МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОУ ВПО «СИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ»

А.Н. Тюшев
Л.Д. Дикусар

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ

Часть 3

Колебания и волны.
Волновая оптика

Утверждено Редакционно-издательским советом академии
в качестве учебного пособия

Новосибирск
2003

УДК 530
С 26

Рецензенты:
Член-корреспондент международной академии акмеологических наук,
кандидат педагогических наук,
доцент Новосибирского государственного технического университета
Э.Б. Селиванова
Кандидат физико-математических наук,
доцент Сибирской государственной геодезической академии
В.Я. Костюченко

Тюшев А.Н., Дикусар Л.Д.
С 26 Курс лекций по физике. Часть 3. Колебания и волны. Волновая оптика: Учеб. пособие. – Новосибирск: СГГА, 2003. - 158 с.

ISBN 5-87693-127-6

Настоящее учебное пособие представляет собой третью часть «Курса лекций по физике», состоящего из пяти частей. Содержание учебного пособия соответствует действующим в настоящее время стандартам по дисциплине «Физика» и учебным программам, по которым обучаются студенты Сибирской государственной геодезической академии.

Пособие может быть использовано при изучении курса физики студентами СГГА всех специальностей и всех форм обучения.

УДК 530

Печатается по решению Редакционно-издательского совета СГГА

© Сибирская государственная геодезическая академия, 2003
ISBN 5-87693-127-6 © Тюшев А.Н., Дикусар Л.Д., 2003.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 6
Лекция 1. Гармонические колебания 8
1.1. Понятие о колебательных процессах 8
1.2. Упругие и квазиупругие силы 10
1.3. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний 10
1.4. Гармонический осциллятор. Энергия колебаний гармонического осциллятора 12
Итоги лекции № 1 14
Лекция 2. Сложение колебаний 15
2.1. Векторная диаграмма колебания 15
2.2. Сложение колебаний одинаковой частоты и одинакового направления 16
2.3. Сложение колебаний одного направления и близких частот 17
2.4. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний 18
Итоги лекции № 2 21
Лекция 3. Затухающие колебания 22
3.1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний 22
3.2. Период затухающих колебаний 24
3.3. Логарифмический декремент затухания 25
3.4. Добротность 25
Итоги лекции № 3 27
Лекция 4. Вынужденные колебания 28
4.1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний 28
4.2. Уравнение установившихся колебаний. 30
4.3. Резонанс 31
Итоги лекции № 4 33
Лекция 5. Волны в упругой среде 34
5.1. Упругая волна 34
5.2. Основные определения для волнового процесса 35
5.3. Уравнение плоской волны 35
5.4. Фазовая скорость 37
5.5. Уравнение сферической волны 38
5.6. Волновое уравнение 39
Итоги лекции № 5 40
Лекция 6. Энергия упругих волн. Стоячие волны 41
6.1. Энергия упругой волны 41
6.2. Плотность энергии упругой волны 42
6.3. Плотность потока энергии 42
6.4. Вектор Умова. Интенсивность 43
6.5. Стоячие волны 44
6.6. Колебания струны, закрепленной с двух концов 45
Итоги лекции № 6 47
Лекция 7. Электромагнитные волны 49

7.1. Понятие об электромагнитной волне 49
7.2. Плоская электромагнитная волна 50
7.3. Энергия и интенсивность электромагнитной волны 52
7.4. Излучение диполя 54
7.5. Вибратор Герца 56
Итоги лекции № 7 57
Лекция 8. Световые волны. Законы геометрической (лучевой) оптики 59
8.1. Световые волны 59
8.2. Интенсивность света. Световой поток 61
8.3. Основные законы геометрической оптики 62
8.4. Полное внутреннее отражение 63
Итоги лекции № 8 65
Лекция 9. Тонкие линзы 67
9.1. Собирающие и рассеивающие линзы 67
9.2. Фокусы линзы, фокальная плоскость 68
9.3. Фокусное расстояние тонкой линзы 69
9.4. Построение изображения в линзах 70
9.5. Формула тонкой линзы 73
Итоги лекции № 9 75
Лекция 10. Интерференция света 76
10.1. Интерференция от двух монохроматических источников одинаковой частоты 76
10.2. Когерентность 77
10.3. Условия максимума и минимума на разность фаз δ 78
10.4. Оптическая разность хода 78
10.5. Расчет интерференционной картины от двух источников 79
10.6. Способы получения когерентных источников 81
Итоги лекции № 10 85
Лекция 11. Интерференция в тонких пленках. Применение интерференции 86
11.1. Интерференция при отражении от прозрачных пластинок 86
11.2. Кольца Ньютона 87
11.3. Просветленная оптика 88
11.4. Интерферометры 90
Итоги лекции № 11 92
Лекция 12. Дифракция света 93
12.1. Явление дифракции волн 93
12.2. Принцип Гюйгенса – Френеля 93
12.3. Зоны Френеля 94
12.4. Дифракция Френеля на круглом отверстии 96
12.5. Дифракция Фраунгофера на щели 97
Итоги лекции № 12 101
Лекция 13. Дифракционная решетка. Разрешающая сила объектива 102
13.1. Дифракция на дифракционной решетке 102
13.2. Дифракционная решетка как спектральный прибор 105

13.3. Дисперсия дифракционной решетки 106
13.4. Разрешающая сила дифракционной решетки 108
13.5. Разрешающая сила объектива 110
Итоги лекции № 13 113
Лекция 14. Поляризация света 115
14.1. Естественный и поляризованный свет 115
14.2. Принцип действия поляризатора электромагнитной волны 116
14.3. Закон Малюса 117
14.4. Поляризация при отражении и преломлении. Формулы Френеля 119
14.5. Закон Брюстера 120
Итоги лекции № 14 123
Лекция 15. Двойное лучепреломление 123
15.1. Свойства двойного лучепреломления 123
15.2. Двойное лучепреломление. 124
15.3. Интерференция поляризованных лучей 126
15.4. Искусственное двойное лучепреломление 129
Итоги лекции № 15 131
Лекция 16. Взаимодействие света с веществом 132
16.1. Дисперсия света 132
16.2. Поглощение света. Закон Бугера 133
16.3. Рассеяние света 135
Итоги лекции № 16 138
Лекция 17. Классическая электронная теория дисперсии 139
17.1. Связь показателя преломления с дипольным моментом молекулы 139
17.2. Связь электрического дипольного момента молекулы с напряженностью поля световой волны 140
17.3. Уравнение движения электрона в атоме под действием световой волны и его решение 141
17.4. Зависимость показателя преломления от частоты 141
17.5. Групповая и фазовая скорость 144
Итоги лекции № 17 148

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе учебного пособия Тюшева А.Н. «Физика в конспективном изложении» (ФКИ), две первые части которого изданы в СГГА в 1999 году, третья – в 2000 году. Главное существенное отличие настоящего «Курса лекций» от ФКИ состоит в том, что изложение материала ведется не в конспективном стиле, а с подробными словесными пояснениями. При этом рамки изложения расширены.

Материал пособия разбит на лекции, в данной третьей части их семнадцать. После каждой лекции кратко подведены ее основные итоги.

Настоящий «Курс лекций по физике» написан в соответствии с действующими в настоящее время стандартами по дисциплине «Физика» и учебными программами, по которым обучаются студенты Сибирской государственной геодезической академии.

Состоит пособие из пяти частей.

Часть I «Механика», Тюшев А.Н., Вылегжанина В.Д.

Часть II «Электричество и магнетизм», Тюшев А.Н., Вайсберг А.И.

Часть III «Колебания и волны. Волновая оптика», Тюшев А.Н., Дикусар Л.Д.

Часть IV «Молекулярная физика и термодинамика», Тюшев А.Н., Лузин А.Н.

Часть V «Квантовая физика», Тюшев А.Н.

Пособие может быть использовано при изучении курса физики студентами СГГА всех специальностей всех форм обучения. Объем и степень глубины излагаемого в пособии материала соответствует специальностям с наибольшим числом часов по физике, выделяемых существующими стандартами 2000. Для специальностей с меньшим количеством часов, по усмотрению лектора, некоторые разделы могут быть опущены, некоторые – рассмотрены с меньшей степенью подробности.

В отличие от существующих учебников по физике, настоящее пособие учитывает особенности рабочих программ специальностей СГГА.

Несколько слов об обозначениях. Так же как и в ФКИ в формулах, являющихся математическими *определениями* физических величин, вместо знака равенства использован знак тождества, чтобы подчеркнуть особенную важность этих формул – определений.

Векторные величины отмечаются стрелками над буквами, обозначающими данные величины. Для произвольной по времени, наряду с обозначением Лейбница $\frac{d}{dt}$, используется и точка над буквой, обозначающей функцию, от которой берется производная.

Настоящее пособие в процессе создания неоднократно обсуждалось на кафедре физики, авторы учли много полезных замечаний сотрудников кафедры, которым за них очень признательны.

Авторы благодарят рецензентов настоящего пособия члена-корреспондента Международной Академии акмеологических наук, доцента кафедры общей

физики НГТУ, к.п.н. Селиванову Э.Б. и доцента кафедры физики СГГА, к.ф.-м.н. Костюченко В.Я. за большой труд по внимательному чтению рукописи и ценные замечания. Авторы выражают свою признательность доценту кафедры физики СГГА, к.ф.-м.н. Серегину Г.В., проделавшего полезную и кропотливую работу ответственного редактора.

Авторы особенно благодарны инженеру кафедры физики СГГА Барановой Е.А. за огромный труд по набору и неоднократным исправлениям текста. На заключительном этапе подготовки оригинал-макета издания неоценимая помощь была оказана доцентом кафедры физики Чесноковым Д.В., которому авторы выражают свою искреннюю признательность.

Обеспечение финансирования данного издания легло на заведующего кафедрой физики СГГА Чеснокова В.В., без усилий которого это издание было бы невозможно.

В заключении авторы выражают надежду, что настоящее пособие будет полезно студентам при изучении физики. Все замечания и предложения по тексту пособия просьба подавать на кафедру физики СГГА, авторы их с благодарностью примут.

ЛЕКЦИЯ 1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Понятие о колебательных процессах. Упругие и квазиупругие силы. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Энергия колебаний

1.1. Понятие о колебательных процессах

Колебаниями называются движения или процессы, обладающие той или иной повторяемостью во времени. Колебания – это наиболее распространенная форма движения в окружающем нас мире.

В зависимости от физической природы, колебания подразделяют на механические, электромеханические, электромагнитные и т. д.

В зависимости от характера воздействия, оказываемого на колеблющуюся систему, различают:

1) **свободные** или **собственные колебания** – это такие колебания, которые происходят в системе после того, как она была выведена из положения равновесия и предоставлена самой себе. Свободные колебания бывают **затухающими и незатухающими;**

2) **вынужденные колебания** – это такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы (например, раскачивание качелей).

Большой интерес представляют гармонические колебания, так как любое повторяющееся движение можно рассматривать как результат наложения простых гармонических колебаний.

Уравнение гармонических колебаний

Амплитуда. Фаза. Круговая частота

Гармонические колебания – *это такие колебания, при которых колеблющаяся величина x изменяется со временем по закону синуса либо косинуса:*

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \alpha), \qquad (1.1)$$

или

$$x(t) = A \cdot \mathrm{Sin}(\omega t + \alpha), \qquad (1.1a)$$

где x(t) – отклонение или смещение колеблющейся величины от положения равновесия;

A – **амплитуда**, т. е. наибольшее отклонение от положения равновесия (амплитуда всегда положительна);

$(\omega t + \alpha)$ – **фаза колебания** – это аргумент периодической функции, определяющей смещение;

α – **начальная фаза**, т. е. значение фазы в начальный момент времени (при t = 0);

ω – **круговая,** или **циклическая частота**.

При изменении аргумента косинуса либо синуса (т. е. фазы) на 2π эти функции возвращаются к прежнему значению. Найдем промежуток времени T, в течение которого фаза гармонической функции изменяется на 2π, откуда:

$\omega(t + T) + \alpha = \omega t + \alpha + 2\pi$, или $\omega T = 2\pi$.

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}. \qquad (1.2)$$

Время T *одного полного колебания* называется **периодом колебания**. **Частотой** ν называют *число колебаний в единицу времени*, т. е. *величину, обратную периоду*:

$$\boxed{\nu \equiv \frac{1}{T}}. \qquad (1.3)$$

Единица измерения частоты – герц (Гц), 1 Гц = 1 $с^{-1}$.

Так как из (1.2) следует, что:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad (1.4)$$

то

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu}. \qquad (1.5)$$

Круговая, или циклическая частота ω в 2π раз больше частоты колебаний ν. Круговая частота – это скорость изменения фазы со временем. Действительно:

$$\frac{d}{dt}(\omega t + \alpha) = \omega. \qquad (1.6)$$

График гармонического колебания (1.1) представлен на рис. 1.1.

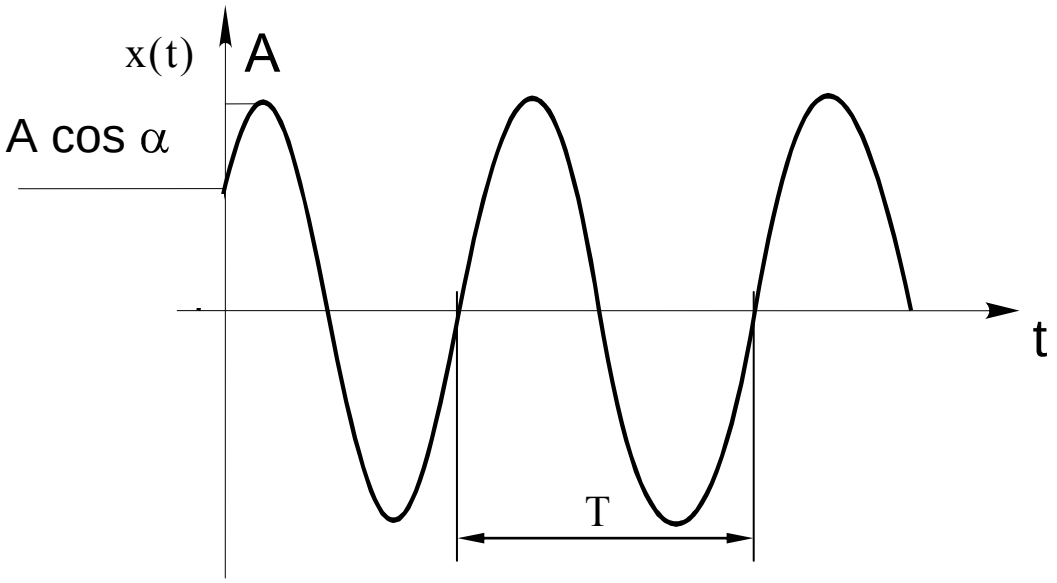


Рис. 1.1

1.2. Упругие и квазиупругие силы

Выясним, какие силы вызывают гармонические колебания, Рассмотрим пружинный маятник массы m, совершающий колебания вдоль оси x (рис. 1.2б). Силу найдем по второму закону Ньютона (см. ч. 1, (4.4)):

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

В проекциях на ось x:

$$ma = F. \qquad (1.7)$$

Ускорение:

$$a = a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \qquad (1.8)$$

скорость колеблющегося тела:

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Тогда, с учетом (1.1):

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \alpha), \qquad (1.9)$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha). \qquad (1.10)$$

Подставим (1.10) в (1.7) и учтем (1.1), тогда:

$$F = -mA\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -m\omega^2 x.$$

Следовательно, сила, вызывающая гармонические колебания, пропорциональна смещению колеблющегося тела от положения равновесия и направлена против смещения. Такому условию удовлетворяют **упругие силы** (см. ч. 1, (4.8)):

$$F_{упр} = -k_{упр} x, \qquad (1.11)$$

где $k_{упр}$ – коэффициент упругости.

Гармонические колебания могут быть вызваны также силами, которые не являются упругими по своей природе, но подобны упругим по характеру зависимости от координат. Такие силы называют **квазиупругими.**

$$F = -kx. \qquad (1.11а)$$

Любые силы будут квазиупругими, если отклонение от положения равновесия мало. Например, колебания с небольшой амплитудой груза на нити или пружине, вагона на рельсах, фундамента здания и т. д.

Вывод. *Если колебания гармонические, то они совершаются под действием упругой или квазиупругой силы.*

1.3. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Составим уравнение движения груза на пружине (рис. 1.2 б). Уравнением движения является второй закон Ньютона (1.7). Подставим (1.8) и (1.11) в (1.7):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_{упр}x\,. \qquad (1.12)$$

После несложных преобразований получаем:

$$\ddot{x} + \frac{k_{упр}}{m}x = 0.$$

Введем обозначение:

$$\frac{k_{упр}}{m} \equiv \omega_0^2, \qquad (1.13)$$

Тогда:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,. \qquad (1.14)$$

Уравнение (1.14) представляет собой дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Функция (1.1) или (1.1а) представляет собой его решение: если в дифференциальное уравнение (1.14) подставить функцию (1.1) или (1.1а), то уравнение обращается в тождество. Колеблющейся величиной является x – координата груза.

Такого же вида уравнение получается, например, для колебания заряда q в колебательном контуре. Колебательный контур – это электрическая схема, состоящая из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C (рис. 1.2 а).

Для колебательного контура:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}\,. \qquad (1.15)$$

Другой пример. В качестве колеблющейся величины может быть угол отклонения φ физического маятника, совершающего малые колебания. **Физическим маятником** *называют любое тело, совершающее колебания вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести*. Для физического маятника (рис. 1.2 в) вводятся следующие обозначения:

m – масса физического маятника,

I – момент инерции (см. ч. 1, (8.5)),

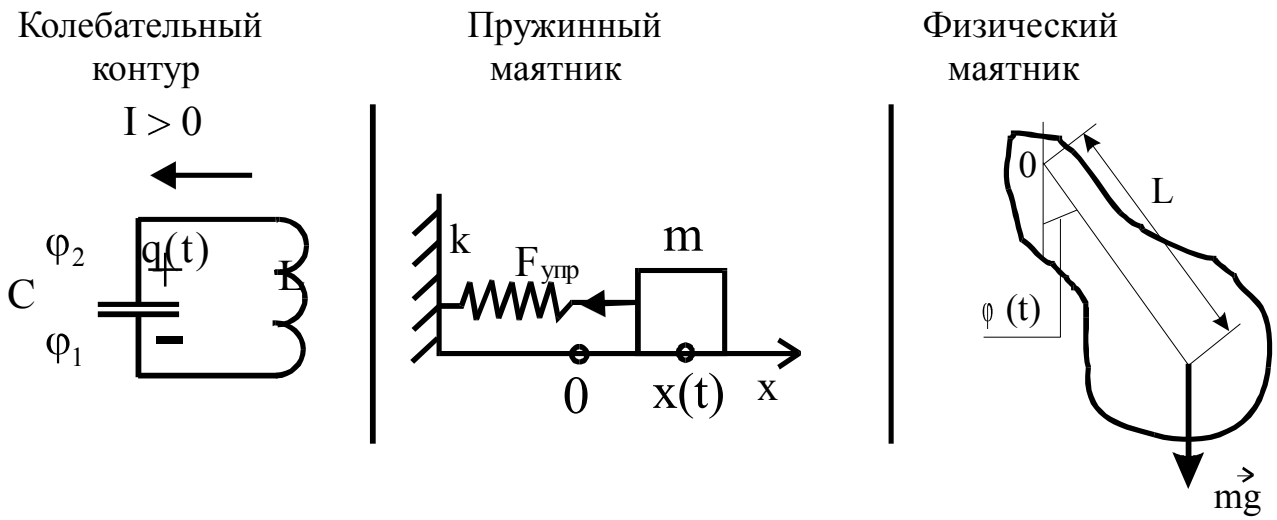
L – расстояние от оси вращения до центра тяжести,

g – ускорение свободного падения.

Для физического маятника:

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{I}\,. \qquad (1.16)$$

На рис. 1.2 изображены три колеблющиеся системы.



а) б) в)

Рис. 1.2

Колеблющиеся величины для систем рис. 1.2 следующие:

q – заряд, **x** – координата грузика, **φ** – угол отклонения.

Введем обобщенную координату ξ, понимая под ней отклонение любой физической величины от положения равновесия:

$$q \equiv \xi, \qquad x \equiv \xi, \qquad \varphi \equiv \xi.$$

Можно показать, что тогда для всех трех рассмотренных случаев имеем одно и то же дифференциальное уравнение колебательного движения

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \qquad (1.17)$$

где ω_0 – частота собственных колебаний системы (находим из формул (1.15), (1.13), (1.16)). По формуле (1.2) можно найти период.

Решением дифференциального уравнения называется *функция*, обращающая это уравнение в тождество.

Нетрудно проверить прямой подстановкой, что в нашем случае *решение* имеет вид:

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad (1.18)$$

т. е. является гармонической функцией. Значит, уравнение $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$ – это дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

1.4. Гармонический осциллятор. Энергия колебаний гармонического осциллятора

Осциллятором называют любой физический объект, совершающий колебания. Если колебания происходят по гармоническому закону, осциллятор называют гармоническим или линейным. Например, маятники, колеблющиеся с небольшой амплитудой (пружинный, математический, физический). Если колебания происходят по негармоническому закону, осциллятор называют

ангармоническим или нелинейным. Например, маятники, колеблющиеся с большой амплитудой.

В процессе колебаний осциллятора кинетическая энергия превращается в потенциальную, а потенциальная энергия – в кинетическую.

Кинетическая энергия (ч. 1, (5.8)) гармонического осциллятора с учетом (1.9) и (1.13) равна:

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \alpha), \qquad (1.19)$$

где $k = m\omega_0^2$ – коэффициент упругой или квазиупругой силы.

Потенциальная энергия (ч. 1, (6.6)) гармонического осциллятора с учетом (1.1) равна:

$$W_П = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \alpha). \qquad (1.20)$$

Из формул (1.19) и (1.20) следует, что полная механическая энергия:

$$W = W_к + W_п = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \qquad (1.21)$$

Она пропорциональна квадрату амплитуды, квадрату частоты и в процессе колебаний остается неизменной.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 1

1. Колебаниями называют движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

2. Гармоническими колебаниями называются колебания, совершающиеся по закону косинуса или синуса – (1.1) или (1.1а):

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \quad \text{или} \quad x(t) = A\sin(\omega t + \alpha).$$

Множитель А, стоящий перед косинусом или синусом, представляет собой амплитуду колебаний. Амплитуда определяет наибольшее смещение колеблющейся величины от положения равновесия.

Аргумент косинуса или синуса представляет собой фазу колебаний. Фаза определяет смещение в данный момент времени (см. рис. 1.1).

3. Время Т одного полного колебания называется периодом. Число колебаний в единицу времени ν называется частотой. Связь между ними дается формулой (1.3):

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Круговая частота ω вычисляется по формуле (1.5):

$$\omega = 2\pi\nu.$$

4. Гармонические колебания совершаются под действием упругой или квазиупругой силы (1.11а):

$$F = -kx.$$

5. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний составляется на основании закона движения. Для пружинного маятника оно имеет вид (1.14):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

для общего случая (1.17):

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0.$$

Решением этих уравнений являются гармонические функции (1.1) и (1.18) соответственно.

6. Гармоническим осциллятором называют любое тело, колеблющееся по гармоническому закону. Энергия гармонического осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату частоты (1.21):

$$W = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}.$$

ЛЕКЦИЯ 2. СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Векторная диаграмма колебания. Сложение колебаний одинаковой частоты и одного направления. Сложение колебаний близких частот. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Система может одновременно участвовать в нескольких колебаниях. Сложить два или несколько колебаний – значит, найти закон результирующего движения. В общем случае – это не простая задача, но для гармонических колебаний (1.18) возможно наглядное графическое решение – с помощью векторной диаграммы.

2.1. Векторная диаграмма колебания

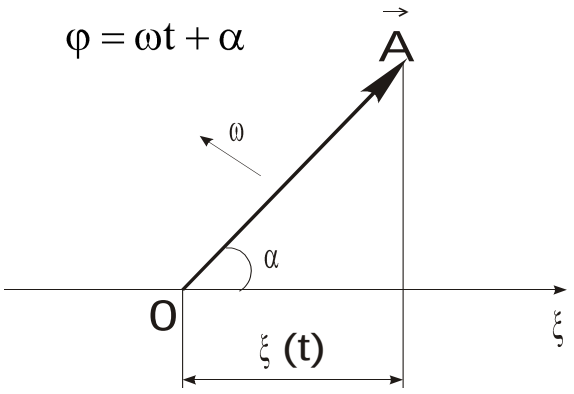
Векторная диаграмма – это способ графического задания гармонического колебательного движения в виде вектора (рис. 2.1).

Как построить векторную диаграмму?

Вдоль горизонтальной оси откладывается колеблющаяся величина ξ (любой физической природы). Вектор $\vec{A}$, отложенный из точки О равен по модулю амплитуде колебания А и направлен под углом α, равным начальной фазе колебания, к оси ξ.. Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω, равной циклической частоте колебаний, то угол наклона вектора к оси абсцисс равен:

$$\varphi = \omega t + \alpha .$$

Тогда проекция этого вектора на ось ξ дает значение колеблющейся величины в произвольный момент времени, т. е. меняется по гармоническому закону (1.18):



$$\Leftrightarrow$$

$$\xi(t) = A \cdot \mathrm{Cos}(\omega t + \alpha)$$

Рис. 2.1

Слева на рис. 2.1. записано аналитическое задание того же колебательного движения (в виде формулы). Справа – графическое задание колебательного движения (в виде векторной диаграммы).

2.2. Сложение колебаний одинаковой частоты и одинакового направления

Пусть складывается два колебания:

$$\xi_1(t) = A_1 \cdot \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$+$$

$$\xi_2(t) = A_2 \cdot \cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\omega t + \alpha). \qquad (2.1)$$

Чтобы найти A и α, строим векторные диаграммы и складываем векторы (рис. 2.2).

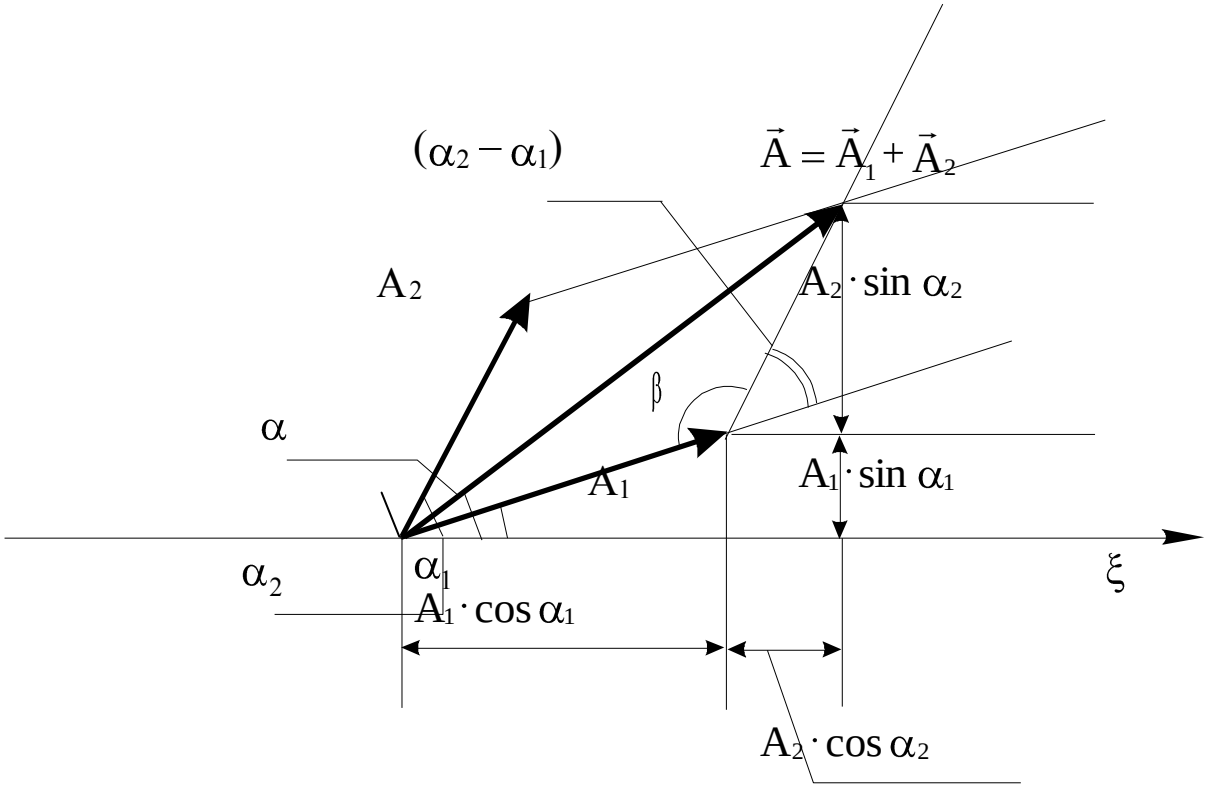


Рис. 2.2

По теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2 \cdot A_1 A_2 \cdot \cos\beta.$$

Так как $\beta = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1)$, то

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 A_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Амплитуда результирующего колебания равна:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \qquad (2.2)$$

Очевидно (см. рис. 2.2), что начальная фаза результирующего колебания определяется соотношением:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1 \cdot \sin\alpha_1 + A_2 \cdot \sin\alpha_2}{A_1 \cdot \cos\alpha_1 + A_2 \cdot \cos\alpha_2}.$$

Значит, начальная фаза результирующего колебания равна:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}. \qquad (2.3)$$

Вывод: при сложении колебаний одинаковой частоты и направления результирующее колебание будет совершаться с той же частотой, что и частота складываемых колебаний. Амплитуда результирующего колебания определяется уравнением (2.2), а начальная фаза – (2.3). Как видно из (2.2), значение амплитуды A зависит от разности фаз $\alpha_2 - \alpha_1$. Если $(\alpha_2 - \alpha_1) = 0,$ то $A = A_1 + A_2,$ если $(\alpha_2 - \alpha_1) = \pi,$ то $A = |A_2 - A_1|.$

2.3. Сложение колебаний одного направления и близких частот

Пусть складывается два колебания с почти одинаковыми частотами, т. е.

$$\xi_1(t) = A \cdot \cos\omega t$$

+

$$\frac{\xi_2(t) = A \cdot \cos(\omega + \Delta\omega)t}{?}, \quad \Delta\omega << \omega.$$

Метод векторных диаграмм позволяет проанализировать сложение колебаний близких частот на качественном уровне. Так как частоты колебаний немного различаются, то один из векторов на рис. 2.2. будет вращаться быстрее (в нашем случае это вектор $\vec{A}_2$). Значит, угол между векторами $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ будет *медленно* изменяться с течением времени, проходя постепенно все возможные значения. Следовательно, амплитуда результирующего колебания будет также медленно изменяться в пределах от $|A_1 - A_2|$ до $A_1 + A_2$. Это видно непосредственно из диаграммы на рис. 2.2 и следует из формулы (2.2), в которой разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1$ в нашем случае будет медленно изменяться со временем.

Для количественного анализа сложения колебаний близких частот мы воспользуемся известной тригонометрической формулой:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{(\alpha - \beta)}{2} \cdot \cos\frac{(\alpha + \beta)}{2}.$$

Применяя к нашему случаю, получим:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) \cdot t\right],$$

так как $\Delta\omega << \omega,$ то

$$\xi \approx 2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right) \cdot \cos \omega t . \qquad (2.4)$$

График результирующего колебания – график **биений,** т. е. *почти гармонических колебаний частоты* ω*, амплитуда которых медленно меняется с частотой* Δω, представлен на рис. 2.3.

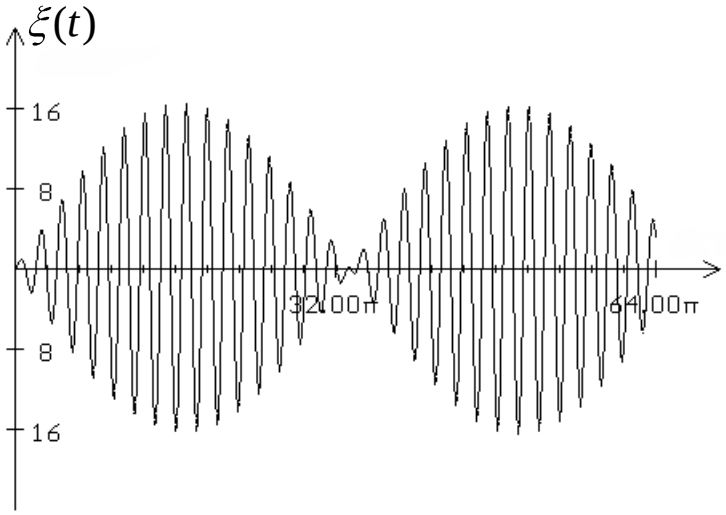


Рис. 2.3

Амплитуда биений:

$$A_б = \left|2 \cdot A \cdot \cos\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right| . \qquad (2.4а)$$

Из-за наличия знака модуля (амплитуда всегда больше нуля) частота, с которой изменяется амплитуда, равна не $\Delta\omega/2$, а в два раза выше – $\Delta\omega$.

2.4. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний

Пусть маленькое тело колеблется на взаимно-перпендикулярных пружинках одинаковой жесткости (рис. 2.4). По какой траектории будет двигаться это тело?

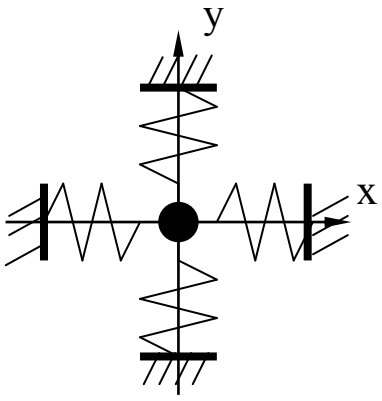


Рис. 2.4

$$\begin{cases} x(t) = A \cdot \cos \omega t, \\ y(t) = B \cdot \cos(\omega t + \alpha). \end{cases} \qquad (2.5)$$

Это уравнения траектории в параметрическом виде.

Для получения явной зависимости между координатами x и y надо из уравнений исключить параметр t.

Из первого уравнения:

$$\cos\omega t = \frac{x}{A}\cdot$$

Тогда: $$\sin\omega t = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\cdot$$

Из второго уравнения:

$$y = B\cdot\left(\cos\omega t\cdot\cos\alpha - \sin\omega t\cdot\sin\alpha\right).$$

После подстановки сюда полученных выражений для $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ получим:

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cdot\cos\alpha \mp \sqrt{1-\frac{x^2}{A}}\cdot\sin\alpha\,.$$

Избавимся от корня:

$$\frac{x^2}{A^2}\cdot\cos^2\alpha - 2\cdot\frac{xy}{AB}\cdot\cos\alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\alpha - \frac{x^2}{A^2}\cdot\sin^2\alpha\,.$$

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\cdot\frac{xy}{AB}\cdot\cos\alpha = \sin^2\alpha}$$ – это уравнение эллипса. (2.6)

Частные случаи:

1. $\alpha = 0;\quad \sin\alpha = 0;\quad \cos\alpha = 1.$

$$\left(\frac{x}{A}-\frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{B}{A}\cdot x$$

Точка совершает колебания по изображенной на рис. 2.5 прямой.

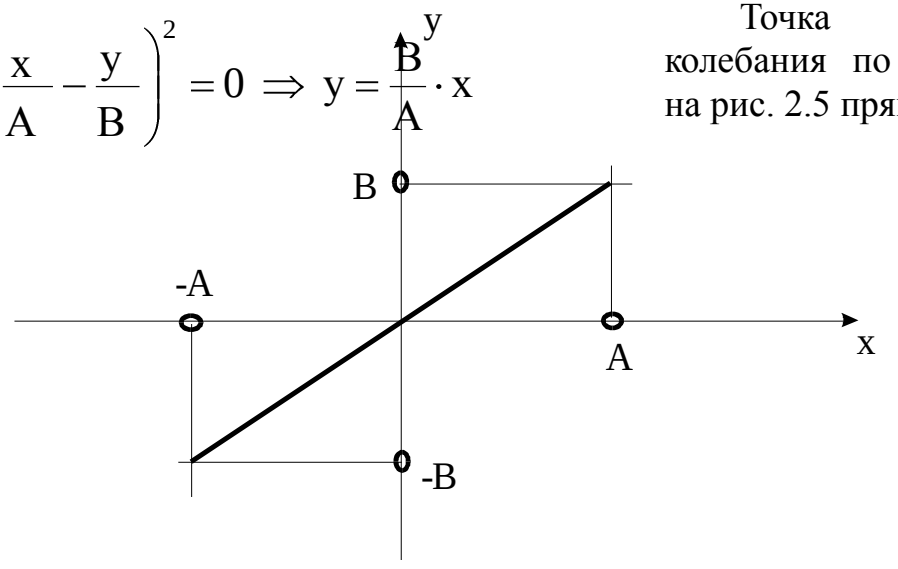


Рис. 2.5

2. $\alpha = \pm\pi;\quad \sin\alpha = 0;\quad \cos\alpha = -1;$

$$\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{B}{A}\cdot x.$$

На рис. 2.6 изображена траектория колеблющейся точки при значениях разности фаз $\alpha = \pm\pi$.

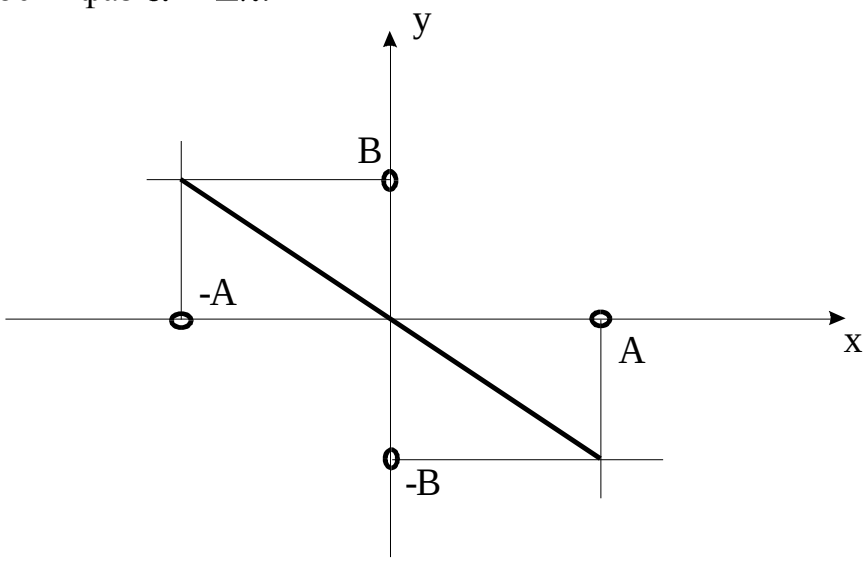


Рис. 2.6

3. $\alpha = \pm\pi/2$; $\sin\alpha = \pm 1$; $\cos\alpha = 0$; $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1.$

На рис. 2.7 изображена траектория колеблющейся точки при значениях разности фаз $\alpha = \pm\pi/2$.

Траектория – эллипс.
В зависимости от разности фаз, точка движется по часовой стрелке ($\alpha = \pi/2$) или против часовой стрелки ($\alpha = -\pi/2$)

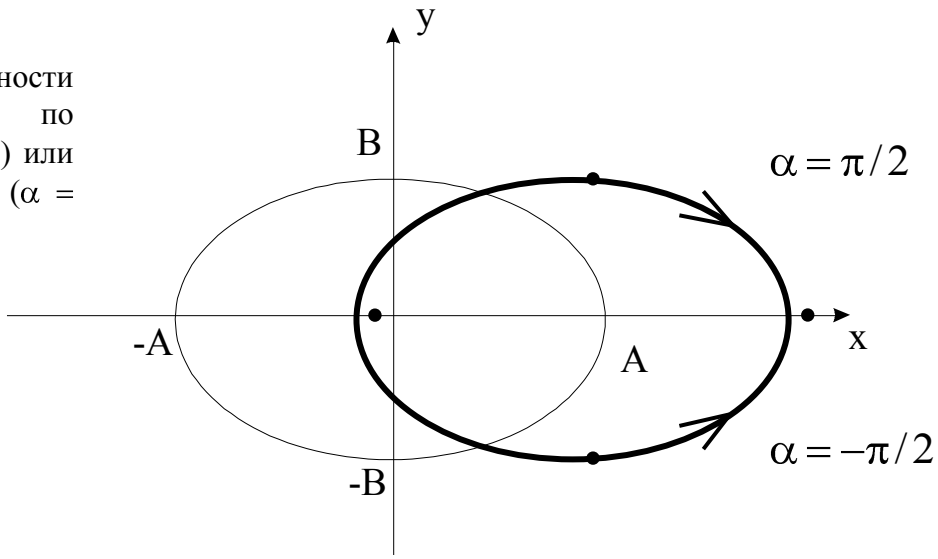


Рис. 2.7

При сложении взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с разными частотами результирующее движение будет происходить по сложным траекториям, называемым фигурами Лиссажу. Форма фигур Лиссажу зависит от соотношения частот складываемых колебаний и разности их начальных фаз.

Если периоды относятся как целые числа, то через промежуток времени, равный наименьшему общему кратному периодов, движущаяся точка возвращается в то же положение – получается замкнутая фигура сложной формы.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 2

1. При сложении колебаний одинаковой частоты и направления применяют метод векторных диаграмм. Результирующее колебание будет совершаться с той же частотой, что и складываемые колебания, а амплитуда результирующего колебания (2.2) будет зависеть от разности фаз складываемых колебаний.

2. При сложении колебаний одинакового направления и близких частот возникает особый тип колебаний – биения (2.4). Биения – это почти гармонические колебания с медленно меняющейся частотой $\Delta\omega$.

3. При сложении взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты траектория результирующего колебания (2.6) зависит от разности фаз и соотношения амплитуд складываемых колебаний. Это может быть прямая, эллипс, окружность.

4. При сложении взаимно перпендикулярных колебаний с разными частотами результирующее колебание представляет собой сложную кривую, которая будет замкнута, если периоды относятся как целые числа.

ЛЕКЦИЯ 3. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний.
Период затухающих колебаний.
Логарифмический декремент. Добротность

В реальных условиях движению тела, совершающего свободные колебания, всегда препятствуют силы сопротивления (трения). Взаимодействие колеблющейся системы со средой приводит к рассеянию (диссипации) энергии и уменьшению амплитуды колебаний. Колебания, при которых амплитуда с течением времени уменьшается, называются затухающими.

3.1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

Рассмотрим колебание грузика, прикрепленного к пружинке, учтем влияние трения на движение грузика (рис. 3.1). На тело действует сила упругости (см. формулу (1.11):

$$F_{упр} = -k_{упр}x.$$

Сила трения препятствует движению.

Будем считать, что мы имеем дело с силой вязкого трения (см. ч. I, (4.10)), она пропорциональна скорости:

$$F_{тр} = -rv, \qquad (3.1)$$

где r – коэффициент трения или коэффициент сопротивления.

Знак «минус» показывает, что сила трения направлена против движения.

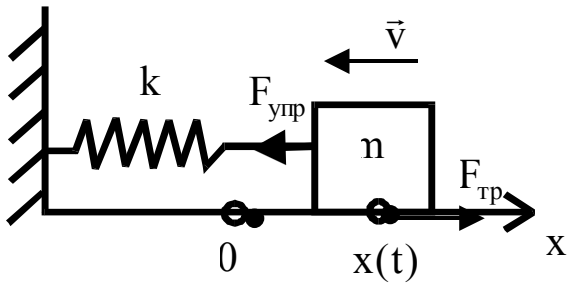


Рис. 3.1

По второму закону Ньютона (1.7):

$$ma = -k_{упр}x - rv.$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad a = a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний пружинного маятника имеет вид:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k_{упр}}{m}x = 0.$$

Введем обозначения:

$$\frac{r}{m} \equiv 2\beta; \qquad (3.2)$$

$\frac{k_{упр}}{m} = \omega_0^2$ (см формулу (1.13),

где β – коэффициент затухания;

ω_0 – частота собственных незатухающих колебаний.

Тогда:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (3.3)$$

Рассмотрим еще одну систему, в которой совершаются затухающие колебания. Это колебания заряда q в колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкостью C, катушки с индуктивностью L и резистора с активным сопротивлением R (рис. 3.2). Для колебательного контура из закона Ома для неоднородного участка цепи (см. ч. 2, (7.11))

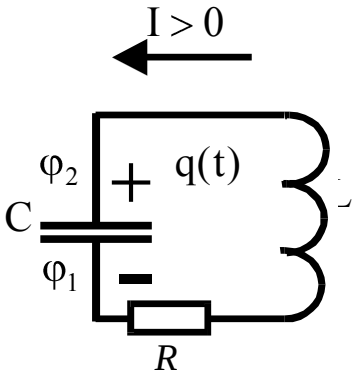


Рис. 3.2

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon$$

следует дифференциальное уравнение затухающих колебаний заряда q на обкладках конденсатора:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \qquad (3.3а)$$

Здесь мы учли, что $I = \dot{q}$ (ч. 2, (6.1)), $\varphi_1 - \varphi_2 = -q/C$ (ч. 2, (5.4)) и ε равна ЭДС самоиндукции: $\varepsilon_{сам} = -L\dot{I} = -L\ddot{q}$ (ч. 2, (12.5)).

Если, как и в лекции № 1, ввести обобщенную координату $\xi(t)$, понимая под ней смещение любой физической величины от положения равновесия, то уравнения (3.3) и (3.3а) перейдут в дифференциальное уравнение, описывающее затухающие колебания любой природы:

$$\ddot{\xi}(t) + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi(t) = 0. \qquad (3.4)$$

Для пружинного маятника:

$$\xi(t) = x(t),$$

а для колебательного контура:

$$\xi(t) = q(t), \quad \frac{R}{L} = 2\beta, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \qquad (3.4а)$$

Решение уравнения (3.4) будем искать в виде:

$$\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha). \qquad (3.5)$$

Амплитуда затухающих колебаний:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}, \qquad (3.6)$$

где e = 2,71828...

Из (3.6) следует, что амплитуда убывает по экспоненциальному закону.

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что *функция* (3.5) будет *решением дифференциального уравнения* (3.4) при условии, что **частота затухающих колебаний:**

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \qquad (3.7)$$

График затухающих колебаний представлен на рис. 3.3.

$\beta < \omega_0$

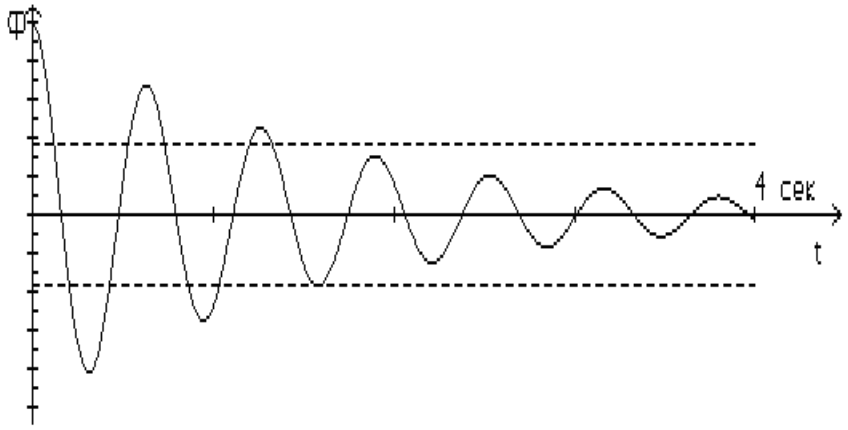


Рис. 3.3

3.2. Период затухающих колебаний

Период затухающих колебаний зависит от коэффициента затухания β. При $\beta << \omega_0$ период колебаний практически равен (см. (1.2)):

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

т. е. периоду собственных незатухающих колебаний. С ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается. Это происходит потому, что силы сопротивления (трения) тормозят движение, в результате система возвращается к положению равновесия медленнее.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (3.8)$$

Как следует из формулы (3.8), при $\beta = \omega_0$ период обращается в бесконечность. Это означает, что движение перестает быть периодическим. Система возвращается к положению равновесия, не совершая колебаний. Движение перестает быть колебательным при $\beta \geq \omega_0$. Такое движение называется апериодическим. На рис. 3.4 приведены графики апериодического движения для разных значений начальной скорости v(0). График 2 на этом рисунке соответствует случаю, когда системе, выведенной из положения равновесия, сообщена достаточно большая начальная скорость. График 1 соответствует движению без начальной скорости.

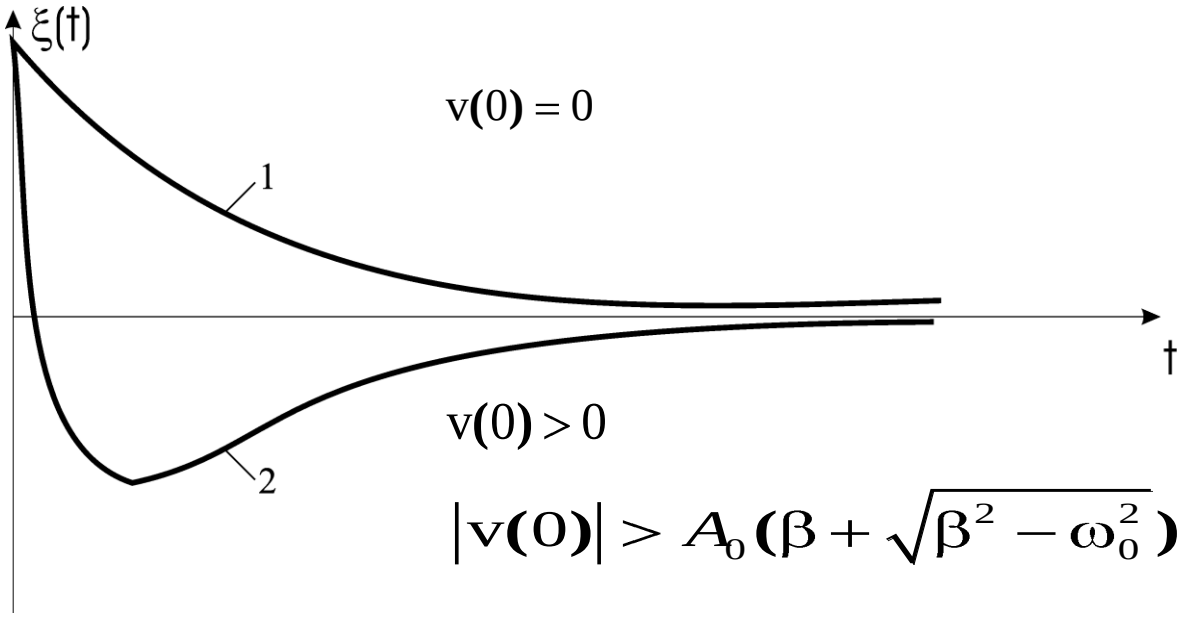


Рис. 3.4

3.3. Логарифмический декремент затухания

В качестве характеристики затухания вводится величина, называемая логарифмическим декрементом затухания.

Логарифмическим декрементом затухания λ *называется натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд, взятых через период*.

$$\lambda \equiv \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} \cdot \qquad (3.9)$$

Подставим в формулу 3.5 $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$.

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta t} = \beta T,$$

$$\boxed{\lambda = \beta T}. \qquad (3.10)$$

Формула (3.10) выражает связь между логарифмическим декрементом затухания и коэффициентом затухания β.

3.4. Добротность

Выясним физический смысл логарифмического декремента затухания.

Введем понятие времени релаксации.

Время релаксации – *это время τ, за которое амплитуда (3.6) уменьшилась в e = 2,71 раз.*

Учитывая (3.10), получим:

$$A(\tau) = A_o e^{-\beta\tau} = A_o e^{-\lambda\frac{\tau}{T}} = A_o e^{-1},$$

тогда

$$\lambda\frac{\tau}{T}=1 \quad \text{и} \quad \lambda=\frac{T}{\tau}.$$

Так как $\frac{\tau}{T}=N_e$ – число колебаний за время **τ**, то:

$$\lambda=\frac{1}{N_e}. \qquad (3.11)$$

Логарифмический декремент по величине обратен числу колебаний, за которое амплитуда убывает в e = 2.71 раз.

Характеристикой затухания также является добротность, которая вводится как

$$Q\equiv\frac{\pi}{\lambda}.$$

С учетом (3.11):

$$Q=\pi N_e. \qquad (3.12)$$

Добротность пропорциональна числу колебаний, совершаемых системой, за которое амплитуда уменьшится в e = 2,71… раз.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 3

1. Свободные колебания в системах с трением затухают и не являются гармоническими.

2. 2. Амплитуда затухающих колебаний убывает со временем по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \qquad (3.6)$$

3. Частота затухающих колебаний ω зависит от коэффициента затухания β:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

где ω_0 – частота собственных (незатухающих) колебаний.

При $\beta \geq \omega_0$ наблюдается апериодическое движение.

4. Для характеристики затухания вводится логарифмический декремент затухания. Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд, отличающихся на период:

$$\lambda \equiv \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}. \qquad (3.9)$$

5. Связь логарифмического декремента затухания λ с коэффициентом затухания β выражается формулой (3.10):

$$\lambda = \beta T.$$

6. Время релаксации – это время, за которое амплитуда уменьшается в e = 2,71 раз.

7. Добротность вводится как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания (3.12):

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}.$$

ЛЕКЦИЯ 4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Уравнение установившихся колебаний. Резонанс

Вынужденные колебания – это колебания, происходящие под действием периодического внешнего воздействия.

4.1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

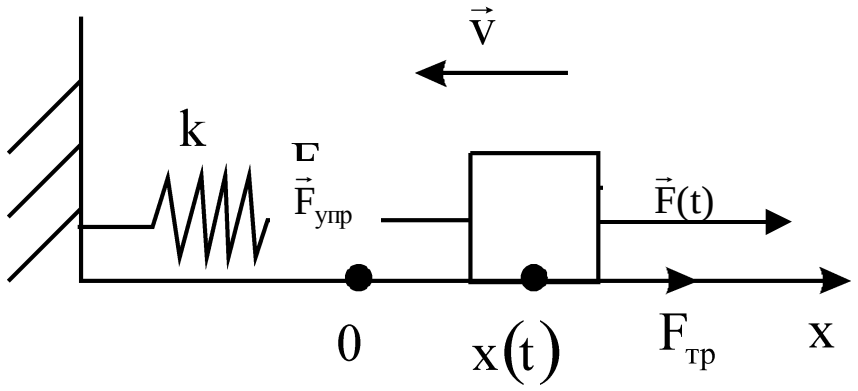


Рис. 4.1

Рассмотрим вынужденные колебания пружинного маятника (рис. 4.1).

На грузик m действуют внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \cdot \cos \omega t, \qquad (4.1)$$

а также упругая сила (1.11) и сила трения (3.1).

Законом движения является второй закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cdot \cos \omega t.$$

Приведем уравнения к каноническому виду – делим на коэффициент при старшей производной и переносим все члены уравнения, содержащие неизвестную функцию, в левую часть:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cdot \mathrm{Cos}\omega t.$$

Введем обозначения:

$$x(t) \equiv \xi(t); \qquad \frac{r}{m} \equiv 2\beta; \qquad \frac{k}{m} \equiv \omega_0^2; \qquad \frac{F}{m} \equiv f_0.$$

Дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания, будет иметь вид:

$$\ddot{\xi}(t) + 2\beta\dot{\xi}(t) + \omega_0^2\xi(t) = f_0 \cdot \cos \omega t. \qquad (4.2)$$

Отметим, что такой же вид имеет дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания в колебательном контуре (рис. 4.2а).

В контур включен последовательно источник переменного напряжения, изменяющегося по гармоническому закону:

$$u(t) = u_m \cos\omega t.$$

Если в правую часть уравнения (3.3а) вместо нуля подставить

$$\frac{U(t)}{L} = \frac{U_m}{L}\cos\omega t$$

и ввести обозначения:

$$q(t) \equiv \xi(t); \quad \frac{R}{L} \equiv 2\beta; \quad \frac{1}{LC} \equiv \omega_0^2; \quad \frac{u_m}{L} \equiv f_0,$$

то мы уже получим уравнение (4.2).

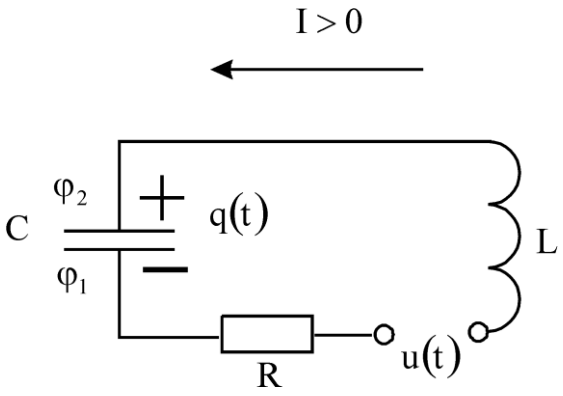


Рис. 4.2а

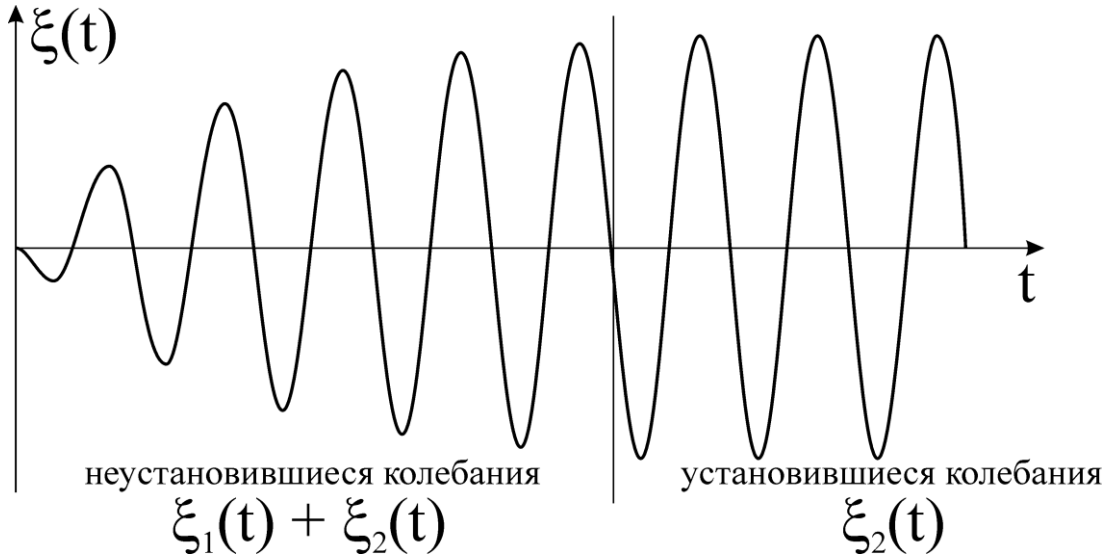


Рис. 4.2б

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний – ξ(t) (рис. 4.2б) – состоит из двух слагаемых:

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t), \qquad (4.3)$$

здесь $\xi_1(t)$ – общее решение однородного уравнения (3.4). Роль этого слагаемого существенна при переходных процессах, при установлении колебаний;

$\xi_2(t)$ – частное решение неоднородного уравнения (4.2). Именно это слагаемое описывает установившиеся вынужденные колебания.

4.2. Уравнение установившихся колебаний.

(Частное решение неоднородного уравнения)

Ищем $\xi_2(t)$ в виде гармонической функции, изменяющейся с частотой внешнего воздействия ω:

$$\xi_2 = A \cdot \cos(\omega t - \varphi). \qquad (4.4)$$

Первая и вторая производные от этой функции также будут гармоническими функциями, изменяющимися с частотой ω. Значит, в левой части уравнения (4.2) будет сумма трех гармонических функций одинаковой частоты, справа – гармоническая функция той же частоты, т. е. сумма трех колебаний одной частоты равна четвертому колебанию той же частоты. Задачу о сложении колебаний мы решим методом векторных диаграмм (см. лекцию 2, § 1, 2). Для этого $\dot{\xi}$ и $\ddot{\xi}$, после нахождения этих производных, запишем с помощью функции косинуса:

$$\dot{\xi}_2 = -A\omega\sin(\omega t - \varphi) = A\omega\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \qquad (4.5)$$

$$\ddot{\xi}_2 = -A\omega^2\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = A\omega^2\cos(\omega t - \varphi + \pi). \qquad (4.6)$$

Изобразим эти колебания с помощью векторов, амплитуды которых получаются после умножения $\dot{\xi}_2$ на 2β, а ξ_2 – на ω_0^2 (рис. 4.3). После подстановки формул (4.4), (4.5), (4.6) в уравнение (4.2) получим:

$$A\omega^2\cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta A\omega\cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) + \omega_0^2 A \cdot \cos(\omega t - \varphi) = f_0 \cdot \cos\omega t.$$

Векторная диаграмма представлена на рис. 4.3.

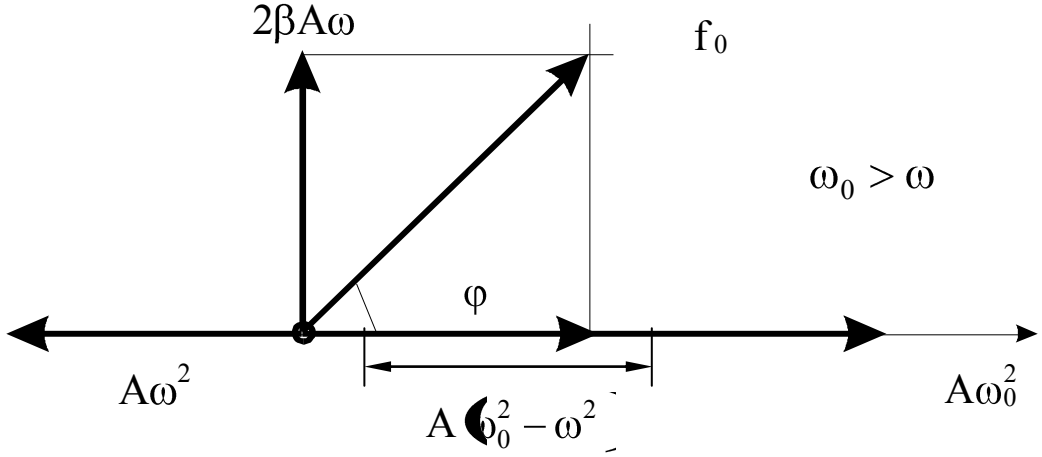


Рис. 4.3

Из векторной диаграммы найдем амплитуду A и начальную фазу φ вынужденных колебаний. Из рис. 4.3. следует:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}. \qquad (4.7)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (4.8)$$

По теореме Пифагора**:**

$$f_0^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2 + 4\beta^2 A^2 \omega^2.$$

Амплитуда вынужденных колебаний равна:

$$\boxed{A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}. \qquad (4.9)$$

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы.

4.3. Резонанс

Проанализируем, как амплитуда вынужденных колебаний изменяется с изменением частоты внешнего воздействия. При определенной частоте амплитуда достигает максимума. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота $\omega_{рез}$ – резонансной. Для определения $\omega_{рез}$ исследуем функцию A(ω) (формула (4.9)) на максимум, для этого достаточно найти минимум знаменателя у выражения A(ω). Возьмем от него производную по ω и приравняем к нулю:

$$-2(\omega_0^2 - \omega^2)\cdot 2\omega + 8\beta^2\omega = 0,$$

откуда резонансная частота:

$$\boxed{\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}. \qquad (4.10)$$

При $2\beta^2 > \omega_0^2$ резонанс отсутствует ($\omega_{рез}$ – мнимое число).

Амплитуда при резонансе

Амплитуда при резонансе получается при подстановке найденного выражения $\omega_{рез}$ (4.10) в формулу для A(ω) (4.9):

$$\boxed{A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}. \qquad (4.11)$$

Из (4.11) следует, что при уменьшении коэффициента затухания β резонансная амплитуда возрастет. Если $\beta \to 0$, то $A_{рез} \to \infty$. При этом резонансная частота (4.10) стремится к частоте незатухающих собственных колебаний ω_0.

При $\beta << \omega_0$:

$$A_{рез} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}. \qquad (4.12)$$

Резонансные кривые

Графики зависимости A(ω) при различных β носят название резонансных кривых. Они представлены на рис. 4.4.

$A(\omega)/A(0)$

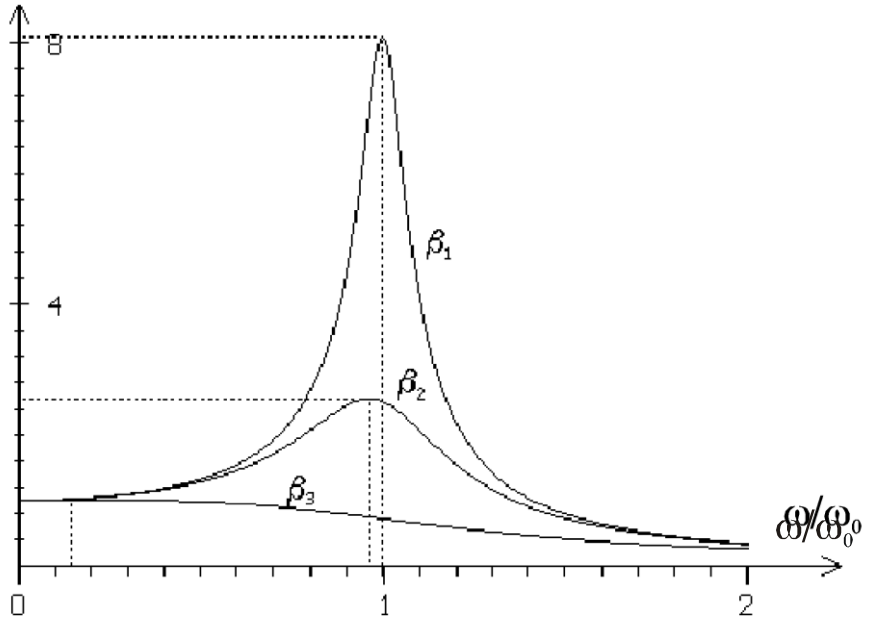


Рис. 4.4

На рис 4.4 $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$. В случае, если $2\beta_3^2 > \omega_0^2$ – резонанса нет.

Резонанс необходимо учитывать в технике. Жилые дома, промышленные корпуса, железные дороги, мосты, туннели и т. д. являются колебательными системами, в которых при определенных условиях могут возникать вынужденные колебания. Иногда амплитуда вынужденных колебаний становится столь большой, что это может вызвать разрушения. В ряде случаев резонанс может давать положительный эффект, например, при погружении свай и труб на строительстве морских и озерных сооружений.

Исключительно важную роль играет резонанс в радиотехнике и электронике, где резонансные свойства колебательного контура и других резонансных электрических систем используются для выделения сигналов нужной частоты. Например, настройка на нужную станцию радио- и телевизионных приемников производится путем изменения собственных частот колебательных контуров в этих устройствах.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 4

1. Вынужденные колебания возникают в том случае, когда на колеблющуюся систему действует внешняя периодически изменяющаяся сила.

2. Частота установившихся вынужденных колебаний равна частоте вынуждающей силы. Дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания, имеет вид (4.2):

$$\ddot{\xi}(t) + 2\beta\dot{\xi}(t) + \omega_0^2\xi(t) = f_0 \cdot \cos\omega t .$$

3. Амплитуда установившихся вынужденных колебаний зависит от амплитуды вынуждающей силы f_0 и ее частоты ω (4.9):

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} .$$

4. Резонансом называют резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний, происходящее при приближении частоты вынужденных колебаний к резонансной частоте колебаний системы. Амплитуда при резонансе дается формулой (4.11):

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} .$$

5. Резонансная частота $\omega_{рез}$ зависит от частоты собственных колебаний ω_0 и коэффициента затухания β (4.10):

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} .$$

При $2\beta^2 > \omega_0^2$ резонанса нет.

Амплитуда при резонансе определяется формулой (4.11):

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} .$$

ЛЕКЦИЯ 5. ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Упругие волны. Основные определения для волнового процесса. Уравнение плоской волны. Фазовая скорость. Уравнение сферической волны. Волновое уравнение

5.1. Упругая волна

Среда называется упругой, если между ее частицами существуют силы взаимодействия, препятствующие какой-либо деформации этой среды. Существует объемная упругость и упругость формы. Например, давление газов на стенки сосуда обеспечивает способность газов сопротивляться изменению их объема. В то же время, газы беспрепятственно изменяют свою форму. Следовательно, газы обладают объемной упругостью, но не обладают упругостью формы. Такими же свойствами обладают жидкости. Твердые тела обладают как объемной упругостью, так и упругостью формы.

Если в каком-либо месте упругой среды (твердой, жидкой или газообразной) возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами эти колебания будут распространяться в среде от частицы к частице, создавая **упругие волны**. Колебания твердых тел при взрывах и землетрясениях, звуковые волны – все это примеры упругих волн.

Частицы среды при волновом процессе не переносятся волной, а лишь колеблются около своих положений равновесия. Причем, вследствие инерции колебания частиц сдвинуты по фазе. Распространение колебаний в среде связано с передачей энергии от одной колеблющейся частицы к другой. Таким образом, волны переносят энергию от одной колеблющейся частицы к другой.

Итак, **упругая волна** – *это процесс распространения механических колебаний в упругой среде*. Характерное свойство волны – перенос энергии без переноса вещества.

Для описания волны надо ввести функцию, в общем случае – векторную, задающую смещение от положения равновесия каждой частицы упругой среды для любого момента времени. Обозначим эту функцию греческой буквой $\vec{\xi}$ (кси). Аргументами ее, в соответствии с вышесказанным, будут три пространственные переменные – x, y, z, задающие положение частицы (или радиус-вектор $\vec{r}$) и время t, т. е.

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(x, y, z, t) = \vec{\xi}(\vec{r}, t).$$

Скорость движения частиц упругой среды – это частная производная от смещения по времени, т. е.

$$\vec{v}_r = \frac{\partial \vec{\xi}(\vec{r}, t)}{\partial t}.$$

С такой скоростью частицы среды колеблются около своих положений равновесия. Колебания частиц среды могут совершаться *вдоль* направления распространения волны или *поперек*. Поэтому различают **продольные и поперечные волны.**

Обозначим через $\vec{v}$ скорость распространения волны. Если направление смещения $\vec{\xi}$ (и скорость частицы $\partial\vec{\xi}/\partial t$) совпадают с направлением скорости волны, то волна называется **продольной**. Если $\vec{v}$ и $\partial\vec{\xi}/\partial t$ взаимно перпендикулярны, то волна **поперечная**. В газах и жидкостях могут существовать только продольные волны, в твердых телах – как продольные, так и поперечные.

5.2. Основные определения для волнового процесса

Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства.

Фронт волны – поверхность, отделяющая часть пространства, охваченную волновым процессом, от той части, где колебания еще не возникли.

Волновая поверхность – это геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Во всякой волне можно выделить множество волновых поверхностей, в то время как фронт волны один.

Для плоской волны – волновые поверхности и фронт волны представляют собой плоскости. Для сферической волны – волновые поверхности и фронт волны представляют собой сферы. В общем случае форма волновых поверхностей может быть любой.

Длина волны – это расстояние, на которое распространяется волна за один период колебаний.

$$\boxed{\lambda = vT}. \qquad (5.1)$$

Так как

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega},$$

то

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{v}{2\pi\omega}. \qquad (5.2)$$

Волновое число – это величина

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{или} \quad k = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}. \qquad (5.3)$$

Волновой вектор – $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$, где $\vec{n}$ – единичный вектор, указывающий направление распространения волны.

5.3. Уравнение плоской волны

Пусть в начале координат находится твердая плоскость, которая колеблется по гармоническому закону и вынуждает частицы упругой среды, находящейся рядом с ней, колебаться по этому же закону. Направим ось x перпендикулярно этой плоскости (рис. 5.1). Тогда вдоль этой оси будет распространяться плоская гармоническая продольная волна. Наша задача – найти $\xi(x,t)$ – уравнение

волны, если задано $\xi(0,t) = A \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, т. е. задано уравнение колебаний источника.

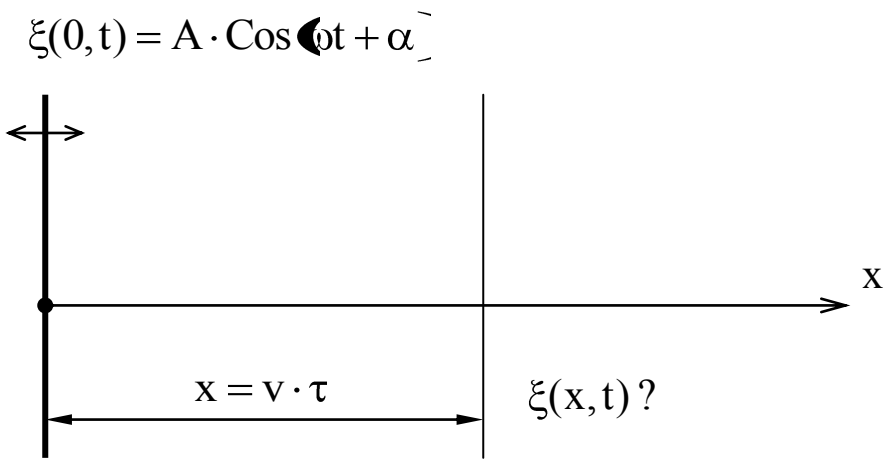


Рис. 5.1

Колебания до волновой поверхности, удаленной от начала координат на расстояние x, дойдут через время $\tau = x / v$, значит, уравнение волны

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos[\omega(t-\tau) + \alpha] = A \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]. \qquad (5.4)$$

где $\xi(x,t)$ – смещение частиц среды от положения равновесия;

x – расстояние от источника до точки наблюдения;

A – амплитуда волны;

ω – частота колебаний источника;

t – время распространения колебаний;

$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha$ – фаза волны, т. е. аргумент у косинуса в уравнении волны.

Фаза плоской волны зависит от двух переменных – x и t.

Найдем симметричную форму уравнения плоской волны. Преобразуем уравнение (5.4):

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right] = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \alpha\right).$$

Учтем:

$$\boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$ – волновое число.

Тогда:

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha). \qquad (5.5)$$

При такой записи координата x и время t входят в уравнение волны симметрично.

Уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении, противоположном оси x, имеет вид:

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t + kx + \alpha). \qquad (5.5a)$$

Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении, имеет вид:

$$\xi(\vec{r},t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \qquad (5.6)$$

здесь $\vec{k}$ – волновой вектор;

k_x, k_y, k_z – его проекции на оси координат;

$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ – скалярное произведение волнового вектора и радиус-вектора.

5.4. Фазовая скорость

Фазовая скорость – это скорость перемещения в пространстве поверхности, вдоль которой фаза волны остается постоянной, т. е. это скорость, с которой распространяется фронт волны или какая-либо волновая поверхность, например, гребень волны.

Зафиксируем значение фазы, стоящее в выражении (5.4):

$$\omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha = \text{const}.$$

Найдем производную от этого выражения по времени:

$$\omega - \frac{\omega}{v} \cdot \frac{dx}{dt} = 0,$$

откуда искомая фазовая скорость волны:

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Как направлена фазовая скорость? В случае однородной и изотропной среды фазовая скорость в каждой точке среды направлена перпендикулярно к элементу волновой поверхности.

Фазовая скорость зависит от механических свойств среды. Например, для продольных волн в твердых телах:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

для поперечных волн:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

для продольных волн в жидкостях:

$$v = \sqrt{\frac{k_{сж}}{\rho}}.$$

В этих формулах:

E – модуль упругости (модуль Юнга);

G – модуль сдвига;

$k_{сж}$ – модуль всестороннего сжатия;

ρ – плотность среды.

Значения этих величин для разных сред можно найти в справочниках. По справочным данным, которые получены из опыта, $G < E$, т. е. скорость поперечных волн в твердых телах меньше, чем продольных.

Это обстоятельство используется, например, для определения расстояния от очага землетрясения до сейсмической станции. Вначале на станции регистрируется продольная волна, потом поперечная. Зная скорость распространения продольных и поперечных волн в земной коре и время запаздывания поперечной волны, можно определить расстояние до очага землетрясения.

5.5. Уравнение сферической волны

Всякий реальный источник обладает некоторой протяженностью. Однако, если ограничиться рассмотрением волн на расстояниях от источника, значительно превышающих его размеры, то источник можно считать **точечным.** Точечный источник в однородной и изотропной среде создает **сферические** волны. Найдем уравнение сферической волны. Допустим, что фаза колебаний источника равна $(\omega t + \alpha)$. Тогда точки, лежащие на расстоянии r от источника, будут колебаться с фазой:

$$\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) + \alpha = \omega t - kr + \alpha.$$

Амплитуда незатухающей сферической волны равна:

$$A_r = \frac{A_o}{r}, \qquad (5.7)$$

где A_o – постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии r, равном единице.

Формула (5.7) справедлива при $r >> l$, где l – размеры источника (при $r \to 0$ ее применять нельзя).

Уравнение сферической волны имеет вид:

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha). \qquad (5.8)$$

5.6. Волновое уравнение

Уравнение волны (5.5) есть решение соответствующего дифференциального уравнения, называемого волновым. Волновое уравнение связывает вторые частные производные от смещения по координатам со вторыми частными производными от смещения по времени. Чтобы найти волновое уравнение, продифференцируем дважды уравнение плоской волны (5.5) по времени, а затем продифференцируем это же уравнение по координате. Получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -Ak^2 \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha), \qquad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha), \qquad (5.10)$$

Разделим (5.9) на (5.10) и учтем, что $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{v}$.

Тогда получим волновое уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся в направлении оси x:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \qquad (5.11)$$

$$v = \frac{\omega}{k}, \qquad (5.12)$$

где v – фазовая скорость волны.

Для волны, распространяющейся в произвольном направлении, волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \qquad (5.13)$$

Решением уравнения (5.13) в зависимости от дополнительных условий могут быть уравнения плоской, сферической и других волн.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 5

1. Упругой волной называется процесс распространения механических волн в упругой среде (твердой, жидкой или газообразной). Характерное свойство волн – перенос энергии без переноса вещества.

2. 2 Волны бывают продольные и поперечные.

3. Фронт волны – это геометрическое место точек, до которых дошли колебания. Волновая поверхность – это геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

4. Фазовая скорость волны – это скорость перемещения в пространстве волновой поверхности, например, фронта волн. Фазовая скорость зависит от плотности и упругих свойств среды.

5. Длина волны – это путь, пройденный волной за период (5.1):

$$\lambda = vT.$$

Связь длины волны и частоты выражается формулой (см. (5.2)):

$$\lambda = \frac{v}{\nu}.$$

6. Волновое число (5.3) – это:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

7. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x (5.5):

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha).$$

8. Уравнение сферической волны (5.8):

$$\xi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha).$$

9. Уравнение любой гармонической волны есть решение волнового уравнения (5.13):

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

где v – фазовая скорость волны (5.12):

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Эта формула полностью согласуется с формулой (5.3).

ЛЕКЦИЯ 6. ЭНЕРГИЯ УПРУГИХ ВОЛН. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

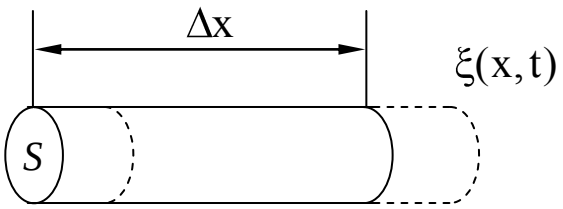
Плотность энергии. Вектор Умова. Интенсивность.
Колебания струны, закрепленной с двух концов

6.1. Энергия упругой волны

Любая волна несет с собой энергию.

Найдем полную механическую энергию для выделенного нами элемента упругой среды, в которой распространяется продольная упругая волна (рис. 6.1).

Полная энергия складывается из кинетической и потенциальной:



$$\Delta W = \Delta W_к + \Delta W_п .$$

Кинетическая энергия равна:

$$\Delta W_k = \frac{\Delta m v_r^2}{2} .$$

Рис. 6.1

Масса Δm выделенного элемента среды равна произведению плотности на объем: $\Delta m = \rho \Delta V$.

Так как объем $\Delta V = S\Delta x,$ то $\Delta m = \rho S \Delta x$.

Скорость v_r движения частицы упругой среды (не путать с фазовой скоростью волны v!) равна:

$$v_r = \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

тогда

$$\Delta W_k = \frac{\rho}{2} \cdot \left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\right]^2 \cdot S\Delta x . \qquad (6.1)$$

Из теории упругости известно, что потенциальная энергия упругой деформации среды:

$$\Delta W_п = \frac{\rho}{2} v^2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]^2 S\Delta x . \qquad (6.2)$$

где $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ – относительная деформация среды;

v – *фазовая скорость* волны.

Полная энергия выделенного элемента объемом $S\Delta x$ будет равна:

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_n = \frac{\rho}{2} \cdot \left\{\left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\right]^2 + v^2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]^2\right\} \cdot S\Delta x . \qquad (6.2а)$$

6.2. Плотность энергии упругой волны

Плотность энергии упругой волны – это энергия, заключенная в единице объема. Используя (6.2а), получим:

$$w \equiv \frac{\Delta W}{S\Delta x} = \frac{\rho}{2}\left\{\left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\right]^2 + v^2\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]^2\right\}. \qquad (6.3)$$

Найдем плотность энергии упругой волны в зависимости от времени и координаты.

Плотность энергии плоской гармонической волны найдем, продифференцировав уравнение плоской волны (5.5):

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - kx + \alpha)$$

один раз по t, другой раз по x:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -A\omega\cdot\sin(\omega t - kx + \alpha),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -Ak\cdot\sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Подставим полученное выражение в (6.3) и учтем, что $\omega/k = v$ (см. (5.12)). В результате получим плотность энергии, возникающей в упругой среде при распространении в ней плоской гармонической волны:

$$w = \frac{\rho}{2}A^2\cdot\left[\omega^2\sin^2(\omega t - kx + \alpha) + \left(\frac{\omega}{k}\right)^2\cdot k^2\sin^2(\omega t - kx + \alpha)\right];$$

$$w = \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx + \alpha). \qquad (6.4)$$

Формула (6.4) справедлива для гармонических волн *любого вида*, так как в ней нет величин, которые бы указывали на характер волны.

Найдем среднее по времени значение плотности энергии упругой *гармонической* волны. Из (6.4) следует, что в каждый момент времени плотность энергии в разных точках пространства различна. В одной и той же точке плотность энергии изменяется по закону квадрата синуса. Из математики известно, что среднее значение квадрата синуса равно одной второй, т. е.:

$$<\sin^2(\omega t - kx + \alpha)> = \frac{1}{2}\cdot$$

Тогда:

$$<w> = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2. \qquad (6.5)$$

Плотность энергии (6.4) и ее среднее значение (6.5) пропорциональны плотности среды, квадрату амплитуды A и квадрату частоты ω волны.

6.3. Плотность потока энергии

Среда, в которой распространяется упругая волна, обладает дополнительной механической энергией. Эта энергия доставляется от

источника колебаний в различные точки среды самой волной. Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется **потоком энергии Ф:**

$$\Phi \equiv \frac{dW}{dt} \cdot \qquad (6.6)$$

Поток энергии – скалярная величина, размерность которой совпадает с размерностью мощности (т. е. $Дж/с = Вт$). Для характеристики течения энергии в разных точках пространства используется векторная величина, называемая **плотностью потока энергии.**

Плотностью потока энергии называется физическая величина, численно равная потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно направлению, в котором переносится энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением распространения волны.

Модуль плотности потока энергии равен:

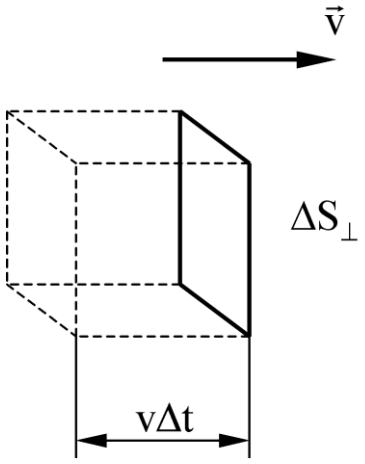
$$j \equiv \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S_\perp} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_\perp} = \frac{d\Phi}{dS_\perp} \cdot \qquad (6.7)$$

Размерность j определяется из формулы (6.7):

$$[\,] = \frac{Дж}{м^2 с} = \frac{Вт}{м^2} \cdot$$

6.4. Вектор Умова. Интенсивность

Найдем связь плотности потока энергии с плотностью энергии упругой волны.



Через площадь $\Delta S_\perp$ (рис. 6.2) за время Δt проходит энергия, заключенная в объеме $\Delta S_\perp v\Delta t$. Из формулы плотности энергии (6.3) и рис. 6.2 следует, что:

$$\Delta W = w\Delta S_\perp v\Delta t \cdot$$

Подставляя это выражение в определение j (6.7), получим:

$$j = \frac{w\Delta S_\perp v\Delta t}{\Delta t \Delta S_\perp} = wv \cdot \qquad (6.8)$$

Рис. 6.2

В векторном виде:

$$\boxed{\vec{j} = w\vec{v}} \,. \qquad (6.9)$$

Этот вектор для упругих волн был введен в 1874 году русским физиком Н.А. Умовым и называется вектором Умова. Вектор Умова характеризует перенос энергии механическими (упругими) волнами. Направление вектора Умова совпадает с направлением переноса энергии (т. е. с направлением скорости волны $\vec{v}$, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Модуль плотности потока энергии различен в разных точках пространства, а в данной точке изменяется со временем по закону квадрата синуса (см. (6.4)).

Интенсивность волны – это среднее по времени от модуля вектора плотности потока энергии:

$$I = <\left|\vec{j}\right|> = <wv>. \qquad (6.10)$$

Для упругой волны интенсивность равна (см. формулу (6.5)):

$$I = <w>v = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v. \qquad (6.10а)$$

Для упругой волны интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату частоты.

Понятие «интенсивность» широко используется в физике. Для электромагнитных волн оно характеризует интенсивность излучения, для звуковых – силу звука, для световых – силу света. Во всех случаях интенсивность равна средней энергии, переносимой волной в единицу времени через единицу площади площадки, расположенной перпендикулярно направлению распространения волны.

6.5. Стоячие волны

При наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой возникает колебательный процесс, называемый стоячей волной. При этом переноса энергии не происходит.

Найдем уравнение стоячей волны.

Для волны, бегущей по оси x (см. (5.5)):

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - kx).$$

Для волны, бегущей против оси x (см. (5.5а)):

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t + kx).$$

Для простоты мы положили равным нулю значение начальных фаз этих волн. Сумма этих уравнений и дает уравнение стоячей волны:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = A\cdot\left[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)\right] =$$

$$= 2A\cos kx\cdot\cos\omega t = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t. \qquad (6.11)$$

Амплитуда стоячей волны – это модуль выражения, стоящего перед множителем $\cos\omega t$, т е.

$$A_{ст} = \left| 2A \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right|. \qquad (6.12)$$

Амплитуда стоячей волны зависит от координаты. В некоторых точках $A_{ст} = 0$, в некоторых $A_{ст} = 2A$.

Узлы и пучности

Поверхности, где амплитуда колебаний равна нулю, называют **узлами стоячей волны**. Для узлов:

$$\left| 2A \cdot \mathrm{Cos} \frac{2\pi}{\lambda} x \right| = 0 \;\rightarrow\; \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm\left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right), \; n = 0, 1, 2, ...$$

Следовательно, координаты узлов:

$$x_{узл} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$$

Поверхности, где амплитуда колебаний достигает максимума, называют **пучностями стоячей волны.**

Для пучностей:

$$\left| 2A \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right| - 2A \qquad \rightarrow \qquad \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm n\pi, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Координаты пучностей:

$$x_{п} = \pm n \frac{\lambda}{2}.$$

В отличие от бегущей волны, в стоячей волне не происходит переноса энергии. Это объясняется тем, что в образующих ее падающей и отраженной волнах энергия переносится в равных количествах в противоположных направлениях.

6.6. Колебания струны, закрепленной с двух концов

Стоячие волны можно возбудить в струне, закрепленной с двух концов (рис. 6.3)

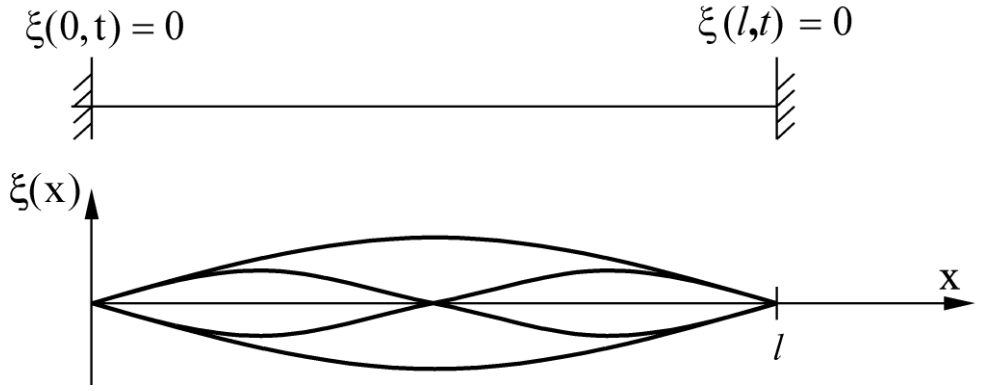


Рис. 6.3

В силу граничных условий, заданных закреплением концов струны, уравнение стоячей волны при выборе начала координат на одном из концов струны следует записать через функцию $\sin kx$, т. е.

$$\xi(x,t) = 2A \cdot \sin kx \cdot \sin \omega t .$$

Тогда условие $\xi(0,t) = 0$ будет выполнено. Для выполнения граничного условия на другом конце струны $\xi(l,t) = 0$ мы должны потребовать, чтобы

$$\sin kl = 0 \quad \rightarrow \quad kl = n\pi .$$

Это приводит к *квантованию* волнового числа, т. е. k может принимать не любые значения, а только дискретные, определяемые равенством:

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Так как

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad (5.3)$$

то

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l} \rightarrow \boxed{l = n\frac{\lambda_n}{2}}.$$

Вдоль струны должно укладываться целое число полуволн! Из (5.2) $\lambda_n = \frac{v}{\nu_n}$, и мы получаем дискретный спектр (набор) частот, на которых может колебаться закрепленная с двух концов струна:

$$\boxed{\nu_n = \frac{v}{2l}n}, \quad n = 1, 2, 3, ... \qquad (6.13)$$

Частота ν_1 называется основным тоном, ν_2 – первым обертоном и т.д.

Гармонические колебания с частотами (6.13) называют собственными или нормальными колебаниями. Их называют также гармониками. В общем случае колебания струны представляют собой наложение различных гармоник. В последнее время в отечественной литературе популярность, наряду с терминами «нормальные колебания», «гармоники», приобретает их синоним: «*нормальные моды*», или просто моды колебаний.

Как следует из формулы (6.13) для того, чтобы изменить собственные частоты, необходимо изменить длину струны. Этим пользуются при игре на струнных инструментах. Аналогичная ситуация и для духовых инструментов, только там параметр l определяет длину колеблющегося столба воздуха.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 6

1. Среда, в которой распространяется упругая волна, обладает дополнительной механической энергией. Эта энергия складывается из кинетической энергии частиц среды и потенциальной энергии упругой деформации среды.

2. Плотность энергии упругой гармонической волны в каждой точке пространства изменяется со временем по закону квадрата синуса (6.4). Среднее значение плотности энергии упругой волны пропорционально плотности среды, квадрату амплитуды и квадрату круговой частоты (6.5):

$$< w > = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2.$$

3. Потоком энергии называется количество энергии, переносимой волной через некоторую поверхность в единицу времени (6.6). Это скалярная величина.

$$\Phi \equiv \frac{dW}{dt}.$$

4. Плотностью потока энергии называется векторная величина, сонаправленная с $\vec{v}$ – фазовой скоростью волны, численно равная потоку энергии через единичную площадку (6.7) и (6.9):

$$j \equiv \lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S_\perp}, \qquad \vec{j} = w\vec{v},$$

где w – плотность энергии упругой волны.

Вектор $\vec{j}$ для упругих волн называется вектором Умова.

5. Интенсивностью волны называется средняя энергия, переносимая волной в единицу времени через единицу площади площадки, расположенной перпендикулярно направлению распространения волны. Для упругой волны интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды волны и квадрату частоты (6.10а):

$$I = < w > v = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v.$$

6. Стоячая волна возникает при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Уравнение стоячей волны (6.11) имеет следующий вид:

$$\xi(x,t) = 2A\cdot\cos kx\cdot\cos\omega t = 2A\cdot\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cdot\cos\omega t,$$

где $A_{ст} = \left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$ – амплитуда стоячей волны.

7. В струне, закрепленной с двух концов, возбуждаются стоячие волны с дискретным спектром частот, определяемым формулой (6.13):

$$\nu_n = \frac{v}{2l} n, \qquad n = 1, 2, 3,$$

здесь l – длина струны;

v – фазовая скорость упругой волны.

ЛЕКЦИЯ 7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Понятие об электромагнитной волне.
Плоская электромагнитная волна.
Энергия и интенсивность электромагнитной волны.
Излучение диполя. Вибратор Герца

7.1. Понятие об электромагнитной волне

Электромагнитной волной называется процесс распространения электромагнитных колебаний в пространстве. К электромагнитным волнам относятся радиоволны, свет, рентгеновское излучение, гамма-излучение.

В отличие от механических волн, электромагнитные волны не нуждаются в веществе для своего распространения. Они могут существовать в вакууме, т. е. в пространстве, не содержащем атомов. Несмотря на существенное отличие электромагнитных волн от механических, электромагнитные волны ведут себя подобно механическим, в частности, имеют конечную скорость распространения и переносят с собой энергию.

Существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла (см. ч. 1, лекция № 14).

Возможность существования электромагнитных волн обусловлена тем, что существует связь между переменными электрическими и магнитными полями. Переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле, а переменное во времени электрическое поле создает вихревое магнитное поле. Таким образом, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электрическое поле, то в окружающем заряды пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке в виде электромагнитной волны.

Электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме, характеризуется векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$\vec{E}$ – напряженность электрического поля,

$\vec{H}$ – напряженность магнитного поля.

Из решения уравнений Максвелла следует, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг к другу и перпендикулярны направлению распространения, т. е. $\vec{E} \perp \vec{H}$, $\vec{E} \perp \vec{v}$, $\vec{H} \perp \vec{v}$, $\vec{v}$ – фазовая скорость распространения волн. Это значит, что **электромагнитные волны поперечны.**

Электромагнитная волна называется монохроматической, если ее векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ совершают гармонические колебания постоянной одинаковой частоты, называемой частотой волны. Электромагнитная волна может иметь любое значение частоты.

Классификация волн по частоте называется шкалой электромагнитных волн. Шкала спектра электромагнитных волн представлена в таблице:

Таблица

Название диапазона	Интервал частот, Гц
Радиоволны	$\sim 10^4 \div \sim 10^{12}$
Оптическое излучение: - инфракрасное (ИК) - видимый свет - ультрафиолетовое (УФ)	$\sim 10^{12} \div 3{,}9 \cdot 10^{14}$ $3{,}9 \cdot 10^{14} \div 7{,}5 \cdot 10^{14}$ $7{,}5 \cdot 10^{14} \div \sim 6 \cdot 10^{17}$
Рентгеновское излучение	$6 \cdot 10^{17} \div \sim 10^{19}$
Гамма-излучение	10^{19} и больше

В соответствии с частотой существуют разные способы возбуждения электромагнитных волн. Электромагнитное излучение возникает в следующих случаях.

1. Изменяющиеся со временем электрические токи порождают электромагнитное излучение. В этом случае излучающей системой является открытый колебательный контур, в частности, вибратор Герца (радиоволны низкой частоты).

2. Отдельные ускоренно движущиеся электрически заряженные частицы испускают электромагнитные волны. Это происходит, например, вследствие процессов, совершаемых в ламповых или полупроводниковых приборах (радиоволны высокой частоты). Торможение быстрых электронов в веществе также вызывает излучение (тормозное рентгеновское излучение).

3. Электромагнитное излучение создают атомы, молекулы и другие квантовые системы при квантовых переходах. Все волны оптического излучения (инфракрасное излучение, видимый свет, ультрафиолетовое излучение), а также рентгеновское излучение (характеристическое) связаны с переходами атомов из возбужденного состояния в состояние с меньшей энергией. Гамма-излучение испускается атомными ядрами.

7.2. Плоская электромагнитная волна

На большом расстоянии от излучателя электромагнитные волны будут плоскими.

Пусть плоская волна распространяется вдоль оси x, вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси y, вектор $\vec{H}$ – вдоль оси z.

Из уравнений Максвелла следуют два волновых уравнения для плоской электромагнитной волны.

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \qquad (7.1)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \qquad (7.2)$$

Уравнения (7.1) и (7.2) неразрывно связаны друг с другом. Эти связи зафиксированы в уравнениях Максвелла. В уравнениях (7.1) и (7.2):

ε – диэлектрическая проницаемость среды;

μ – магнитная проницаемость;

ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные.

Как мы знаем, в волновом уравнении коэффициент при второй производной по времени есть величина, обратная квадрату фазовой скорости волны
(см. (5.11)). Для электромагнитной волны из волновых уравнений (7.1) и (7.2) получается следующая формула для фазовой скорости:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (7.3)$$

В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$, следовательно:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}, \quad \text{Ф/м (см. ч. 2, лекция № 1);}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}, \quad \text{Гн/м (см. ч. 2, лекция № 8);}$$

Тогда:

$$v = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \equiv c.$$

Полученное значение фазовой скорости электромагнитной волны в вакууме равно скорости света в вакууме – c. С учетом этого, фазовая скорость электромагнитной волны:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (7.3а)$$

Гармонические волны представляют собой простейшие решения волновых уравнений.

Легко проверить, что функции

$$E_y(x,t) = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \qquad (7.4)$$

$$H_z(x,t) = H_m \cos(\omega - kx + \alpha_2) \qquad (7.4а)$$

являются решениями волновых уравнений (7.1) и (7.2). Эти решения описывают электромагнитную волну, у которой вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси y, вектор $\vec{H}$ – вдоль оси z, волна распространяется вдоль оси x, таким образом, векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{v}$ образуют правую тройку. Остальные компоненты в плоской волне равны нулю:

$$E_x = 0, \; E_z = 0, \; H_x = 0, \; H_y = 0.$$

В уравнениях (7.4) и (7.4а) E_m и H_m амплитудные значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$;

ω – круговая частота электромагнитной волны;

k – волновое число;

α_1 и α_2 – начальные фазы;

x – расстояние от источника колебаний до точки наблюдения.

Из уравнений Максвелла следует связь между амплитудами векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ электромагнитной волны:

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}\ E_m = \sqrt{\mu_0 \mu}\ H_m}. \qquad (7.5)$$

Из уравнений Максвелла также следует, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ колеблются в одинаковой фазе:

$$\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha}.$$

Они одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимальных значений.

Пространственная структура электромагнитной волны изображена на рис. 7.1, на котором для фиксированного момента времени t_1 векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ плоской гармонической электромагнитной волны изображены в виде диаграммы.

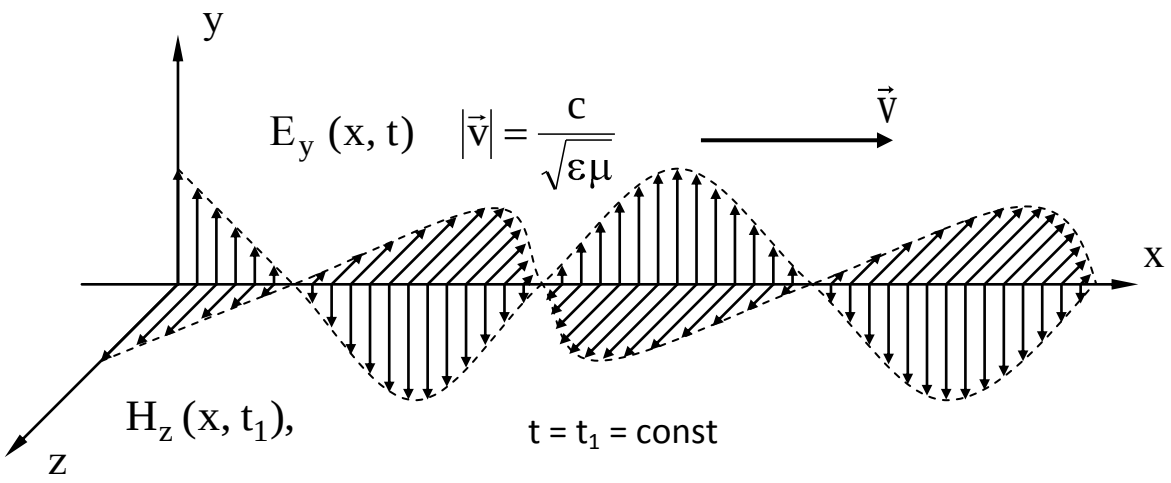


Рис. 7.1

7.3. Энергия и интенсивность электромагнитной волны

Количество энергии электромагнитного поля характеризуется объемной плотностью энергии. Плотность энергии электромагнитного поля складывается

из плотности энергии электрического поля $w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$ и плотности энергии магнитного поля $w_н = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$.

Плотность энергии электромагнитной волны с учетом (7.5) равна:

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \varepsilon_0\varepsilon E^2.$$

Воспользовавшись еще раз формулой (7.5) и затем формулой (7.3а), получаем для объемной плотности энергии электромагнитной волны:

$$w = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}EH = \frac{EH}{v}. \qquad (7.6)$$

Аналогично упругой волне, для электромагнитной волны вводятся понятие потока энергии (6.6), плотности потока энергий (6.8) и интенсивности (6.10).

Найдем вектор плотности потока энергии электромагнитной волны.

Из (6.8):

$\vec{j} = w\vec{v}$.

Для электромагнитной волны вектор плотности потока энергии обозначают буквой $\vec{S}$ $(\vec{j} \equiv \vec{S})$ и называют вектором Пойнтинга.

С учетом (7.6) модуль вектора Пойнтинга равен:

$S = EH$.

Используя диаграмму (см. рис. 7.1), величине S можно придать векторный характер:

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]. \qquad (7.7)$$

Вектор Пойнтинга $\vec{S}$ равен векторному произведению векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Интенсивность электромагнитной волны – это среднее по времени от модуля вектора Пойнтинга:

$$I \equiv \langle|\vec{S}|\rangle = \langle EH \rangle. \qquad (7.8)$$

Интенсивность электромагнитной волны равна среднему значению произведения модулей векторов Е и Н. Расчет аналогичен (6.4) и (6.5). После усреднения, с учетом (7.4), (7.4а) и (7.5):

$$I = \frac{1}{2}E_m H_m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2,$$

т. е. интенсивность электромагнитной волны пропорциональна среднему значению квадрата амплитуды напряженности электрического поля:

$$I \sim E_m^2. \qquad (7.9)$$

7.4. Излучение диполя

Излучение радиоволн рассмотрим на примере излучения диполя.

Диполь – это два равных разноименных точечных заряда $+q$ и $-q$, находящихся на некотором расстоянии d друг от друга. Диполь характеризуется дипольным электрическим моментом $\vec{p}$ (рис. 7.2).

$$\vec{p} = q\vec{d} \,. \qquad (7.10)$$

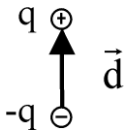


Рис. 7.2

Пусть расстояние между зарядами диполя периодически изменяется с течением времени, т. е. $\vec{d} = \vec{d}(t)$, диполь колеблется. Тогда $\vec{p} = \vec{p}(t)$. Колебательное движение – это движение с ускорением. Электрическое и магнитное поля диполя будут переменными, диполь будет излучать электромагнитные волны.

Точный расчет на основе уравнений Максвелла показывает, что картина электромагнитного поля в этой волне, распространяющейся в вакууме, в непосредственной близости от диполя будет очень сложной. Она сильно упрощается в так называемой **волновой зоне** (при $r >> \lambda$). Волновая поверхность тогда имеет форму сферы. Направление векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ изображено на рис. 7.2а. Угол θ – это угол между направлением дипольного момента $\vec{p}$ и направлением излучения. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в каждой точке перпендикулярны лучу, т. е. к радиус-вектору, проведенному в данную точку из центра диполя. Вектор $\vec{E}$ направлен по касательной к меридиану, вектор $\vec{H}$ – по касательной к параллели. Если смотреть вдоль луча, то картина будет такой же, как на рис. 7.1, с тем отличием, что амплитуда при перемещении вдоль луча постепенно убывает (сравните с уравнением сферической волны (5.8)).

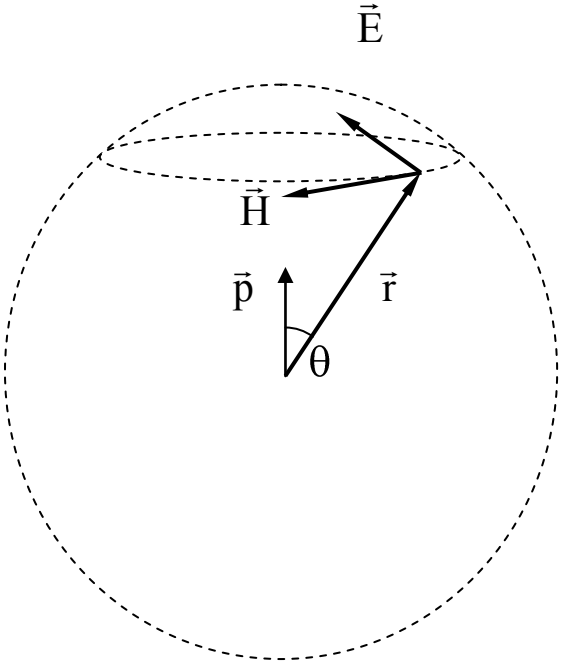


Рис. 7.2а

Рассмотрим электрическое поле диполя, колеблющегося по гармоническому закону.

Пусть $p = p_0 \cos \omega t,$ тогда для напряженности электрического поля E, найденной путем решения уравнения Максвелла, имеем:

$$E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p_0 \omega^2 \sin\theta}{c^2 r} \cos(\omega t - kr). \qquad (7.11)$$

Для напряженности магнитного поля из (7.5) получим:

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E. \qquad (7.12)$$

Интенсивность дипольного гармонического излучения из (7.8) равна:

$$I = <EH> = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} <E^2> =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \cdot \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{c^4 r^2} < \cos^2(\omega t - kr) > =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{c^4 r^2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{p_0^2 \omega^4}{r^2} \sin^2\theta. \qquad (7.13)$$

Таким образом, интенсивность излучения пропорциональна квадрату амплитуды электрического момента диполя и четвертой степени частоты, а также зависит от направления излучения.

Диаграмма направленности излучения диполя – это графическое изображение в полярной системе координат зависимости интенсивности излучения I (7.13) от угла θ.

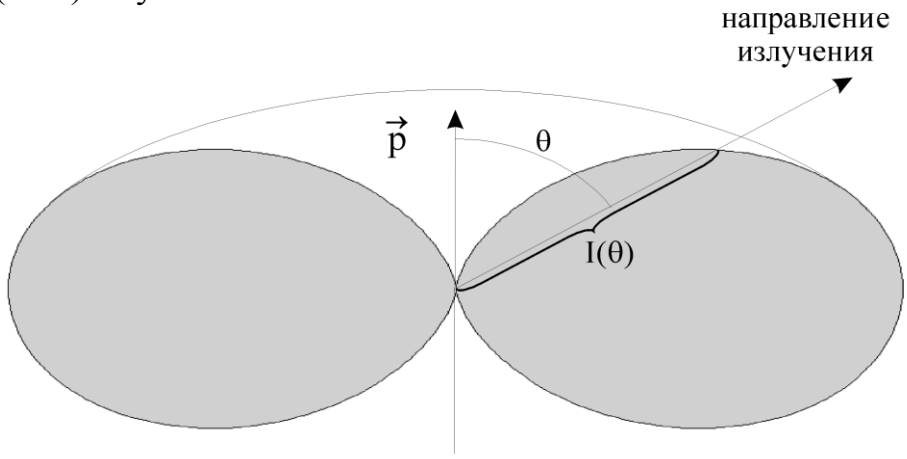


Рис. 7.3

На рис. 7.3 дана половина пространственного изображения диаграммы направленности. Полная диаграмма похожа на бублик без дырки.

Такую же диаграмму направленности имеет вибратор Герца, линейные размеры которого малы по сравнению с длиной волны, которую он излучает $\ell \leq \lambda$ (диполь Герца).

7.5. Вибратор Герца

Вибратор Герца – это излучающая система, которая является открытым колебательным контуром (рис. 7.4).

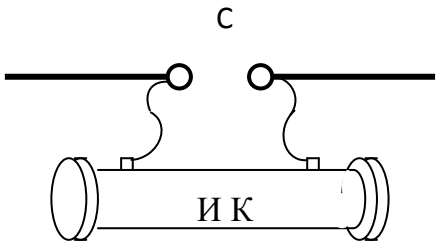


Рис. 7.4

Открытый колебательный контур представляет собой два металлических стержня с двумя металлическими шарами на концах и небольшим искровым промежутком (С) посередине. Источником возбуждения электромагнитных колебаний в вибраторе является индукционная катушка (ИК). Индукционная катушка представляет собой высокочастотный трансформатор. Провода от вторичной обмотки ИК подключаются к искровому промежутку. Когда переменное напряжение во вторичной обмотке катушки достигнет значения пробивного напряжения, в искровом промежутке проскакивает искра, в вибраторе возникают электромагнитные колебания, сопровождающиеся излучением электромагнитных волн. Период таких колебаний, а следовательно, и длина волны, а также частота излучения электромагнитных волн, задаются размерами вибратора. Закономерности электрических колебаний в вибраторе оказываются такими же, как закономерности механических колебаний струны (см. § 6 лекции № 6). Излучение диполя Герца подобно излучению диполя, рассмотренному в предыдущем параграфе, с той лишь разницей, что переменный электрический момент p диполя задается колебаниями зарядов q, а не периодическими изменениями расстояния между ними. Колебания в вибраторе совершает не одна частица, а огромное число электронов, движущихся согласованно. Излучение волн происходит с максимальной интенсивностью в направлении, перпендикулярном оси вибратора (см. рис. 7.3). Интенсивность излучения вибратора, так же, как интенсивность излучения диполя, пропорциональна четвертой степени частоты и с увеличением частоты очень быстро возрастает.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 7

1. Электромагнитной волной называется процесс распространения электромагнитных колебаний в пространстве. Электромагнитная волна может распространяться в вакууме и в среде. Электромагнитная волна характеризуется векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ($\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля).

2. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг другу и перпендикулярны направлению распространения волны, т е. электромагнитные волны поперечны.

3. Электромагнитные волны классифицируются по частоте (или длине волны). К электромагнитным волнам относятся радиоволны, световые волны, рентгеновское излучение, гамма-излучение.

4. Фазовая скорость электромагнитных волн в вакууме равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, в среде – $v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (7.3).

5. Функции (7.4) и (7.4а) – это уравнения плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси x. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в электромагнитной волне колеблются с одинаковой частотой, в одинаковой фазе. Связь между амплитудными значениями векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ дается в виде (7.5):

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_m = \sqrt{\mu\mu_0}H_m .$$

6. Электромагнитная волна переносит энергию электромагнитного поля. Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна (7.6):

$$w = \frac{EH}{v}.$$

7. Плотность потока энергии электромагнитной волны называют вектором Пойнтинга (7.7):

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}].$$

8. Интенсивность волны – это среднее по времени от модуля вектора Пойнтинга (7.8):

$$I = < EH > .$$

9. Источниками радиоволн являются изменяющиеся со временем электрические токи, а также отдельные ускоренные движущиеся заряженные частицы. Источником оптического, рентгеновского и гамма-излучения являются атомы, молекулы и другие квантовые системы, излучение которых связано с квантовыми переходами системы из возбужденного состояния в состояние с меньшей энергией.

10. Простейшей излучающей системой является электрический диполь. Интенсивность излучения диполя пропорциональна четвертой степени частоты и зависит от направления излучения. Интенсивность излучения максимальна в направлении, перпендикулярном оси диполя. В направлении оси диполь не

излучает энергию. Аналогичная картина наблюдается при излучении вибратора Герца.

ЛЕКЦИЯ 8. СВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ. ЗАКОНЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ (ЛУЧЕВОЙ) ОПТИКИ

Световые волны. Интенсивность света.
Световой поток. Законы геометрической оптики.
Полное внутреннее отражение

Оптика – это раздел физики, изучающий природу светового излучения, его распространение и взаимодействие с веществом. Раздел оптики, в котором изучается волновая природа света, называется волновой оптикой. Волновая природа света лежит в основе таких явлений, как интерференция, дифракция, поляризация. Раздел оптики, в котором не учитываются волновые свойства света и который основывается на понятии луча, называется геометрической оптикой.

8.1. Световые волны

Согласно современным представлениям, свет представляет собой сложное явление: в одних случаях он ведет себя как электромагнитная волна, в других – как поток особых частиц (фотонов). Такое свойство называется корпускулярно-волновым дуализмом (корпускула – частица, дуализм – двойственность). В этой части курса лекций будем рассматривать волновые явления света.

Световая волна – это электромагнитная волна с длиной волны в вакууме в диапазоне:

$$\lambda_0 = (0{,}4 \div 0{,}76)\cdot 10^{-6}\,\text{м} = (0{,}4 \div 0{,}76)\,\text{мкм} = 400 \div 760\,\text{нм} = 4000 \div 7600\,\text{Å}.$$

Å – ангстрем – единица измерения длины. $1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\text{м}$.

Волны такого диапазона воспринимаются человеческим глазом.

Излучение с длиной волны меньше 400 нм называют ультрафиолетовым, а с большей, чем 760 нм – инфракрасным.

Частота ν световой волны для видимого света:

$$\nu = \frac{c}{\lambda_0} = (0{,}39 \div 0{,}75)\cdot 10^{15}\ \text{Гц},$$

$c = 3\cdot 10^8$ м/с - скорость света в вакууме.

Скорость света совпадает со скоростью распространения электромагнитной волны.

Показатель преломления

Скорость распространения света в среде, как и любой электромагнитной волны равна (см. (7.3)):

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Для характеристики оптических свойств среды вводится показатель преломления. Отношение скорости света в вакууме к скорости света в данной среде называется **абсолютным показателем преломления:**

$$n = \frac{c}{v}. \qquad (8.1)$$

С учетом (7.3)

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \approx \sqrt{\varepsilon}, \qquad (8.2)$$

так как для большинства прозрачных веществ $\mu = 1$.

Формула (8.2) связывает оптические свойства вещества с его электрическими свойствами. Для любой среды, кроме вакуума, $n > 1$. Для вакуума $n = 1$, для газов при нормальных условиях $n \approx 1$.

Показатель преломления характеризует **оптическую плотность среды.** Среда с большим показателем преломления называется оптически более плотной. Обозначим абсолютные показатели преломления для двух сред:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{и} \quad n_2 = \frac{c}{v_2}.$$

Тогда относительный показатель преломления равен:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}, \qquad (8.3)$$

где v_1 и v_2 – скорости света в первой и второй среде, соответственно.

Так как диэлектрическая проницаемость среды ε зависит от частоты электромагнитной волны, то $n = n(\nu)$ или $n = n(\lambda)$ – показатель преломления будет зависеть от длины волны света (см. лекции № 16, 17).

Зависимость показателя преломления от длины волны (или частоты) называется **дисперсией.**

В световой волне, как и в любой электромагнитной волне, колеблются векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Эти векторы перпендикулярны друг другу и направлению вектора $\vec{v}$. Как показывает опыт, физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие виды воздействий вызываются колебаниями электрического вектора. Поэтому световой вектор – это вектор напряженности электрического поля световой (электромагнитной) волны.

Для монохроматической световой волны изменение во времени и пространстве проекции светового вектора на направление, вдоль которого он колеблется, будет описываться уравнением:

$$E = E_m \cos(\omega t - kr + \alpha). \qquad (8.4)$$

Сравните (7.4) и (8.4).

Здесь k – волновое число, r – расстояние, отсчитываемое вдоль направления распространения волны, E_m – амплитуда световой волны. Для плоской волны $E_m = \text{const}$, для сферической убывает как $1/r$.

8.2. Интенсивность света. Световой поток

Частота световых волн очень велика, поэтому приемник света или глаз фиксирует усредненный по времени поток. Интенсивностью света называется модуль среднего по времени значения плотности энергии в данной точке пространства. Для световой волны, как и для любой электромагнитной волны, интенсивность (см (7.8)) равна:

$$I = < EH >.$$

Для световой волны $\mu \approx 1$, поэтому из (7.5) следует:

$$\sqrt{\mu_0} H = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}\, E,$$

откуда с учетом (8.2):

$$H = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E \sim nE. \qquad (8.5)$$

Подставим в (7.8) формулы (8.4) и (8.5). После усреднения получим:

$$I = \frac{1}{2} n E_m^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}.$$

Значит интенсивность световой волны:

$$\boxed{I \sim n E_m^2}. \qquad (8.6)$$

Следовательно, интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды световой волны и показателю преломления. Заметим, что для вакуума и воздуха $n = 1$, поэтому $I \sim E_m^2$ (сравните с (7.9)).

Для характеристики интенсивности света с учетом его способности вызывать зрительное ощущение вводится величина Φ, называемая световым потоком. Действие света на глаз сильно зависит от длины волны. Наиболее чувствителен глаз к излучению с длиной волны $\lambda_з = 555$ нм (зеленый цвет). Для других волн чувствительность глаза ниже, а вне интервала $[400 \div 760]$ нм чувствительность глаза равна нулю.

Световым потоком называется поток световой энергии, оцениваемый по зрительному ощущению. Единицей светового потока является люмен (лм). Соответственно, интенсивность измеряется либо в энергетических единицах (Вт/м^2), либо в световых единицах (лм/м^2).

Интенсивность света характеризует численное значение средней энергии, переносимой световой волной в единицу времени через единицу площади площадки, поставленной перпендикулярно направлению распространения волны. Линии, вдоль которых распространяется световая энергия, называют лучами. Раздел оптики, в котором изучаются законы распространения светового

излучения на основе представлений о световых лучах, называется геометрической или лучевой оптикой.

8.3. Основные законы геометрической оптики

Геометрическая оптика – это приближенное рассмотрение распространения света в предположении, что свет распространяется вдоль некоторых линий – лучей (лучевая оптика). В этом приближении пренебрегают конечностью длин волн света, полагая, что $\lambda \to 0$.

Геометрическая оптика позволяет во многих случаях достаточно хорошо рассчитать оптическую систему. Но в ряде случаев реальный расчет оптических систем требует учета волновой природы света.

Первые три закона геометрической оптики известны с древних времен.

1. Закон прямолинейного распространения света.

Закон прямолинейного распространения света утверждает, что *в однородной среде свет распространяется прямолинейно.*

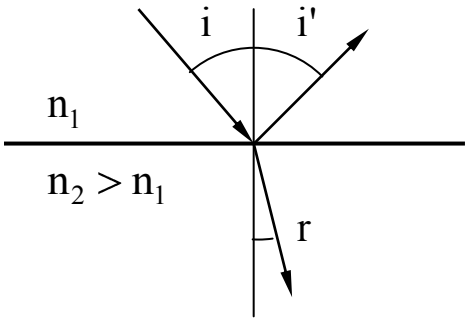
Если среда неоднородна, т. е. Ее показатель преломления изменяется от точки к точке, или $n = n(\vec{r})$, то свет не будет распространяться по прямой. При наличии резких неоднородностей, таких, как отверстия в непрозрачных экранах, границы этих экранов, наблюдается отклонение света от прямолинейного распространения.

2. **Закон независимости световых лучей** утверждает, что *лучи при пересечении не возмущают друг друга*. При больших интенсивностях этот закон не соблюдается, происходит рассеяние света на свете.

3. **3 и 4. Законы отражения и преломления** утверждают, что *на границе раздела двух сред происходит отражение и преломление светового луча. Отраженный и преломленный лучи лежат в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, восстановленным к границе раздела в точке падения, (рис. 8.1).*

Угол падения равен углу отражения (8.7).

Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению показателя преломления второй среды к показателю преломления первой (8.8):



$$\boxed{i = i'}. \qquad (8.7)$$

$$\boxed{\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}}. \qquad (8.8)$$

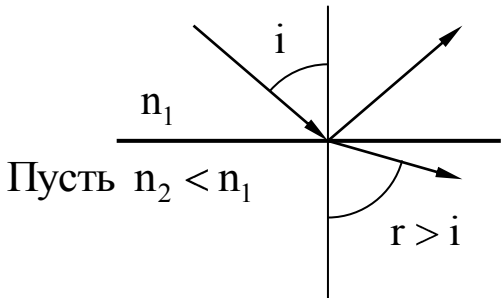
Рис. 8.1

Закон преломления был открыт в XVII веке В. Снеллиусом и Р. Декартом.

Законы отражения и преломления могут нарушаться в анизотропных средах, т. е. средах, для которых показатель преломления зависит от направления в пространстве.

8.4. Полное внутреннее отражение

Полное внутреннее отражение наблюдается, если свет падает из оптически более плотной среды на границу раздела с оптически менее плотной средой под углом, большим предельного. Найдем предельный угол полного внутреннего отражения. Рассмотрим рис. 8.2. На границе раздела двух сред свет частично отражается, частично преломляется. Воспользуемся законом преломления.



$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \sin r = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin i,$$

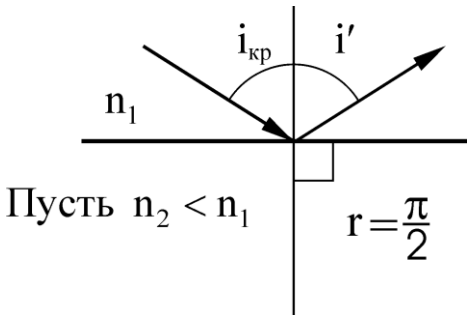
так как

$$\frac{n_1}{n_2} > 1, \quad \text{то } \sin r > \sin i, \quad r > i.$$

Рис. 8.2

Следовательно, если свет падает из оптически более плотной среды на границу раздела с оптически менее плотной средой, то при увеличении угла падения i угол преломления тоже увеличивается. При этом интенсивность отраженного луча растет, а преломленного – падает (их сумма равна интенсивности падающего луча). При каком-то значении $i = i_{кр}$ угол $r = \pi/2$, интенсивность преломленного луча станет равной нулю, весь свет отразится. При дальнейшем увеличении угла $i > i_{кр}$ преломленного луча не будет, происходит полное отражение света.

Значение критического угла падения, при котором начинается полное отражение, найдем, положив в законе преломления $r = \pi/2$, тогда $\sin r = 1$, значит:



$$\boxed{\sin i_{кр} = \frac{n_2}{n_1}},$$

т. е.

$$i_{кр} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}. \qquad (8.9)$$

Угол $i_{кр}$ называют также предельным углом внутреннего отражения.

Рис 8.3

Предельный угол внутреннего отражения изображен на рис. 8.3. Полное внутреннее отражение находит применение, например, в волоконной оптике.

Волоконная оптика позволяет видеть предметы, не расположенные на прямом луче зрения. Для передачи световой энергии используется так называемый световод. Световод – это стержень или волокно с большим показателем преломления и малым коэффициентом поглощения. Лучи, вошедшие в световод, отражаются от его стенок и перемещаются к выходу после нескольких полных внутренних отражений. Изгибом световода можно передать световую энергию вбок в любое место. Этот позволяет использовать световой сигнал для дальней связи. Главное преимущество использования света для связи заключается в том, что в этом диапазоне может работать без потерь громадное число передатчиков, так как длина световой волны очень мала.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 8

1. Свет имеет электромагнитную природу. С современной точки зрения, свет обладает корпускулярно-волновым дуализмом.

2. Видимый свет имеет длину волны в интервале [400 – 760] нм.

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, скорость распространения света в среде, как и любой электромагнитной волны, равна (7.3)

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

3. Для световой волны вводятся абсолютный показатель преломления (8.1):

$$n = \frac{c}{v}$$

и относительный показатель преломления (8.3):

$$n_{21} = \frac{n_1}{n_2}.$$

4. Абсолютный показатель преломления зависит от диэлектрической проницаемости среды: $n = \sqrt{\varepsilon}$ (8.2), ε и n зависят от частоты электромагнитной волны ν или длины волны λ. Зависимость показателя преломления от длины волны (или частоты) называется дисперсией.

5. В световой волне, как и в любой электромагнитной, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ колеблются перпендикулярно направлению распространения волны. Т. е. световые волны поперечны.

6. Световой вектор – это вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ в электромагнитной волне. Уравнение монохроматической световой волны – это уравнение

$$E = E_m \cos(\omega t - kr + \alpha). \qquad (8.4)$$

7. Интенсивность света численно равна средней энергии, переносимой световой волной в единицу времени через единицу поверхности площадки, расположенной перпендикулярно направлению распространения волны. Интенсивность света (8.6) пропорциональна квадрату амплитуды световой волны и показателю преломления:

$$I \sim nE_m^2.$$

8. Световым потоком Ф называется световой поток энергии, оцениваемый по зрительному ощущению.

9. Лучом называется линия, вдоль которой распространяется световая энергия. На понятии луча основана геометрическая оптика.

10. Законы геометрической оптики:

1) закон прямолинейного распространения света: в однородной среде свет распространяется прямолинейно;

2) закон независимости световых лучей: при пересечении лучи не возмущают друг друга;

3) на границе раздела двух сред свет частично отражается, частично преломляется Закон отражения: луч падающий, отраженный и перпендикуляр к границе раздела лежат в одной плоскости. Угол падения равен углу отражения:

$$i = i'; \qquad (8.7)$$

4) закон преломления: луч падающий, преломленный и перпендикуляр к границе раздела лежат в одной плоскости. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно относительному показателю преломления:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \qquad (8.8)$$

11. Если луч падает из оптически более плотной среды с показателем преломления n_1 на границу раздела с оптически менее плотной средой с показателем преломления n_2 под углом, большим предельного, то наблюдается полное внутреннее отражение. Значение предельного (или критического) угла находится по формуле (8.9):

$$i_{кр} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}.$$

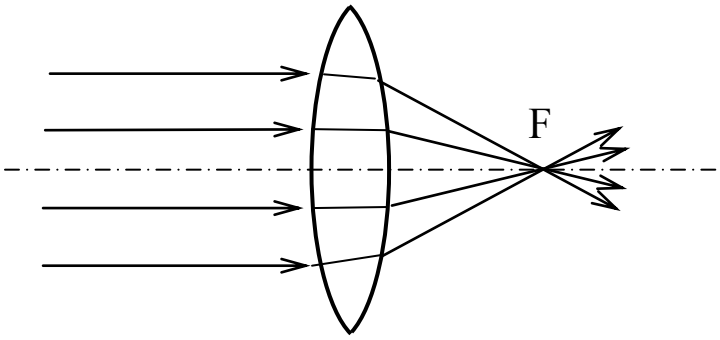
ЛЕКЦИЯ 9. ТОНКИЕ ЛИНЗЫ

Собирающие и рассеивающие линзы. Фокусы линзы.
Фокальная плоскость. Фокальное расстояние тонкой линзы.
Построение изображения в линзах.
Формула тонкой линзы

9.1. Собирающие и рассеивающие линзы

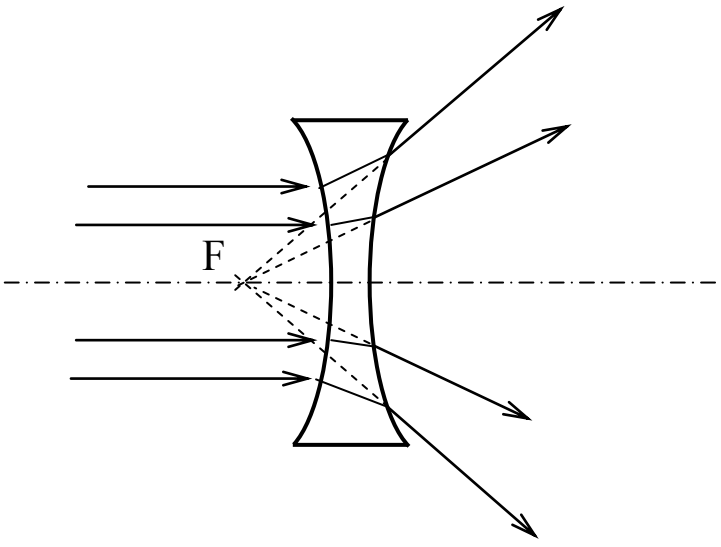
Линза – это прозрачное тело, ограниченное двумя, чаще всего, сферическими преломляющими поверхностями. Обычно линзы делают стеклянными.

Линзы бывают собирающими и рассеивающими.



Собирающая линза в средней части толще и отклоняет лучи к оптической оси, если показатель преломления линзы больше показателя преломления среды, рис. 9.1.

Рис. 9.1



Рассеивающая линза в средней части тоньше и отклоняет лучи от оптической оси, рис. 9.2.

Рис. 9.2

Такой ход лучей в линзах можно объяснить, применяя закон преломления.

Линза называется тонкой, если ее толщиной можно пренебречь по сравнению с радиусом кривизны ее поверхностей R_1 и R_2, схематически тонкая линза изображена на рис. 9.3.

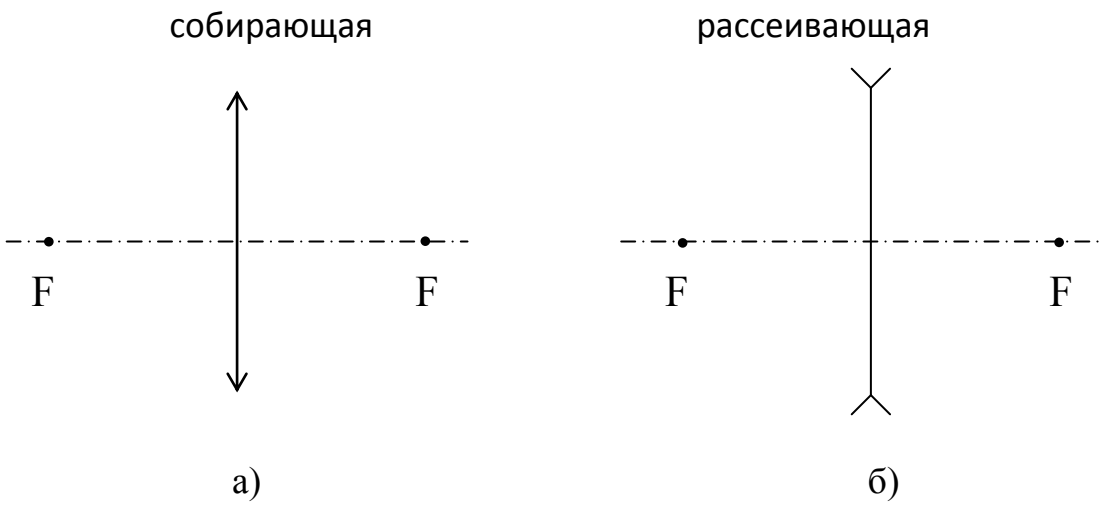


Рис. 9.3

9.2. Фокусы линзы, фокальная плоскость

На рис. 9.4 буквой F обозначены фокусы линзы – точки, в которых собираются параллельные оптической оси лучи, прошедшие через линзу (или их продолжения).

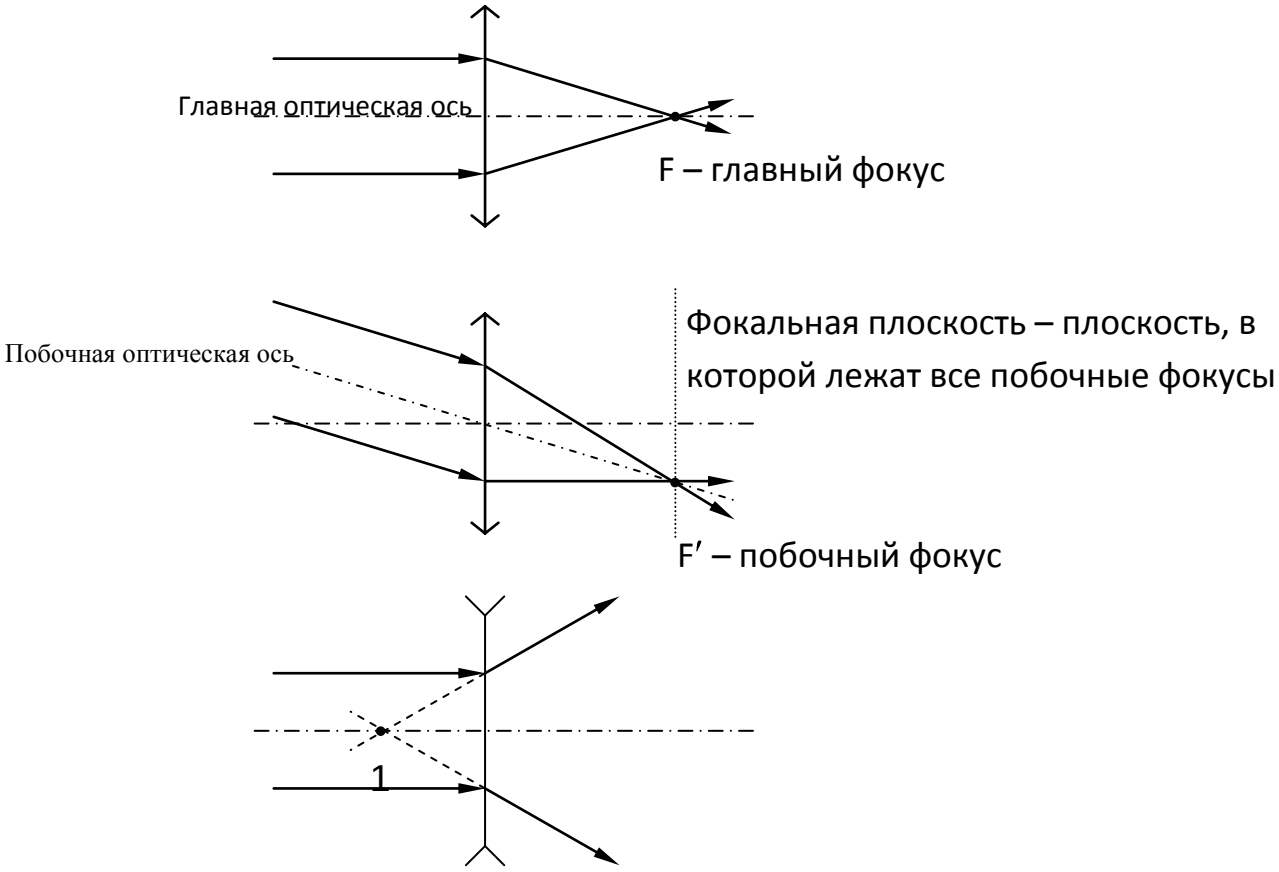


Рис. 9.4

Прямая, проходящая через центры кривизны обеих поверхностей линзы, называется **главной оптической осью**.

Точка пересечения главной оптической оси с преломляющей плоскостью линзы называется **оптическим центром линзы.**

Плоскость, проведенная через фокус линзы перпендикулярно к главной оптической оси, называется **фокальной плоскостью линзы.**

9.3. Фокусное расстояние тонкой линзы

Буквой F обозначают также и фокусное расстояние линзы – расстояние от фокуса до оптического центра линзы, рис. 9.5.

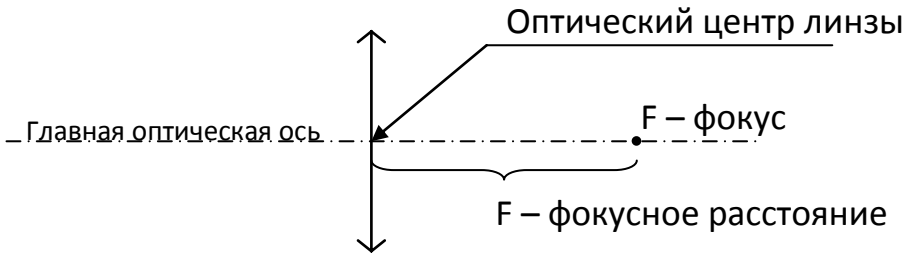


Рис. 9.5

Для сферической тонкой линзы на основе закона преломления получается следующая формула для фокусного расстояния:

$$F = \frac{1}{\left[\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right]} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right]}. \qquad (9.1)$$

Здесь $n_л$ и $n_{ср}$ – показатели преломления линзы и среды, соответственно.

R_1 и R_2 – радиусы кривизны линзы, они – величины алгебраические.

Эта формула справедлива только для приосевых (параксиальных) лучей. R_1, R_2 – радиусы кривизны сферических поверхностей линзы, они могут быть положительными и отрицательными. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы считается положительным, вогнутой – отрицательным.

Выбор знаков R_1 и R_2 в приведенной нами формуле для F иллюстрирует рис. 9.6[*].

Для собирающей линзы фокусное расстояние F положительно, для рассеивающей – отрицательно. **Оптической силой** линзы называют величину Ф, обратную фокусному расстоянию линзы:

$$Ф \equiv \frac{1}{F}, \qquad (9.2)$$

Единица оптической силы – диоптрия (дтпр).

$$1\ \text{дтпр} = \frac{1}{\text{м}}.$$

[*] Следует отметить, что существует и другое, более формальное правило знаков.

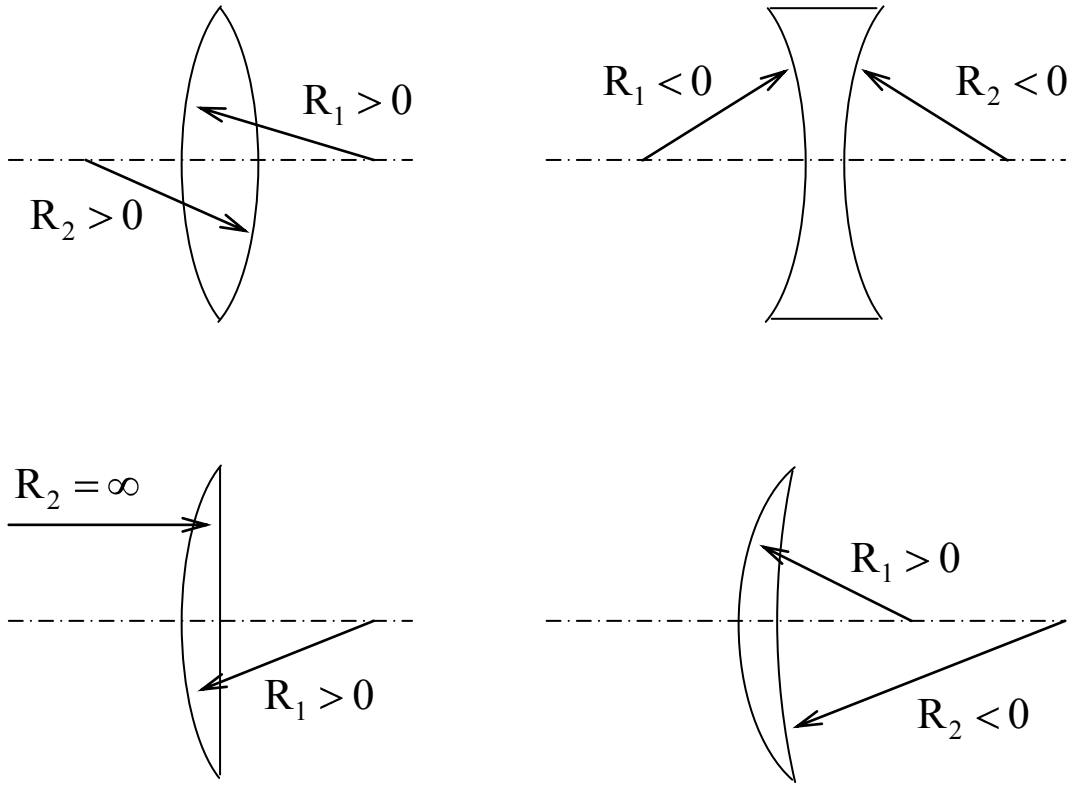


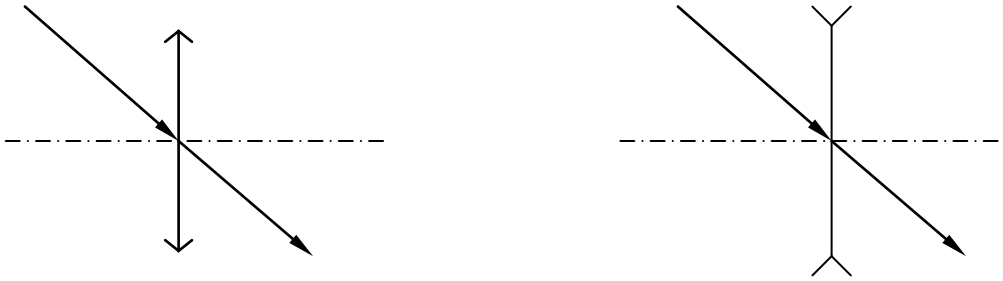
Рис. 9.6

9.4. Построение изображения в линзах

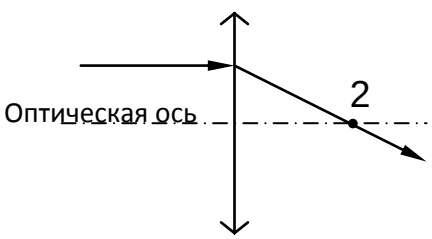
Для построения изображения предмета необходимо построить изображение каждой его точки.

Для построения изображения точки достаточно найти точки пересечения двух любых лучей, идущих из заданной точки.

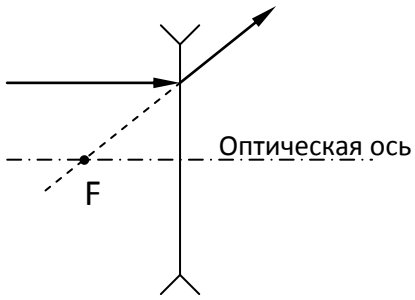
Удобнее всего использовать в качестве одного из этих лучей луч, идущий через оптический центр, он идет через линзу, не отклоняясь:



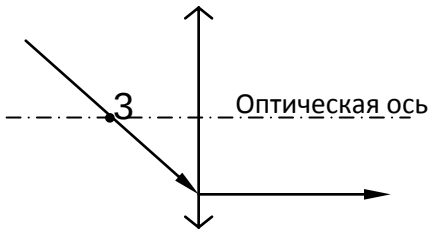
Другой удобный луч – это луч, идущий параллельно оптической оси. Он, преломляясь в линзе, проходит через фокус, если линза собирающая:



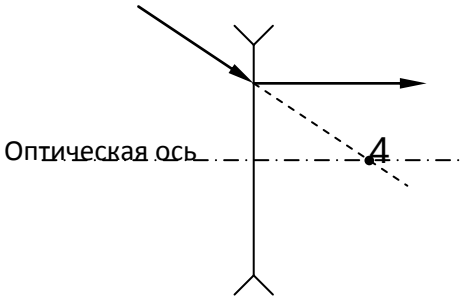
Если линза рассеивающая, то через фокус проходит продолжение луча:



И, если луч шел через фокус собирающей линзы, то после преломления он пойдет параллельно оптической оси:

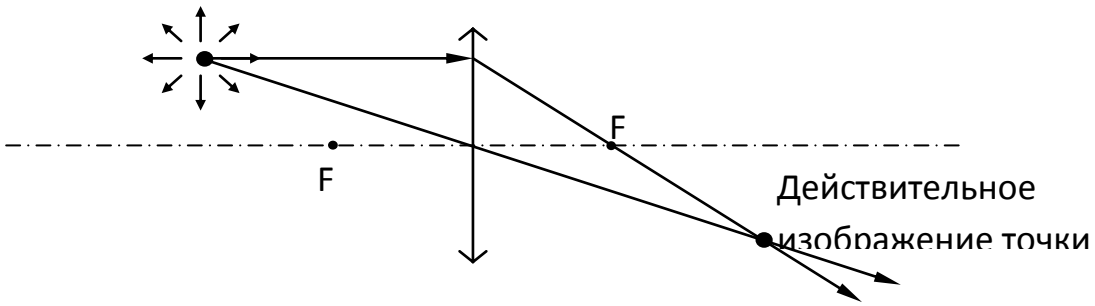


Для рассеивающей линзы параллельно оптической оси пойдет после преломления луч, продолжение которого проходит через фокус:



Примеры построения изображения точки в собирающей линзе приведены на рис. 9.7, а, б.

а) Точка дальше фокуса



б) Мнимое изображение точки

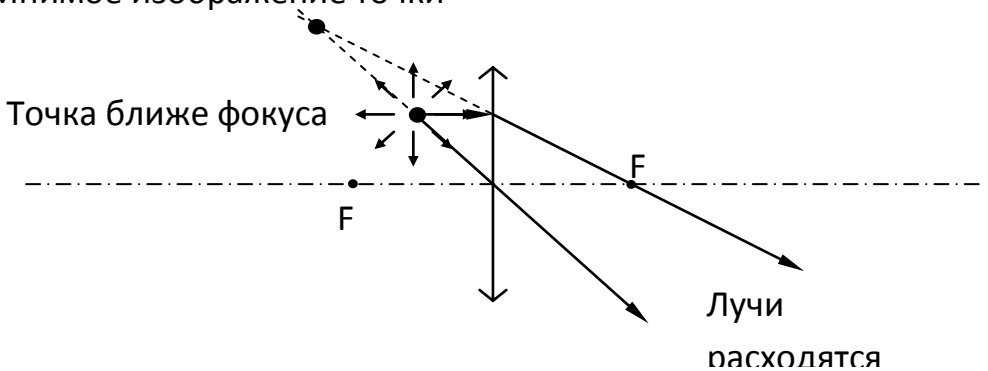


Рис. 9.7

Пример построения изображения точки в рассеивающей линзе дан на рис. 9.8.

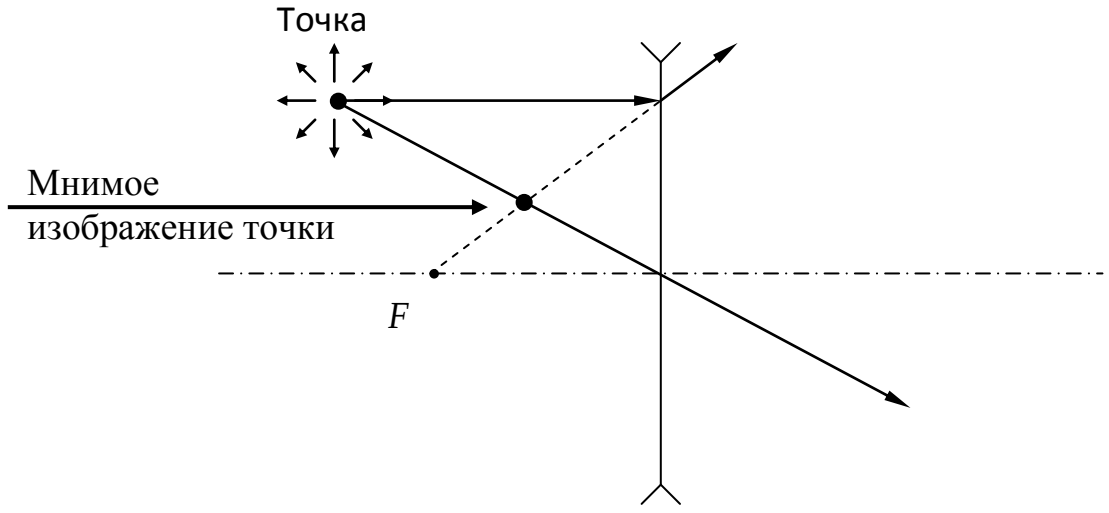


Рис. 9.8

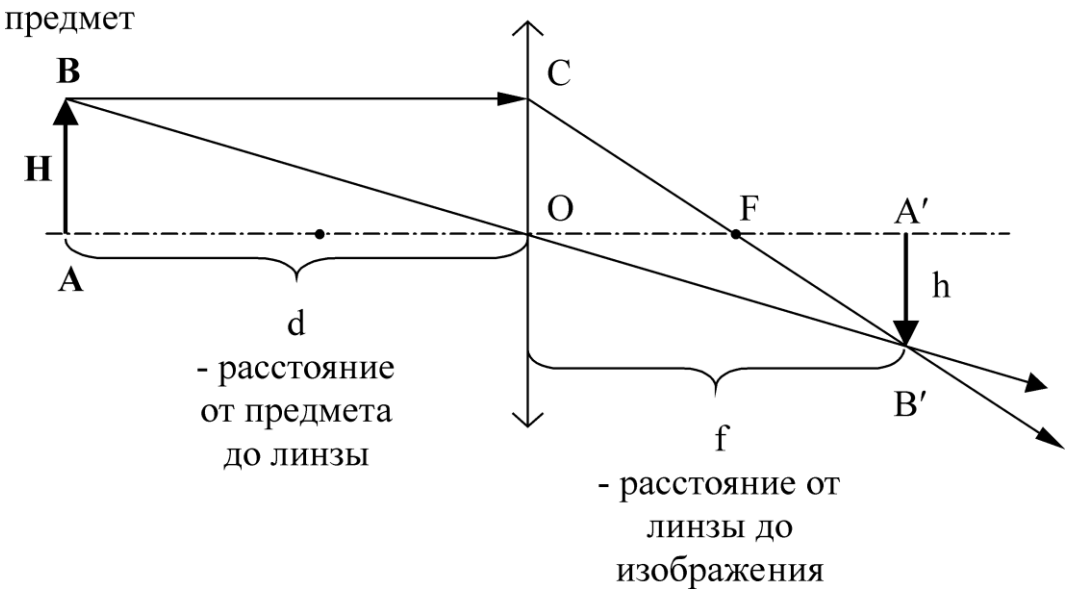


Рис. 9.9

9.5. Формула тонкой линзы

Формула тонкой линзы дает связь между величинами, определяющими положение предмета и изображения относительно тонкой линзы.

ΔABO (рис. 9.9) подобен $\Delta A'B'O$, значит:

$$\frac{f}{d} = \frac{h}{H}.$$

ΔOCF подобен $\Delta A'B'F$, значит:

$$\frac{h}{H} = \frac{f - F}{F},$$

следовательно:

$$\frac{f}{d} = \frac{f - F}{F},$$

освободимся от знаменателя:

$$f \cdot F = d \cdot f - d \cdot F,$$

поделим на dfF, тогда:

$$\frac{f \cdot F}{d \cdot f \cdot F} = \frac{d \cdot f}{d \cdot f \cdot F} - \frac{d \cdot F}{d \cdot f \cdot F},$$

или

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f},$$

откуда следует формула тонкой линзы:

$$\boxed{\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}}. \qquad (9.3)$$

Здесь d, f, F – алгебраические величины.

Если предмет и изображение находятся по разные стороны линзы, то $d > 0$, $f > 0$ (рис. 9.7, а и 9.9), если по одну сторону от линзы, то $d > 0$, $f < 0$ (рис. 9.7, б и 9.8). Правило знаков для F приведено в § 3:

$F > 0$ – для собирающей линзы:

$F < 0$ – для рассеивающей линзы.

Из рис. 9.9 можно найти линейное увеличение в линзе.

Линейным увеличением Г называется отношение размеров изображения к размерам предмета, перпендикулярного к оптической оси. Из рис. 9.9 линейное увеличение равно:

$$\Gamma = \frac{h}{H} = \frac{f}{d}. \qquad (9.4)$$

Линейное увеличение равно отношению расстояния f от изображения до линзы к расстоянию d от предмета до линзы.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 9

1. Линзой называется прозрачное тело, ограниченное двумя, чаще всего сферическими, поверхностями. По оптическим свойствам линзы делятся на собирающие и рассеивающие.

2. Линза называется тонкой, если ее толщина намного меньше, чем радиусы кривизны R_1 и R_2 обеих поверхностей. На чертежах тонкая линза изображается в виде преломляющей поверхности.

3. Главной оптической осью линзы называется прямая, проходящая через центры кривизны обеих поверхностей линзы.

4. Оптическим центром линзы называется точка пересечения главной оптической оси с преломляющей плоскостью линзы.

5. Фокусом линзы называется точка, в которой сходятся лучи, параллельные оптической оси.

6. Фокусное расстояние тонкой линзы связано с радиусами кривизны преломляющих поверхностей формулой, справедливой для параксиальных (приосевых) лучей:

$$F = \frac{1}{\left[\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right] \cdot \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right]}. \qquad (9.1)$$

$R > 0$ – для выпуклой поверхности, $R < 0$ – для вогнутой поверхности.

$n_л$ и $n_{ср}$ – показатели преломления линзы и среды.

7. Оптической силой Φ линзы (9.2) называется величина, обратная фокусному расстоянию:

$$\Phi \equiv 1/F.$$

8. Изображение точки находится на пересечении двух лучей. Луч, параллельный оптической оси, преломляясь, идет через фокус. Луч, проходящий через оптический центр, идет, не преломляясь. Их пересечение позволяет найти положение изображения точки.

9. Формула тонкой линзы имеет вид (9.3):

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где d – расстояние от предмета до линзы;

f – расстояние от линзы до изображения;

F – фокусное расстояние линзы.

ЛЕКЦИЯ 10. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Интерференция от двух монохроматических источников одинаковой частоты. Когерентность. Условия максимума и минимума на разность фаз. Оптическая разность хода. Расчет интерференционной картины от двух источников. Способы получения когерентных источников.

Интерференцией волн называется наложение волн друг на друга, при котором происходит устойчивое перераспределение энергии в пространстве, вследствие чего образуется так называемая интерференционная картина (от лат. Inter – взаимно, ferio – ударяю). Интерференционная картина световых волн представляет собой чередование темных и светлых участков экрана.

Интерференция – это одно из основных свойств волн любой природы: упругих, электромагнитных, в том числе и световых. Интерференция наблюдается только от когерентных источников.

10.1. Интерференция от двух монохроматических источников одинаковой частоты

Изобразим два точечных источника S_1 и S_2, излучающих монохроматические световые волны одинаковой частоты ω. Проанализируем, от чего зависит интенсивность света в точке пространства, удаленной от первого источника на расстояние r_1, а от второго – на r_2 (рис. 10.1).

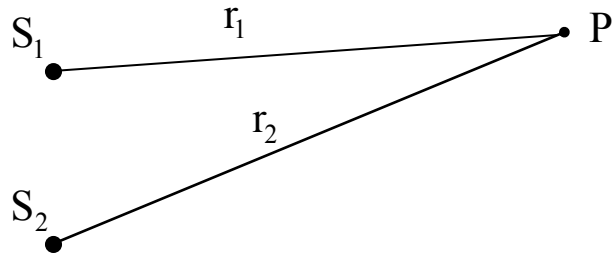


Рис. 10.1

Пусть векторы E_1 и E_2 обеих световых волн колеблются в одной плоскости, тогда:

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_1(r_1,t) + \vec{E}_2(r_2,t).$$

Так как r_1 = const, r_2 = const, то в точке наблюдения каждая световая волна (см. (8.4) возбуждает свое гармоническое колебание:

$$E_1(r_1,t) = E_{1m}\cos(\omega t - k_1 r_1 + \alpha_1),$$

$$E_2(r_2,t) = E_{2m}\cos(\omega t - k_2 r_2 + \alpha_2).$$

Амплитуда результирующего колебания при сложении колебаний одинаковой частоты и одинакового направления была найдена в лекции № 2 (см (2.2)).

Обозначим через $\delta = (k_1 r_1 + \alpha_1) - (k_2 r_2 + \alpha_2)$ – разность фаз колебаний, возбуждаемых в точке наблюдения источниками S_1 и S_2, тогда:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\delta.$$

Интенсивность найдем, усреднив это выражение по времени (см. (7.9)):

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\langle\cos\delta\rangle. \qquad (10.1)$$

Тогда последнее слагаемое в формуле (10.1) носит название интерференционного члена. Его влияние на результирующую интенсивность рассмотрено в следующем параграфе.

10.2. Когерентность

Когерентностью называется согласованное протекание колебательных или волновых процессов.

Когерентными *источниками называют такие источники, которые дают волны одинаковой частоты и для фиксированной точки пространства разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами, остается постоянной*.

Естественные источники света не когерентны. В каждом источнике света излучение состоит из излучения множества атомов. Процесс излучения отдельного атома продолжается около 10^{-8} с . За это время успевает образоваться совокупность горбов и впадин (или, как говорят, цуг волн) протяженностью
~ 3 м. «Погаснув», атом через некоторое время «вспыхивает» вновь.

Каждый цуг волн, испускаемый отдельным атомом, имеет вполне определенное направление светового вектора $\vec{E}$, т. е. определенную поляризацию, и свою начальную фазу, которая меняется от цуга к цугу по случайному закону.

Световая волна, испускаемая нагретым телом, складывается из огромного числа цугов, испускаемых атомами тела. Атомы нагретого тела испускают несогласованные цуги, начальные фазы и направление векторов $\vec{E}$ в этих цугах самые различные. В результате свет, испущенный нагретым телом, не имеет определенной поляризации и начальной фазы, такой свет называют естественным, а независимые источники свет – некогерентными.

При сложении волн от двух независимых естественных источников света не обнаруживается интерференционной картины, потому что разность фаз колебаний, испускаемых такими источниками, быстро и беспорядочно изменяется
со временем. Тогда среднее по времени значение косинуса δ в формуле (10.1) равно нулю, следовательно, интенсивность $I = I_1 + I_2$.

Таким образом, интенсивность, наблюдаемая при наложении **некогерентных** *волн, равна сумме интенсивностей, создаваемых каждой из волн в отдельности.*

Когерентные световые волны получают, разделив волну от одного источника на две. Эти две части одной волны уже будут когерентны ($\alpha_1 = \alpha_2$, в пределах каждого цуга).

Тогда $< \cos\delta > = \cos\delta = \text{const}$, при фиксированных r_1 и r_2, следовательно:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta. \qquad (10.2)$$

Пусть интенсивность обоих источников одинакова, т. е. $I_1 = I_2$. Тогда максимальное значение интенсивности при сложении волн от когерентных источников получается при $\cos\delta = 1 \quad (I = 4I_1)$, а минимальное – при $\cos\delta = -1 \quad (I = 0).$

Таким образом, при наложении **когерентных** *световых волн происходит перераспределение светового потока в пространстве, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других – минимумы интенсивности.*

10.3. Условия максимума и минимума на разность фаз δ

Это условие, как видно из (10.2), заключается в следующем:

$$\delta = \begin{cases} 2\pi m & - \max, \\ (2m+1)\pi & - \min, \end{cases} \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (10.3)$$

Таким образом, если разность фаз складываемых волн кратна 2π, то волны приходят в точку наблюдения в одинаковой фазе, усиливают друг друга, так как $\cos\delta = 1$, и наблюдаются максимум, а если волны в противофазе ($\cos\delta = -1$), то наблюдается минимум интенсивности.

10.4. Оптическая разность хода

Пусть, для простоты, начальные фазы α_1 и α_2 интерферирующих волн равны нулю, тогда разность фаз интерферирующих волн равна:

$$\delta = k_2 r_2 - k_1 r_1 = \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2 - \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1 = \frac{2\pi}{v_2 T} r_2 - \frac{2\pi}{v_1 T} r_1 =$$

$$= \frac{2\pi}{cT} n_2 r_2 - \frac{2\pi}{cR} n_1 r_1 = \frac{2\pi}{\lambda_o} (n_2 r_2 - n_1 r_1)$$

здесь $\lambda_0 = cT$ – длина световой волны в вакууме.

Произведение показателя преломления на геометрический путь называют оптическим путем.

Оптической разностью хода называют величину:

$$\boxed{\Delta \equiv n_2 r_2 - n_1 r_1}. \qquad (10.4)$$

Тогда оптическая разность хода и разность фаз интерферирующих волн связаны соотношением:

$$\boxed{\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta}. \qquad (10.5)$$

Условия интерференционного максимума и минимума интенсивности на оптическую разность хода получим, подставив выражение для δ (10.5) в условие (10.3):

$$\Delta = \frac{\lambda_0}{2\pi}\delta = \begin{cases} \frac{\lambda_0}{2\pi} 2\pi m & -\max, \\ \frac{\lambda_0}{2\pi} (m+1)\pi & -\min. \end{cases}$$

После сокращения получим условия на Δ:

$$\Delta = \begin{cases} m\lambda_0 & -\max, \quad (10.6) \\ m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2} & -\min, \quad (10.7) \end{cases} \qquad m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \qquad (10.6)$$

(10.7)

Следовательно, *если оптическая разность хода равна целому числу олин волн в вакууме или четному числу полуволн, то при интерференции двух волн наблюдается максимум интенсивности.* Это и есть условие максимума при интерференции (10.6). Соответственно, условие минимума при интерференции (10.7) читается так: *если оптическая разность хода равна полуцелому числу длин волн в вакууме или нечетному числу полуволн, то наблюдается интерференционный минимум интенсивности*. В этих формулах целое число m называется порядком интерференционного максимума или минимума.

10.5. Расчет интерференционной картины от двух источников

Найдем положение максимумов и минимумов при интерференции от двух источников. Введем следующие обозначения (рис. 10.2): S_1 и S_2 – когерентные источники света, имеющие одну и ту же начальную фазу колебаний, d – расстояние между источниками, L – расстояние от источников до экрана наблюдения, d << L.

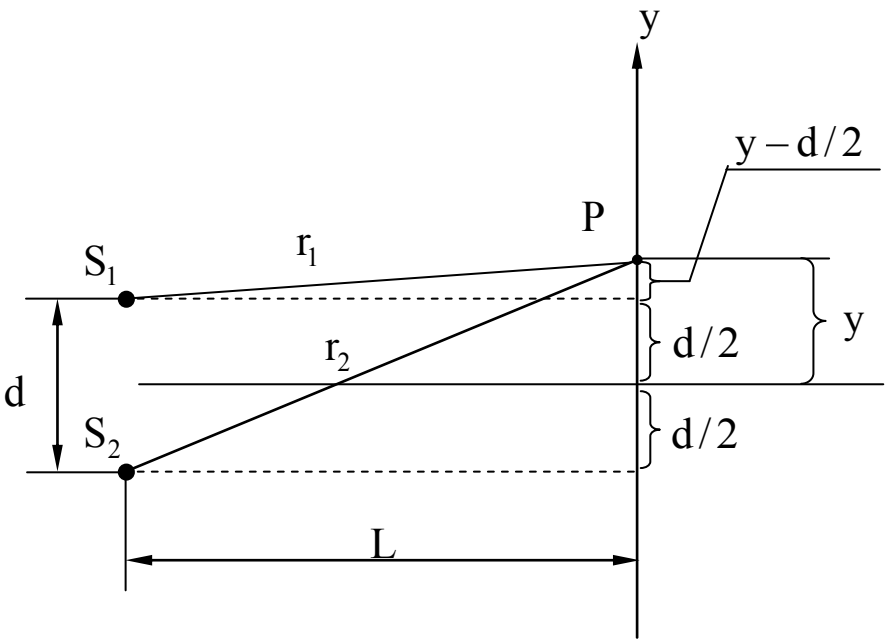


Рис. 10.2

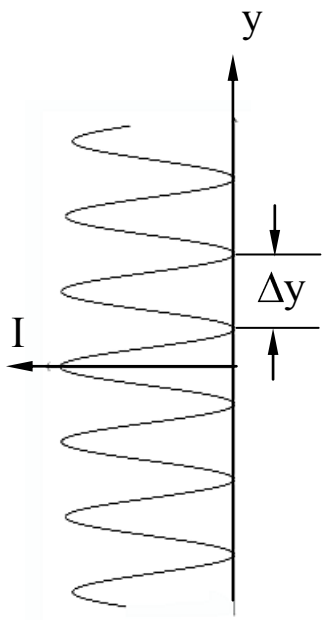


Рис. 10.3

Пусть показатели преломления $n_1 = n_2 = 1$, тогда оптическая разность хода $\Delta = r_2 - r_1$. Из рис. 10.2 следует, что

$$r_2^2 = L^2 + \left(y + \frac{d}{2} \right)^2$$

-

$$r_1^2 = L^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2$$

$$r_2^2 - r_1^2 = 2yd,$$

или

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2yd.$$

Обычно $L/d \sim 10^3$, с учетом этого $r_1 + r_2 \approx 2L$, тогда:

$$\Delta 2L = 2yd,$$

откуда y – координата вдоль экрана связана с Δ – оптической разностью хода – соотношением:

$$y = \frac{L}{d}\Delta.$$

Положения максимумов получим, наложив на Δ условие максимума, см. (10.6):

$$y_m = \frac{L}{d} m\lambda_0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 ...$$

Аналогично – для минимумов (см. (10.7)):

$$y_m = \frac{L}{d}\left(m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2} \right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 ...$$

Расстояния между минимумами и максимумами одинаковы, следовательно, Δy – ширина интерференционной полосы – равна :

$$\Delta y = \frac{L}{d}\lambda_0. \qquad (10.8)$$

Распределение интенсивности I в зависимости от координаты вдоль экрана наблюдения изображено на рис. 10.3.

10.6. Способы получения когерентных источников

Когерентные источники получают, разделив световую волну, идущую от одного источника, на две. Две части одной волны когерентны между собой. Существуют разные способы получения когерентных световых источников.

Опыт Юнга

Томас Юнг наблюдал интерференцию от двух источников, прокалывая на малом расстоянии ($d \approx 1$ mm) два маленьких отверстия в непрозрачном экране. Отверстия освещались светом от солнца, прошедшим через малое отверстие в другом непрозрачном экране. Схема опыта Юнга приведена на рис. 10.4

Интерференционная картина наблюдалась на экране, удаленном на расстоянии $L \approx 1$ м от двух источников. Так, впервые в истории, Т. Юнг определил длины световых волн (используя формулу (10.8)).

При использовании лазера в качестве источника света необходимость в экране 1 отпадает.

Итак, в методе Юнга используется механическое деление световой волны с помощью экрана с двумя отверстиями. Эти отверстия являются действительными источниками света.

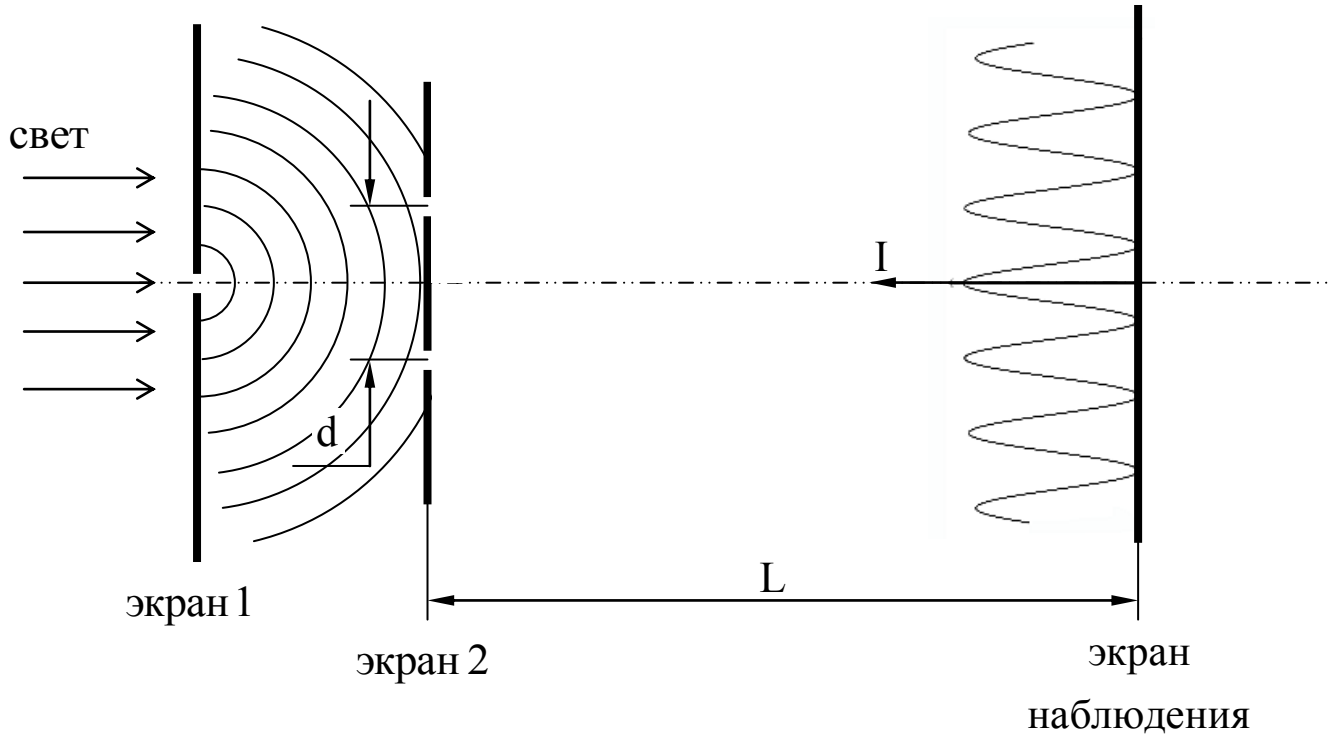


Рис. 10.4

Метод зеркал Френеля

В методе зеркал Френеля для получения когерентных световых источников используется явление отражения света. Схема метода зеркал Френеля приведена на рис. 10.5.

Свет от узкой щели S падает на два плоских зеркала, развернутых друг относительно друга на очень малый угол φ. Используя закон отражения света (8.7), нетрудно показать, что падающий пучок света разобьется на два, исходящих из мнимых источников S_1 и S_2. Источник S закрывают от экрана наблюдения непрозрачным экраном. На экране наблюдается интерференционная картина, расчет которой приведен выше. Расстояние между интерференционными полосами вычисляется по формуле (10.8).

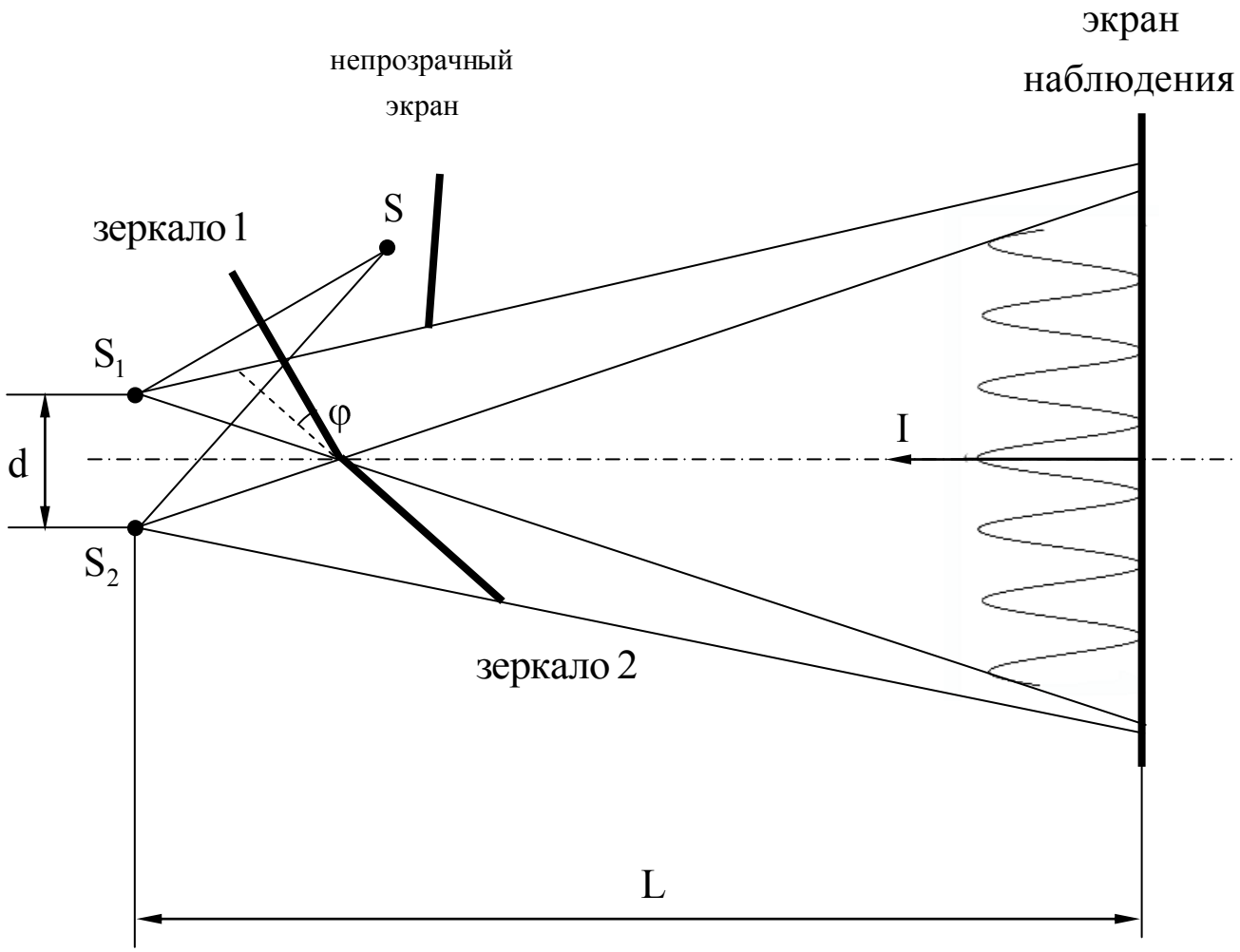


Рис. 10.5

Метод бипризмы Френеля

В этом методе для получения когерентных источников используется явление преломления света.

Две стеклянные призмы с малым преломляющим углом θ изготавливают из одного куска стекла так, что призмы сложены своими основаниями (рис. 10.6). Источник света – ярко освещенная щель S. После преломления в бипризме падающий пучок расщепляется на два, исходящих от мнимых источников S_1 и S_2, которые дают две когерентные цилиндрические волны.

Так как преломляющий угол θ мал, то все лучи отклоняются каждой из половинок бипризмы на один и тот же угол φ. Можно показать, что в этом случае

$$\varphi = (n-1)\theta,$$

здесь n – показатель преломления материала призмы.

Расстояние между источниками:

$$d = 2a \cdot \mathrm{tg}\,\varphi \approx 2a\varphi_{\text{рад.}}.$$

Таким образом, и в случае с зеркалами Френеля мы получаем такую же схему расположения когерентных источников, как и на рис. 10.2. Значит,

интерференционная картина будет рассчитываться так же, в частности, будет справедлива и формула (10.8) для ширины интерференционной полосы.

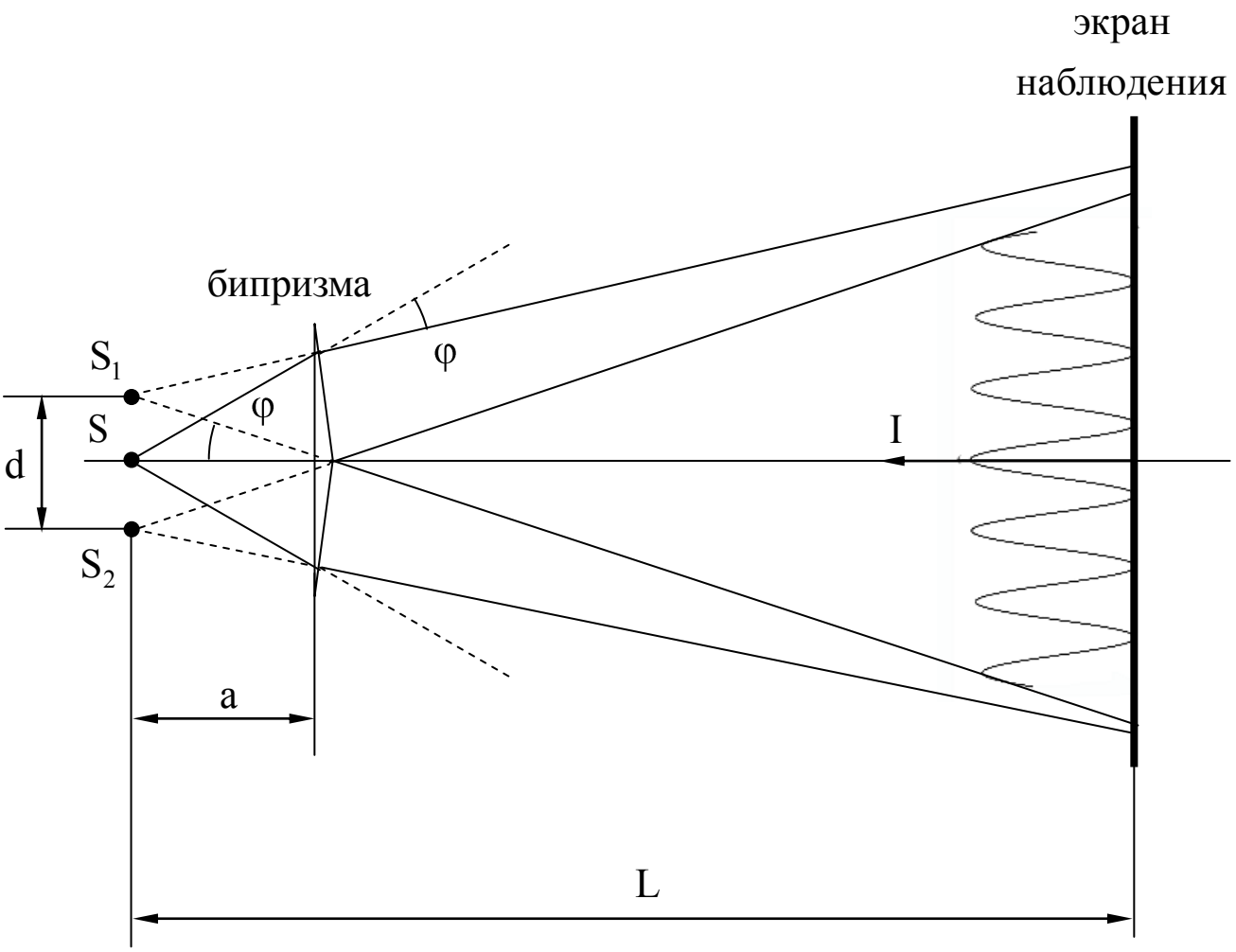


Рис. 10.6

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 10

1. Интерференцией волн называется взаимное усиление или ослабление двух (или большего числа) волн при их наложении друг на друга при одновременном распространении в пространстве.

2. Когерентными источниками называют такие источники, которые дают волны одинаковой частоты, и для фиксированной точки пространства разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами, остается постоянной во времени.

3. Когерентные световые волны получают, разделив волну от одного источника на две. Две части одной волны когерентны между собой.

4. Результат интерференции зависит от оптической разности хода (10.4):

$$\Delta \equiv n_2 r_2 - n_1 r_1 \ .$$

5. Если оптическая разность хода равна целому числу волн в вакууме, то наблюдается максимум интенсивности (10.6), а если полуцелому числу длин волн, то наблюдается минимум (10.7).

$$\Delta = \begin{cases} m\lambda_0 & -\max, \\ m\lambda_0 + \dfrac{\lambda_0}{2} & -\min. \end{cases}$$

6. Результат наложения когерентных световых волн, наблюдаемый на экране, называют интерференционной картиной, которая представляет собой чередование максимумов и минимумов интенсивности света (светлых и темных участков экрана).

7. Существуют разные способы получения когерентных световых источников. Например, метод Юнга (механическое деление), метод зеркал Френеля (основан на отражении света), метод бипризмы Френеля (использует преломление света).

ЛЕКЦИЯ 11. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

Интерференция при отражении от прозрачных пластинок. Кольца Ньютона.

Просветленная оптика. Интерферометры

11.1. Интерференция при отражении от прозрачных пластинок

Интерференция в тонких пленках наблюдается довольно часто. Например, окраска тонких прозрачных пленок, цветные разводы на тонких пленках бензина или масла на поверхности воды. Рассмотрим, как образуется интерференционная картина в тонких пленках.

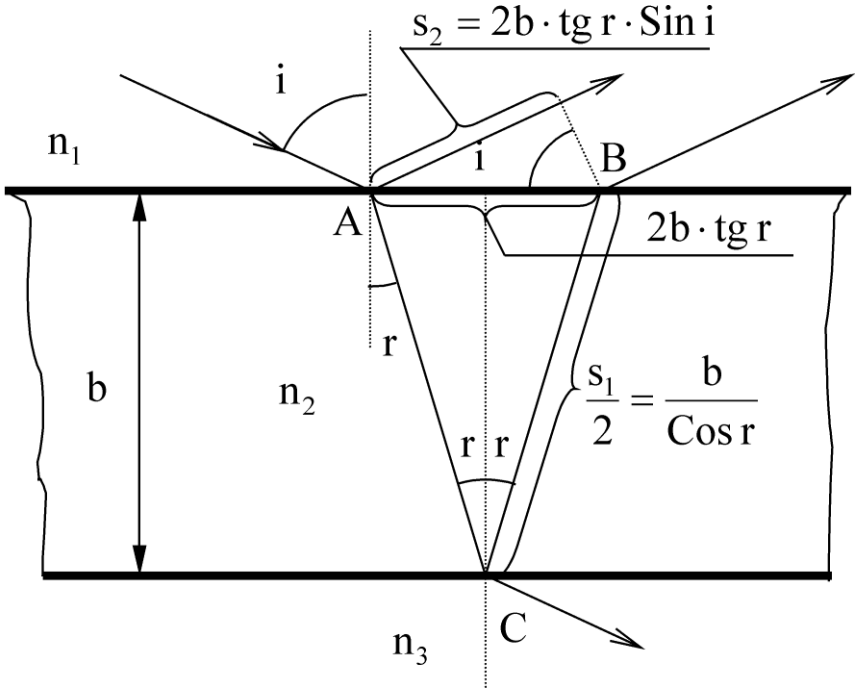


Рис. 11.1

Луч света, падающий на прозрачную пластинку, частично отражается и частично преломляется. Преломленный луч, отражаясь от нижней поверхности пластинки, идет к верхней грани и преломляется на ней второй раз. Таким образом получаются два луча. Если источник света естественный, то необходимым условием когерентности является малая толщина пластинок (интерференция
в тонких пленках). При освещении лазерным лучом это ограничение отпадает.

При определении оптической разности хода необходимо учитывать изменение фазы отраженной волны на противоположную, если отражение происходит от оптически более плотной среды.

Для $n_1 = 1$ и $n_3 > n_2$ оптическая разность хода $\Delta = n_2 s_2 - s_1$. После преобразований с учетом закона преломления и тригонометрических формул получим:

$$\Delta = 2b\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i}\,. \qquad (11.2)$$

Если $n_3 < n_2$, тогда:

$$\Delta = 2b\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda_0}{2}\cdot \qquad (11.3)$$

Здесь $\lambda_0/2$ появилась за счет изменения фазы волны на противоположную при отражении в точке А. Связь разности фаз δ и разности хода Δ вычисляется по (10.5) (если $\delta = \pi$, то $\Delta = \frac{\lambda_0}{2}$).

Условие максимума интенсивности в отраженном свете (10.6) с учетом (11.3) имеет вид:

$$2b\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0\,. \qquad (11.4)$$

Условие минимума:

$$2b\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2},\ m = 0,1,2,\ \ldots \qquad (11.5)$$

Из этих условий следует два возможных варианта интерференционной картины.

1. Если толщина пленки постоянна (b = const) и пластинка освещается рассеянным светом, то интерференционная картина будет представлять собой линии одинакового наклона. Каждому определенному углу наклона световых лучей i будет соответствовать своя линия, т. е. своя окружность. С помощью линий равного наклона можно контролировать плоскопараллельность тонких пленок. Если интерференционная картина будет представлять собой окружность, то пластинка плоскопараллельна.

2. Если пластинка освещается параллельными лучами (i = const), но толщина пластинки не постоянна, то интерференционная картина будет представлять собой линии одинаковой толщины. При освещении пластинки белым светом каждой толщине соответствует своя окраска.

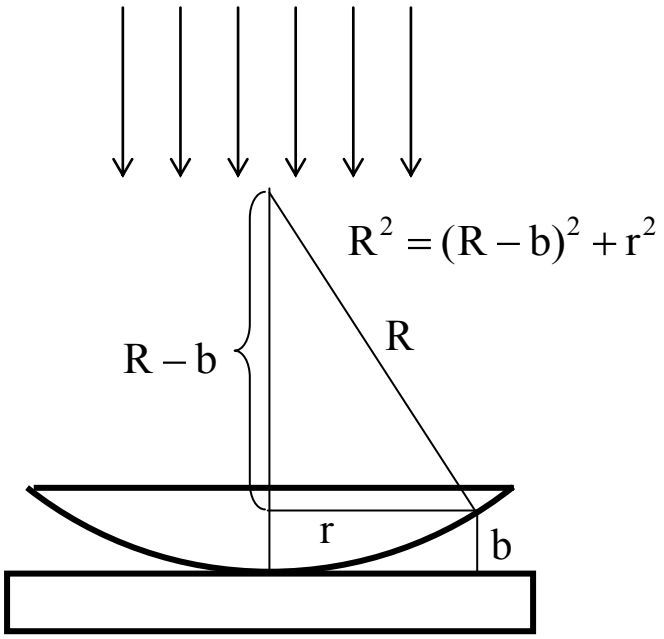
Явление интерференции в тонких пленках используется, например, для улучшения качества оптических приборов путем создания «просветленной оптики» (см. § 3 этой лекции).

11.2. Кольца Ньютона

Кольца Ньютона являются типичным примером линий равной толщины.

Плоско-выпуклая линза большого радиуса кладется на стеклянную пластинку и освещается сверху параллельным пучком света. Так как радиус линзы R велик по сравнению с r – радиусом интерференционных полос, то угол падения света на внутреннюю поверхность линзы $i \approx 0$. Роль тонкой пленки, от поверхности которой отражаются когерентные волны, играет воздушный зазор между пластинкой и линзой. Вследствие большой толщины пластинки и линзы

за счет отражений от других поверхностей интерференционные полосы не возникают, если освещение ведется естественным светом. Тогда геометрическая разность хода с большой точностью равна $2b$. При нахождении оптической разности хода следует учитывать изменение фазы на противоположную при отражении от оптически более плотной среды. Связь между b, r и R нетрудно найти из геометрических соображений (рис. 11.2).



$$2b = \frac{r^2}{R}$$

Рис 11.2

Если в зазоре между линзой и пластиной $n = 1$, то для радиуса интерференционных полос (колец Ньютона) получается формула:

$$r = \sqrt{\frac{Rm\lambda_0}{2}}, \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ 3... \qquad (11.6)$$

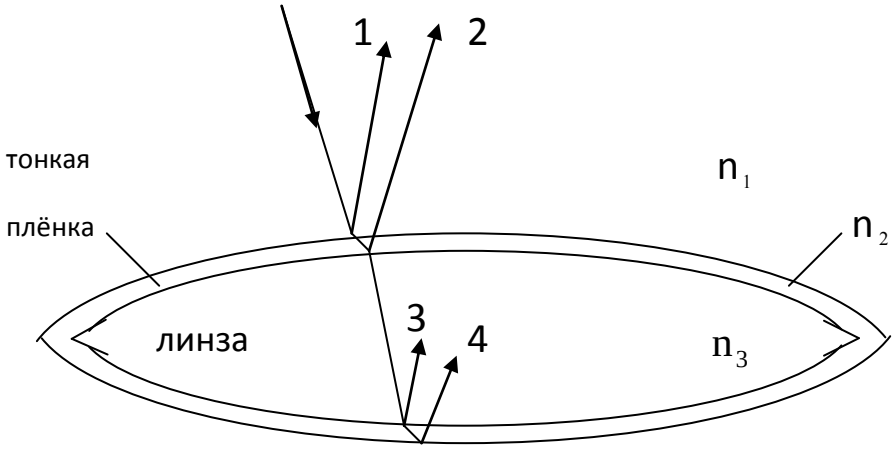
При четном m кольца Ньютона темные, в частности, при $m = 0$, $r = 0$ и в центре наблюдается темное пятно (из-за изменения фазы при отражении от стеклянной пластинки). Если m нечетное, то кольца светлые.

Формула (11.6) может быть использована для определения длины волны света по радиусу кривизны линзы R и радиусу интерференционного кольца (m – номер кольца).

11.3. Просветленная оптика

Интерференция при отражении от тонких пленок лежит в основе создания так называемой просветленной оптики. Просветление оптики – это уменьшение коэффициентов отражения деталей оптических систем путем нанесения на них специальных покрытий. Расчеты по формулам Френеля (которые будут приведены в лекции № 14, § 4) и опыты показывают, что прохождение света через каждую преломляющую поверхность линзы сопровождается отражением ~4% падающего света. Это ослабляет интенсивность прошедшего света и приводит к возникновению бликов. Поскольку линзы толстые, отраженные от

поверхностей обычной линзы лучи не интерферируют. Если покрыть линзу тонкими прозрачными пленками с другим показателем преломления, то (рис. 11.3) отраженные от поверхностей пленки лучи будут интерферировать.



Масштаб между толщиной плёнки и
размером линзы, разумеется, не выдержан

Рис. 11.3

Толщина просветленной пленки определяется из условия минимума при интерференции (см. (10.7)). Причем, чтобы условия отражения на границе «пленка – воздух» и «пленка – линза» были одинаковыми, показатель преломления пленки n_2 должен быть промежуточным между показателем преломления воздуха $(n_1 = 1)$ и линзы n_3. Обычно подбирают, чтобы $n_2 = \sqrt{n_3}$. Тогда условие минимума при интерференции в отраженном свете с учетом (11.2) будет иметь вид:

$$2b\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i} = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2}, \quad m = 0, 1, 2 \ldots$$

Если свет падает на линзу нормально, то $i = 0$ и $\sin i = 0$. Если требуется найти минимальную толщину просветляющего покрытия, то $m = 0$, следовательно:

$$2bn_2 = \frac{\lambda_0}{2}.$$

Из этого условия можно найти минимальную толщину пленки:

$$b = \frac{\lambda_0}{4n_2}. \qquad (11.7)$$

Формула (11.7) показывает, что нельзя добиться гашения одновременно для всех волн видимого света. Поэтому условие гашения должно быть выполнено, по крайней мере, для наиболее воспринимаемой человеческим глазом зеленой длины волны – $\lambda = 5\,550\,\text{Å}$. Поскольку энергия света при интерференции

никуда не исчезает, а перераспределяется, то в отраженном свете будут преобладать сине-фиолетовая и красная часть спектра. Поэтому объективы с просветленной оптикой кажутся сиреневыми (смесь красного и фиолетового). Все геодезические оптические инструменты снабжены просветленной оптикой.

11.4. Интерферометры

Интерферометр – это прибор для точных измерений различных физических величин, основанный на интерференции волн.

Оптические интерферометры применяют для измерения длин волн спектральных линий, показателей преломления прозрачных сред, абсолютной и относительной длин объектов и т. д.

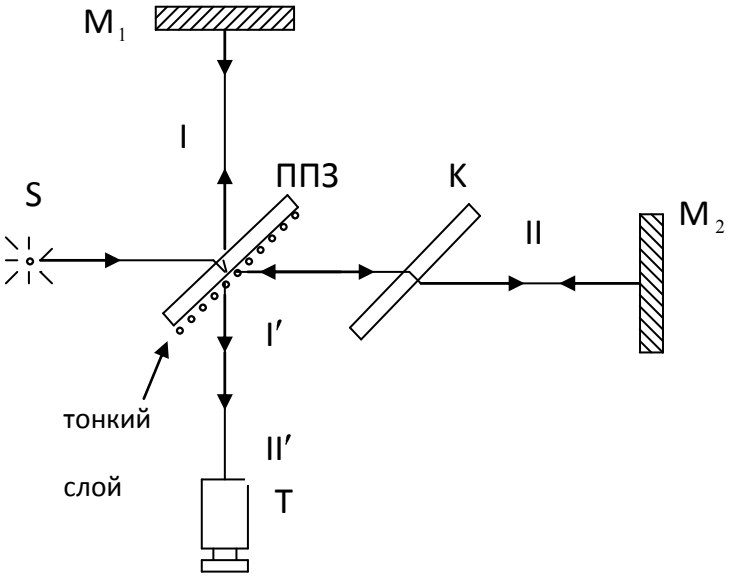


Рис. 11.4

Имеется много разновидностей интерферометров. Рассмотрим интерферометр Майкельсона (А. Майкельсон – американский физик (1852 – 1931)). Схема интерферометра Майкельсона приведена на рис. 11.4.

Пучок света от источника S попадает на полупрозрачное зеркало (ППЗ) и разбивается на два когерентных пучка I и II. Тонкий слой серебра на полупрозрачном зеркале на рис. 11.4 обозначен точками. M_1 и M_2 – непрозрачные зеркала, отражаясь от которых лучи I и II снова попадают на полупрозрачное зеркало, где каждый луч снова делится на две части. Лучи I' и II' попадают в зрительную трубу и интерферируют. Стеклянная пластинка К такой же толщины, как и полупрозрачное зеркало ППЗ, служит для компенсации разности хода интерферирующих световых лучей (так как луч I три раза проходит сквозь пластину полупрозрачного зеркала). Тем самым уравниваются пути лучей I' и I'' . В зависимости от разности хода интерферирующих лучей, зрительное поле трубы Т окажется темным или светлым. При перемещении зеркала M_2 на расстояние $\lambda_0/4$ разность хода обоих лучей увеличится на $\lambda_0/2$ и произойдет смена освещенности зрительного поля. Таким образом можно измерять смещения с точностью до четверти длины волны $\lambda_0/4$.

Более чувствительным является следующий метод. Неподвижное зеркало M_1 слегка наклоняется. Лучи, попадающие в разные точки зеркала M_2, проходят разные пути, поэтому в окуляре зрительной трубы Т будут

наблюдаться «полосы равной толщины». Смещение зеркала M_2 вызовет перемещение этих полос, за которым можно следить с большой точностью.

В инженерной практике иногда приходится сталкиваться с определением малых по величине смещений крупногабаритных сооружений. В случае, когда прецизионные геодезические инструменты не могут зафиксировать изменения положения наблюдаемого объекта, может быть успешно применен метод интерференции света.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 11

1. Интерференция при отражении от прозрачных пластинок наблюдается в том случае, когда толщина этой пластинки мала. Тогда при отражении света от верхней и нижней граней пластинки появляются два когерентных луча. Результат их интерференции зависит от оптической разности хода (11.2):

$$\Delta = 2b\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i}\,.$$

2. При рассмотрении интерференции в отраженном свете надо учесть следующий эффект. Теория и опыт показывают, что если свет отражается от оптически более плотной среды, то фаза отраженной волны изменяется на противоположную, а если отражение происходит от менее плотной среды, то фаза не меняется. Изменение фазы на противоположную равносильно изменению пути на полдлины волны. Это надо учитывать при определении оптической разности хода в отраженном свете от пленки, находящейся в воздухе. Тогда:

$$\Delta - \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0$$ – условие максимума,

$$\Delta - \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2}$$ – условие минимума.

3. Интерференционная картина от тонких пленок будет представлять собой либо линии одинакового наклона, либо линии одинаковой толщины.

4. Кольцами Ньютона называют интерференционную картину, представляющую собой линии одинакового наклона, которая образуется на плоско-выпуклой линзе, соприкасающейся с плоскопараллельной стеклянной пластинкой.

5. Просветленная оптика – это оптическая система, в которой уменьшены коэффициенты отражения света отдельных ее элементов путем нанесения на них тонких прозрачных пленок такой толщины, что световые волны, отраженные от обоих поверхностей пленки, гасят друг друга.

6. Интерферометры – это измерительные приборы, в которых используется явление интерференции волн. Интерферометр Майкельсона – это двухлучевой интерферометр, который используется для точного измерения смещений тел (с точностью до $\lambda_0 / 4$).

ЛЕКЦИЯ 12. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Явление дифракции света. Принцип Гюйгенса – Френеля
Зоны Френеля. Дифракция Френеля на круглом отверстии.
Дифракция Фраунгофера на щели

12.1. Явление дифракции волн

Дифракция (от лат. difractus – преломленный) в первоначальном смысле – огибание волнами препятствий, в современном, более широком смысле – любые отклонения при распространении волн от законов геометрической оптики (см. лекцию № 8).

Причина дифракции, как и интерференции, – суперпозиция волн, которая приводит к перераспределению интенсивности. Если число интерферирующих источников конечно, то говорят об интерференции волн. При непрерывном распределении источников говорят о дифракции волн.

Дифракция проявляется у волн любой природы.

Характер дифракции зависит от значения безразмерного параметра $\frac{b^2}{L\lambda}$, где λ – длина волны; b – размеры препятствия; L – расстояние от препятствия до точки наблюдения. Различают следующие ситуации:

Если

$\frac{b^2}{L\lambda}$
- $>>1$ – то применимо приближение геометрической оптики, предмет дает резкую тень;
- ~ 1 – то наблюдается дифракция Френеля, т.е. дифракция световых волн, имеющих сферический волновой фронт;
- $<<1$ – то наблюдается дифракция Фраунгофера, т. е. дифракция световых волн, имеющих плоский волновой фронт.

12.2. Принцип Гюйгенса – Френеля

Строгое решение любой дифракционной задачи для световых волн сводится к нахождению решения уравнений Максвелла с соответствующими граничными условиями.

В оптике большое значение имеет приближенное решение дифракционных задач, основанное на принципе Гюйгенса – Френеля:

1. Каждая точка, до которой доходит волна, служит источником вторичных сферических волн, огибающая которых дает положение волнового фронта в следующий момент времени (Х. Гюйгенс, 1678 г.).

2. Амплитуда результирующей волны в любой точке пространства может быть найдена как результат интерференции всех вторичных волн, с учетом их фаз и амплитуд (О. Френель, 1818 г.).

Найдем математическую формулировку принципа Гюйгенса – Френеля.

Пусть S – волновая поверхность, не закрытая препятствием; P – точка наблюдения (рис. 12.1). Тогда элемент поверхности dS возбудит в точке P колебание:

$$dE = k(\varphi)\frac{a_o dS}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha_0) \qquad (12.1)$$

(см. уравнение сферической волны (5.8)).

Результирующее колебание в точке P есть результат сложения всех колебаний, пришедших в точку наблюдения от всех вторичных источников (12.1), т. е.:

$$E = \int_S dE = \int_S k(\varphi)\frac{a_0}{r}\cdot\cos(\omega t - kr + \alpha)\cdot dS. \qquad (12.2)$$

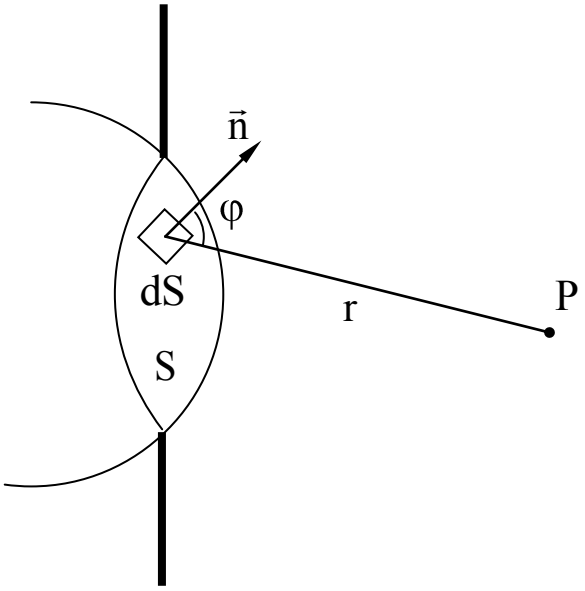


Рис. 12.1

В уравнениях (12.1) и (12.2) $k(\varphi)$ определяет зависимость амплитуды dE от угла φ между нормалью к площадке dS и направлением на точку P. Множитель a_0 дает амплитуду светового колебания в том месте, где находится dS. Величины ω и k – круговая частота и волновое число сферической волны, распространяющейся от элемента dS; r – расстояние от элементарной площадки dS до точки наблюдения.

Формула (12.2) – это и есть математическое выражение принципа Гюйгенса – Френеля. Вычисление интеграла (12.2) в общем случае – трудная задача.

В случаях, когда в задаче существует симметрия, амплитуду результирующего колебания можно найти методом зон Френеля, не прибегая к вычислению интеграла.

12.3. Зоны Френеля

Зоны Френеля – это участки поверхности волнового фронта, оптическая разность хода от границ которых до данной точки равна половине длины волны испускаемых источником волн.

Пусть от источника света S распространяется монохроматическая сферическая волна, P – точка наблюдения (рис. 12.2). Через точку O проходит сферическая волновая поверхность. Она симметрична относительно прямой SP. Разобьем эту поверхность на кольцевые зоны I, II, III и т. д. так, чтобы расстояния от краев зоны до точки P отличались на $\lambda/2$ – половину длины световой волны. Это разбиение было предложено О. Френелем, и зоны называют зонами Френеля.

Что дает такое разбиение для расчета интенсивности в точке P? Возьмем произвольную точку 1 в первой зоне Френеля. В зоне II найдется, в силу правила построения зон, такая соответствующая ей точка, что разность хода лучей, идущих в точку P от точек 1 и 2, будет равна $\Delta = \lambda/2$ и разность фаз $\delta = \pi$ (см. формулу (10.5)). Вследствие этого, колебания от точек 1 и 2 погасят друг друга в точке P.

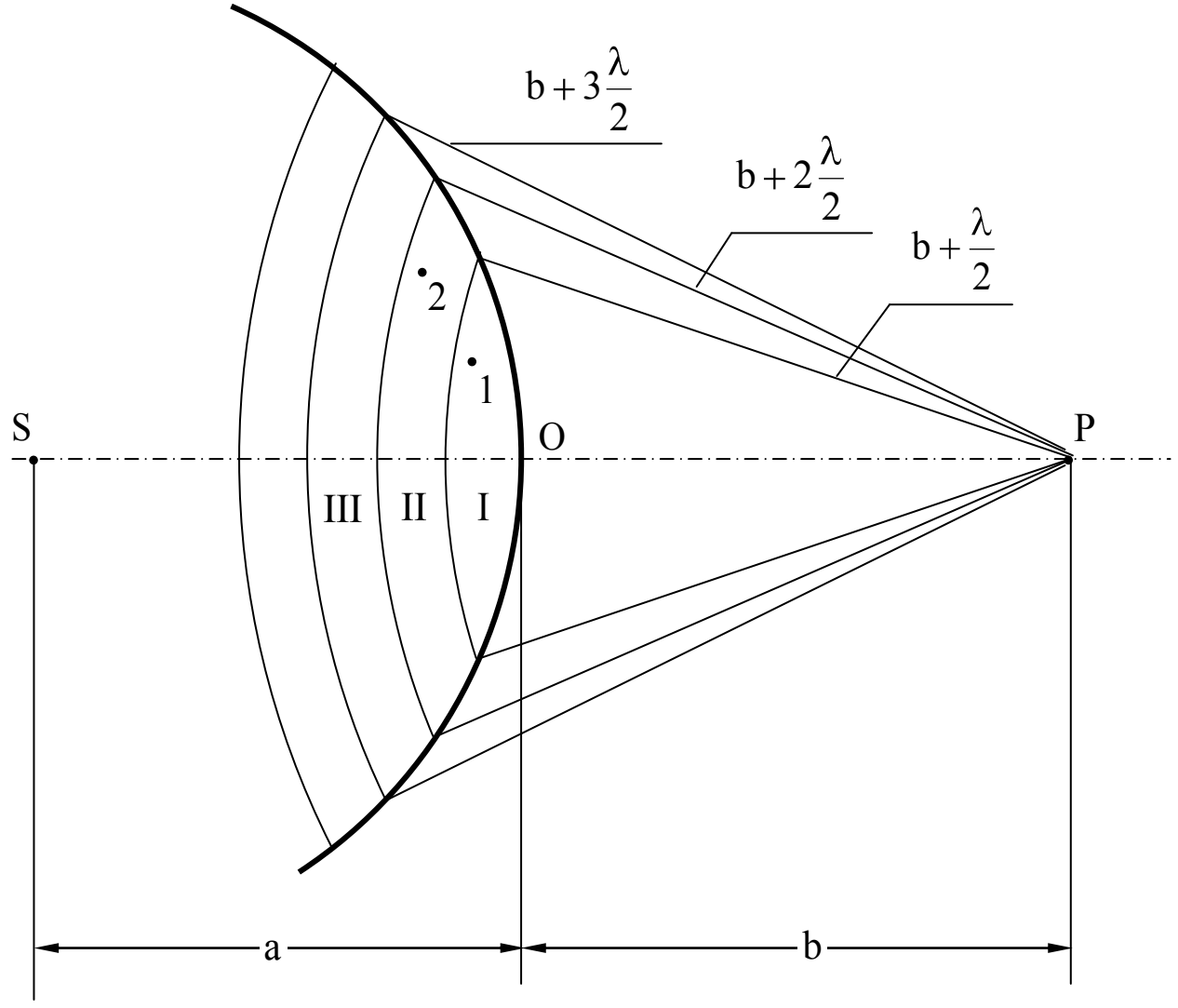


Рис. 12.2

Из геометрических соображений следует, что при не очень больших номерах зон их площади примерно одинаковы. Значит, каждой точке первой зоны найдется соответствующая ей точка во второй, колебания от которых

погасят друг друга. Амплитуда результирующего колебания, приходящего в точку P от зоны с номером m, уменьшается с ростом m, т. е.

$$A_1 > A_2 > A_3 \cdot\cdot\cdot A_{m-1} > A_m > A_{m+1} \cdot\cdot\cdot$$

Происходит это из-за увеличения с ростом m угла φ между нормалью к волновой поверхности и направлением на точку P, из-за увеличения расстояния

$$r = b + m\frac{\lambda}{2}\cdot$$

Это приводит к уменьшению амплитуды. Значит, гашение колебаний соседних зон будет не совсем полным.

12.4. Дифракция Френеля на круглом отверстии

Пусть на пути сферической световой волны, испускаемой источником S, расположен непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса r_0 (рис. 12.3). Если отверстие открывает четное число зон Френеля, то в точке P будет наблюдаться минимум, так как все открытые зоны можно объединить в соседние пары, колебания которых в точке P приблизительно гасят друг друга.

При нечетном числе зон в точке P будет максимум, так как колебания одной зоны останутся не погашенными.

Можно показать, что радиус зоны Френеля с номером m при не очень больших m равен:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}\cdot m\lambda}\,. \qquad (12.3)$$

Расстояние a примерно равно расстоянию от источника до преграды, расстояние b – от преграды до точки наблюдения P.

Если отверстие оставляет открытым целое число зон Френеля, то, приравняв r_0 и r_m, получим формулу для подсчета числа открытых зон Френеля:

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right). \qquad (12.4)$$

При m четном в точке P будет минимум интенсивности, при нечетном – максимум.

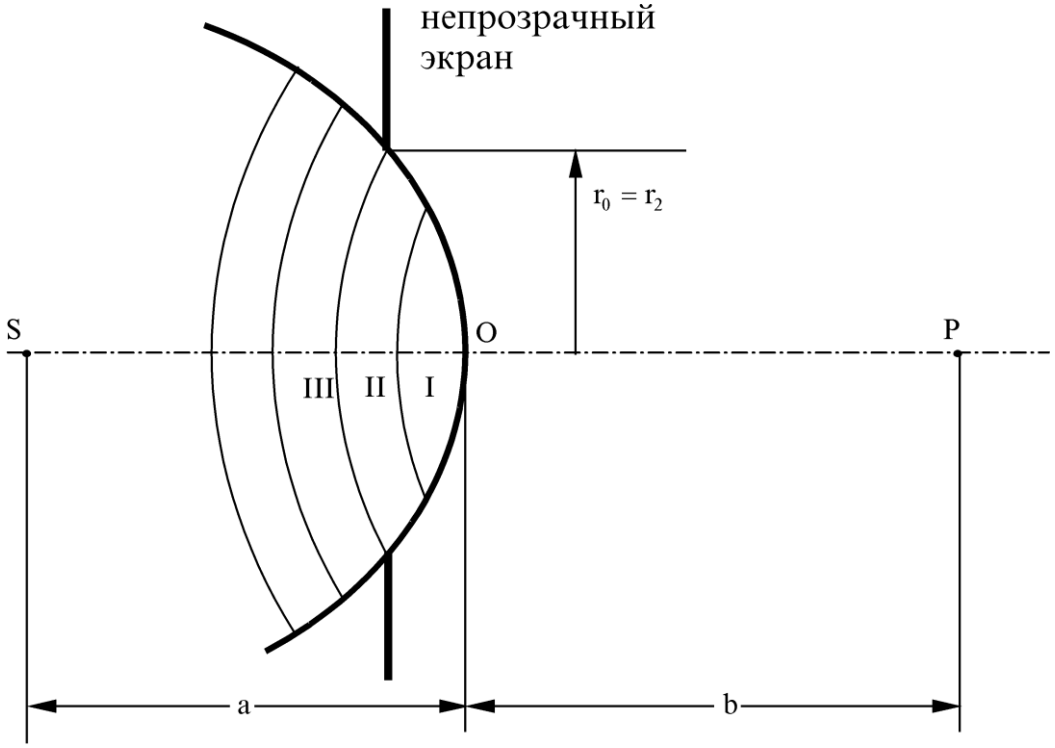


Рис. 12.3

Дифракционная картина от круглого отверстия будет представлять собой вид чередующихся светлых и темных концентрических колец. В центре картины будет либо светлое пятно (m нечетное), либо темное пятно (m четное).

Если отверстие открывает лишь часть центральной зоны Френеля, на экране получатся размытое светлое пятно, чередования колец в этом случае не возникает. Если отверстие открывает большое число зон, то центр картины будет светлым, а чередование светлых и темных колец наблюдается лишь в узкой области на границе геометрической тени.

12.5. Дифракция Фраунгофера на щели

В случае дифракции Фраунгофера параметр $b^2/(L\lambda) << 1$. Это значит, что если размер препятствия $b \sim \lambda$, то расстояние до экрана наблюдения $L >> b$.

Пусть на длинную щель шириной b падает плоская монохроматическая волна с длиной λ.

Поместим между щелью и экраном наблюдения линзу так, чтобы экран наблюдения находился в фокальной плоскости линзы. Линза позволяет наблюдать на экране дифракцию в параллельных лучах ($L \to \infty$) (рис. 12.4).

Собирающая линза обладает свойством, называемым *таутохронностью:* лучи, идущие от волновой поверхности AC до точки наблюдения P, имеют одинаковую оптическую длину. Таким образом результат суперпозиции вторичных волн, который определяет амплитуду колебаний световой волны в точке P (рис. 12.4, зависит от разности хода, набегающей в треугольнике ABC.

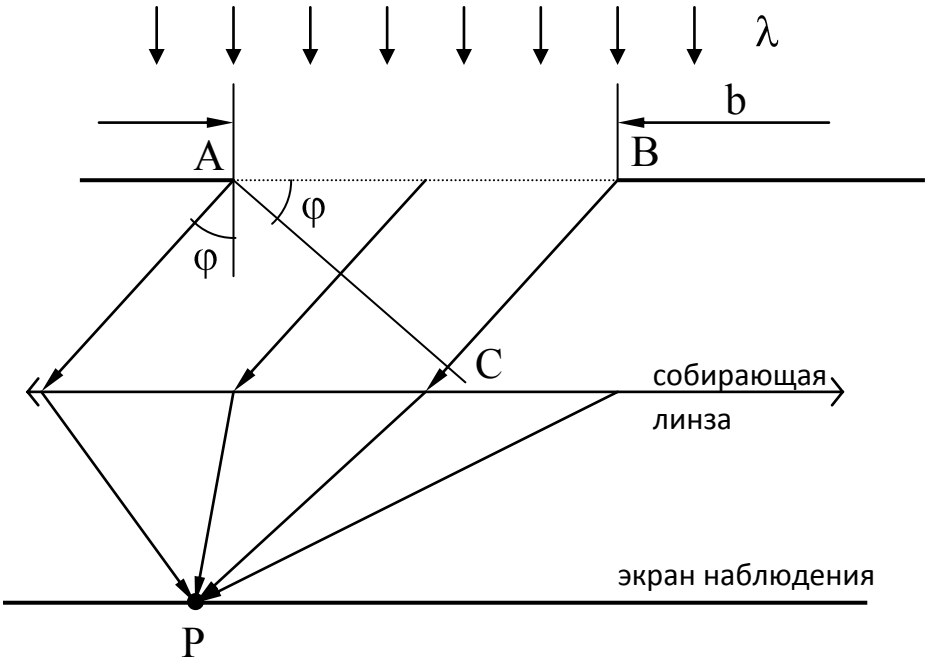


Рис. 12.4

Определим положения максимумов и минимумов методом зон Френеля.

Для нахождения положений максимумов и минимумов интенсивности методом зон Френеля разобьем сторону BC на отрезки длиной $\lambda/2$ (рис. 12.5).

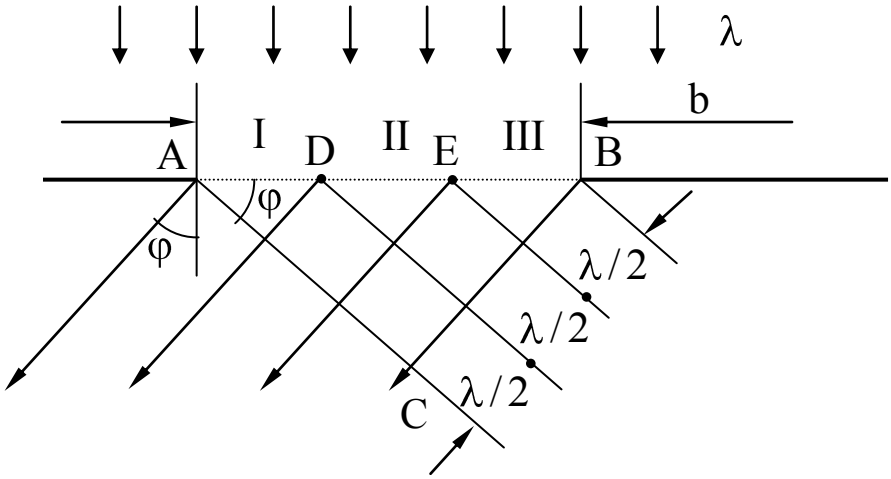


Рис. 12.5

Из концов этих отрезков проведем плоскости, параллельные фронту вторичной плоской волны, идущей под углом φ. Эти плоскости разобьют AB – ширину фронта первичной плоской волны на зоны Френеля, представляющие собой узкие полоски.

На рис. 12.5 изображены три их ширины: AD, DE и EB. Число зон Френеля k зависит от длины волны λ и длины отрезка BC = $b\sin\varphi$. Если k целое, то

$$b \cdot \sin\varphi = k\frac{\lambda}{2}.$$

При четном числе зон Френеля $k = 2m$, где $m = \pm1, \pm2 \ldots$ все зоны можно разбить на соседние пары, которые гасят друг друга. Следовательно, условие минимума при дифракции Фраунгофера на щели имеет вид:

$$b\sin\varphi = m\lambda, \qquad m = \pm1, \pm2\ldots \qquad (12.5)$$

При нечетном $k = 2m + 1$ одна зона остается без пары и ее колебания не будут погашены, следовательно, условие максимума при дифракции Фраунгофера на щели будет иметь вид:

$$b \sin \varphi = m\lambda + \frac{\lambda}{2}. \qquad (12.6)$$

Обратим внимание, что условия (12.5) и (12.6) формально противоположны условиям максимумов и минимумов при интерференции от двух источников (см. (10.6) и (10.7)).

В формулах (12.5) и (12.6) число m называется порядком дифракционного минимума или максимума, а φ – углом дифракции.

Зависимость интенсивности дифракционной картины от синуса угла дифракции φ представлена на рис. 12.6.

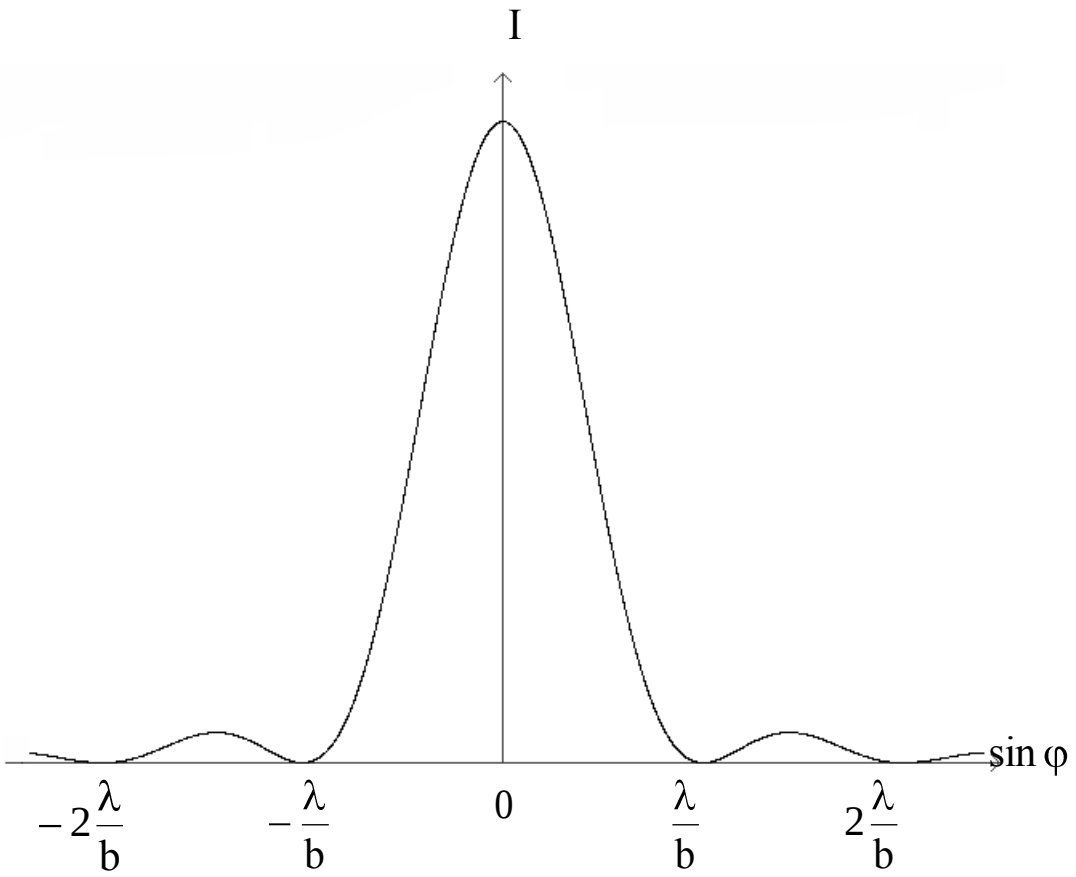


Рис. 12.6

Как видно из рис. 12.6, самый интенсивный максимум наблюдается в направлении $\varphi = 0$. Он называется центральным максимумом нулевого порядка. В этом направлении наблюдается усиление света независимо от длины волны. При наблюдении дифракции в белом свете центральный максимум будет также белым, в то время как максимумы более высоких порядков ($m = \pm 1, \pm 2 \ldots$) окажутся окрашенными. Ближе к центральному неокрашенному максимуму оказываются дифракционные максимумы с меньшими длинами волн.

Количество минимумов интенсивности определится из условия, что $\sin\varphi \le 1$. Тогда из (12.5) получим:

$$\sin\varphi = m\frac{\lambda}{b} \le 1, \quad \text{т. е.} \quad m \le \frac{b}{\lambda}.$$

При ширине щели $b < \lambda$ минимумы не возникают.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 12

1. Дифракцией называется огибание волнами препятствий. Различают дифракцию Френеля (дифракцию сферических волн) и дифракцию Фраунгофера (дифракцию плоских волн).

2. Объяснить и рассчитать дифракционную картину можно с помощью принципа Гюйгенса – Френеля. Согласно этому принципу, каждая точка фронта волны становится источником вторичных волн, а амплитуда результирующей волны в любой точке пространства (см. (12.2)) представляет собой результат интерференции всех вторичных волн.

3. Упрощенным методом решения задач на дифракцию является метод зон Френеля. Зоны Френеля – это участки поверхности волнового фронта, построенные таким образом, что оптическая разность хода от границ зоны до точки наблюдения равна половине длины волны испускаемых источником волн. Поэтому соседние зоны Френеля гасят друг друга.

4. Если на пути сферической световой волны стоит круглое отверстие радиуса r_0, то число открытых зон Френеля вычисляется по формуле (12.4):

$$m = \frac{r_0}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

где a – расстояние от источника до преграды; b – расстояние от преграды до точки наблюдения. При m четном будет минимум интенсивности, при нечетном – максимум.

5. Для наблюдения дифракции Фраунгофера от щели между щелью и экраном наблюдения необходимо поставить линзу. В фокальной плоскости линзы соберутся параллельные лучи. В результате их интерференции возникнет дифракционная картина (если $b > \lambda$), где b – ширина щели, λ – длина волны света. В центре картины будет самый интенсивный максимум. Положение минимумов определится формулой (12.5):

$$b\sin\varphi = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2 \ldots$$

ЛЕКЦИЯ 13. ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА. РАЗРЕШАЮЩАЯ СИЛА ОБЪЕКТИВА

Дифракция на дифракционной решетке. Дифракционная решетка как спектральный прибор. Дисперсия дифракционной решетки. Разрешающая сила дифракционной решетки. Разрешающая сила объектива

13.1. Дифракция на дифракционной решетке

Дифракционная решетка – это совокупность большого числа одинаковых щелей, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние. Расстояние d между соответственными точками соседних щелей называют **периодом решетки**:

$$d = a + b,$$

здесь a – ширина непрозрачного промежутка; b – ширина щели.

Найдем условие главного максимума для дифракционной решетки.

Пусть на дифракционную решетку с числом щелей N падает по нормали параллельный пучок света (плоская волна, (5.5)) с длиной волны λ. Между экраном и решеткой поместим собирающую линзу. Экран расположим в фокальной плоскости линзы. По принципу Гюйгенса – Френеля (12.2) для нахождения амплитуды результирующего колебания в какой-либо точке P экрана наблюдения надо найти результат интерференции всех вторичных волн, с учетом их фаз и амплитуд. Линза собирает в точке P все параллельные лучи, идущие от решетки под углом φ.

Разность хода лучей, идущих от соответственных точек соседних щелей найдем из треугольника ABC:

$$\Delta = d \cdot \sin\varphi.$$

Щели представляют собой когерентные источники, так как все они получены из одной волны. От когерентных источников наблюдается интерференция.

При выполнении условия максимума при интерференции (10.6) разность хода равна:

$$\Delta = m\lambda,$$

таким образом, условие главного максимума для дифракционной решетки будет иметь следующий вид:

$$d\cdot\sin\varphi = \pm m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (13.1)$$

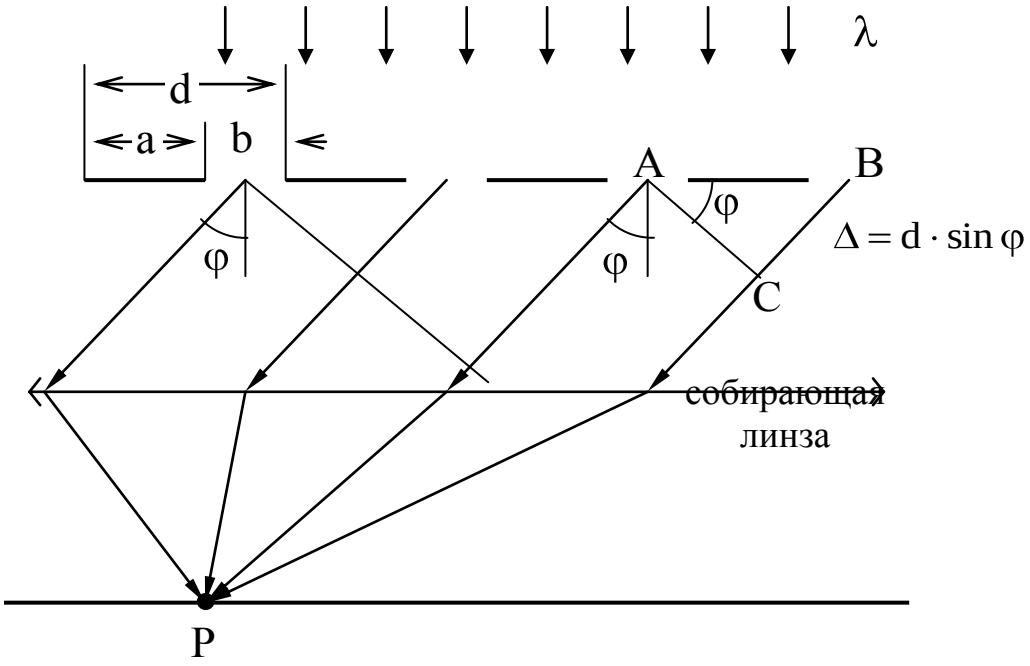


Рис. 13.1

Целое число m называют порядком максимума. Колебания от соседних щелей при выполнении условия максимума в точку P будут приходить в одинаковой фазе. Результирующая амплитуда A_p, создаваемая в точке P решеткой, будет в N раз больше амплитуды от одной щели:

$$A_p = NA_{щ}.$$

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды:

$$I_p \sim A_p^2 = N^2 A_{щ}^2 \sim N^2 I_{щ}.$$

Интенсивность от решетки I_p будет в N^2 раз больше, чем интенсивность $I_{щ}$, создаваемая одной щелью.

Для условий минимумов интенсивности от дифракционной решетки анализ дает следующие результаты:

$$b \cdot \sin\varphi = \pm k\lambda, \quad (k = 1, 2, ...) \qquad (13.2)$$

– это условие минимума для щели (12.5);

$$d \cdot \sin\varphi = \pm(m + 1/2)\lambda, \quad (m = 0, 1, 2, ...) \qquad (13.3)$$

– это условие главного минимума для решетки. При выполнении этого условия колебания от соседних щелей приходят в точку P в противофазе и попарно гасят друг друга;

$$d \cdot \sin\varphi = \pm(k'/N)\lambda, \quad (k' = 1, 2, ...), \qquad (13.4)$$

где k' – целое число, не кратное N. Это условие добавочных минимумов. (При k', кратном N, получим условие максимума.)

Рассмотрим, как получается условие добавочных минимумов.

При выполнении условия добавочных минимумов векторная диаграмма (см. лекцию № 2) сложения колебаний от N щелей замыкается: конец N-го вектора попадает в начало 1-го и результирующая амплитуда равна нулю. На

рис. 13.2 изображена эта ситуация для $N = 6$ (рис. 13.2, а), $k' = 1$ и $k' = 2$ (рис. 13.2, б). При $k' = 2$ векторы A_1 и A_4, A_2 и A_5, A_3 и A_6 расположены в одном месте.

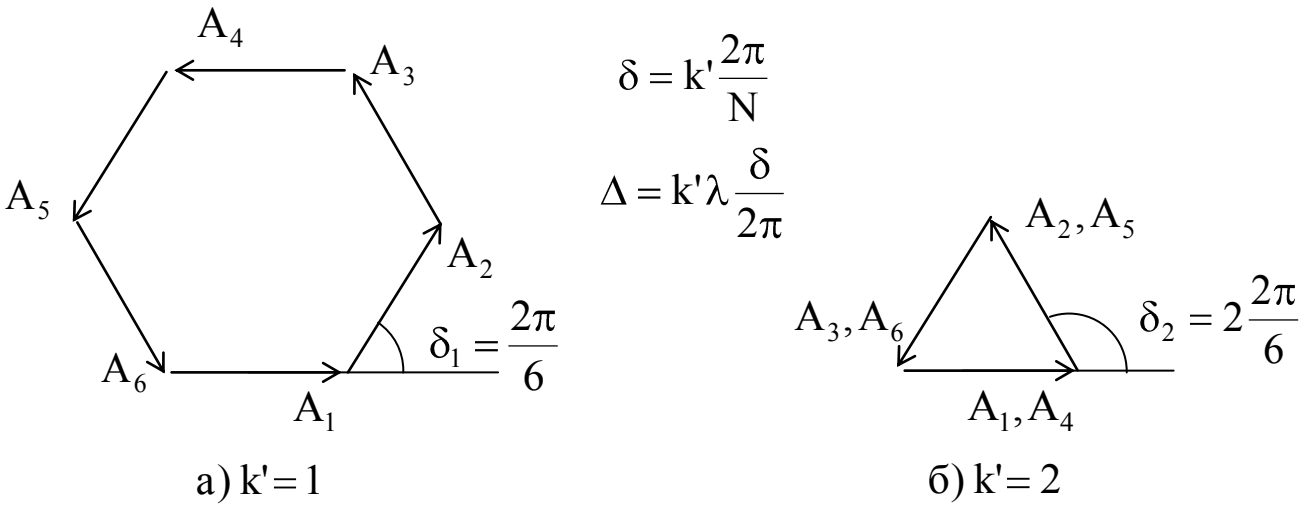


Рис. 13.2

Рассчитаем положения добавочных минимумов, ближайшие к главным максимумам.

Если в условии добавочных минимумов (13.4) положить $k' = \pm 1, N \pm 1, 2N \pm 1, \ldots$, т. е. $k' = mN \pm 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, то получим условие для добавочных минимумов, ближайших к главным максимумам порядка m:

$$d \cdot \sin\varphi = \pm\left(m \pm \frac{1}{N}\right)\lambda = \pm m\lambda \pm \frac{\lambda}{N}. \qquad (13.5)$$

При разности хода $d \cdot \sin\varphi$, равной $\pm m\lambda$, наблюдается главный максимум порядка m. Добавка к разности хода величины λ/N дает условие минимума, ближайшего к главному максимуму. Эта добавка тем меньше, чем больше N – число щелей решетки, принимающих участие в образовании интерференционной картины. У хороших решеток $d \approx 10^{-6}$ м, и при длине решетки $l_p = 1$ см число щелей $N = l_p/d = 10\,000$, что дает очень узкие главные максимумы, необходимые в спектральных приборах.

График интенсивности $I_p(\sin\varphi)$ приведен на рис. 13.3.

Для наглядности графика возьмем решетку с очень малым числом щелей, $N = 4$. Пусть, для определенности, постоянная решетки d в четыре раза больше ширины щели b, т. е. $d = 4b$, а длина волны $\lambda = b/2$. Значения $\sin\varphi$, при которых будут наблюдаться максимумы и минимумы от нашей решетки, на рис. 13.3 показаны стрелками.

Зависимость интенсивности дифракционной картины от $\sin\varphi$ изображена на рисунке 13.3 сплошной линией. Огибающая дифракционной картины – это

интенсивность дифракционной картины от одной щели, помноженная на $N^2 = 4^2 = 16$.

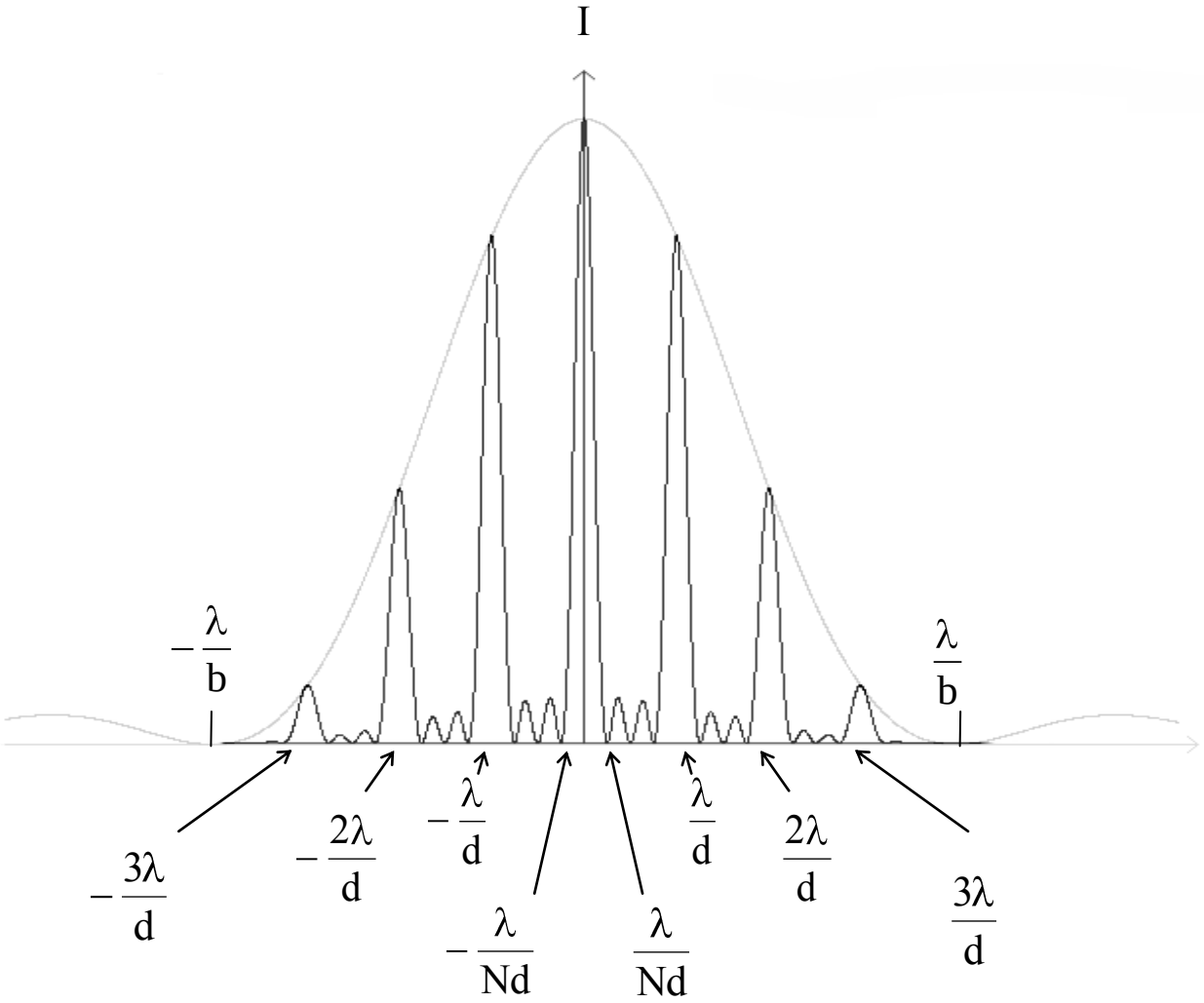


Рис. 13.3

13.2. Дифракционная решетка как спектральный прибор

При прохождении света через дифракционную решетку, содержащую большое число щелей N, главные дифракционные максимумы получаются чрезвычайно острыми и узкими. Количество дополнительных максимумов с увеличением N увеличивается, однако их интенсивность падает и при достаточно больших N становится пренебрежимо малой по сравнению с интенсивностью главных максимумов. Поэтому можно считать, что падающая световая энергия распределяется только между главными максимумами.

При наблюдении дифракции в немонохроматическом (белом) свете все главные максимумы, кроме центрального (белого), будут окрашены. Радужная полоска с непрерывно изменяющимся цветом – от фиолетового (ближе к центру) до красного – называется дифракционным спектром. При освещении дифракционной решетки светом с дискретным набором длин волн можно наблюдать отдельные максимумы, соответствующие разным длинам волн. Каждый отдельный максимум дифракционного спектра называют спектральной линией с длиной волны λ. Дифракционная решетка является одним из

простейших и достаточно точных устройств, используемых для определения длин волн.

Из условия главного максимума (13.1):

$$d \cdot \sin \varphi = \pm m\lambda, \qquad m = 0, 1, 2 \ldots$$

видно, что положение главного максимума зависит от длины волны λ. Зная постоянную решетки d, измерив на опыте угол φ, под которым находится максимум известного порядка m, можно из условия главного максимума определить длину волны λ.

Количество наблюдаемых главных максимумов с длиной волны λ определяется из условия, что $\sin\varphi \le 1$. Поэтому из (13.1): $m \le d/\lambda$, при этом m может быть только целым. Заметим, что картина симметрична относительно центрального максимума. Следовательно, число наблюдаемых главных максимумов равно $(2m+1)$.

При пропускании через решетку немонохроматического света все максимумы, кроме центрального, разлагаются в спектр. Таким образом, дифракционная решетка представляет собой спектральный прибор. Качество спектрального прибора характеризуется двумя величинами: дисперсией и разрешающей силой. Дисперсия дифракционной решетки характеризует ширину спектра, а разрешающая сила или разрешающая способность характеризует возможность различать две спектральные линии, близкие по длине волны.

13.3. Дисперсия дифракционной решетки

Различают угловую и линейную дисперсию.

По определению, угловой дисперсией спектрального прибора D называется производная от углового отклонения светового луча по длине волны:

$$\boxed{D \equiv \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}}. \qquad (13.6)$$

Здесь и далее до конца этой главы, δ – знак дифференциала, так как буква d уже используется – она обозначает постоянную решетки.

В определении угловой дисперсии $\delta\lambda$ – разность длин волн двух соседних линий, $\delta\varphi$ – соответствующая разность углов, под которыми наблюдаются главные максимумы (рис. 13.4).

Выразим угловую дисперсию через постоянную решетки d, порядок спектра m и угол φ, под которым наблюдается максимум. Для этого найдем дифференциал от правой и левой части условия главного максимума (13.1):

$$\delta\left(d \cdot \sin \varphi\right) = \delta\left(m\lambda\right),$$

$$d \cdot \cos\varphi\, \delta\varphi = m\delta\lambda.$$

Воспользовавшись формулой угловой дисперсии (13.6), получим:

$$D = \frac{m}{d \cdot \cos\varphi}. \qquad (13.7)$$

При малых φ значения $\cos\varphi \approx 1$ и

$$D \approx \frac{m}{d}. \qquad (13.8)$$

Формула (13.8) показывает, что угловая дисперсия обратно пропорциональна периоду решетки и прямо пропорциональна порядку спектра m. Чем больше порядок спектра, тем спектр шире. Начиная со 2-го и 3-го порядков видимые спектры белого света частично перекрываются. Это следует из условия: $m\lambda_к > (m+1)\lambda_ф$, где $\lambda_к = 760$ нм, $\lambda_ф = 400$ нм.

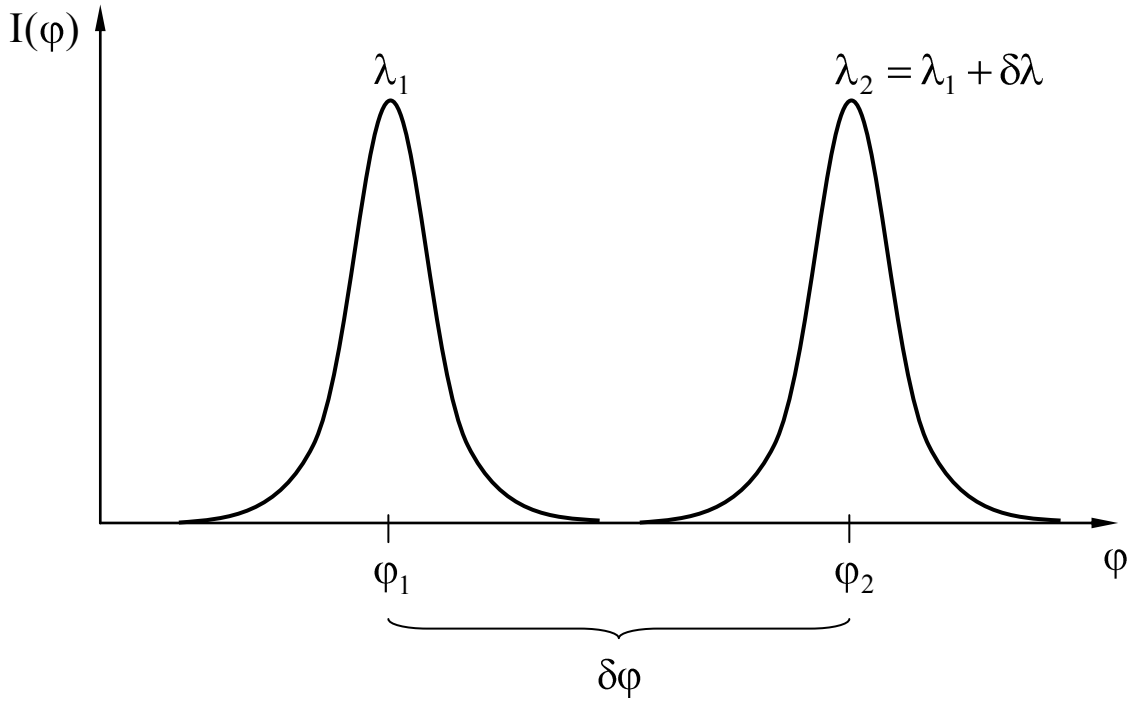


Рис. 13.4

Линейной дисперсией спектрального прибора называется производная от расстояния между спектральными линиями по длине волны света:

$$D_л \equiv \frac{\delta l}{\delta\lambda}, \qquad (13.9)$$

где l – расстояние вдоль экрана наблюдения; δl – расстояние между линиями на экране; $\delta\lambda$ – разность длин волн двух соседних линий в спектре.

При наблюдении дифракции с помощью собирающей линзы при малых углах ($\varphi << 1$) из рис. 13.5 можно найти связь линейной и угловой дисперсий:

$$D_л = F \cdot D. \qquad (13.10)$$

Как видно из рис. 13.5, при небольших углах с учетом (13.6) и (13.10):

$$\delta\varphi \approx \frac{\delta l}{F} \Rightarrow \delta l \approx F \cdot \delta\varphi \Rightarrow D_{л} = F\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = F \cdot D,$$

где F – фокусное расстояние собирающей линзы.

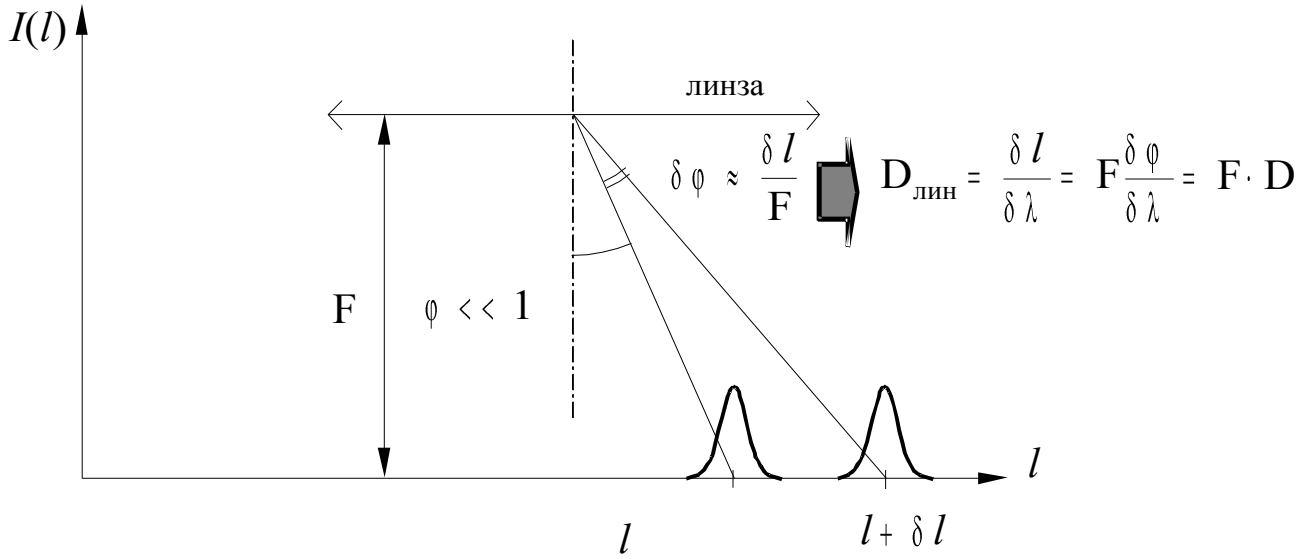


Рис. 13.5

Если наблюдение дифракционной картины ведется без линзы, на большом расстоянии L от решетки, то тогда при малых углах

$$D_{лин} = L \cdot D. \qquad (13.11)$$

13.4. Разрешающая сила дифракционной решетки

Разрешающая сила характеризует свойство дифракционной решетки разделять излучения, близкие по длине волны. Разрешающей силой или разрешающей способностью, называют безразмерную величину:

$$\boxed{R \equiv \frac{\lambda}{\delta\lambda}}. \qquad (13.12)$$

Здесь $\delta\lambda$ – минимальная разница в длинах волн соседних спектральных линий, при которой эти линии еще можно наблюдать раздельно.

Если в получаемом спектре присутствуют две линии, длины волн которых λ_1 и $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta\lambda$ незначительно отличаются, то возможность их раздельного восприятия определяется двумя причинами:

а) угловым расстоянием между максимумами этих линий;

б) их шириной.

Угловое расстояние между максимумами увеличивается с уменьшением d – постоянной решетки (это следует из условия главного максимума (13.1)). Ширина максимумов определяется положением добавочных минимумов, ближайших к главным максимумам (13.5), и уменьшается с увеличением N – числа щелей решетки, принимающих участие в образовании главного максимума.

Опыт показывает, что два близких максимума воспринимаются глазом раздельно, если интенсивность в промежутке между ними составляет не более 80% от интенсивности максимума. Такое соотношение интенсивности имеет место в том случае, если середина одного максимума совпадает с краем другого. Этот критерий предложен Рэлеем (Дж. В. Релей – английский физик (1842 – 1919)).

Критерий Релея определяет величину $\delta\lambda$ в соответствии с рис. 13.6.

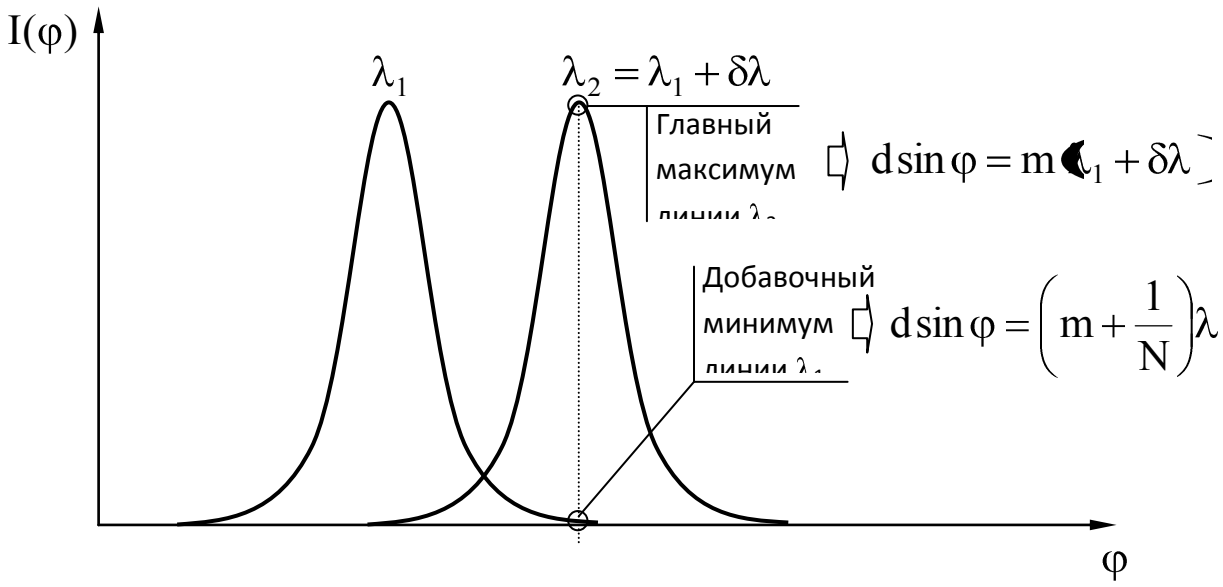


Рис. 13.6

Считают, что линии разрешены, если главный максимум линии $\lambda_1 + \delta\lambda$ и добавочный минимум линии λ_1 совпадают, следовательно (рис. 13.6):

$$m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda \Rightarrow m\delta\lambda = \frac{1}{N}\lambda \Rightarrow \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN.$$

По определению (13.12)

$$R \equiv \frac{\lambda}{\delta\lambda}.$$

В результате получим:

$$\boxed{R = mN}. \qquad (13.13)$$

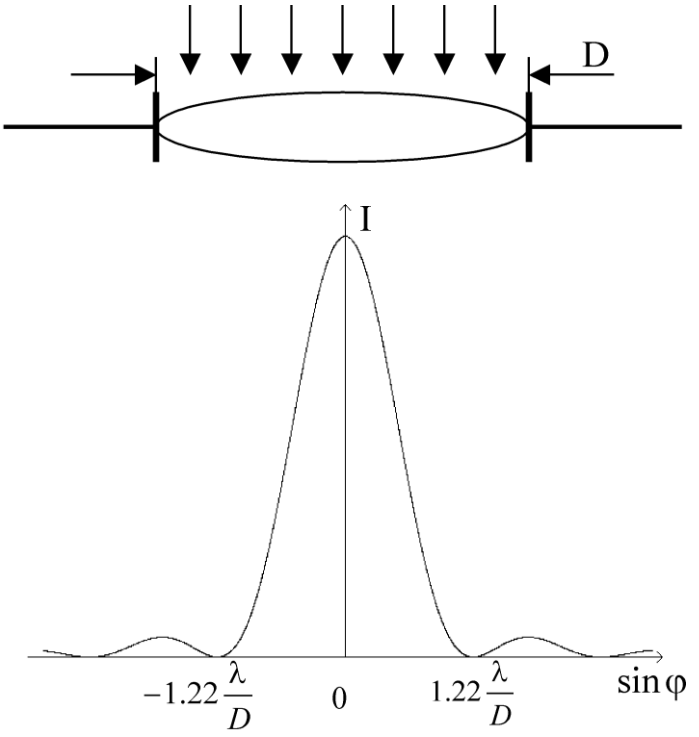
Разрешающая сила R есть величина, обратная относительной погрешности определения длины волны. Она показывает, во сколько раз длина волны λ больше минимально возможной абсолютной погрешности $\delta\lambda$.

Подчеркнем, что N в формуле для разрешающей силы – это число щелей, принимающих участие в образовании главного максимума порядка m.

13.5. Разрешающая сила объектива

Дифракция света лежит в основе расчетов разрешающей способности геодезических, фотограмметрических, оптических приборов. Поэтому для студентов всех специальностей СГГА важно рассмотреть такой вопрос, как разрешающая сила объектива.

Объектив представляет собой линзу, заключенную в круглую оправу. Разрешающая сила (способность) объектива оптических приборов характеризует их способность давать раздельные изображения двух близко расположенных точек. Из-за дифракции света изображение точки представляет собой не строго точку, а кружок (светлое пятно, окруженное кольцами). Основная часть световой энергии (84%) приходится на центральное светлое пятно. Поэтому в первом приближении дифракционную картину можно считать состоящей из одного лишь светлого пятна (рис. 13.7). Расчет дифракции Фраунгофера на круглом отверстии показывает, что первый минимум отстоит от центра дифракционной картины на угловое расстояние:



,

Рис. 13.7

$$\varphi_{min} = \text{arcsin}\,1,22\frac{\lambda}{D}$$

где D – диаметр линзы;

λ – длина световой волны.

Если $D >> \lambda$,

то $\varphi_{min} \approx 1{,}22\frac{\lambda}{D}$. (13.14)

При очень малом угловом расстоянии между двумя точками их изображения, получающиеся с помощью какого-либо оптического прибора, наложатся друг на друга и не разрешаются прибором.

Наименьшее угловое расстояние между двумя точками $\delta\psi$, при котором система дает их раздельное изображение, называется пределом разрешения. Величина, обратная пределу разрешения, называется разрешающей силой прибора:

$$R \equiv \frac{1}{\delta\psi}. \qquad (13.15)$$

Найдем разрешающую силу фотоаппарата или зрительной трубы для случая, когда рассматриваются или фотографируются удаленные объекты.

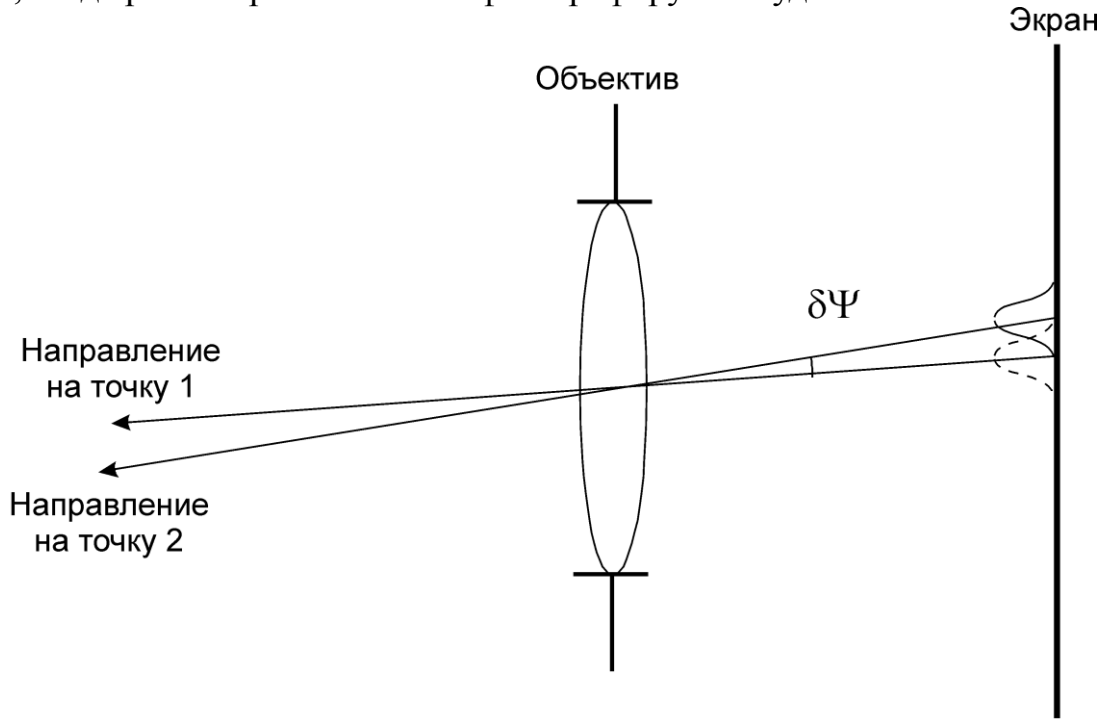


Рис. 13.8

Воспользуемся рис. 13.8, где изображено распределение интенсивности света на экране или фотопластинке.

По критерию Релея: $\delta\psi = \varphi_{min}$.

Предел разрешения с учетом (13.14) равен:

$$\delta\psi \approx 1{,}22\frac{\lambda}{D}.$$

Разрешающая сила объектива по (13.15):

$$R = \frac{D}{1{,}22\lambda}. \qquad (13.16)$$

Из формулы (13.16) следует, что разрешающая сила объектива прямо пропорциональна его апертуре (диаметру). Поэтому для повышения разрешающей силы оптические телескопы имеют большой диаметр. Разрешающая сила зависит от длины волны, на которой работает прибор. Поэтому разрешающая сила электронного микроскопа в 10^3 раз больше, чем разрешающая сила оптического микроскопа.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 13

1. Дифракционная решетка – это совокупность большого числа одинаковых щелей, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. Сумма ширины прозрачного и непрозрачного промежутков называется постоянной или периодом дифракционной решетки d.

2. Условие главных максимумов интенсивности для дифракционной решетки получается из учета интерференции от соседних щелей. Оно имеет вид (13.1):

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda, \quad m = 0, 1, 2 \ldots,$$

где m – порядок максимума; φ – угол дифракции; λ – длина волны света.

3. Учет дифракции от N щелей приводит к зависимости интенсивности главных максимумов от угла дифракции. Условие минимума для дифракционной решетки будет таким же, как условие минимума для щели (12.5):

$$b\sin\varphi = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2 \ldots,$$

где b – ширина щели.

4. Учет интерференции от всей совокупности щелей приводит к образованию дополнительных максимумов и минимумов, расположенных между главными максимумами. Дополнительные максимумы имеют пренебрежимо малую интенсивность по сравнению с главными. Условие добавочных минимумов имеет вид (13.4):

$$d \cdot \sin\varphi = \pm(k'/N)\lambda, \quad (k' = 1, 2, \ldots) \text{ – целое число, не кратное } N,$$

где N – число щелей в решетке.

5. При наблюдении дифракции в сложном (немонохроматическом) свете главные максимумы, кроме центрального, будут представлять собой спектр, который состоит из спектральных линий. Таким образом, дифракционная решетка будет представлять собой спектральный прибор.

6. Дисперсия спектрального прибора характеризует ширину спектра. Угловая дисперсия спектрального прибора равна производной от углового отклонения светового луча по длине волны (13.6):

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}.$$

Угловая дисперсия дифракционной решетки равна (13.7):

$$D = \frac{m}{d\cos\varphi}.$$

Линейная дисперсия дифракционной решетки равна произведению угловой дисперсии на фокусное расстояние собирающей линзы (13.10):

$$D_л = DF.$$

7. Разрешающая сила (способность) дифракционной решетки характеризует свойство разделять излучения, близкие по длине волны (13.11):

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}.$$

По критерию Релея, две линии в спектре считаются разрешенными, если максимум одной линии приходится на минимум другой. Вычисленная по этому критерию разрешающая сила дифракционной решетки равна (13.13):

$$R = mN.$$

8. Разрешающая сила оптического прибора равна величине, обратной наименьшему угловому расстоянию между двумя точками, при котором система дает их раздельное изображение (13.15):

$$R = \frac{1}{\delta\psi}.$$

Разрешающая сила объектива диаметром D равна (13.16):

$$R = \frac{D}{1{,}22\lambda}.$$

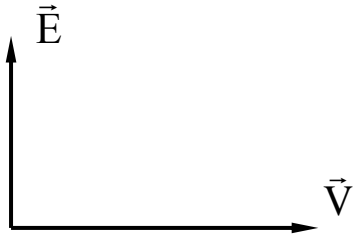
ЛЕКЦИЯ 14. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Естественный и поляризованный свет.
Принцип действия поляризатора электромагнитной волны.
Закон Малюса. Поляризация при отражении и преломлении.
Формулы Френеля. Закон Брюстера

Поляризацией света называется совокупность явлений волновой оптики, в которых проявляется поперечность электромагнитных волн. Если колебания светового вектора $\vec{E}$ упорядочены, то свет называется поляризованным.

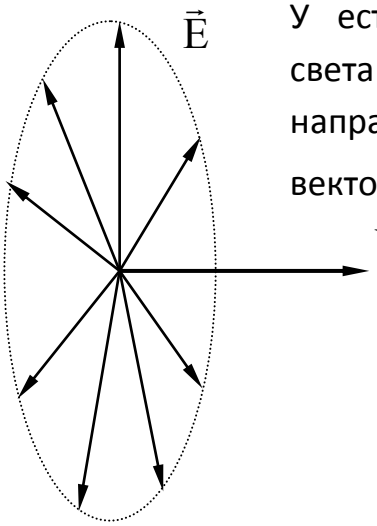
14.1. Естественный и поляризованный свет

Световая волна – это электромагнитная волна, у которой вектор всегда перпендикулярен направлению распространения. Электромагнитная волна, у которой вектор $\vec{E}$ колеблется в одной плоскости, называется плоско поляризованной (рис. 14.1). Естественный свет (см. § 2, лекция № 10) – это смесь огромного числа цугов. Каждый цуг поляризован, т. е. вектор $\vec{E}$ совершает колебания в одной плоскости, но направления векторов $\vec{E}$ разных цугов различны. Поэтому естественный свет неполяризован, у него отсутствует какое-либо упорядочение направлений колебаний вектора $\vec{E}$ (рис. 14.2).



Плоскость, в которой колеблется вектор $\vec{E}$, называется плоскостью поляризации.

Рис. 14.1



У естественного света направления векторов $\vec{E}$ у

Рис. 14.2

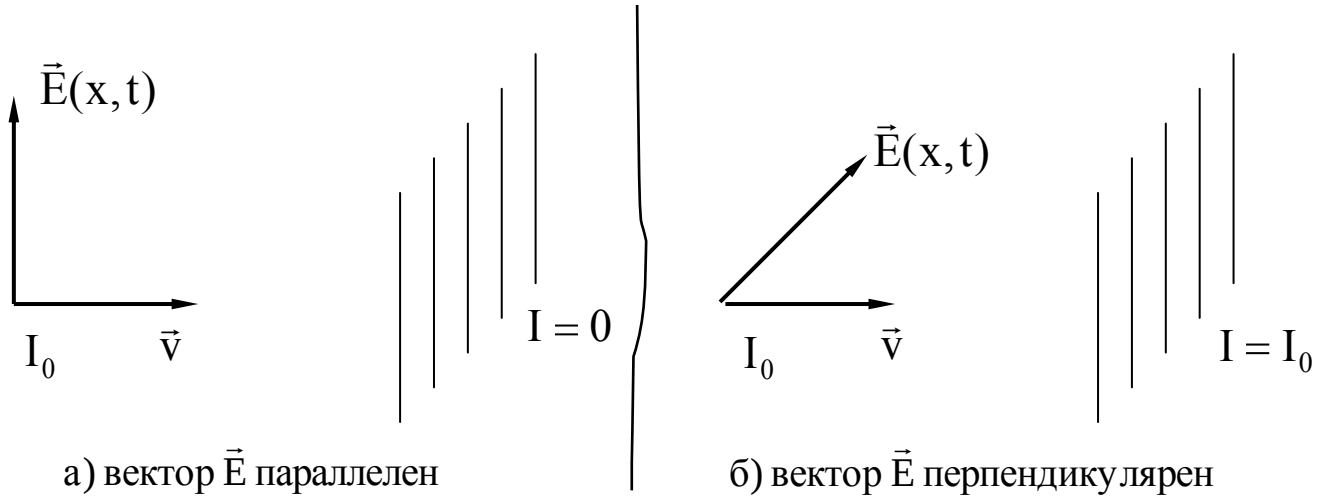
Плоско поляризованная электромагнитная волна представлена на рис. 14.1.

Упорядоченность колебаний может заключаться в том, что вектор $\vec{E}$ поворачивается вокруг луча, одновременно пульсируя по величине. В результате конец вектора описывает эллипс. Такой свет называется эллиптически поляризованным. Если конец вектора описывает окружность, то свет называется поляризованным по кругу.

14.2. Принцип действия поляризатора электромагнитной волны

Поляризатором называется устройство, создающее плоско поляризованную волну.

Пусть на пути электромагнитной волны расположена решетка из тонких, длинных, расположенных на расстоянии $a < \lambda$ друг к другу проводников (рис. 14.3).



а) вектор $\vec{E}$ параллелен проводникам

б) вектор $\vec{E}$ перпендикулярен проводникам

Рис. 14.3

Если падающая на такую решетку электромагнитная волна поляризована так, что вектор $\vec{E}$ параллелен проводникам (рис. 14.3, а), то волна через решетку не пройдет. Произойдет это по следующим причинам:

а) вектор $\vec{E}$ падающей волны будет действовать на электроны проводников с силой $\vec{F} = -e\vec{E}$ (см. ч. 2, (1.5));

б) электроны под действием этой силы начнут совершать вдоль проводников вынужденные колебания (см. лекцию № 4);

в) колеблющиеся электроны будут излучать электромагнитные волны (см. лекцию № 7) такой же частоты, что и падающая волна, и такой же амплитуды, но фаза будет отличаться от падающей на π;

г) складываясь, эти две волны за решеткой погасят друг друга (см. (10.3)), а перед решеткой возникнет отраженная волна.

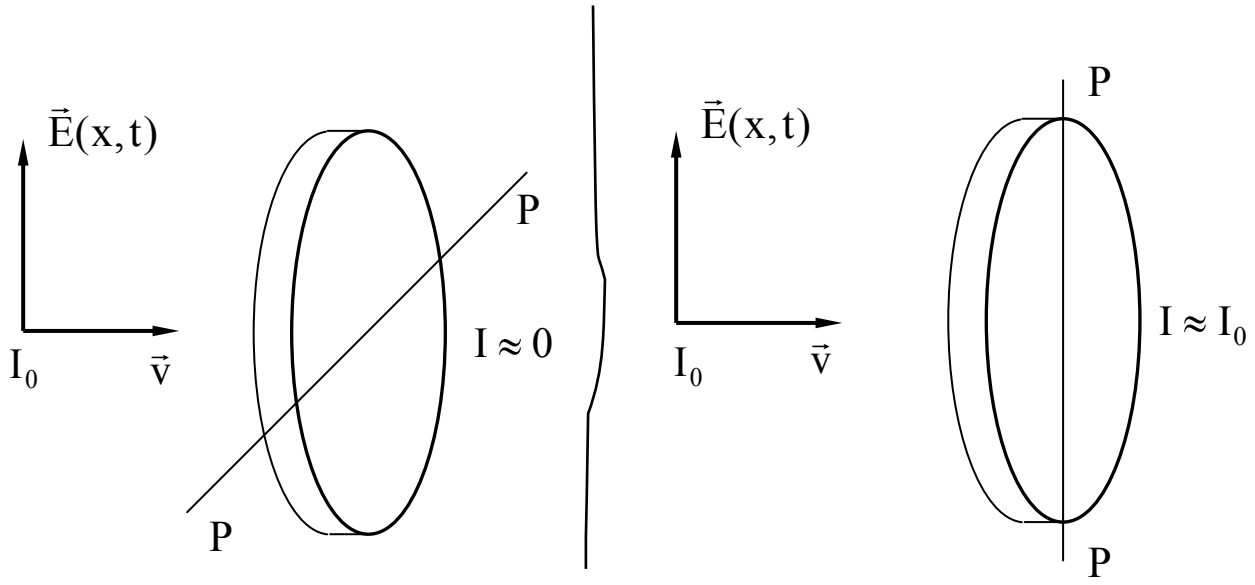
Если же падающая волна поляризована так, что вектор $\vec{E}$ перпендикулярен проводникам, то заметных колебаний электронов в этом направлении возникнуть не может, амплитуда вторичной волны будет ничтожна, и первичная волна пройдет через решетку, не изменив свою интенсивность.

Если падающая волна поляризована так, что вектор $\vec{E}$, располагающийся в плоскости zy, ориентирован под произвольным углом к проводникам (тогда $\vec{E} = \vec{E}_z + \vec{E}_y$), то сквозь решетку пройдет только составляющая $\vec{E}_y$, а $\vec{E}_z$ задержится. Следовательно, если на решетку падает естественная волна,

которая состоит из многих цугов, то через решетку пройдет только составляющая $\vec{E}_y$ от каждого цуга. Таким образом, данное устройство является поляризатором электромагнитной волны радиодиапазона.

Для световых волн поляризатором может служить поляроид. Поляроидом называют оптический поляризатор в виде тонкой пленки.

Длина волны света очень мала ($\lambda = (0{,}4 - 0{,}76)\cdot 10^{-6}$ м) и поэтому изготовить решетку с $a < \lambda$ не так просто. Но роль решетки могут играть очень длинные углеводородные молекулы, растянутые в определенном направлении. Электроны, входящие в состав молекул, могут перемещаться вдоль таких молекул, как вдоль проводников, и не могут – поперек. Таким образом, световая волна с вектором $\vec{E}$, направленным вдоль молекул поляроида, не пройдет через него. Волна, с вектором $\vec{E}$ поперек молекул, пройдет почти без изменения интенсивности. Такое направление в поляроиде называется *осью пропускания PP*. Она направлена перпендикулярно длинным осям молекул (рис. 14.4).



а) $\vec{E}$ перпендикулярен PP б) $\vec{E}$ параллелен PP

Рис. 14.4

14.3. Закон Малюса

Закон Малюса устанавливает связь между интенсивностями света, прошедшего через два последовательных поляризатора.

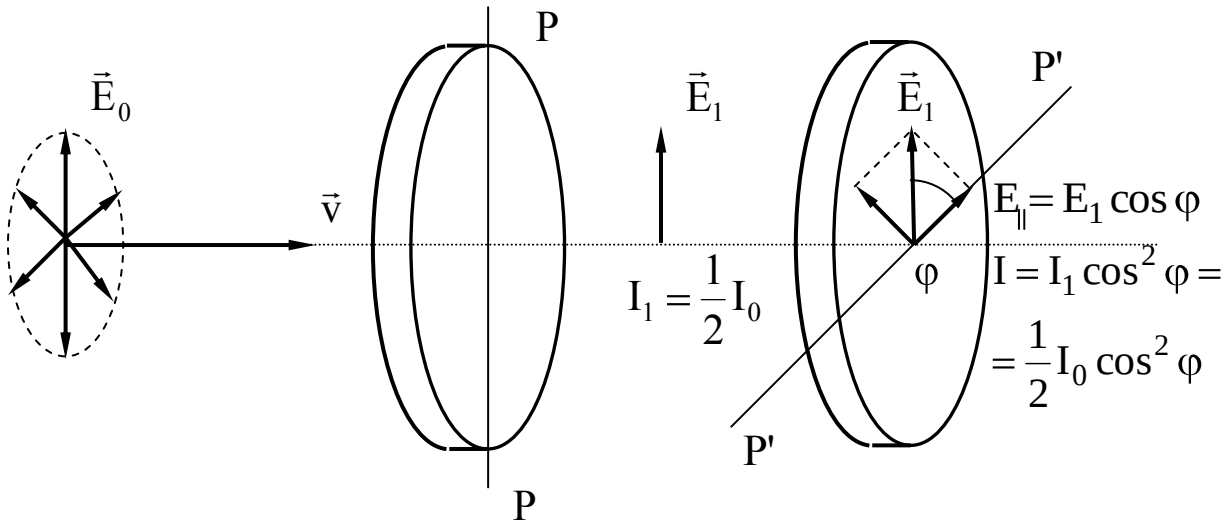


Рис. 14.5

Поляризаторы предполагаются идеальными, т. е. после прохождения через такой поляризатор свет становится плоскополяризованным.

Поставим на пути естественного света два одинаковых поляроида, оси пропускания которых развернуты друг относительно друга на угол φ (рис. 14.5).

Вектор $\vec{E}_1$ любого цуга световой волны после первого поляроида будет параллелен PP $(E_1 = E_0 \cos\varphi$, где $\varphi -$ любой угол между плоскостью колебаний вектора $\vec{E}$ и осью поляроида PP). Этот поляроид называют *поляризатором*, так как после него естественный свет стал плоскополяризованным.

Второй поляроид служит для анализа характера поляризации света и называется анализатором.

После второго поляроида останется лишь вектор $\vec{E}_{\parallel}$, параллельный $P'P'$ его оси пропускания:

$$E_{\parallel} = E_1 \cdot \cos\varphi, \quad \text{где} \quad \cos\varphi = \text{const}.$$

Так как интенсивность света пропорциональна среднему значению квадрата напряженности электрического поля (7.9):

$$I \sim < E^2 >,$$

то после первого поляроида:

$$I_1 = I_0 < \cos^2\varphi > = \frac{1}{2} I_0, \quad \text{так как} \ < \cos^2\varphi > = \frac{1}{2}.$$

После второго поляроида интенсивность будет

$$\boxed{I = I_1 \cdot \cos^2\varphi}, \qquad (14.1)$$

где I_1 – интенсивность перед вторым поляроидом. Полученное соотношение между интенсивностями носит название закона *Малюса*.

Закон Малюса читается так: интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор, равна интенсивности света, прошедшего через поляризатор, умноженной на квадрат косинуса угла между плоскостями пропускания колебаний поляризатора и анализатора.

Если I_1 выразить через I_0, то закон Малюса примет вид:

$$\boxed{I = \tfrac{1}{2} I_0 \cdot \cos^2 \varphi} . \qquad (14.2)$$

Если $\varphi = \pi/2$, то $I = 0$ и поляризаторы называются скрещенными.

Закон Малюса строго выполняется лишь для идеальных поляроидов: поляризатора и анализатора.

Если поляризатор частично пропускает свет с вектором $\vec{E}$, перпендикулярным оси пропускания, то после него свет будет *частично поляризован*.

В этом случае идеальный анализатор при PP, параллельной P′P′, пропустит свет интенсивностью I_{max}, а при PP, перпендикулярной P′P′, – свет интенсивностью I_{min}.

Степенью поляризации частичного поляризованного света называется величина

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} . \qquad (14.3)$$

При идеальном поляризаторе $I_{min} = 0$ и $P = 1$, свет плоскополяризован.

При естественном свете $I_{max} = I_{min}$ и $P = 0$, свет неполяризован.

14.4. Поляризация при отражении и преломлении. Формулы Френеля

Если на границу раздела двух изотропных сред падает под углом, отличным от нуля, естественный свет, то отраженная и преломленная световая волна будут частично поляризованы.

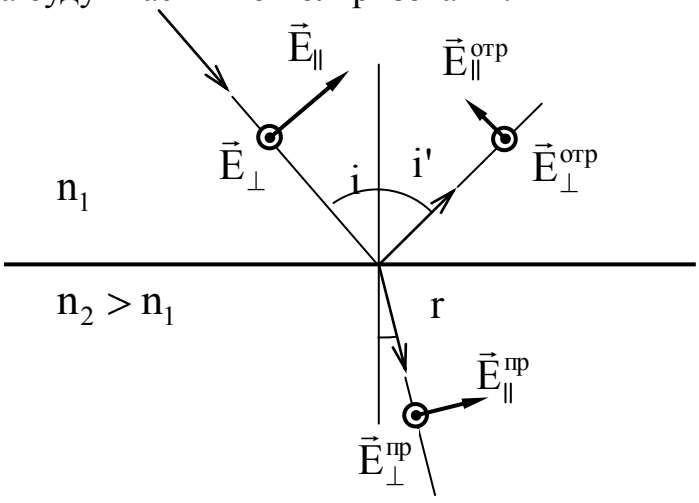


Рис. 14.6

На рис. 14.6 изображены и помечены соответствующими значками ($\perp$ и $\parallel$) составляющие векторов напряженности электрического поля падающей волны (

$\vec{E}_\perp$ и $\vec{E}_{II}$), отраженной волны ($\vec{E}_\perp^{отр}$ и $\vec{E}_{II}^{отр}$), преломленной волны ($\vec{E}_\perp^{пр}$ и $\vec{E}_{II}^{отр}$).

Формулы, связывающие компоненты векторов $\vec{E}$, были впервые получены О. Френелем и носят название *формул Френеля* (14.4):

$$E_\perp^{отр} = -E_\perp \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \qquad E_\parallel^{отр} = E_\parallel \frac{tg(i-r)}{tg(i+r)},$$

$$E_\perp^{пр} = E_\perp \frac{2\cos i \cdot \sin r}{\sin(i+r)}, \qquad E_\parallel^{пр} = E_\parallel \frac{2\cos i \cdot \sin r}{\sin(i+r)\cdot\cos(i-r)}. \quad (14.4)$$

Эти формулы и позволяют рассчитать интенсивность (7.9) и степень поляризации (14.3) отраженной и преломленной волны для произвольного угла падения.

14.5. Закон Брюстера

Закон Брюстера определяет условие, при котором отраженный луч полностью поляризован.

Пусть угол падения i таков, что отраженный луч перпендикулярен преломленному, т. е. $r = \pi/2 - i_{Бр}$. Это условие называют условием Брюстера (рис. 14.7), а угол – углом Брюстера – $i_{Бр}$. Используя закон преломления (8.8)

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1},$$

получим формулу, определяющую угол Брюстера:

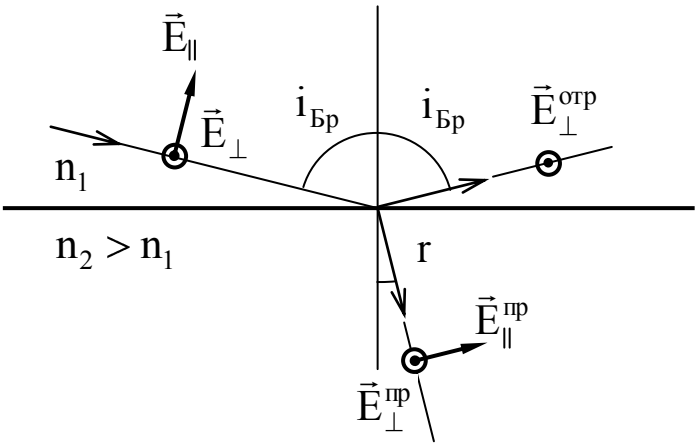


Рис. 14.7.

$$\boxed{tg\, i_{Бр} = \frac{n_2}{n_1}}. \quad (14.5)$$

При выполнении условия Брюстера $i + r = \pi/2$, тогда из формулы Френеля (14.4) для отраженного луча получим:

$$E_\parallel^{отр} = E_\parallel \frac{tg(i-r)}{tg(i+r)} = E_\parallel \frac{tg(i-r)}{tg(\pi/2)} = 0, \quad E_\perp^{отр} = -E_\perp \sin(i-r).$$

Следовательно, в этом случае в отраженном луче будет содержаться только перпендикулярная составляющая вектора $\vec{E}$.

Таким образом, *если тангенс угла падения равен относительному показателю преломления, то отраженный свет будет полностью поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения.*

Это утверждение носит название *закона Брюстера.*

Закон Брюстера имеет простое объяснение. Отраженная световая волна появляется за счет излучения электронов среды, совершающих вынужденные колебания под действием вектора $\vec{E}$ преломленной волны. Это излучение имеет направленный характер (см. рис. 7.3): его интенсивность равна нулю в направлении колебаний зарядов. Направим под углом Брюстера на границу раздела плоскополяризованную волну с вектором $\vec{E}$, лежащим в плоскости падения. На рис. 14.8 изображена диаграмма направленности излучения, возбужденного вектором $\vec{E}^{пр}$. Нулевой минимум этой диаграммы при выполнении условия Брюстера совпадает по направлению с отраженным лучом.

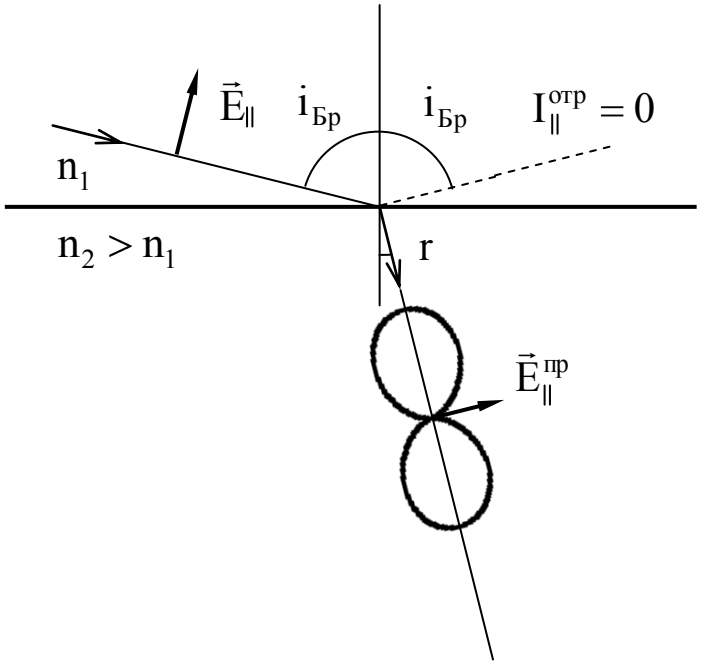


Рис. 14.8

Если вектор $\vec{E}$ падающей волны направить перпендикулярно плоскости падения (рис. 14.9), то направление колебаний электронов будет перпендикулярно плоскости падения. Тогда диаграмма направленности будет развернута своим максимумом в направлении отраженного луча (рис. 14.9). Напомним, что пространственная форма диаграммы похожа на бублик без дырки (см. рис. 7.3).

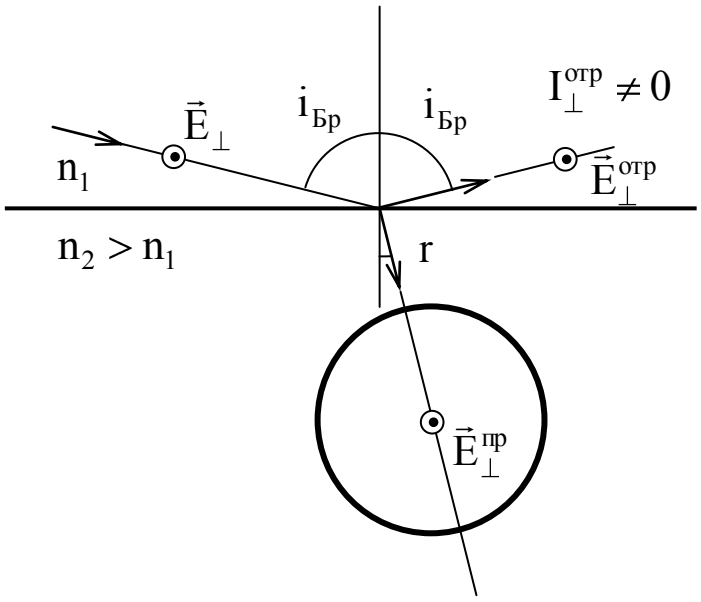


Рис. 14.9

На использовании закона Брюстера (14.5) основан метод борьбы с бликами и усиленной засветкой, возникающей при аэрофотосъемке морских мелководий. Известно, что свет, отраженный от водной поверхности, частично поляризован. Степень поляризации зависит от угла падения. Если установить с достаточной точностью ось поляроида, то можно погасить солнечный блик.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 14

1. Поляризация наблюдается только для поперечных волн. Световые волны, как и все электромагнитные волны, поперечны. Поляризация света – это создание световых волн с упорядоченными колебаниями светового вектора $\vec{E}$.

2. Плоскополяризованный свет – это такой свет, у которого вектор $\vec{E}$ колеблется в одной плоскости. Эта плоскость называется плоскостью поляризации.

3. Существуют устройства, называемые поляризаторами, после прохождения через которые естественный свет становится почти плоско-поляризованным. Направление вектора $\vec{E}_{\perp}$ в электромагнитной волне, проходящей через поляризатор, называется осью пропускания.

4. Если свет проходит через два последовательных идеальных поляризатора, то интенсивность света I вычисляется по закону Малюса (14.1): $I = I_1 \cos^2 \varphi$, где I_1 – интенсивность света после прохождения первого поляризатора; φ – угол между осями пропускания колебаний поляризаторов.

5. В естественном свете все направления колебаний светового вектора $\vec{E}$ равновероятны. Свет, в котором есть преимущественное направление колебаний светового вектора $\vec{E}$, называется частично поляризованным.

6. Если на границу раздела двух изотропных сред падает под произвольным углом естественный свет, то отраженная и преломленная волна будут частично поляризованы. Отраженный луч будет преимущественно поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, а преломленный – в плоскости, параллельной плоскости падения.

7. Существует угол падения, называемый углом Брюстера, при котором отраженный луч полностью поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Тангенс угла Брюстера равен относительному показателю преломления (14.5):

$$\operatorname{tg} i_{Бр} = \frac{n_2}{n_1}.$$

ЛЕКЦИЯ 15. ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ

Свойства двойного лучепреломления.
Модель двоякопреломляющего кристалла.
Интерференция поляризованных лучей.
Искусственное двойное лучепреломление

15.1. Свойства двойного лучепреломления

Двойное лучепреломление наблюдается в анизотропных средах, т. е. в средах, физические свойства которых различны по различным направлениям. Примерами анизотропных кристаллов являются кварц, исландский шпат и т. д. В анизотропных средах показатель преломления, а, следовательно, и скорость света зависят от направления. В результате преломления естественного света в таких средах наблюдаются не один, а два луча, которые получили название – обыкновенный и необыкновенный. Исследование двоякопреломляющих кристаллов выявило следующие свойства.

1. Двойное лучепреломление наблюдается не всегда. Существует направление в кристалле, распространяясь вдоль которого свет не испытывает двойного лучепреломления. Это направление называется оптической осью кристалла. (Любая прямая, параллельная данной, тоже будет оптической осью.)

2. Если свет падает под некоторым углом к оптической оси, то в кристалле после преломления появляются два луча (рис. 15.1).

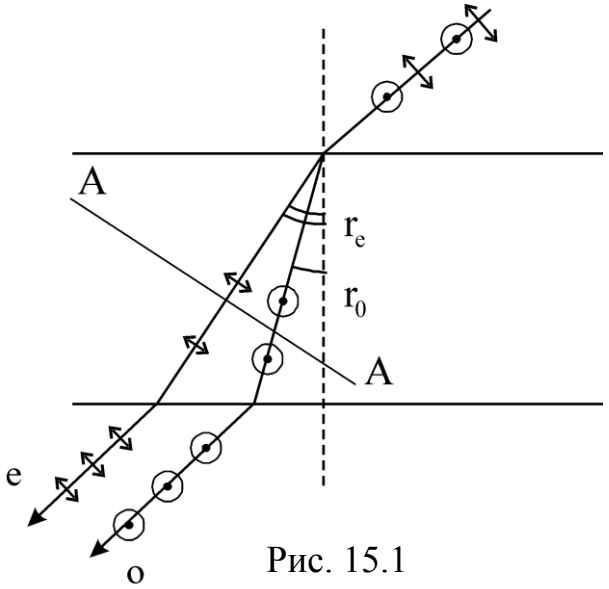


Рис. 15.1

AA – направление оптической оси

o – обыкновенный луч

e – необыкновенный луч

3. Обыкновенный и необыкновенный лучи, вообще говоря, лежат в разных оптических плоскостях. Обыкновенный луч лежит в плоскости падения, т. е. плоскости, проходящей через падающий луч и нормаль к границе кристалла. Необыкновенный луч лежит в плоскости главного сечения, т. е. плоскости, проходящей через падающий луч и направление оптической оси.

4. Если изменить угол падения i, то углы преломления r_0 и r_e тоже меняются. Для лучей, падающих на кристалл из воздуха или вакуума $(n_1 = 1)$, имеют место следующие соотношения (см. (8.8)):

Для обыкновенного луча: $$\frac{\sin i}{\sin r_0} = n_o = \text{const}. \qquad (15.1)$$

Для необыкновенного луча: $$\frac{\sin i}{\sin r_e} = n_e \neq \text{const}. \qquad (15.2)$$

Показатель преломления необыкновенного луча зависит от направления распространения световой волны.

5. Обыкновенный и необыкновенный лучи полностью поляризованы. Обыкновенный луч (o) поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости главного сечения (на рис. 15.1 он изображен точками). Необыкновенный луч (e) поляризован в плоскости, параллельной плоскости главного сечения (на рис. 15.1 он изображен черточками). Падающий свет естественный (он изображен одинаковым числом черточек и точек).

В следующем параграфе рассмотрена модель двоякопреломляющего кристалла, с помощью которой объясняются эти свойства.

15.2. Двойное лучепреломление.

Модель двоякопреломляющего кристалла

Как уже упоминалось в § 3 лекции № 8, закон преломления (8.3) может не выполняться в анизотропных средах. Действительно, этот закон утверждает, что:

$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$, где n_1 и n_2 – постоянные для данных веществ величины.

Для воздуха или вакуума $n_1 = 1$, тогда $n_2 = n$.

Для прозрачных сред показатель преломления n зависит от ε – диэлектрической проницаемости среды:

$n = \sqrt{\varepsilon}$, (см. (8.2)), где $\varepsilon = E_0/E$,

где E_0 – напряженность электрического поля в вакууме, а E – в веществе. Поле в веществе $E < E_0$, так как диэлектрик поляризуется и создает поле E', направленное навстречу E_0 $(E = E_0 - E')$. Если молекула несимметрична, то E' зависит от ориентации молекул относительно вектора напряженности электрического поля. Следовательно, показатель преломления n будет зависеть от направления вектора $\vec{E}$ световой волны.

Рассмотрим модель кристаллического вещества, в котором «молекулы» в форме эллипсоидов вращения хорошо поляризуются вдоль одной оси. Назовем эту ось оптической осью «кристалла». В направлениях, перпендикулярных этой оси (рис. 15.2), «молекулы» поляризуются хуже.

Направим на этот «кристалл» перпендикулярно оптической оси два плоско поляризованных луча света. Пусть у одного луча вектор $\vec{E}_1$ перпендикулярен длинной оси «молекул» – оптической оси «кристалла», а у другого $\vec{E}_2$ параллелен оптической оси. Диэлектрическая проницаемость и показатели преломления для этих лучей будут разные:

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1} \quad \text{и} \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}, \quad \text{причем} \quad n_1 < n_2.$$

После прохождения кристалла толщиной d лучи 1 и 2 приобретут оптическую разность хода:

$$\Delta = d(n_2 - n_1). \qquad (15.3)$$

При изменении плоскости поляризации света показатель преломления будет изменяться от n_1 до n_2, т. е. $n \neq \text{const}$!

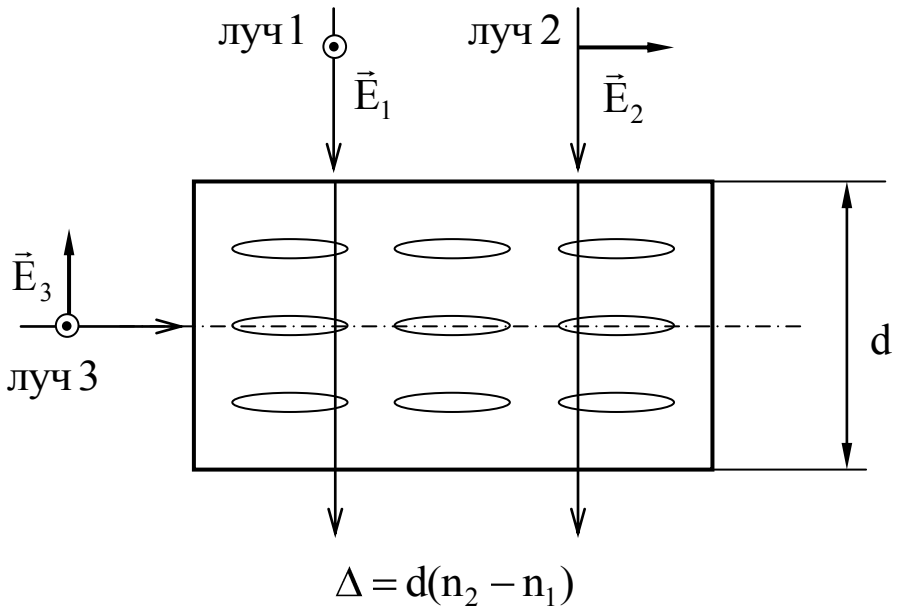


Рис. 15.2

Направим теперь на наш «кристалл» плоскополяризованный свет, распространяющийся вдоль оптической оси. В силу симметрии «молекул» в плоскости, перпендикулярной оптической оси, показатель преломления теперь не будет зависеть от направления вектора $\vec{E}$. В данной ситуации при любом своем направлении вектор $\vec{E}$ остается перпендикулярным длинной оси молекул (оптической оси «кристалла»), следовательно, $n = \text{const} = n_1$.

Направим на наш кристалл под произвольным углом к оптической оси световую волну с вектором $\vec{E}$, лежащим в главном сечении (рис. 15.3).

Пусть верхняя грань кристалла будет параллельна оптической оси. При изменении угла падения i угол преломления r будет изменяться, но отношение

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n(r) \neq \text{const}.$$

Это и есть нарушение закона преломления. Поэтому такой луч называют необыкновенным, для него показатель преломления не является постоянной

величиной, он зависит от направления распространения луча (так как с ним связана, в этом случае, ориентация вектора $\vec{E}$ относительно оптической оси кристалла). Величина показателя преломления обычно обозначается n_e (у нас n_e обозначено как n_2).

Если вектор $\vec{E}$ световой волны направлен перпендикулярно главному сечению (см. рис. 15.2, луч 1), то показатель преломления не будет зависеть от угла падения, т. е. закон преломления будет выполняться. Такой луч называют *обыкновенным*, а показатель преломления для этого луча обозначают обычно n_0 (у нас n_0 обозначено как n_1).

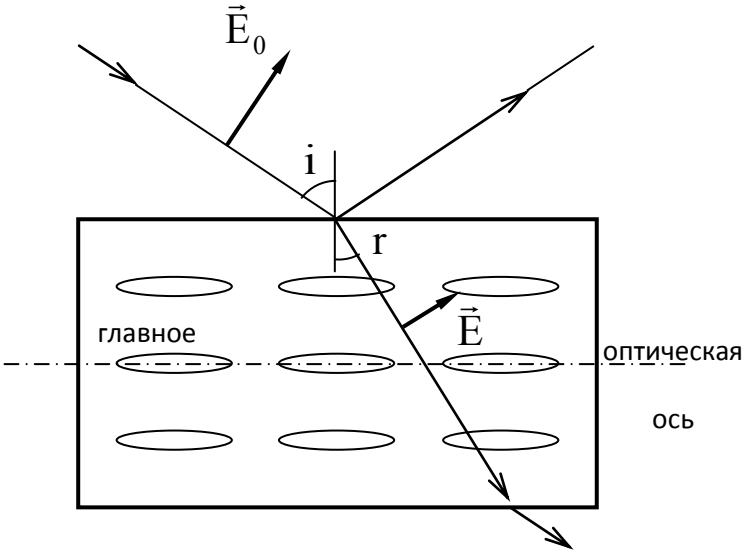


Рис. 15.3

Из рассмотренной модели можно сделать следующие выводы. Световые волны, у которых вектор $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости главного сечения, распространяются как обыкновенный луч, а волны с вектором $\vec{E}$, параллельным плоскости главного сечения, распространяются как необыкновенный луч.

В кристалле есть направление, вдоль которого (см. рис. 15.2, луч 3) распространяется только обыкновенный луч. Это направление называется оптической осью кристалла. В любом другом направлении падающий естественный луч разбивается на два луча, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Разобранная модель объясняет двойное лучепреломление в *одноосных* кристаллах. В природе существуют и *двуосные* кристаллы, у которых оба преломленных луча необыкновенные.

Двойное лучепреломление используют для получения плоскополяризованного света. Для этого надо избавиться от одного из лучей.

15.3. Интерференция поляризованных лучей

Интерференция поляризованных лучей (обыкновенного и необыкновенного) наблюдается при выполнении двух условий:

1) эти лучи должны быть когерентны;

2) колебания этих лучей, которые поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях, должны быть «сведены» в одну плоскость.

Принципиальная схема опыта, с помощью которого можно наблюдать интерференцию поляризованного света, изображена на рис. 15.4.

На рис. 15.4 введены следующие обозначения: S – источник света, П – поляризатор, А – анализатор, ДПП – двоякопреломляющая пластинка толщиной d, причем ОО – оптическая ось кристалла, Э – экран (или глаз наблюдателя).

Стрелками показаны амплитуды колебаний светового вектора $\vec{E}$ (вектор $\vec{E}$ везде перпендикулярен лучу).

Двоякопреломляющая пластинка (ДПП) вырезана из кристалла двоякопреломляющего вещества так, что оптическая ось ОО лежит в плоскости пластинки. Установим эту пластинку так, чтобы угол φ между плоскостью пропукания поляризатора ПП и оптической осью ОО двоякопреломляющей пластинки был равен 45°.

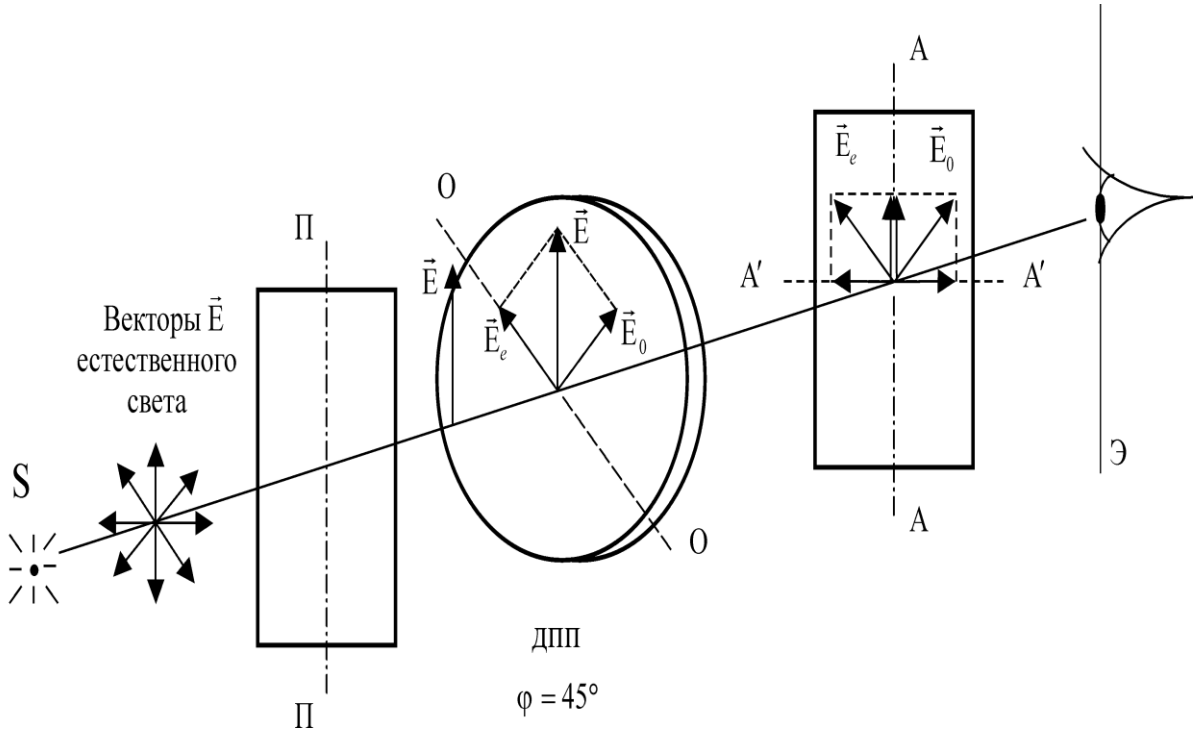


Рис. 15.4

Источник света S испускает неполяризованный свет, векторы $\vec{E}$ которого заполняют плоскость, перпендикулярную лучу света. После поляризатора ПП вектор $\vec{E}$ световой волны колеблется только в плоскости ПП. Угол φ между этим вектором $\vec{E}$ и оптической осью ОО на рис. 15.4 равен 45°, это значит, что проекции вектора $\vec{E}$ на направление ОО (вектор $\vec{E}_e$ необыкновенного луча) и на перпендикуляр к ОО (вектор $\vec{E}_o$ необыкновенного луча) будут одинаковы. После прохождения двоякопреломляющей пластинки между необыкновенным и

обыкновенным лучами образуется, в соответствии с (15.3), оптическая разность хода:

$$\Delta = d(n_e - n_o),$$

здесь мы учли, что $n_2 = n_e$, а $n_1 = n_0$.

Обыкновенный и необыкновенный лучи будут когерентны, так как получены разделением каждого цуга плоскополяризованной волны между обыкновенным и необыкновенным лучами на две равные части. Но колебания векторов $\vec{E}_e$ и $\vec{E}_o$ (необыкновенного и обыкновенного лучей) лежат, как видно из рис. 15.4, во взаимно перпендикулярных плоскостях, поэтому они не могут погасить друг друга ни при какой разности фаз, иными словами, *такие лучи не могут интерферировать*.

Анализатор, стоящий за двоякопреломляющей пластинкой, *пропускает* только те составляющие векторов $\vec{E}$, которые лежат в плоскости пропускания анализатора. Иногда об этом не совсем точно говорят так – «анализатор сводит колебания векторов $\vec{E}_e$ и $\vec{E}_o$ в одну плоскость». Если эта плоскость (АА на рис. 15.4) совпадает с плоскостью пропускания поляризатора ПП, то пропущенные составляющие векторов $\vec{E}_e$ и $\vec{E}_o$ будут одинаково направлены. Если же анализатор развернуть на 90° ($A'A'$ на рис. 15.4), то пропущенные анализатором составляющие векторов $\vec{E}_e$ и $\vec{E}_o$ будут иметь противоположное направление. Это означает, что возникает дополнительная разность фаз между необыкновенным и обыкновенным лучами, равная π.

Пусть при параллельной ориентации ПП и АА выполняется условие максимума на оптическую разность хода. У нас, в соответствии с (10.6) и (15.3), оно запишется так:

$$d(n_e - n_o) = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3 \ldots \qquad (15.4)$$

Тогда при перпендикулярной ориентации ПП и $A'A'$ оптическая разность хода изменится на $\lambda/2$ за счет дополнительной разности фаз π. Следовательно, при развороте анализатора на 90° условие максимума, выполнявшееся для определенной длины волны λ при параллельных ПП и АА, перейдет в условие минимума. Если источник S на рис. 15.4 испускает *белый свет*, то выполнение условия максимума для какой-то определенной длины волны λ_1 приводит к появлению соответствующей окраски интерференционной картины. Поворот анализатора на 90° заменяет эту окраску на другую, ее называют *дополнительной.* При этом условие максимума выполняется для света с длиной волны λ_2:

$$\Delta = d(n_e - n_o) + \frac{\lambda_2}{2} = \pm m\lambda_2, \quad m = 1, 2, 3 \ldots \qquad (15.4a)$$

Если толщина двоякопреломляющей пластинки в разных местах разная, то местам одинаковой толщины будет соответствовать одинаковая окраска.

При вращении анализатора соотношение между интенсивностями обыкновенного и необыкновенного лучей меняется, что приводит к непрерывному изменению окраски.

15.4. Искусственное двойное лучепреломление

В прозрачных изотропных телах может возникнуть двойное лучепреломление под влиянием внешних воздействий. Рассмотрим два примера.

1. Искусственная анизотропия, вызванная механическими усилиями.

Если в однородном изотропном теле в одних направлениях будут действовать сжимающие усилия, а в других – растягивающие, то условия распространения света по разным направлениям окажутся различными. Возникнет двойное лучепреломление. Разность показателей преломления обыкновенного
и необыкновенного лучей пропорциональна механическому напряжению:

$$n_e - n_0 = k\sigma,$$

где σ – напряжение, т. е. сила, действующая на единицу площади; k – коэффициент пропорциональности.

Если слой деформируемого вещества имеет толщину d, то между обыкновенным и необыкновенным лучами возникает оптическая разность хода. Условие максимума при интерференции (10.6) с учетом (15.3) и предыдущей формулы имеет вид:

$$\Delta = d(n_e - n_0) = k\sigma d = m\lambda.$$

Из этого условия следует, что линиям одинаковых напряжений соответствует одинаковая окраска. На этом основан оптический метод исследования напряжений. Изготовленную из прозрачного изотропного материала (например, плексигласа) модель детали помещают между скрещенными поляризаторами. Пока модель не подвергнута напряжению, установка свет не пропускает
(см. закон Малюса (14.2)). Если модель подвергается воздействию нагрузок, то возникает интерференционная картина. Наблюдаемая в проходящем белом свете цветная окраска позволяет судить о характере распределения напряжений. В этом заключается *метод фотоупругости*.

2. Искусственная анизотропия, вызванная действием электрического поля (эффект Керра).

Дж. Керр (1875 г.) показал, что если помещать изотропные диэлектрики (как твердые, так и жидкие) в электрическое поле, то эти вещества становятся анизотропными. Причем, направление электрического поля является оптической осью. Схема установки для изучения эффекта Керра приведена на рис. 15.5.

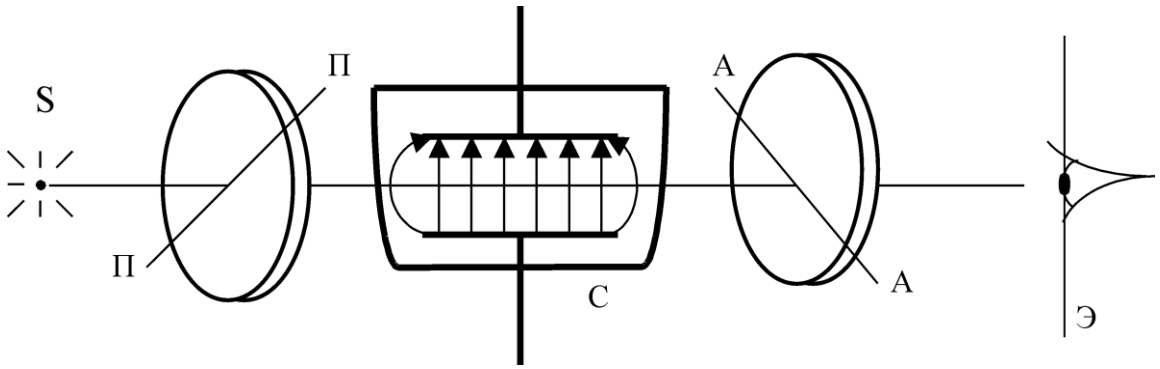


Рис. 15.5

На рис. 15.5 приняты следующие обозначения: S – источник света; П – поляризатор; А – анализатор; Э – экран (или глаз наблюдателя); С – ячейка Керра.

Ячейка Керра представляет собой сосуд с прозрачными плоскопараллельными стенками, заполненный жидкостью (в технике – нитробензолом). В жидкость введены пластины конденсатора. Поляризатор и анализатор ставят в скрещенное положение. В отсутствие электрического поля жидкость изотропна и поле зрения темное. Если приложить электрическое поле к обкладкам конденсатора, то жидкость приобретает свойства одноосного кристалла с оптической осью, ориентированной вдоль поля. Произойдет интерференция обыкновенного и необыкновенного лучей, и поле просветлеет.

Оказалось, что разность $(n_e - n_0)$ пропорциональна длине волны и квадрату напряженности электрического поля:

$$(n_e - n_0) = B\lambda E^2,$$

где B – постоянная величина. Величина $2\pi B$ называется постоянной Керра.

Замечательной особенностью эффекта Керра является его практическая безынерционность. Анизотропия под действием электрического поля устанавливается за время, не превышающее 10^{-9} с. Поэтому ячейки Керра применяют там, где необходимо быстрое модулирование интенсивности света (например, скоростная киносъемка, геодезические дальномерные устройства, в оптической локации, оптической телефонии).

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 15

1. Двойное лучепреломление наблюдается только в анизотропных средах. Оно заключается в том, что при произвольном угле падения падающий луч разбивается на два луча: обыкновенный и необыкновенный.

2. Оптическая ось – это направление, в котором нет двойного лучепреломления. Плоскость, проходящая через оптическую ось и падающий луч, называется плоскостью главного сечения.

3. Обыкновенный (o) и необыкновенный (e) лучи поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Обыкновенный луч поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости главного сечения, а необыкновенный – в плоскости, параллельной плоскости главного сечения.

4. Показатель преломления обыкновенного луча n_0 есть величина постоянная и не зависит от направления распространения. Показатель преломления необыкновенного луча n_e не постоянен, он зависит от направления распространения луча.

5. Объяснить явление двойного лучепреломления можно несимметричностью молекул и различной их поляризуемостью в зависимости от ориентации светового вектора E в падающей световой волне. Вследствие этого диэлектрическая проницаемость ε и показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ зависят от направления.

6. Если свет падает на двоякопреломляющий кристалл перпендикулярно оптической оси, то видимого двойного лучепреломления нет, но фактически оно есть. Если поместить такой кристалл между двумя поляроидами, то можно наблюдать интерференцию поляризованных лучей.

7. Изотропное вещество может стать анизотропным под действием механических усилий. Если деформируемое вещество поместить между двумя скрещенными поляроидами, то можно наблюдать распределение напряжений. На этом основании основан метод фотоупругости.

8. Искусственную анизотропию можно создать также под действием электрического поля. На этом основан эффект Керра, который находит применение в создании модуляторов света.

ЛЕКЦИЯ 16. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ

Дисперсия света. Поглощение света.
Закон Бугера. Рассеяние света

При распространении света в веществе возникают следующие явления. Во-первых, изменяется скорость распространения, причем скорость распространения зависит от длины световой волны. Это явление называется **дисперсией**.

Во-вторых, часть энергии световой волны теряется. Это явление называется **поглощением,** или **абсорбцией** света.

Наконец, при распространении света в оптически неоднородной среде возникает **рассеяние** света на пространственных неоднородностях среды.

16.1. Дисперсия света

Дисперсией света *называют зависимость показателя преломления* n *от длины волны (или от частоты)*, т. е. $n = n(\lambda)$. Так как длина волны λ связана с частотой ν ($\nu = c/\lambda$), то в равной мере можно говорить о зависимости $n = n(\nu)$.

У прозрачных веществ примерный вид зависимости, полученной как обобщение опытных фактов, изображен на рис. 16.1.

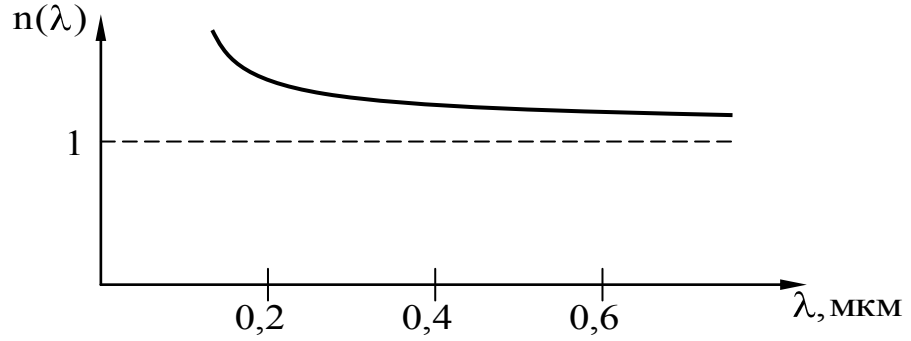


Рис. 16.1

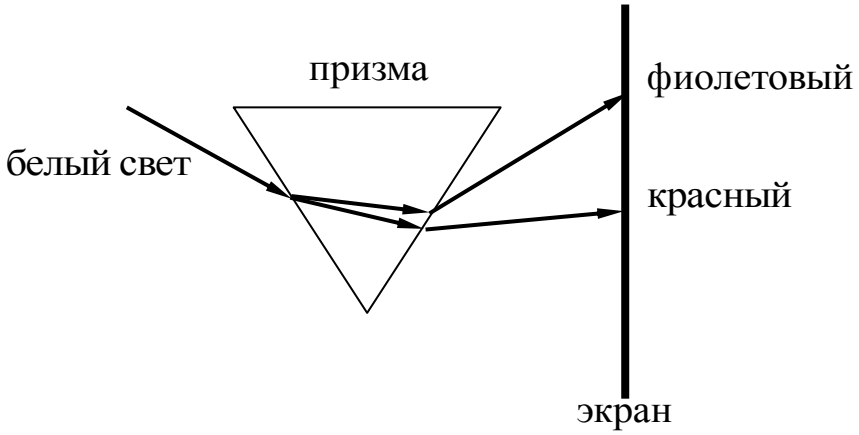


Рис. 16.2

Такая зависимость $n(\lambda)$, когда n уменьшается с ростом λ называется *нормальной дисперсией* ($dn/d\lambda < 0$). При прохождении белого света через призму свет разлагается в дисперсионный (призматический) спектр. Это явление впервые наблюдал И.

Ньютон (1672 г.). Схема его опыта изображена на рис. 16.2.

Дисперсия света может быть объяснена на основе электромаг-нитной теории света и электронной теории вещества. Согласно этой теории, световая, т. е. электромагнитная волна, приводит в колебательное движение электроны, входящие в состав атомов. Электроны под действием световой волны совершают вынужденные колебания, амплитуда которых зависит от частоты вынуждающей силы (см. формулу (4.9)). При этом излучаются вторичные волны. Эти вторичные волны имеют ту же частоту, что и частота падающей волны. В однородной среде результат интерференции всех вторичных волн между собой и с падающей на вещество волной отличен от нуля только в одном направлении – в направлении распространения преломленной волны (см. лекию № 8). Скорость распространения результирующей волны в среде становится меньше скорости света в вакууме, так объясняется возникновение показателя преломления. Скорость распространения волн в веществе определяет показатель преломления: $n = c/v$ (8.1). Эта скорость также зависит от частоты вынужденных колебаний, т. е. от частоты падающего на вещество света (или длины волны (5.2)). Поэтому дисперсия может определяться как явление зависимости скорости распространения световой волны в веществе от ее частоты (или длины волны).

Подробно классическая электронная теория дисперсии рассмотрена в следующей лекции.

16.2. Поглощение света. Закон Бугера

При прохождении света через вещество интенсивность убывает, т. е. происходит поглощение света. Как было выяснено в предыдущем параграфе, световая волна, проходя через вещество, возбуждает колебания электронов. Ускоренно движущиеся электроны излучают электромагнитные волны (см. § 1 лекции № 7). Причина *поглощения света – переход части энергии световой волны в тепловую энергию*. Атомы вещества, внутри которых происходят вызванные световой волной колебания электронов, участвуют в хаотическом тепловом движении и сталкиваются друг с другом. При каждом столкновении энергия колебательного движения электронов переходит в энергию теплового движения атомов – происходит *поглощение* света.

Как показывает опыт, интенсивность света при прохождении через вещество убывает по экспоненциальному закону:

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x}. \qquad (16.1)$$

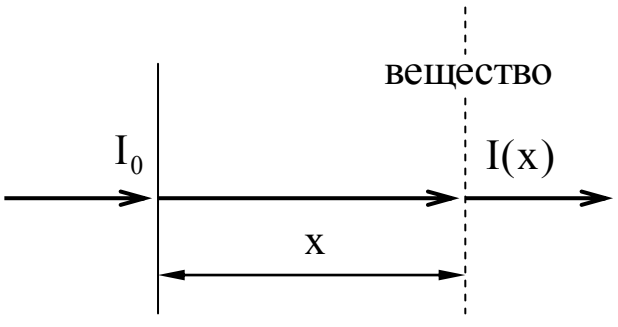


Рис. 16.3

Это выражение представляет собой **закон Бугера**.

Здесь I_0 – интенсивность света на входе в поглощающий слой вещества толщиной x; e = 2,7 – основание натуральных логарифмов; α –

коэффициент поглощения, зависящий от длины волны (частоты) света.

Величина α, в соответствии с законом Бугера, не должна зависеть от интенсивности света. Это утверждение справедливо для очень широкого диапазона изменения интенсивности (примерно в 10^{20} раз), однако С.И. Вавилов экспериментально показал, что при больших интенсивностях для специально выбранных веществ коэффициент поглощения α *уменьшается* с ростом интенсивности. Происходит это потому, что для своих опытов Вавилов выбирал вещества, у которых молекулы могут сравнительно долго (значительно больше, чем 10^{-8} с) находиться в возбужденном состоянии, в котором они не могут поглощать энергию от световой волны. В этом случае закон Бугера нарушается.

Рассмотрим зависимость коэффициента поглощения от частоты.

Для веществ, у которых атомы не взаимодействуют друг с другом, таких, как газы, пары металлов при невысоком давлении, коэффициент поглощения α для большинства частот (длин волн) близок к нулю. Резкие максимумы обнаруживаются для очень узких областей частот вблизи резонансных частот ω_{0i} колебаний электронов в атомах. Качественно вид зависимости $\alpha(\omega)$ для этого случая изображен на следующем рис. 16.4.

Из рис. 16.4. видно, что поглощение света для газообразных веществ носит избирательный характер. При увеличении взаимодействия между атомами, по мере повышения давления газов, максимумы поглощения уширяются. В твердых телах и жидкостях, где взаимодействие между атомами велико, наблюдаются широкие полосы поглощения. Качественный вид зависимости $\alpha(\omega)$ для этого случая дает рис. 16.5.

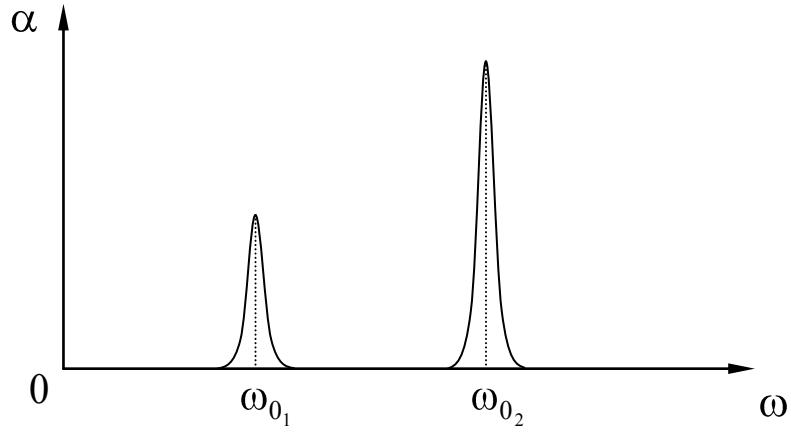


Рис. 16.4

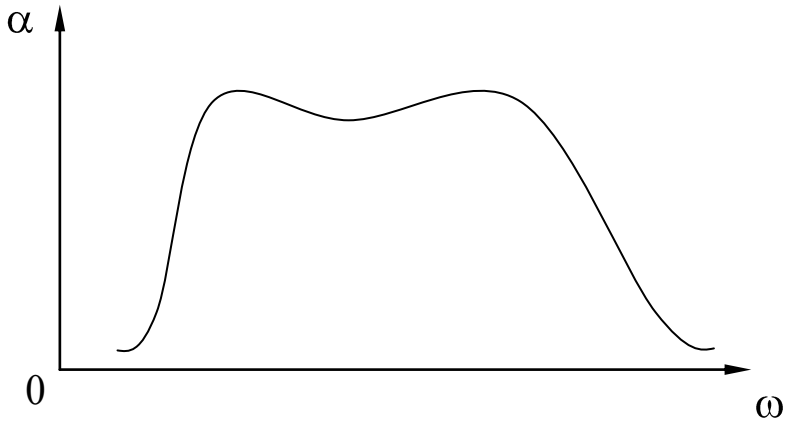


Рис. 16.5

У прозрачных тел полосы поглощения приходятся на невидимые глазом области спектра (инфракрасная или ультрафиолетовая). У окрашенных тел полосы поглощения находятся в соответственных участках видимой области спектра. Например, «красным» является стекло, слабо

поглощающее красные и оранжевые лучи и хорошо поглощающее синие, зеленые и фиолетовые.

Для металлов коэффициент поглощения α имеет порядок 10^8 м$^{-1}$. Это означает, что на расстоянии 10^{-8} м свет ослабляется в $e = 2{,}73...$ раз, т. е. металлы практически непрозрачны для света. Объясняется это наличием в металлах свободных электронов, которые под действием электрического поля световой волны начинают совершать колебательное движение. Если электрическое сопротивление металла мало, то электроны почти полностью переизлучают полученную от световой волны энергию (у серебра отражение достигает 99%). В металлах с худшей проводимостью доля отраженной энергии меньше, значительная часть энергии световой волны при этом переходит в джоулево тепло (у железа отражается 30 – 40% энергии падающей световой волны). При увеличении частоты света ситуация изменяется: тонкие слои металлов, совершенно непрозрачные для видимого света, становятся прозрачными для ультрафиолета.

16.3. Рассеяние света

Рассеянием света называется перераспределение энергии световой волны по направлениям.

Как было отмечено в § 1, в оптически однородной среде результат интерференции всех вторичных волн с первичной падающей на вещество волной отличен от нуля только для одного направления – направления распространения световой волны в среде. Таким образом, в оптически однородной среде рассеяние света происходить не может. Необходимым условием рассеяния света является наличие оптической неоднородности среды.

Эта неоднородность может быть вызвана наличием в рассеивающей среде мельчайших частичек другой среды, например, взвесь в газах мельчайших частичек жидкостей (туманы) или твердых частиц (дым) и т. д. Такие среды с явно выраженной оптической неоднородностью называют мутными средами. В результате рассеяния солнечный луч, проходящий через дым, туман или просто пыльный воздух, виден сбоку.

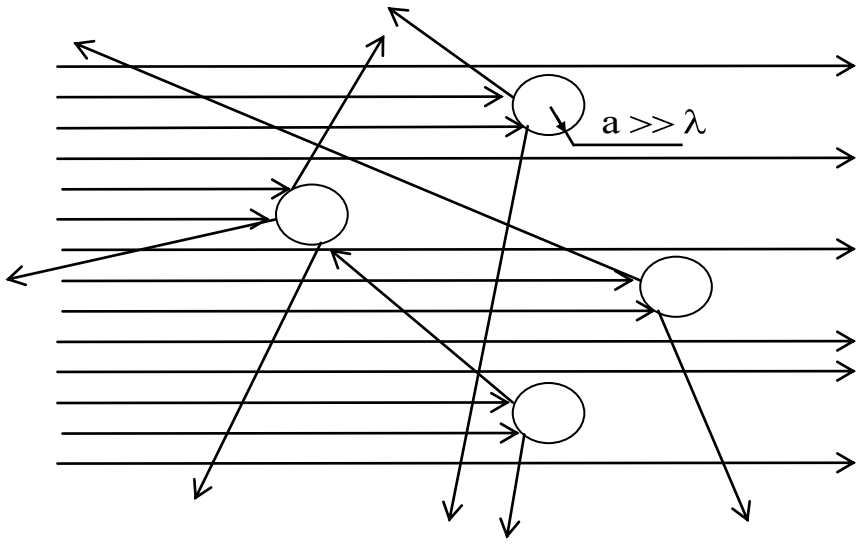


Рис. 16.6

Характер рассеяния зависит от соотношения между размером неоднородностей a и длиной волны света λ.

Геометрическое рассеяние

Для больших частиц ($a >> \lambda$) наблюдается геометрическое рассеяние. В этом случае весь свет,

падающий на поверхность крупной частицы, рассеивается в стороны (рис. 16.6). Подавляющая часть света рассеивается «вперед» в направлении падающего луча. Если $a \sim \lambda$, то наблюдается дифракция. Интенсивность рассеянного света в этом случае пропорциональна квадрату частоты или (см. (6.10а)) обратно пропорциональна квадрату длины волны света:

$$I \sim \omega^2 \sim \frac{1}{\lambda^2}. \quad (16.2)$$

Так как интенсивность рассеянного света уменьшается с увеличением длины волны, то инфракрасные лучи рассеиваются гораздо слабее видимых и ультрафиолетовых и хорошо проходят сквозь туман. Поэтому ими можно пользоваться для видения в тумане и темноте.

Рассеивание на малых частицах ($a \ll \lambda$). Закон Рэлея

Если размер рассеивающих частиц $a \ll \lambda$, то вынужденные колебания всех электронов одной такой частички, возбуждаемые световой волной, происходят в одной фазе, т. е. рассеяние будет когерентным. Такую частичку можно рассматривать как один колеблющийся диполь. Излучение диполя было рассмотрено в § 4 лекции № 7. Интенсивность излучения диполя, колеблющегося по гармоническому закону, пропорциональна четвертой степени частоты,
(см. (7.13)) или, учитывая (5.2), обратно пропорциональна четвертой степени длины волны:

$$I \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}. \quad (16.3)$$

Такая зависимость интенсивности рассеянного света от длины волны для рассеяния на частицах с размерами $a \ll \lambda$ впервые была получена Рэлеем и носит название *закона Рэлея.*

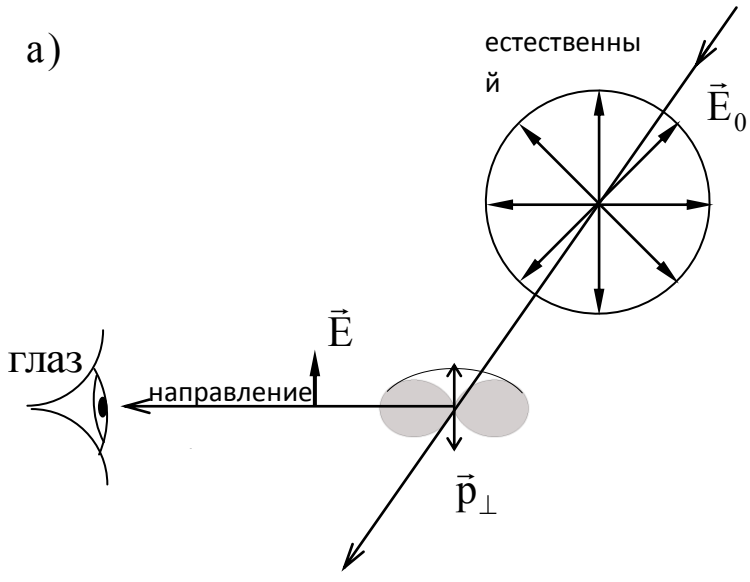


Рис. 16.7а

Даже при рассеянии естественного света рассеянное малыми частицами излучение поляризовано. Если наблюдение вести в направлении, перпендикулярном первичному пучку, то будет наблюдаться полная линейная поляризация рассеянного света. Это обусловлено видом диаграммы направленности излучения диполя (см. рис. 7.3) и иллюстрируется

рисунками 16.7а и 16.7б.

На рис. 16.7а двойной стрелкой изображены колебания электрического момента (7.10), направленные перпендикулярно направлению наблюдения, которое, в свою очередь, перпендикулярно первоначальному лучу света.

Диаграмма направленности излучения диполя в направлении наблюдения имеет максимум. Диполь с электрическим моментом $\vec{p}_{\perp}$ излучает в этом направлении линейно поляризованную световую волну, вектор $\vec{E}$ которой изображен на рис. 16.7а.

На рис. 16.7б двойная стрелка изображает колебания диполя с электрическим моментом $\vec{p}$, которые происходят в направлении наблюдения. Диаграмма направленности излучения диполя своим нулевым минимумом направлена к наблюдателю, диполь в направлении наблюдения не излучает.

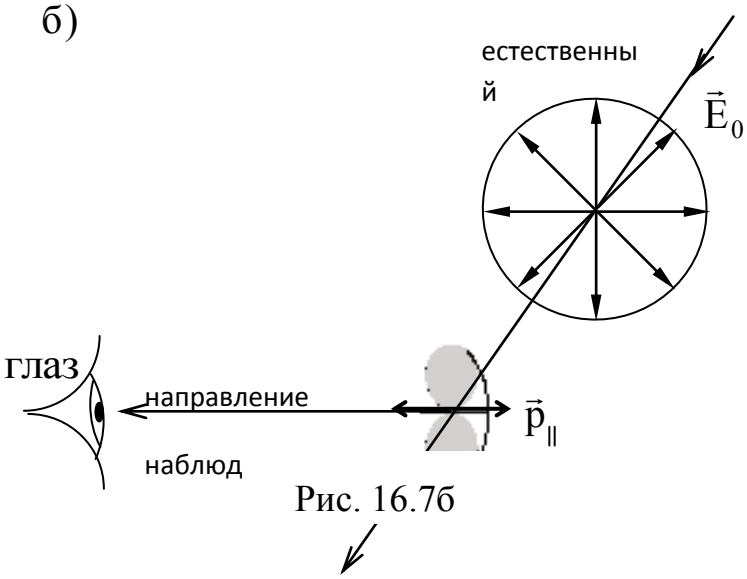


Рис. 16.7б

Если наблюдение рассеянного света ведется в произвольном направлении, не перпендикулярном первоначальному лучу света, то поля-ризация рассеянного света будет частичной.

Поляризация рассеянного света неба была использована, например, для создания поляризационного компаса, кото-рый может быть использован в дневное время и при незначительной облачности. Снег, облака уменьшают степень поляризации и рассеянного света.

Это обстоятельство можно использовать для прогнозирования погоды. Загрязненность атмосферы также можно определять по степени поляризации рассеянного света.

Молекулярное рассеяние

Рассеяние наблюдается даже в тщательно очищенных от посторонних примесей жидкостях и газах. В этом случае нарушения оптической однородности среды возникают из-за отклонений плотности вещества в пределах малых объемов от ее среднего значения (флуктуации плотности). Возникают эти флуктуации из-за беспорядочного теплового движения молекул вещества. Интенсивность молекулярного рассеяния подчиняется закону Рэлея (16.2). Именно этим объясняются голубой цвет неба и красный цвет зари.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 16

1. Такие явления, как дисперсия света, поглощение и рассеяние, объясняются взаимодействием световой волны с веществом.

2. *Дисперсией* света называется зависимость показателя преломления (и, соответственно, скорости распространения света в веществе) от длины волны: $n = n(\lambda)$ (или частоты $n = n(\omega)$). Вследствие дисперсии света узкий пучок белого света, проходя сквозь призму из стекла или другого прозрачного вещества, разлагается в дисперсионный спектр, образуя радужную полоску. Явление дисперсии используется для разложения сложного излучения на монохроматические составляющие. *Дисперсией вещества* называется производная от показателя преломления по длине волны (16.1а): $D = \frac{dn}{d\lambda}$.

3. При прохождении света через вещество интенсивность убывает, так как часть световой энергии переходит в тепловую. Интенсивность света, прошедшего через слой вещества толщиной x, зависит от интенсивности падающего света и толщины поглощающего слоя по закону Бугера (16.1):

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

где α – коэффициент поглощения, зависящий от длины волны (частоты) света.

4. Для газообразных веществ наблюдаются линии поглощения. Для прозрачных твердых и жидких веществ наблюдаются полосы поглощения.

5. Если среда содержит неоднородности, то наблюдается рассеяние света. Рассеянием света называется перераспределение световой энергии по направлениям. Характер рассеяния зависит от соотношения между размером неоднородностей a и длиной волны λ. Если $a >> \lambda$, то наблюдается геометрическое рассеяние. Если $a \sim \lambda$, то наблюдается дифракционная картина. Интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна квадрату длины волны. Если $a << \lambda$, то выполняется закон Рэлея: интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны. При этом рассеянный свет оказывается поляризованным (см. рис. 16.7а, 16.7б).

ЛЕКЦИЯ 17. КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ДИСПЕРСИИ

Связь показателя преломления с дипольным моментом молекулы. Связь дипольного момента молекулы с напряженностью поля световой волны. Уравнение движения электрона в атоме под действием световой волны и его решение. Зависимость показателя преломления от частоты. Групповая и фазовая скорости

Последовательное описание взаимодействия света с веществом возможно только в рамках *квантовой* теории. Однако, во многих случаях можно ограничиться описанием в рамках волновой (электромагнитной) теории излучения и классической электронной теории, согласно которой каждую молекулу среды можно рассматривать как систему зарядов, имеющих возможность совершать гармонические колебания, т. е. как систему *осцилляторов* с различными собственными частотами и коэффициентами затухания. Движение этих осцилляторов можно рассматривать на основе законов Ньютона.

17.1. Связь показателя преломления с дипольным моментом молекулы

Установим связь показателя преломления n с дипольным моментом молекулы p. Из теории Максвелла следует (см. (8.2)), что

$$n = \sqrt{\varepsilon}.$$

Диэлектрическая проницаемость вещества ε показывает, во сколько раз E_0 – напряженность электрического поля в вакууме больше, чем E – напряженность поля в среде:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}.$$

Как известно (см. (4.2), ч. 2), поле в среде уменьшается за счет возникновения встречного поля E', вызванного поляризацией среды. Величина E' связана с поляризованностью диэлектрика P (вектором поляризации) следующим соотношением:

$$E' = \frac{P}{\varepsilon_0}.$$

Таким образом, поле в вакууме E_0 больше, чем в среде на величину E', т. е.:

$$E_0 = E + E' = E + \frac{P}{\varepsilon_0}. \qquad \text{см. (4.2), (4.7), ч. 2)}$$

По определению поляризованность P – это сумма дипольных моментов единицы объема среды. Если обозначить через N_0 число молекул среды в единице объема, через $\vec{p}$ – наведенный полем световой волны электрический дипольный момент молекулы, то

$$\vec{P} = N_0 \vec{p}.$$

Тогда для ε получим:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E} = \frac{E + \frac{P}{\varepsilon_0}}{E} = 1 + \frac{N_0 p}{\varepsilon_0 E}.$$

Так как $\varepsilon = n^2$ (см. (8.2)), то

$$n^2 = 1 + \frac{N_0 p}{\varepsilon_0 E}.$$

17.2. Связь электрического дипольного момента молекулы с напряженностью поля световой волны

Как видно из только что полученной связи n^2 с дипольным моментом, p зависимость показателя преломления n от частоты волны ω определяется отношением p/E.

Здесь надо сделать две оговорки. Во-первых, поле, действующее на отдельную молекулу (локальное поле), вообще говоря, не совпадает с величиной среднего (макроскопического) поля в среде E. Мы не будем учитывать в элементарной теории дисперсии это различие, таким образом, количественные выводы такой теории могут быть применены только к разреженным газам.

Во-вторых, дипольный момент молекулы p, наведенный полем световой волны E, является функцией от времени, т. е. $p = p(t)$. Так как $E = E(t)$ и фаза колебаний $p(t)$ не совпадает, в общем случае, с фазой колебаний $E(t)$, то для нахождения показателя преломления надо усреднить по времени отношение $p(t)/E(t)$.

Тогда формула для n^2 приобретет следующий вид:

$$n^2 = 1 + \frac{N_0}{\varepsilon_0} < \frac{p(t)}{E(t)} >. \qquad (17.1)$$

Простейшая модель атома в поле световой волны заключается в следующем.

Под действием световой волны совершают колебания только внешние электроны атома, их называют *оптическими электронами.* Будем считать, что у молекулы (атома) один оптический электрон. Моделью такого атома будет упругий диполь, дипольный момент которого (см. (7.10)):

$$\vec{p} = e\vec{r}.$$

Оптический электрон будет двигаться под действием квазиупругой силы, силы «трения» и внешней силы, действующей со стороны электрического поля световой волны. Если световая волна поляризованная, то все эти силы будут действовать вдоль одной прямой. Направим вдоль этой прямой ось x, начало координат совместим с положительным зарядом, который будем, в первом

приближении, считать неподвижным. Таким образом, мы приходим к модели пружинного маятника, который совершает колебания под действием внешней гармонической силы.

17.3. Уравнение движения электрона в атоме под действием световой волны и его решение

Уравнение движения, описывающее вынужденные колебания маятника с затуханием, было получено нами из второго закона Ньютона (см. (4.2)):

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos\omega t.$$

Здесь x – координата электрона; ω_0 – собственная частота незатухающих колебаний электрона; β – коэффициент затухания; величина f_m равна:

$$f_m = \frac{f_m}{m_e} = \frac{eE_m}{m_e},$$

где E_m – амплитуда световой волны;

ω – циклическая частота световой волны;

m_e – масса электрона;

e – элементарный заряд ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

Стационарное решение этого уравнения движения (см. (4.4),(4.7), (4.9)):

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t - \varphi), \qquad (17.2)$$

где

$$A = \frac{e \cdot E_m / m_e}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} > 0, \qquad (17.3)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

17.4. Зависимость показателя преломления от частоты

Найдем проекции дипольного момента и напряженности поля волны на ось x.

На рис. 17.1 изображены диполь, силы, действующие на его полюсы, ось x и вектор электрического поля волны в момент времени $t = 0$:

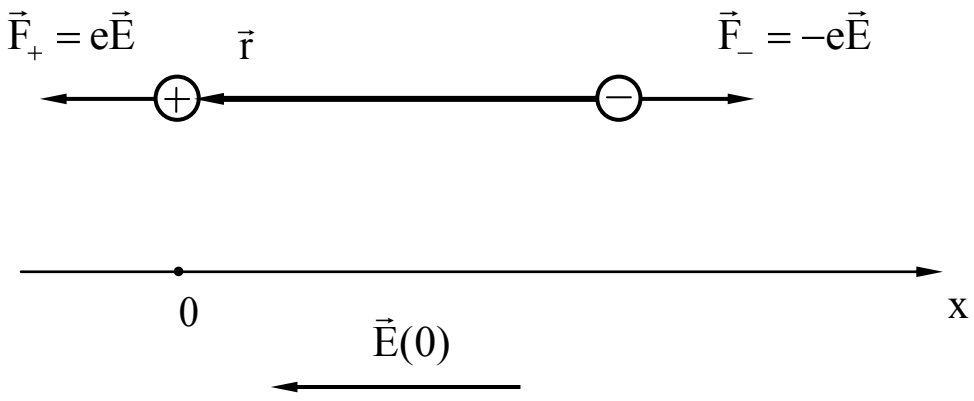


Рис. 17

Как видно из рис. 17.1, проекция дипольного момента на ось x:

$$p_x(t) = -e \cdot x(t). \qquad (17.4)$$

Проекция напряженности электрического поля световой волны на ось x:

$$E_x(t) = -E_m \cos \omega t, \qquad (17.5)$$

знак «минус» в (17.5) означает, что в начальный момент времени вектор $\vec{E}$ направлен против оси x. Напомним, что в нашем уравнении движения сила, действующая на электрон, при $t = 0$ имеет положительный знак.

Найдем выражение для n^2

Подставим в формулу, полученную в (17.1) для n^2, выражения $p_x(t),\ E_x(t)$ с использованием для $x(t)$ решения уравнения движения (17.2) с учетом (17.3):

$$n^2 = 1 + \frac{N_0}{\varepsilon_0} < \frac{-e \cdot x(t)}{-E_m \cdot \cos \omega t} > =$$

$$= 1 + \frac{N_0}{\varepsilon_0} < \frac{eA \cdot \cos(\omega t - \varphi)}{E_m \cos \omega t} > = 1 + \frac{N_0 eA}{\varepsilon_0 E_m} \cdot \cos \varphi.$$

При усреднении по времени $\frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\cos \omega t}$ дает $\cos \varphi$. Подставляя выражение для амплитуды A-колебаний электрона, получим:

$$n^2 = 1 + \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cdot \cos \varphi, \qquad (17.6)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Анализ зависимости $n(\omega)$

Как показывает опыт, затухание оказывает незначительное влияние на движение оптического электрона, если частота ω световой волны не равна ω_0 –

собственной частоте колебаний электрона. Точнее, затуханием можно пренебречь, если

$$\omega_0^2 - \omega^2 >> 2\beta\omega .$$

При выполнении этого условия

$$\varphi \approx \begin{cases} 0, \text{ если } \omega < \omega_0, \\ \pi, \text{ если } \omega > \omega_0. \end{cases}$$

В первом случае (если $\omega < \omega_0$) колебания электрона происходят в фазе с вынуждающей силой, $\cos\varphi = 1$. Во втором ($\omega > \omega_0$) – в противофазе, $\cos\varphi = -1$.

Учитывая это, можно записать упрощенное выражение для n^2, применимое для частот, далеких от ω_0:

$$n^2 = 1 + \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} . \qquad (17.7)$$

Здесь знак второго слагаемого при $\omega < \omega_0$ положителен, при $\omega > \omega_0$ второе слагаемое отрицательное.

Для $\omega = \omega_0$, $\varphi = \pi/2$, а $\cos\varphi = 0$, тогда, возвращаясь к исходному выражению для n^2 (17.6), получим: $n = 1$.

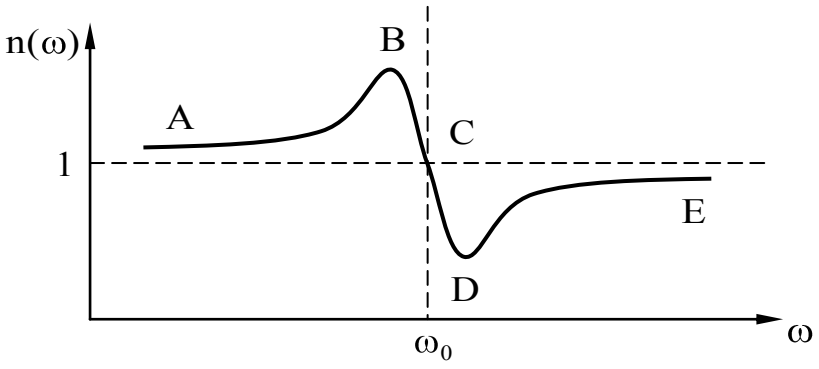


Рис. 17.2

Проведенный анализ позволяет изобразить примерный график зависимости показателя преломления от циклической частоты (рис. 17.2).

На участках AB и DE показатель преломления n растет с ростом ω – дисперсия нормальная $\left(\frac{dn}{d\omega} > 0\right)$. На участке BCD дисперсия аномальная – с ростом ω показатель преломления падает $\left(\frac{dn}{d\omega} < 0\right)$.

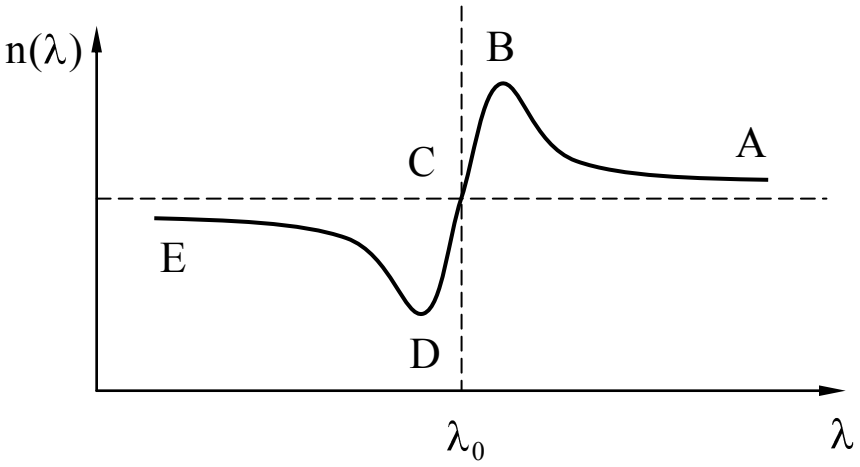


Рис. 17.3

График зависимости $n(\lambda)$ приведен на рис. 17.3.

Так как длина волны λ и циклическая частота величины связаны обратно пропорциональной зависимостью (5.2), график $n(\lambda)$, соответствующий приведенному на рис. 17.2, будет иметь примерно следующий вид (рис. 17.3).

На участках BA и ED $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ – нормальная дисперсия. На участке DCB $\frac{dn}{d\lambda} > 0$ – аномальная дисперсия.

Учет колебаний с другими собственными частотами

В веществе могут быть заряды, колеблющиеся с различными собственными частотами ω_{0i} и затуханиями β_i, величины зарядов q_i могут быть разными, разными могут быть и их массы. С учетом этого формула (17.6) для n^2 примет следующий вид:

$$n^2 = 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{N_{0i} q_i^2 \cos\varphi_i}{\varepsilon_0 m_i \sqrt{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_i^2 \omega^2}}. \qquad (17.8)$$

График зависимости $n(\omega)$ при наличии двух собственных частот ($N = 2$) будет иметь следующий вид (рис. 17.4).

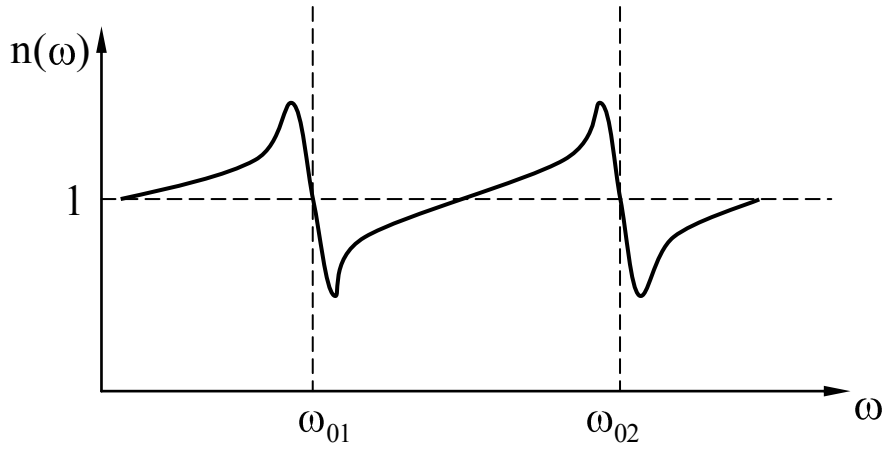


Рис. 17.4

Опыт подтверждает такой ход зависимости $n(\omega)$.

17.5. Групповая и фазовая скорость

На графике зависимости $n(\lambda)$, изображенном на рис. 17.3, есть участок CDE, где $n < 1$. Это означает, что фазовая скорость световой волны на этом участке

$$v = \frac{c}{n} > c.$$

На первый взгляд, это утверждение противоречит теории относительности, согласно которой скорость света в вакууме c является максимально возможной скоростью передачи сигнала. Но монохроматическая волна не может передавать сигнал: она никогда не кончается и нигде не начинается. Такая волна состоит из бесконечно повторяющихся одинаковых горбов и впадин, ничем не отличающихся друг от друга. Передавать сигнал можно только ограниченным в пространстве и во времени кусочком электромагнитной волны – электромагнитным импульсом. Такой импульс (группу волн) можно представить в виде наложения бесконечного числа монохроматических волн с разными частотами и амплитудами (интеграл Фурье).

Мы, для простоты будем представлять импульс (группу волн) совокупностью двух *близких* по частоте монохроматических волн (см. (5.5):

$$\xi_1(x,t) = a\cdot\cos(\omega t - kx);$$

$$+$$

$$\xi_2(x,t) = a\cdot\cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x]$$

$$\xi(x,t) = 2a\cdot\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\cdot\cos(\omega t - kx).$$

Здесь мы во втором сомножителе пренебрегаем величинами $\Delta\omega$ и Δk по сравнению с ω и k.

Выражение, стоящее в квадратных скобках, медленно меняется в пространстве и во времени, так как $\Delta\omega << \omega$, $\Delta k << k$ (сравните с (2.4)). Обозначим его модуль буквой A,

$$A = \left|2a\cdot\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\right|. \qquad (17.8a)$$

Тогда можно считать, что наш импульс (группа волн) – это монохроматическая волна с медленно меняющейся амплитудой. Ее уравнение:

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - kx).$$

Будем следить за распространением в пространстве точки x_m, где амплитуда A (и энергия) максимальна. Назовем **групповой скоростью u** скорость перемещения в пространстве максимума энергии в исследуемой группе волн:

$$u \equiv \frac{dx_m}{dt}.$$

Максимуму A соответствует обращение в ноль фазы косинуса в выражении для A (в формуле (17.8а)). Тогда:

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x_m = 0.$$

Возьмем производную по времени от этого выражения, в результате получим:

$$\frac{\Delta\omega}{2} - \frac{\Delta k}{2} \cdot \frac{dx_m}{dt} = 0,$$

откуда

$$u = \frac{dx_m}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Переходя к пределу, получим окончательное выражение для *групповой скорости*:

$$\boxed{u = \frac{d\omega}{dk}}. \qquad (17.9)$$

Заметим, что фазовая скорость (см. (5.12)) равна:

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Связь групповой скорости u с фазовой скоростью v

Заменим в полученном только что выражении для групповой скорости круговую частоту ω через $v \cdot k$ (см. 5.3)), тогда

$$u = \frac{d(v \cdot k)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk}.$$

Выразим производную dv/dk через производную $dv/d\lambda$:

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk}.$$

Так как

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \text{см. (5.3.)},$$

то

$$\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k}.$$

В результате получим для групповой скорости следующее выражение:

$$\boxed{u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}}. \qquad (17.10)$$

Учтем, что $v = \frac{c}{n}$. Тогда $\frac{dv}{d\lambda} = -\frac{c}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$.

Если $\frac{dv}{d\lambda} > 0$, то $u < v$, это область, где показатель преломления n убывает с ростом λ, т. е. $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ – нормальная дисперсия.

Если $\frac{dv}{d\lambda} < 0$, то $u > v$ и $\frac{dn}{d\lambda} > 0$ – аномальная дисперсия.

Но в области аномальной дисперсии понятие групповой скорости теряет смысл из-за большого *поглощения* света.

Таким образом, при распространении в реальной среде импульса, представляющего собой совокупность монохроматических волн, вводится понятие групповой скорости. Оно успешно применяется для объяснения дисперсии света. Другое весьма важное применение понятия групповой скорости связано с волновой механикой, в которой частицам сопоставляются волновые пакеты. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в части 5.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 17

1. Дисперсия света обусловлена взаимодействием света с веществом. Для описания дисперсии требуется найти теоретическую зависимость показателя преломления от частоты падающего света ($n = n(\omega)$ или $n = n(\lambda)$).

2. Классическая теория дисперсии исходит из представлений света как электромагнитной волны и вещества как совокупности атомов, электроны которых под действием электромагнитной волны совершают вынужденные колебания.

3. Уравнение вынужденных колебаний электрона в атоме получается из второго закона Ньютона. Из его решения следует, что смещение электрона в атоме подчиняется гармоническому закону (17.2), а амплитуда вынужденных колебаний электрона в атоме зависит от частоты вынуждающей силы, которая равна частоте падающего света (17.3).

4. При смещении электрона в атоме от положения равновесия каждый атом и каждая молекула приобретают электрический дипольный момент, который пропорционален смещению (17.4). Электрический момент диполя, как и смещение электрона, зависит от частоты падающего света.

5. Сумма электрических дипольных моментов в единице объема равна вектору поляризации (поляризуемости), который пропорционален диэлектрической проницаемости среды.

6. Диэлектрическая проницаемость среды связана с показателем преломления соотношением $n = \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому $n^2 = \varepsilon$ и зависит от частоты падающего света сложным образом (17.6).

7. Опыт подтверждает ход теоретической зависимости $n(\omega)$.

8. Скорость передачи информации определяется не фазовой, а групповой скоростью (17.9):

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

9. Групповая скорость u связана с фазовой скоростью v формулой (17.10):

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda},$$

в области нормальной дисперсии, где $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ групповая скорость u меньше фазовой скорости v.