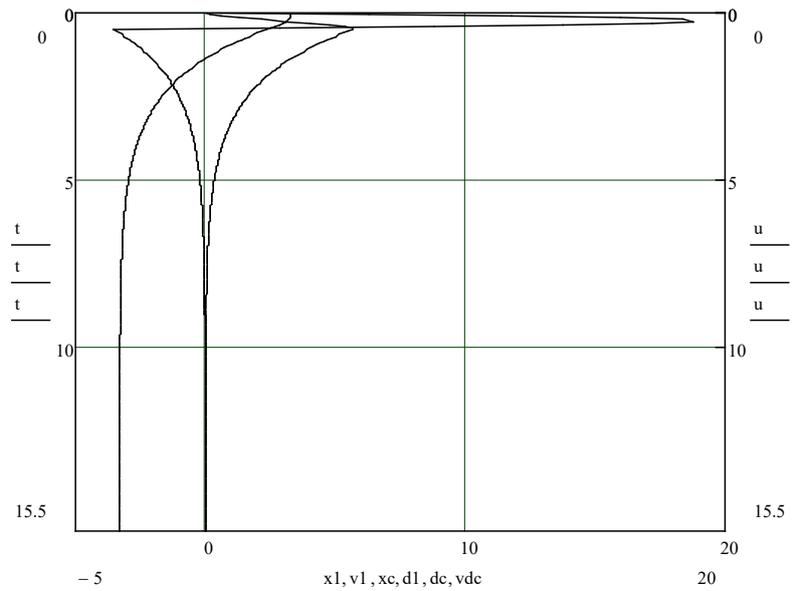


Рис. П.1. Графики положения  $x_1(t)$  и скорости  $\dot{x}_1(t)$  основания 1 КПМ, а также положения  $x_C(t)$  его ЦМ  $C$  масс при вращательном перемещении его рабочих тел 3 и затухающем движении основания 1 КПМ

П.2. Программа расчета траекторий движения тел  $m_1$  и  $m_2$  двухмассовой механической системы и ее ЦМ  $C$  при радиальном распределении  $\theta_0 = \pi / 2$

$$\begin{aligned}
m1 &:= 1. & m2 &:= 1. & R21 &:= 1. & v2y &:= 1. & \omega c o &:= \frac{v2y}{R21} = 1 & \omega c &:= \omega c o \\
\xi 1 &:= \frac{m2}{m1} & \xi 2 &:= \frac{m1}{m2} & a1 &:= \frac{m2 R21}{m1} & a2 &:= \frac{m1 R21}{m2} & A1 &:= \frac{a1}{\sqrt{1 + \xi 1^2}} & A2 &:= \frac{a2}{\sqrt{1 + \xi 2^2}} \\
\alpha 12 &:= \operatorname{atan}\left(\frac{m2}{m1}\right) & \alpha 21 &:= \operatorname{atan}\left(\frac{m1}{m2}\right) & \Theta &:= \pi - \alpha 12 - \alpha 21 \\
\omega 21 &:= m1 \frac{\omega c o}{m1 + m2} = 0.5 & \gamma 21 &:= m2 \frac{\omega 21}{2m1} \\
i &:= 1..36 & c21_i &:= i \frac{\pi}{16} \\
x1 &:= A1 \cdot \left[ \cos(\alpha 12) - \xi 1^{-1} \cdot \sin(\alpha 12) \cdot (1 - \exp(-\xi 1 \cdot c21)) - \cos(c21 + \alpha 12) \right] \\
y1 &:= A1 \cdot \left[ \sin(\alpha 12) + \xi 1^{-1} \cdot \cos(\alpha 12) \cdot (1 - \exp(-\xi 1 \cdot c21)) - \sin(c21 + \alpha 12) \right] \\
x0 &:= A1 \cdot \left[ \cos(\alpha 12) - \xi 1^{-1} \cdot \sin(\alpha 12) \cdot (1 - \exp(-\xi 1 \cdot c21)) \right] \\
y0 &:= A1 \cdot \left[ \sin(\alpha 12) + \xi 1^{-1} \cdot \cos(\alpha 12) \cdot (1 - \exp(-\xi 1 \cdot c21)) \right] \\
x2 &:= x1 + R21 \cdot \cos(c21) & y2 &:= y1 + R21 \cdot \sin(c21) \\
x c &:= \frac{m1 x1 + m2 x2}{m1 + m2} & y c &:= \frac{m1 y1 + m2 y2}{m1 + m2} \\
v x 1 &:= -A1 \cdot \omega 21 \cdot (\exp(-\xi 1 \cdot c21) \sin(\alpha 12) - \sin(c21 + \alpha 12)) \\
v y 1 &:= A1 \cdot \omega 21 \cdot (\exp(-\xi 1 \cdot c21) \cos(\alpha 12) - \cos(c21 + \alpha 12)) \\
v 1 &:= \sqrt{v x 1^2 + v y 1^2} \\
v x 2 &:= v x 1 - R21 \cdot \omega 21 \cdot \sin(c21) & v y 2 &:= v y 1 + R21 \cdot \omega 21 \cdot \cos(c21) \\
v 2 &:= \sqrt{v x 2^2 + v y 2^2} & T s &:= m1 \frac{v 1^2}{2} + m2 \frac{v 2^2}{2} & r 1 c &:= \frac{m2 R21}{m1 + m2} = 0.5 \\
r c &:= \frac{m2}{m1 + m2} \sqrt{A1^2 + A2^2} = 0.5 \\
r 2 c &:= \frac{m1 R21}{m1 + m2} = 0.5 & \omega 12 &:= m2 \frac{\omega c o}{m1 + m2} = 0.5 \\
v c o &:= \omega c o \cdot r c = 0.5 \\
v 12 &:= \omega 12 \cdot R21 = 0.5 & v 21 &:= \omega 21 \cdot R21 = 0.5 & q 1 &:= 0 & q 2 &:= m2 v 2 y \\
T n &:= m2 \frac{v 2 y^2}{2} = 0.5 \\
T c o &:= (m1 + m2) \cdot \frac{v c o^2}{2} = 0.25 & \theta n &:= \operatorname{acos}\left(\frac{q 1}{q 2}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = 90 \\
T c &:= m1 \frac{v 12^2}{2} + m2 \frac{v 21^2}{2} = 0.25 & T k &:= T c o + T c = 0.5
\end{aligned}$$

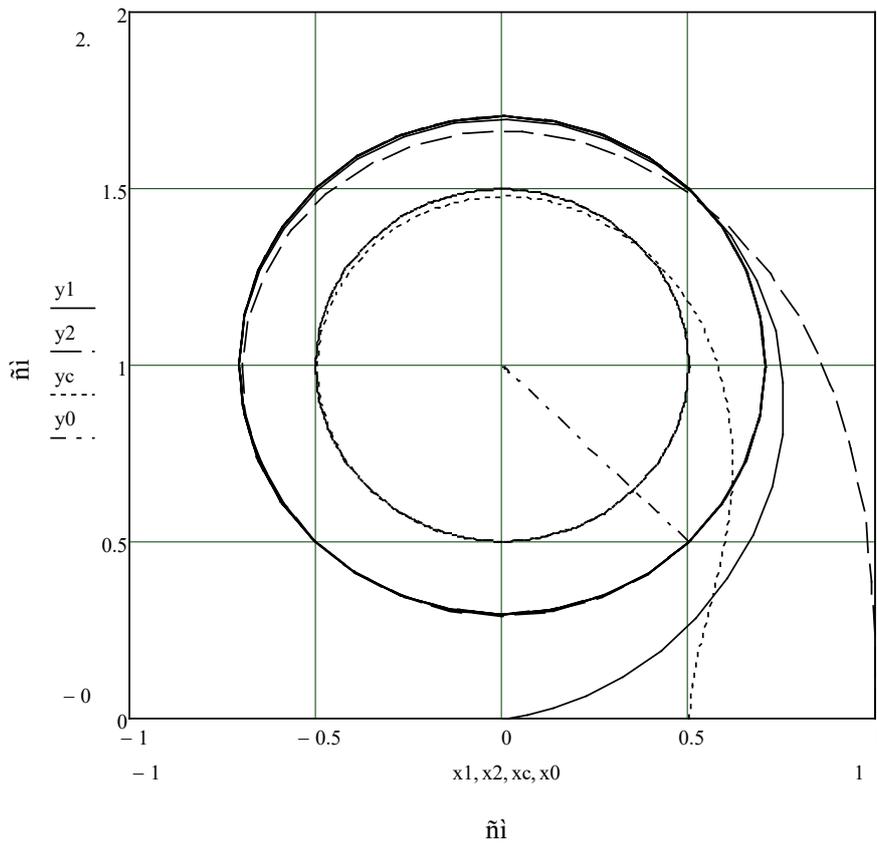


Рис. П.2. Траектории движения тел  $m_1$  и  $m_2$  и ЦМ  $C$  МС2 при симметричном радиальном  $\theta_0 = \pi / 2$

П 3. Программа расчета траекторий движения тел  $m_1$  и  $m_2$  МС2и ее ЦМ  $C$  при  $m_1 \gg m_2$

$$m1 := 10. \quad m2 := 1. \quad R21 := 1. \quad v2y := 1. \quad \omega_{co} := \frac{v2y}{R21} \quad \omega_c := \omega_{co}$$

$$\xi_1 := \frac{m2}{m1} \quad \xi_2 := \frac{m1}{m2} \quad a_1 := \frac{m2 R21}{m1} \quad a_2 := \frac{m1 R21}{m2} \quad A_1 := \frac{a_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \quad A_2 := \frac{a_2}{\sqrt{1 + \xi_2^2}}$$

$$\beta_1 := \text{atan}\left(\frac{m2}{m1}\right) \quad \beta_2 := \text{atan}\left(\frac{m1}{m2}\right) \quad \Theta := \pi - \beta_1 - \beta_2 \quad \Theta \cdot \frac{180}{\pi} = 90$$

$$\omega_{21} := m1 \cdot \frac{\omega_{co}}{m1 + m2} = 0.909 \quad \gamma_{21} := m2 \cdot \frac{\omega_{21}}{2m1}$$

$$i := 1..300 \quad c_{21}_i := i \cdot \frac{\pi}{16}$$

$$x_1 := A_1 \cdot \left[ \cos(\beta_1) - \xi_1^{-1} \cdot \sin(\beta_1) \cdot (1 - \exp(-\xi_1 \cdot c_{21})) - \cos(c_{21} + \beta_1) \right]$$

$$y_1 := A_1 \cdot \left[ \sin(\beta_1) + \xi_1^{-1} \cdot \cos(\beta_1) \cdot (1 - \exp(-\xi_1 \cdot c_{21})) - \sin(c_{21} + \beta_1) \right]$$

$$x_2 := x_1 + R21 \cdot \cos(c_{21}) \quad y_2 := y_1 + R21 \cdot \sin(c_{21})$$

$$x_c := \frac{m1 x_1 + m2 x_2}{m1 + m2} \quad y_c := \frac{m1 y_1 + m2 y_2}{m1 + m2} \quad r_1 := \frac{m2 R21}{m1 + m2} = 0.091$$

$$r_c := \frac{m2}{m1 + m2} \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$r_2 := \frac{m1 R21}{m1 + m2} = 0.909 \quad \omega_{12} := m2 \cdot \frac{\omega_{co}}{m1 + m2} = 0.091$$

$$t := \frac{c_{21}_{300}}{\omega_{co}} = 58.905 \quad c$$

$$v_{co} := \omega_{co} \cdot r_c = 0.091$$

$$v_{12} := \omega_{12} \cdot R21 = 0.091$$

$$v_{21} := \omega_{21} \cdot R21 = 0.909$$

$$T_n := m2 \cdot \frac{v_{2y}^2}{2} = 0.5$$

$$q_1 := 0 \quad q_2 := m2 v_{2y}$$

$$T_{co} := (m1 + m2) \cdot \frac{v_{co}^2}{2} = 0.045$$

$$\theta_n := \text{acos}\left(\frac{q_1}{q_2}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = 90$$

$$T_c := m1 \cdot \frac{v_{12}^2}{2} + m2 \cdot \frac{v_{21}^2}{2} = 0.455$$

$$T_k := T_{co} + T_c = 0.5$$

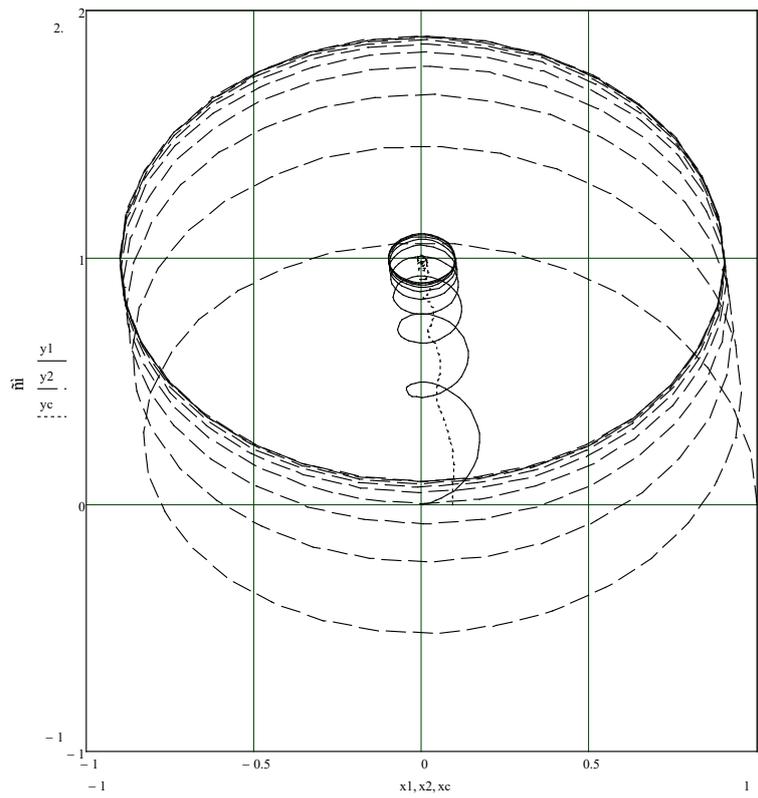
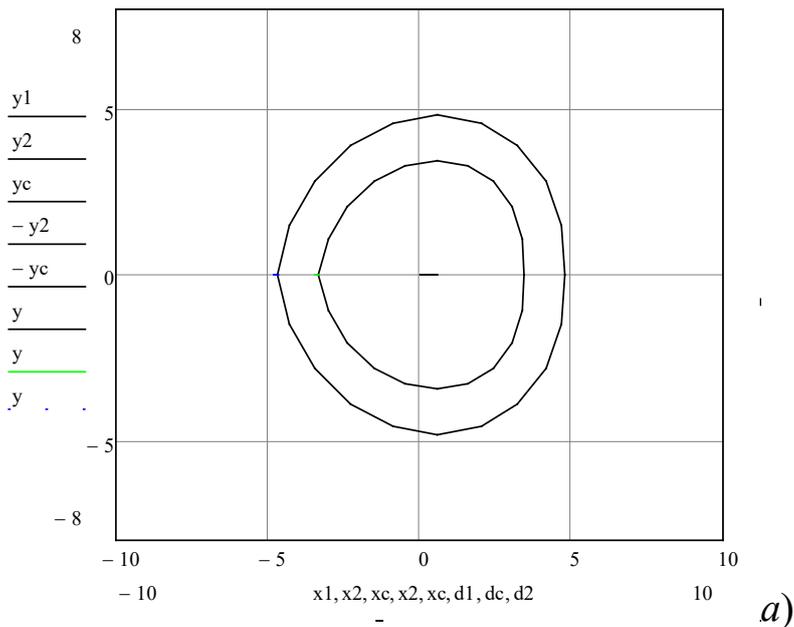


Рис. П.3. Траектории движения тел  $m_1$  и  $m_2$  и ЦМ С МС2  
при  $m_1 \gg m_2$

П.4. Программа расчета прямого цикла работы инерциоида при  $\mu_1 = 23.642 \text{ Н} \cdot \text{с/см}$

$$\begin{aligned}
T &:= .5 & z1 &:= 23.642 & m1 &:= .19 & m2 &:= .49 & R21 &:= 4.8 \\
\gamma_1 &:= \frac{z1}{2 \cdot (m1 + m2)} & \omega_{21} &:= \frac{4 \operatorname{atan}(1)}{T} & \xi &:= \frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} & a &:= \frac{m2 R21}{m1 + m2} & A1 &:= \frac{a}{\sqrt{1 + \xi^2}} \\
\beta &:= \operatorname{atan}(\xi) & \alpha &:= \beta \cdot \frac{180}{\pi} & i &:= 0 \dots 10 & t_1 &:= \frac{i}{20} & c21_1 &:= i \cdot \frac{\pi}{20 \cdot T} & f21_1 &:= c21_1 \cdot \frac{180}{\pi} \\
x1 &:= A1 \cdot \left( \cos(\beta) - \omega_{21} \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{1 - \exp(-\xi \cdot c21)}{2 \cdot \gamma_1} - \cos(c21 + \beta) \right) \\
v1 &:= -A1 \cdot \omega_{21} \cdot (\sin(\beta) \cdot \exp(-\xi \cdot c21) - \sin(c21 + \beta)) & y1_1 &:= 0 \\
x2 &:= x1 + R21 \cdot \cos(c21) & y2 &:= R21 \cdot \sin(c21) & v2 &:= v1 - R21 \cdot \omega_{21} \cdot \sin(c21) \\
x_c &:= \frac{m1 x1 + m2 x2}{m1 + m2} & v_c &:= \frac{m1 v1 + m2 v2}{m1 + m2} & y_c &:= \frac{m1 y1 + m2 y2}{m1 + m2} \\
i &:= 0 \dots 50 & u_1 &:= \frac{i}{20} & d1 &:= x1_{10} + \frac{v1_{10}}{2 \cdot \gamma_1} \cdot (1 - \exp(-2 \cdot \gamma_1 \cdot u)) & y_1 &:= 0 \\
d2 &:= x2_{10} + \frac{v2_{10}}{2 \cdot \gamma_1} \cdot (1 - \exp(-2 \cdot \gamma_1 \cdot u)) \\
d_c &:= x_c_{10} + \frac{v_c_{10}}{2 \cdot \gamma_1} \cdot (1 - \exp(-2 \cdot \gamma_1 \cdot u)) & v_{dc} &:= v1_{10} \cdot \exp(-2 \cdot \gamma_1 \cdot u) & u_1 &:= \frac{i}{20} + .5 & x_{c0} &:= 3.459 \\
d_{c30} &:= -3.459 & \Delta x_c &:= d_{c50} - x_{c0} = -6.918 & \Delta x1 &:= d1_{50} - x1_0 = 0
\end{aligned}$$



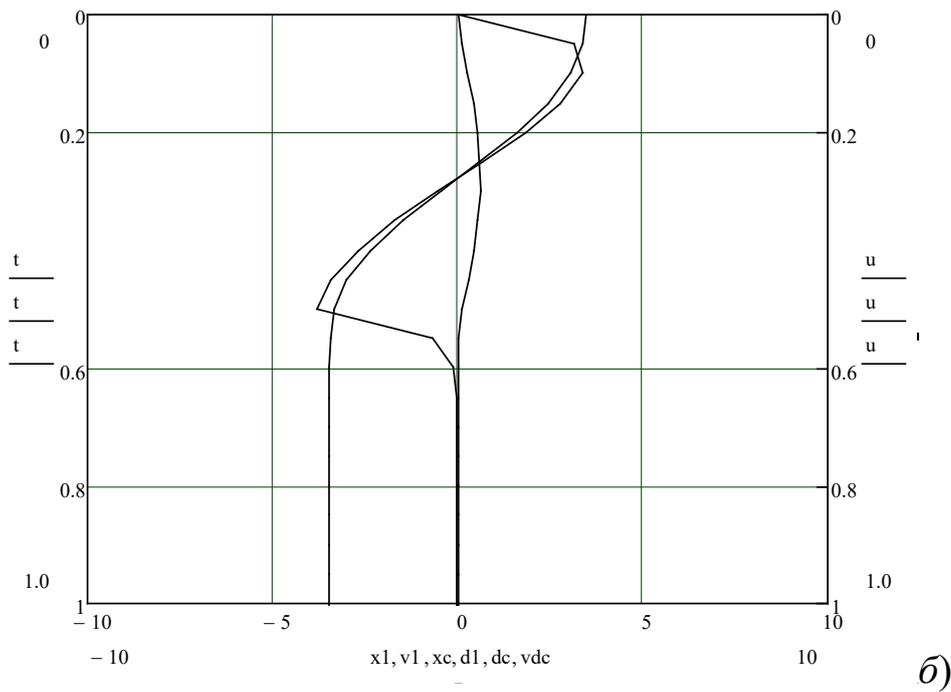


Рис. П. 4. Инерциоид:

упрощенная кинематическая схема инерциоида – а;  
 графики положения  $x_1(t)$  и скорости  $\dot{x}_1(t)$  его основания 1, а также  
 положения  $x_C(t)$  его ЦМ  $C$  масс при вращательном перемещении  
 его рабочих тел 2 из положения  $x_{21}^{(1)}$  в положение  $x_{21}^{(2)}$  и затухающем  
 движении основания 1 инерциоида

П.5. Программа расчета обратного цикла работы инерциоида при  $\mu_1 = 23.642 \text{ Н} \cdot \text{с/см}$

$$\begin{aligned}
 T &:= .5 & z1 &:= 23.642 & m1 &:= .19 & m2 &:= .49 & R21 &:= 4.8 \\
 \gamma_1 &:= \frac{z1}{2 \cdot (m1 + m2)} & \omega_{21} &:= \frac{4 \cdot \text{atan}(1)}{T} & \xi &:= \frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} & a &:= \frac{2m2R21}{m1 + m2} & A1 &:= \frac{a}{\sqrt{1 + \xi^2}} \\
 \beta &:= \text{atan}(\xi) & \alpha &:= \beta \cdot \frac{180}{\pi} & i &:= 0 \dots 10 & t_i &:= \frac{i}{20} & c21_i &:= i \cdot \frac{\pi}{20T} & f21_i &:= c21_i \cdot \frac{180}{\pi} \\
 x1 &:= -A1 \cdot \left( \sin(\beta) + \omega_{21} \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{1 - \exp(-\xi \cdot c21)}{2 \cdot \gamma_1} - \sin(c21 + \beta) \right) \\
 v1 &:= -A1 \cdot \omega_{21} \cdot (\cos(\beta) \cdot \exp(-\xi \cdot c21) - \cos(c21 + \beta)) \\
 x2 &:= x1 + R21 \cdot (1 - 2 \cdot \cos(c21)) & x_c &:= \frac{m1x1 + m2x2}{m1 + m2} \\
 i &:= 0..50 & u_i &:= \frac{i}{20} & d1 &:= x1_{10} + \frac{v1_{10}}{2 \cdot \gamma_1} \cdot (1 - \exp(-2 \cdot \gamma_1 \cdot u)) & y_i &:= 0 \\
 d2 &:= x2_{10} + \frac{v1_{10}}{2 \cdot \gamma_1} \cdot (1 - \exp(-2 \cdot \gamma_1 \cdot u)) \\
 dc &:= x_c_{10} + \frac{v1_{10}}{2 \cdot \gamma_1} \cdot (1 - \exp(-2 \cdot \gamma_1 \cdot u)) & vdc &:= v1_{10} \cdot \exp(-2 \cdot \gamma_1 \cdot u) & u_i &:= \frac{i}{20} + .5 & x_{c0} &:= -3.459 \\
 dc_{30} &:= 7.876 & \Delta x_c &:= dc_{50} - x_{c0} = 11.335 & \Delta x1 &:= d1_{50} - x1_0 = -2.5
 \end{aligned}$$

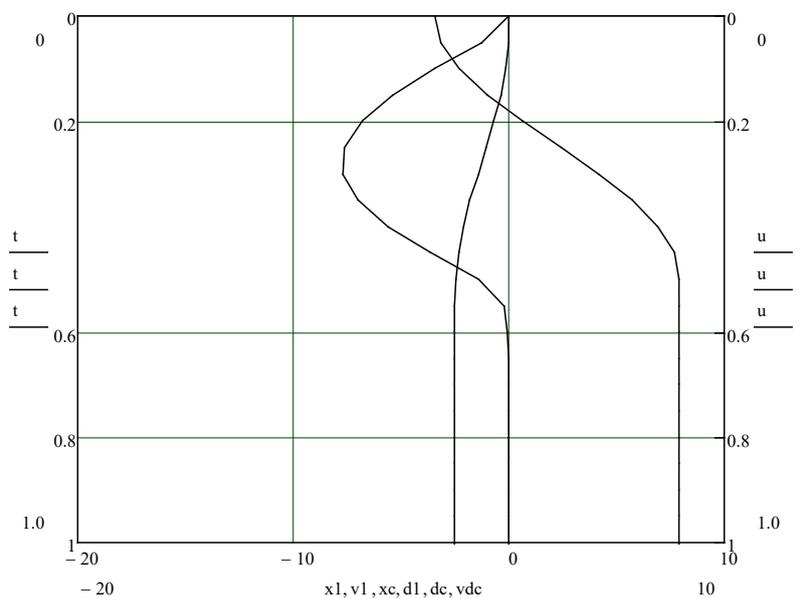


Рис. П.5. Графики положения  $x_1(t)$  и скорости  $\dot{x}_1(t)$  основания 1 инерциоида, а также положения  $x_c(t)$  его ЦМ  $C$  масс при линейном перемещении его рабочих тел 2 из положения  $x_{21}^{(2)}$  в положение  $x_{21}^{(1)}$  и затухающем движении его основания 1

*Научное издание*

**Савелькаев Сергей Викторович**

**ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
В ПОЛЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ**

Издается в авторской редакции

Компьютерная верстка *А. П. Бочарниковой*  
Дизайн обложки *Я. А. Лесных*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 12.03.2026. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 10,01. Тираж 500 экз. Заказ 23.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Издательско-полиграфический центр СГУГиТ

630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в издательско-полиграфическом центре СГУГиТ

630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8