

В. И. Дударев

# **ОСНОВЫ ГНСС-ТЕХНОЛОГИЙ**

Новосибирск  
СГУГиТ  
2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ГЕОСИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ»  
(СГУГиТ)

В. И. Дударев

# ОСНОВЫ ГНСС-ТЕХНОЛОГИЙ

Утверждено редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия для студентов 2-го курса, обучающихся  
по направлению подготовки магистров 21.04.02 «Землеустройство и кадастры»  
(профиль «Кадастровый учет и регистрация прав на недвижимое имущество»),  
а также по направлению подготовки бакалавров 21.03.03 «Геодезия  
и дистанционное зондирование»

Новосибирск  
СГУГиТ  
2016

УДК 528:629.783

Д81

Рецензенты: кандидат технических наук, доцент, КемГУ *А. Н. Соловицкий*

кандидат технических наук, зам. директора по научной работе  
ООО «ГЕОКАД плюс» *В. А. Спиридонов*

**Дударев, В. И.**

Д81      Основы ГНСС-технологий [Текст] : учеб. пособие / В. И. Дударев. – Новосибирск : СГУГиТ, 2016. – 60 с.  
ISBN 978-5-87693-986-9

В учебном пособии кратко изложены теоретические основы использования геодезических навигационных спутниковых систем в геодезии. Большое внимание уделено геодезическим системам отсчета, методам уравнивания геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений.

Пособие разработано в рамках государственного задания № 2014/141 по теме № 1527 «Разработка принципов и методологических основ навигации подвижных объектов с использованием наземной инфраструктуры ГЛОНАСС», № ГР01201461634. Предназначено для студентов 2-го курса, обучающихся по направлению подготовки магистров 21.04.02 «Землеустройство и кадастры» (профиль «Кадастровый учет и регистрация прав на недвижимое имущество»), а также по направлению подготовки бакалавров 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование».

Ответственный редактор: кандидат технических наук, доцент, СГУГиТ  
*Н. А. Николаев*

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 528:629.783

ISBN 978-5-87693-986-9

© СГУГиТ, 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Список сокращений .....                                                                                            | 4  |
| Введение .....                                                                                                     | 5  |
| 1. Понятие о фигуре Земли .....                                                                                    | 6  |
| 2. Системы координат, используемые в космической геодезии .....                                                    | 9  |
| 3. Преобразование земных систем координат .....                                                                    | 14 |
| 4. Расчет аномалии высоты при ГНСС-определениях пространственных<br>координат точек земной поверхности .....       | 22 |
| 5. Развитие геодезических сетей пространственными векторными<br>построениями .....                                 | 27 |
| 6. Уравнивание геодезических сетей по результатам относительных<br>ГНСС-измерений .....                            | 35 |
| 7. Некоторые приемы и особенности применения ГНСС-технологий<br>при выполнении топографо-геодезических работ ..... | 43 |
| Библиографический список .....                                                                                     | 52 |
| Приложение 1. Классификация координатных систем .....                                                              | 55 |
| Приложение 2. Каталог аномалий высоты $\zeta_{84}$ относительно поверхности<br>эллипсоида WGS-84 .....             | 57 |
| Приложение 3. Пример формирования системы линейных уравнений<br>поправок .....                                     | 58 |

## **СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ**

ГНСС – геодезическая навигационная спутниковая система

ГПЗ – гравитационное поле Земли

КА – космический аппарат

НП – наземный пункт

ОЗЭ – общий земной эллипсоид

ПВЗ – параметры вращения Земли

РЭ – референц-эллипсоид

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений

ЭВО – элементы взаимного ориентирования

## ВВЕДЕНИЕ

Растущий интерес человечества к вопросам детального изучения физической поверхности Земли, геодинамических процессов, совершенствование аэрокосмических методов и средств морской, воздушной и наземной навигации, а также необходимость решения целого ряда научных и практических задач потребовали создания новых технологий выполнения геодезических работ и методов оперативной математической обработки результатов измерений, полученных с помощью навигационных спутников и их систем. Высокая точность решения задач космической геодезии возможна только при развитии теории и методов математической обработки больших массивов результатов траекторных измерений спутников для определения необходимых геодезических параметров.

Постоянное совершенствование геодезических навигационных спутниковых систем типа ГЛОНАСС и GPS (НАВСТАР) дают возможность определять пространственные координаты наземных пунктов с высокой точностью. Результаты относительных ГНСС-измерений позволяют развивать геодезические сети различного назначения в короткие сроки и на труднопроходимых территориях. При этом знание теории уравнивания и методов развития различных геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений является важным фактором. При использовании ГНСС-технологий применяются различные системы координат и математические алгоритмы для их преобразований. Актуальной задачей является преобразование высот точек из геодезической системы высот в нормальную и обратно. Отмеченные выше вопросы освещены в данном учебном пособии.

## 1. ПОНЯТИЕ О ФИГУРЕ ЗЕМЛИ

Для решения многих задач в качестве модели Земли принимается сфера, радиус которой  $R = 6\,400$  км. Такая модель Земли используется для организации географической системы координат.

По результатам выполненных специальных геодезических работ было установлено, что расстояние от центра Земли до экватора около  $6\,378$  км, а до полюсов  $6\,357$  км. Следовательно, Земля сплюснута со стороны полюсов примерно на  $21$  км.

Близкой к поверхности Земли является поверхность геоида. Геоид – уровенная поверхность, совпадающая в океане с невозмущенной поверхностью воды, мысленно продолженной под материками таким образом, чтобы направления отвесных линий пересекали эту поверхность во всех ее точках под прямым углом.

Под отвесной линией понимается направление вектора силы тяжести в некоторой точке пространства. Направление отвесной линии в заданной точке легко получить практически. Оно совпадает с нитью свободно висящего отвеса.

Для решения задач геодезии поверхность геоида неудобна, так как не известно, как эта уровенная поверхность проходит под материками. Кроме того, форма геоида является сложной поверхностью, которую невозможно выразить в виде математических формул и констант. По этой причине за фигуру Земли принимается поверхность эллипсоида вращения (выражаемая простым уравнением), которая не представляет особой трудности при решении задач.

Эллипсоид вращения, имеющий наибольшую близость к фигуре Земли, называется общим земным эллипсоидом (ОЗЭ). Он определяется следующими условиями:

- геометрический центр ОЗЭ совпадает с центром масс Земли, а его малая ось – с осью вращения Земли;
- масса ОЗЭ равна массе Земли;

– поверхность ОЗЭ должна наилучшим образом описывать реальную форму Земли.

Для определения размеров ОЗЭ необходимо выполнить специальные геодезические измерения на всей поверхности Земли. В отдельных странах (группе стран) для решения различных геодезических задач принимаются эллипсоиды, полученные по результатам геодезических работ, выполненных на территории данной страны (группе стран). Такие эллипсоиды называются референц-эллипсоидами (РЭ). Они отличаются от ОЗЭ как своими размерами, так и ориентировкой в теле Земли. Референц-эллипсоид определяется следующими условиями:

– масса РЭ равна массе Земли;

– поверхность РЭ должна наилучшим образом описывать участок земной поверхности, на которой находится данная страна (группа стран).

В России с 1942 г. используется референц-эллипсоид Красовского. Его параметры: большая полуось  $a = 6\,378\,245$  м; квадрат эксцентриситета  $e^2 = 0,006\,693\,421\,623$ . В качестве ОЗЭ широко используется эллипсоид WGS-84, полученный американскими геодезистами. Он активно используется во всех странах. Параметры эллипсоида WGS-84:  $a = 6\,378\,137$  м;  $e^2 = 0,006\,694\,379\,990$ .

По результатам астрономо-геодезических работ строго определяется другая поверхность, получившая название поверхности квазигеоида. Эта поверхность незначительно отклоняется от поверхности геоида: на морях и океанах она совпадает с поверхностью геоида, на равнинных участках земной поверхности это отклонение составляет несколько сантиметров, а в горных районах не превышает 2 метров. Фигуру, ограниченную поверхностью квазигеоида, М. С. Молоденский предложил называть квазигеоидом. Поверхность квазигеоида является сложной поверхностью, которая волнами отклоняется от поверхности эллипсоида на величину до 100 м. Эта поверхность строится путем откладывания по нормали от заданного эллипсоида аномалии высоты  $\zeta$ , которая является функцией возмущающего гравитационного потенциала Земли (рис. 1).

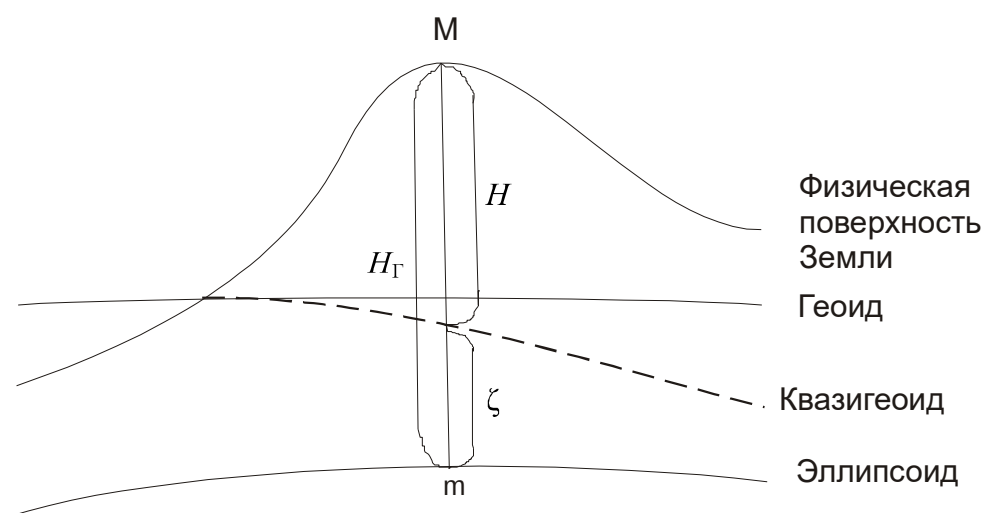


Рис. 1. Связь геодезической и нормальной высот:

$H_{\Gamma}$  – геодезическая высота;  $H$  – нормальная высота;  $\zeta$  – аномалия высоты

## 2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

При решении геодезических задач методами космической геодезии применяются разнообразные системы координат [17], в которых математический алгоритм решения поставленной задачи оценивания будет наиболее простым. Все системы координат можно различить между собой по виду, расположению начала отсчета, выбору основной координатной плоскости, ориентировке оси абсцисс, типу.

Любая выбранная система координат для полного ее определения в своем названии будет содержать все классификационные признаки (прил. 1). Например, система координат СК-42 будет называться так: средняя земная эллипсоидальная экваториальная квазигеоцентрическая система координат.

Пространственное положение НП удобнее всего определять в системах координат, жестко связанных с вращающейся Землей. Это так называемые земные системы координат. В ряде случаев в них бывает также удобно определять пространственные положения естественных и искусственных небесных тел. У этих систем ось аппликат совмещается с осью вращения Земли и направляется в сторону ее северного полюса. В качестве основной координатной плоскости принимается плоскость земного экватора, а за начальный меридиан – меридиан Гринвича. Наиболее часто используются прямоугольные экваториальные геоцентрические координаты, связанные с ОЗЭ и РЭ – это общеземная (гринвичская) и референцная (геодезическая) системы.

Начало средней земной (общеземной или гринвичской) системы координат  $(OXYZ)_G$  расположено в центре масс Земли, ось аппликат  $Z_G$  направлена к среднему полюсу  $P$  Земли 1900–1905 гг. Ось абсцисс  $X_G$  направлена в точку пересечения среднего гринвичского меридиана со средним земным экватором 1900–1905 гг. За средний меридиан Гринвича принимается плоскость, содержащая вектор силы тяжести в обсерватории

Гринвича и параллельная средней оси вращения Земли. Плоскость среднего меридиана Гринвича не содержит среднюю ось вращения Земли.

Начало референчной системы координат  $(OXYZ)_Г$  совмещается с центром выбранного РЭ. Ось аппликата  $Z_Г$  совпадает с осью вращения этого эллипсоида. За ось абсцисс  $X_Г$  принимается линия пересечения плоскости экватора РЭ и плоскости начального гринвичского меридиана, заданного геодезическими датами в исходном пункте. Ось ординат  $Y_Г$  дополняет систему до правой.

Наряду с отмеченными выше системами широко применяются прямоугольные горизонтные системы координат. Одна из них – это средняя прямоугольная геоцентрическая горизонтная система координат  $(OXYZ)_Н$ . Ее начало расположено в центре масс Земли. Ось ординат  $Y_Н$  совпадает с линией пересечения плоскости местного меридиана НП и плоскости, проходящей через центр масс Земли параллельно плоскости местного горизонта. Ось аппликата  $Z_Р$  находится в плоскости местного меридиана НП и ортогональна плоскости местного горизонта. Ось абсцисс  $X_Н$  лежит в плоскости среднего экватора и дополняет систему до правой.

В описанных выше отсчетных системах положение точки остается неизменным относительно поверхности Земли и не изменяется с течением времени (если не принимать во внимание геодинамические явления).

Истинная ось вращения в теле Земли не сохраняет своего пространственного положения, а испытывает периодические колебания. Следовательно, оба полюса Земли, являющиеся точками пересечения оси вращения с физической поверхностью Земли, также меняют свое положение. Отсюда следует, что земные координаты являются функцией времени. Явление перемещения мгновенных полюсов Земли относительно ее физической поверхности называется движением полюсов. Амплитуда этих перемещений доходит до 13 метров. Международная служба вращения Земли (МСВЗ, IERS) отслеживает эти движения и публикует координаты  $x_p$ ,  $y_p$  истинного полюса относительно его среднего положения  $P$ , определенного за период 1900–1905 гг. В связи с этим различают истинную и среднюю земные системы координат.

Начало истинной земной системы координат  $(OXYZ)'_G$  расположено в центре масс Земли. Ось аппликата  $Z'_G$  направлена к истинному полюсу Земли  $P'$  в некоторый текущий момент времени  $t \in T$ . Ось абсцисс  $X'_G$  направлена в точку пересечения истинного меридиана Гринвича с истинным экватором на эпоху  $t$ . За истинный (мгновенный) меридиан Гринвича принимается плоскость, содержащая истинную (мгновенную) ось вращения Земли и линию пересечения среднего экватора со средним меридианом Гринвича.

Обсерваториями России (Государственной системы определения параметров вращения Земли – ГС ПВЗ), Украины, Узбекистана, Польши, Болгарии и Чехии выполняются регулярные астрооптические и спутниковые наблюдения с целью определения ПВЗ: координат мгновенного полюса Земли  $x_p, y_p$  и Всемирного времени  $UT1$ . Окончательные данные о Всемирном времени и координатах полюса, вычисленные в Главном метрологическом центре Государственной службы времени и частоты (ГМЦ ГСВЧ), периодически публикуются в бюллетене «Всемирное время и координаты полюса» серии «Е». Там же приводятся сведения об отличии этих данных от результатов, полученных МСВЗ. В бюллетене «Всемирное время и координаты полюса» серии «А» публикуются предварительные (срочные) значения ПВЗ и их прогноз на семь недель, а также окончательные значения ПВЗ на прошедшие даты.

Координаты  $x_p$  и  $y_p$  истинного полюса  $P'$  Земли определяются в касательной плоскости (координатной плоскости), проведенной к среднему полюсу  $P$  Земли. Начало координат совмещено со средним полюсом  $P$ . Ось абсцисс  $x_p$  совпадает с линией пересечения этой координатной плоскости с плоскостью среднего меридиана Гринвича. Ось ординат  $y_p$  дополняет систему до правой (направлена к западу относительно меридиана Гринвича).

Для описания пространственного движения КА и НП относительно центра масс Земли наиболее приемлемой является инерциальная система координат, не вращающаяся вместе с Землей. В инерциальной системе координат начало помещается в некоторой точке пространства либо пере-

мещается с постоянной скоростью, направление осей в пространстве при этом сохраняется неизменным. Часто в качестве такой системы координат принимается прямоугольная геоцентрическая экваториальная звездная система координат  $(oxyz)'$ , начало которой совмещено с центром масс Земли. Ось аппликат  $z'$  совпадает с ее истинной осью вращения. Ось абсцисс  $x'$  направлена в истинную точку весеннего равноденствия, которая лежит в плоскости истинного экватора в эпоху  $t_0$ . Обычно за эту эпоху принимается момент задания начальных условий движения спутника. Ось ординат  $y'$  дополняет систему до правой. Такая система координат называется истинной звездной.

Для этой же цели широко применяется средняя звездная система координат  $(oxyz)$ , начало которой совмещено с центром масс Земли. Ось аппликат  $z$  совпадает с ее средней осью вращения. Ось абсцисс  $x$  направлена в среднюю точку весеннего равноденствия, которая лежит в плоскости среднего экватора в эпоху  $t_0$ . Ось ординат  $y$  дополняет систему до правой. Такая система координат называется средней звездной.

В общем случае звездные системы координат не являются инерциальными, так как ось вращения Земли постоянно меняет свою ориентировку в пространстве. Это сложное перемещение раскладывается на две составляющие: прецессию и нутацию. С прецессией связано пространственное перемещение так называемой средней оси вращения Земли (среднего полюса мира  $P_m$ ), с нутацией – истинной (истинного полюса мира  $P'_m$ ). Поэтому для соблюдения условия инерциальности задание пространственной ориентировки координатных осей на заданную начальную эпоху  $t_0$  является обязательным требованием.

В качестве некоторых аналогов инерциальной системы координат, пригодных для описания пространственного движения КА, Г. Вейсом предложены небесная и орбитальная системы координат [23]. Часто применяется прямоугольная геоцентрическая орбитальная система координат  $(O\xi\eta\zeta)$  [25], начало которой совмещено с центром масс Земли. Ось аппликат  $\zeta$  совпадает с вектором кинетического момента. Ось абсцисс  $\xi$  лежит в плоскости орбиты КА и образует с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  спутника угол  $l$ , равный сумме трех углов: долготы восходящего узла, аргу-

мента перигея и истинной аномалии. Ось ординат  $\eta$  дополняет систему до правой.

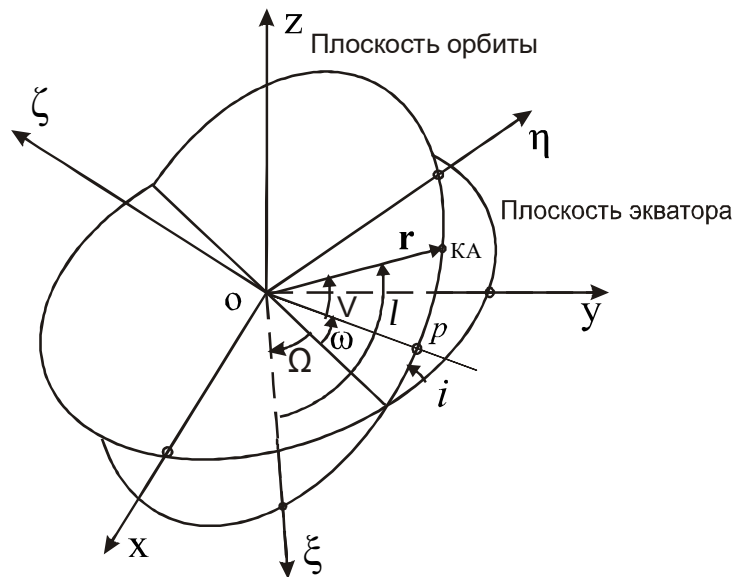


Рис. 2. Инерциальная орбитальная система координат ( $O\xi\eta\zeta$ ):

$i$  – наклонение орбиты;  $\Omega$  – долгота восходящего узла;  $\omega$  – аргумент перигея;  $v$  – истинная аномалия;  $\mathbf{r}$  – геоцентрический радиус-вектор КА;  $p$  – перигей орбиты;  $(oxyz)$  – звездная система координат

Наряду с описанными выше системами в космической геодезии широко используются прямоугольные топоцентрические истинная  $(\bar{o} \ \bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z})'$  и средняя  $(\bar{o} \ \bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z})$  системы координат, начала которых совпадают с точкой наблюдения  $\bar{o}$ . Координатные оси ориентируются в пространстве параллельно координатным осям соответствующих геоцентрических звездных систем.

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗЕМНЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ

В космической геодезии невозможно обойтись без разнообразных координатных преобразований. Это обусловлено тем, что пространственные положения различных объектов и рассматриваемых явлений определены в различных системах координат, а задача оценивания должна выполняться в единой и удобной для работы системе координат. Для преобразования векторов из одной прямоугольной системы координат в другую применяются ортогональные матрицы простых вращений:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1(\alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \\ \mathbf{R}_2(\alpha) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}; \\ \mathbf{R}_3(\alpha) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь матрица  $\mathbf{R}_1(\alpha)$  используется при вращении вокруг оси  $ox$ , матрица  $\mathbf{R}_2(\alpha)$  – при вращении вокруг оси  $oy$ , матрица  $\mathbf{R}_3(\alpha)$  – при вращении вокруг оси  $oz$ . Положительным углом вращения  $\alpha$  считается такой угол, при котором вращение системы координат происходит против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения.

Чаще всего в геодезической практике по причине своей наглядности и удобства применения используются так называемые геодезические координаты заданной точки: геодезическая долгота, геодезическая широта и геодезическая высота.

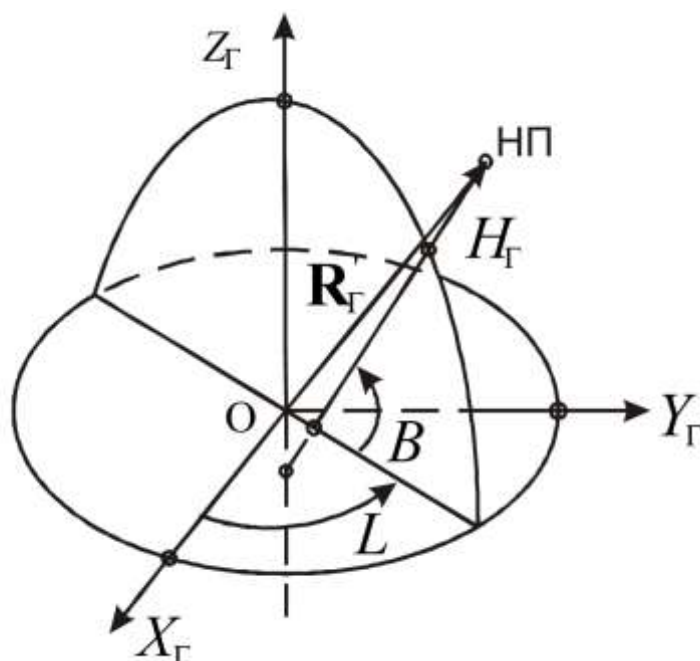


Рис. 3. Связь прямоугольных и эллипсоидальных земных систем координат:

$(OXYZ)_\Gamma$  – референсная система координат;  $H_\Gamma$  – геодезическая высота НП;  $B, L$  – геодезические широта и долгота НП;  $\mathbf{R}_\Gamma$  – геоцентрический радиус-вектор НП

Геодезическая широта – острый угол между плоскостью земного экватора и нормалью, проведенной из заданной точки к поверхности эллипсоида. Пределы изменения: в Северном полушарии от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , в Южном полушарии от  $0^\circ$  до  $-90^\circ$ . Геодезическая долгота – двугранный угол между плоскостями начального меридиана и меридиана заданной точки (местного меридиана). Пределы изменения: от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  в восточном направлении. Геодезическая высота – расстояние по нормали от заданной точки до поверхности эллипсоида.

В референционной системе координат  $(OXYZ)_\Gamma$  пространственное положение НП может определяться как геоцентрическим радиусом-вектором  $\mathbf{R}_\Gamma = [X_\Gamma \ Y_\Gamma \ Z_\Gamma]^T$ , так и геодезическими (эллипсоидальными) широтой, долготой и высотой. Переход от эллипсоидальных координат  $B, L$  и  $H_\Gamma$  заданной точки к прямоугольным  $X_\Gamma, Y_\Gamma$  и  $Z_\Gamma$  выполняется по формулам:

$$\begin{aligned}
X_{\Gamma} &= (N + H_{\Gamma}) \cdot \cos B \cdot \cos L; \\
Y_{\Gamma} &= (N + H_{\Gamma}) \cdot \cos B \cdot \sin L; \\
Z_{\Gamma} &= (N + H_{\Gamma} - N \cdot e^2) \cdot \sin B,
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$N = a / (1 - e^2 \cdot \sin^2 B)^{1/2}. \tag{3}$$

Переход от прямоугольных координат  $X_{\Gamma}$ ,  $Y_{\Gamma}$  и  $Z_{\Gamma}$  к эллипсоидальным  $B$ ,  $L$  и  $H_{\Gamma}$  заданной точки выполняется по формулам:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} L &= Y_{\Gamma} / X_{\Gamma}; \\
\operatorname{tg} B &= (Z_{\Gamma} + N \cdot e^2 \cdot \sin B) / (X_{\Gamma} \cdot \cos L + Y_{\Gamma} \cdot \sin L); \\
H_{\Gamma} &= X_{\Gamma} / (\cos B \cdot \cos L) - N.
\end{aligned} \tag{4}$$

Численное значение геодезической широты  $B$  определяется методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} B^{(1)} &= Z_{\Gamma} / (X_{\Gamma} \cdot \cos L + Y_{\Gamma} \cdot \sin L), & N^{(1)} &= a / (1 - e^2 \cdot \sin^2 B^{(1)})^{1/2}; \\
\operatorname{tg} B^{(2)} &= (Z_{\Gamma} + N^{(1)} \cdot e^2 \cdot \sin B^{(1)}) / (X_{\Gamma} \cdot \cos L + Y_{\Gamma} \cdot \sin L), & N^{(2)} &= a / (1 - e^2 \cdot \sin^2 B^{(2)})^{1/2}; \\
\operatorname{tg} B^{(3)} &= (Z_{\Gamma} + N^{(2)} \cdot e^2 \cdot \sin B^{(2)}) / (X_{\Gamma} \cdot \cos L + Y_{\Gamma} \cdot \sin L), & N^{(3)} &= a / (1 - e^2 \cdot \sin^2 B^{(3)})^{1/2}; \\
&L & & \\
\operatorname{tg} B^{(n)} &= (Z_{\Gamma} + N^{(n-1)} \cdot e^2 \cdot \sin B^{(n-1)}) / (X_{\Gamma} \cdot \cos L + Y_{\Gamma} \cdot \sin L).
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $n$  – номер приближения.

Процесс приближений продолжается до достижения критерия

$$|B^{(n)} - B^{(n-1)}| \leq \varepsilon, \tag{6}$$

где  $\varepsilon$  – абсолютная ошибка вычисления геодезической широты  $B$  заданной точки.

Преобразование средних земных координат  $(OXYZ)_G$  в истинные земные  $(OX'Y'Z')_G$  осуществляется двумя последовательными поворотами

системы  $(OXYZ)_G$ : сначала относительно оси  $OX_G$  на угол  $y_P$ , затем относительно оси  $OY_G$  (уже совпадающей с осью  $OY$ ) на угол  $x_P$  (рис. 4). Здесь величины  $x_P$  и  $y_P$  являются координатами истинного (мгновенного) полюса  $P'$  Земли относительно среднего полюса  $P$ .

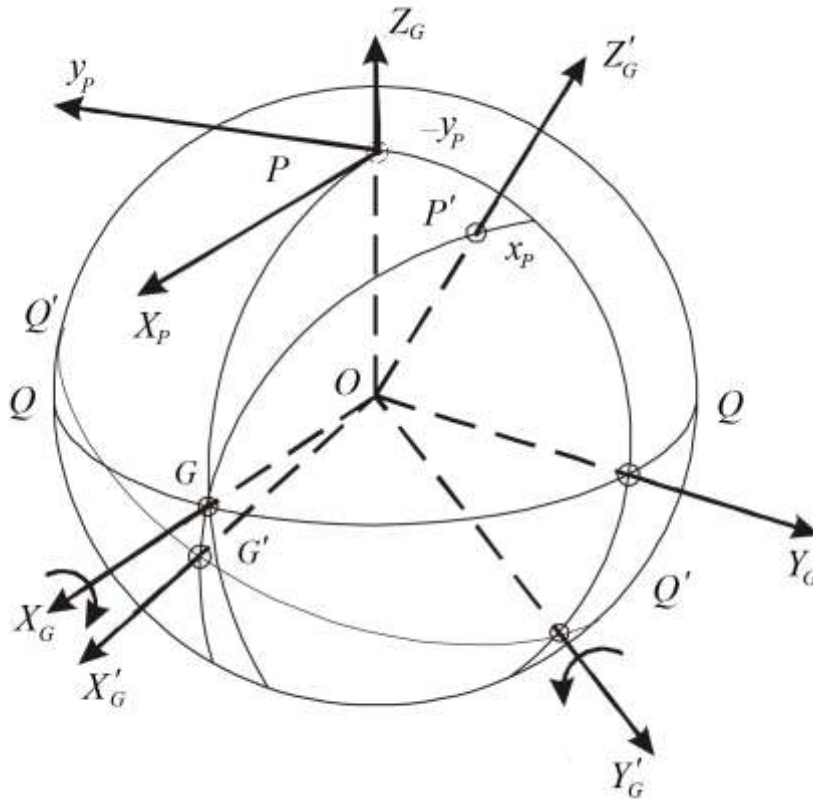


Рис. 4. Связь истинных и средних земных систем координат:

$PG$  – средний меридиан Гринвича;  $P'G'$  – истинный меридиан Гринвича;  $QQ$  – средний экватор;  $Q'Q'$  – истинный экватор,  $OP$  – средняя ось вращения Земли;  $OP'$  – истинная ось вращения Земли;  $G$  – точка пересечения среднего меридиана Гринвича со средним экватором;  $G'$  – точка пересечения истинного меридиана Гринвича с истинным экватором

Матричное преобразование средних земных координат в истинные выполняется так:

$$\mathbf{R}'_G = \mathbf{R}_2(+x_P) \cdot \mathbf{R}_1(+y_P) \cdot \mathbf{R}_G, \quad (7)$$

а истинных земных координат в средние –

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_1(-y_P) \cdot \mathbf{R}_2(-x_P) \cdot \mathbf{R}'_G, \quad (8)$$

где  $\mathbf{R}_G = [X \ Y \ Z]_G^T$  – геоцентрический радиус-вектор НП в общеземной системе координат;

$\mathbf{R}'_G = [X' \ Y' \ Z']_G^T$  – геоцентрический радиус-вектор НП в истинной земной системе координат.

Пусть положение НП определено в референционной системе координат  $(O''XYZ)_\Gamma$  радиусом-вектором  $\mathbf{R}_\Gamma = [X \ Y \ Z]_\Gamma^T$ , а в общеземной  $(OXYZ)_G$  – радиусом-вектором  $\mathbf{R}_G = [X \ Y \ Z]_G^T$  (рис. 5).

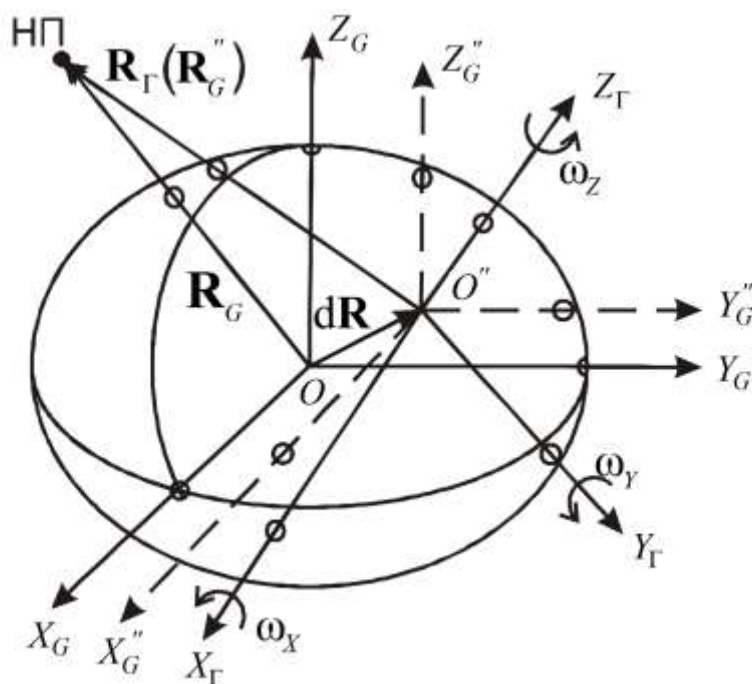


Рис. 5. Связь геоцентрических и квазигеоцентрических прямоугольных земных систем координат:

$(OXYZ)''$  – промежуточная (квазигеоцентрическая) система с осями координат параллельными осям общеземной системы

Тогда преобразование референционных координат НП в общеземные выполняется с помощью матричного выражения

$$\mathbf{R}_G = (1+k) \cdot \mathbf{R}(\omega) \cdot \mathbf{R}_\Gamma + d\mathbf{R}, \quad (9)$$

где  $k$  – поправка к масштабу референцной системы координат  $(O''XYZ)_\Gamma$ ;

$\omega = [\omega_X \ \omega_Y \ \omega_Z]^T$  – трехмерный вектор-столбец малых углов поворота координатных осей референцной системы координат  $(O''XYZ)_\Gamma$  относительно осей общеземной системы  $(OXYZ)_G$ ;

$d\mathbf{R} = [dX \ dY \ dZ]^T$  – трехмерный вектор-столбец смещения начала  $O''$  системы координат  $(O''XYZ)_\Gamma$  относительно начала  $O$  системы  $(OXYZ)_G$ .

Обратное преобразование имеет вид:

$$\mathbf{R}_\Gamma = (1-k) \cdot \mathbf{R}^T(\omega) \cdot \mathbf{R}_G - d\mathbf{R}. \quad (10)$$

В формулах (9) и (10) матрица малых поворотов координатных осей референцной системы координат, являющаяся итогом последовательного перемножения трех матриц вращения, имеет вид:

$$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{R}_3(\omega_Z) \cdot \mathbf{R}_2(\omega_Y) \cdot \mathbf{R}_1(\omega_X) = \begin{bmatrix} 1 & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 1 & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Компоненты векторов  $d\mathbf{R}$ ,  $\omega$  и поправка  $k$  называются элементами взаимного ориентирования систем координат.

После выполнения простых матричных преобразований выражения (9) и (10) могут быть записаны в следующем виде:

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{D}_1 \cdot \omega + (1+k) \cdot \mathbf{R}_\Gamma + d\mathbf{R}; \quad (12)$$

$$\mathbf{R}_\Gamma = \mathbf{D}_2 \cdot \omega - (1-k) \cdot \mathbf{R}_G - d\mathbf{R}. \quad (13)$$

Здесь матрицы  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  имеют вид:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -Z_\Gamma & Y_\Gamma \\ Z_\Gamma & 0 & -X_\Gamma \\ -Y_\Gamma & X_\Gamma & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & Z_G & -Y_G \\ -Z_G & 0 & X_G \\ Y_G & -X_G & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Если пространственное положение НП задано в общеземной системе координат  $(OXYZ)_G$  радиусом-вектором  $\mathbf{R}_G = [XYZ]_G^T$ , а в горизонтной  $(OXYZ)_H$  задано радиусом-вектором  $\mathbf{R}_H = [XYZ]_H^T$  (рис. 6), то преобразование этого вектора из общеземной системы в горизонтную осуществляется сначала поворотом системы  $(OXYZ)_G$  относительно оси  $OZ_G$  на угол  $(90^\circ + L)$ , а затем относительно оси  $OX_G$  на угол  $(90^\circ - B)$ :

$$\mathbf{R}_H = \mathbf{R}_1(90^\circ - B) \cdot \mathbf{R}_3(90^\circ + L) \cdot \mathbf{R}_G. \quad (15)$$

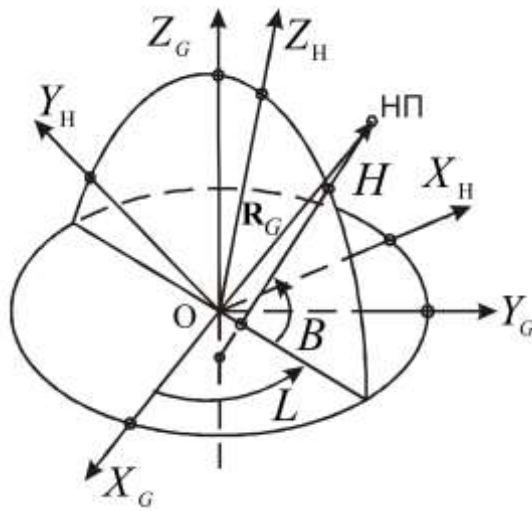


Рис. 6. Связь горизонтной и общеземной систем координат:

$B, L, H_G$  – геодезические широта, долгота и высота НП

После перемножения матриц поворота преобразование (15) будет иметь вид:

$$\mathbf{R}_H = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{R}_G. \quad (16)$$

В нем

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\sin L & -\sin B \cdot \cos L & \cos B \cdot \cos L \\ \cos L & -\sin B \cdot \sin L & \cos B \cdot \sin L \\ 0 & \cos B & \sin B \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_H. \quad (18)$$

Элементы матрицы  $\mathbf{Q}$  являются функциями прямоугольных земных координат НП и рассчитываются по формулам:

$$\rho_G = \sqrt{X_G^2 + Y_G^2}; \quad \sin L = Y_G / \rho_G; \quad \cos L = X_G / \rho_G; \quad R_G = \sqrt{X_G^2 + Y_G^2 + Z_G^2};$$

$$\sin B = \left\{ 1 + e^2 \cdot \left( 1 - Z_G^2 / R_G^2 \right) \right\} \cdot Z_G / R_G; \quad \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B},$$

где  $B, L$  – геодезические широта и долгота НП соответственно;

$e$  – эксцентриситет земного эллипсоида.

Преобразование вектора  $\mathbf{R}_G$  положения НП из общеземной системы координат в звездную описывается выражением

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{\dot{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{\dot{P}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_G, \quad (19)$$

где  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{\dot{R}}$  – геоцентрические радиус-вектор положения и вектор скорости НП в звездной системе координат;

$\mathbf{P}$  и  $\mathbf{\dot{P}}$  – матрицы преобразования. Выражение (19) является кинематической моделью движения НП в пространстве.

Вид матриц  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{\dot{P}}$  в выражении (19) определяется выбранной координатной системой, которая на заданном интервале времени будет удовлетворять требованиям инерциальной системы. Матричное преобразование (19) должно быть простым и, одновременно, обеспечивать точность, соответствующую современному уровню качества траекторных измерений КА.

Матрица  $\mathbf{P}$  представляет собой результат перемножения двенадцати ортогональных матриц вращения, учитывающих вращение Земли вокруг своей оси, колебания этой оси вращения, прецессию по прямому восхождению и склонению, а также нутацию по прямому восхождению, склонению, наклону.

#### **4. РАСЧЕТ АНОМАЛИИ ВЫСОТЫ ПРИ ГНСС-ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ ТОЧЕК ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

При определении пространственных положений точек с помощью ГНСС-технологий вопрос пересчета координат из одной системы в другую вызывает некоторые трудности. Это связано с тем, что при преобразовании геодезических координат в пространственные прямоугольные и обратно необходимо знать аномалию высоты. Последнее обусловлено тем, что в каталогах высотные отметки точек земной поверхности заданы в системе нормальных высот, а для получения прямоугольных координат требуется геодезическая высота. Связь между ними описывается выражением

$$H_{\Gamma} = H + \zeta, \quad (20)$$

где  $H_{\Gamma}$  – геодезическая высота;

$H$  – нормальная высота;

$\zeta$  – аномалия высоты.

Вопросу определения аномалии высоты посвящен целый ряд работ, среди которых в плане их практического применения можно выделить исследования [1, 20–22]. Методы, рассматриваемые в них, достаточно точны, но отличаются своей громоздкостью и большим объемом подготовительных и вычислительных работ: требуют построения так называемого «локального геоида» или интерполирования аномалии высоты между исходными НП. Кроме того, эти методы, как правило, ориентированы на значительные по площади территории. При производстве топографо-геодезических работ (создание съемочных сетей и выполнение топографических съемок отдельных участков земной поверхности с использованием ГНСС-технологий на небольших территориях) исполнителю требуется оперативное определение аномалии высоты в отдельных точках на земной поверхности. Здесь координатные определения осуществляются относительным методом. В этом случае лучше использовать прямые методы рас-

чета аномалии высоты в определяемых точках относительно исходных. Такой метод определения можно рассматривать как относительный, так как здесь фактически определяется разность аномалий высот в двух точках, что по точности на один-два порядка выше их абсолютных методов расчета.

Во многих практических случаях аномалию высоты можно вычислить, используя модель ГПЗ EGM-96 (а также последующих ее модификаций). Эта модель была получена в США применительно к ОЗЭ WGS-84 по результатам совместной обработки наземных геодезических и спутниковых измерений. Модель представлена коэффициентами разложения в ряд по сферическим функциям возмущающего потенциала Земли до 360 порядка и степени. Она хорошо зарекомендовала себя и уже много лет используется в задаче прогнозирования полета спутников ГНСС GPS (NAVSTAR) и при расчете аномалии высоты относительно ОЗЭ WGS-84 в программных комплексах, нацеленных на обработку ГНСС-измерений. Ниже будут рассмотрены два способа определения аномалии высоты  $\zeta_{42}$  относительно поверхности РЭ Красовского (СК-42).

В первом способе сначала по формуле Стокса [3] с использованием модели EGM-96 (либо EGM-08) в заданной точке рассчитывается аномалия высоты  $\zeta_{84}$  относительно ОЗЭ WGS-84. Затем уже определяется аномалия высоты  $\zeta_{42}$  относительно РЭ Красовского [2], как

$$\zeta_{42} = \zeta_{84} - (H_{\Gamma 84} - H_{\Gamma 42}) = \zeta_{84} - dH; \quad (21)$$

$$dH = (H_{\Gamma 84} - H_{\Gamma 42}), \quad (22)$$

где  $H_{\Gamma 84}$  – геодезическая высота точки относительно ОЗЭ WGS-84;

$H_{\Gamma 42}$  – геодезическая высота точки относительно РЭ Красовского;

$dH$  – разность геодезических высот между ОЗЭ и РЭ в заданном НП.

Для определения  $dH$  можно воспользоваться формулой [19]

$$\begin{aligned} dH = & (-\omega_Y \cdot Z_{\Gamma} + \omega_Z \cdot Y_{\Gamma} + dX) \cdot \cos B \cdot \cos L + \\ & + (\omega_X \cdot Z_{\Gamma} - \omega_Z \cdot X_{\Gamma} + dY) \cdot \cos B \cdot \sin L + \\ & + (-\omega_X \cdot Y_{\Gamma} + \omega_Y \cdot X_{\Gamma} + dZ) \cdot \sin B - a \cdot N^{-1} \cdot da + 0,5 N \cdot \sin^2 B \cdot de^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  – малые углы вращения координатных осей референцной системы координат относительно осей общеземной системы;

$dX, dY, dZ$  – компоненты вектора смещения начала референцной системы координат  $(OXYZ)_\Gamma$  относительно начала общеземной системы;

$B, L$  – геодезические широта и долгота точки в системе РЭ;

$N$  – радиус кривизны РЭ в плоскости первого вертикала;

$da$  – разность больших полуосей ОЗЭ и РЭ;

$de^2$  – разность квадратов эксцентриситетов ОЗЭ и РЭ.

В выражении (23) радиус кривизны РЭ определяется, как

$$N = a_{42} / \left(1 - e_{42}^2 \cdot \sin^2 B\right)^{1/2}, \quad (24)$$

где  $a_{42}$  – большая полуось РЭ Красовского;

$e_{42}$  – эксцентриситет РЭ Красовского.

Более удобная формула для расчета  $dH$  может быть получена, если разложить знаменатель равенства (24) в ряд и подставить полученное выражение для определения  $N$  в формулу (23). После необходимых преобразований формула для расчета разности геодезических высот  $dH$  будет иметь вид [14]:

$$\begin{aligned} dH = & (-\omega_Y \cdot Z_\Gamma + \omega_Z \cdot Y_\Gamma + dX) \cdot \cos B \cdot \cos L + \\ & + (\omega_X \cdot Z_\Gamma - \omega_Z \cdot X_\Gamma + dY) \cdot \cos B \cdot \sin L + \\ & + (-\omega_X \cdot Y_\Gamma + \omega_Y \cdot X_\Gamma + dZ) \cdot \sin B - \left(1 - 0,5 \cdot e_{42}^2 \cdot \sin^2 B\right) \cdot (a_{84} - a_{42}) + \\ & + 0,5 \cdot a_{42} \cdot \left(1 + 0,5 \cdot e_{42}^2 \cdot \sin^2 B\right)^{1/2} \cdot \left(e_{84}^2 - e_{42}^2\right) \cdot \sin^2 B, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $a_{84}, e_{84}$  – большая полуось и эксцентриситет ОЗЭ WGS-84.

Когда таким образом будет вычислена аномалия высоты  $\zeta_{42}$ , можно найти геодезическую высоту  $H_{\Gamma 42}$  точки относительно РЭ, как

$$H_{\Gamma 42} = H_{42} + \zeta_{42}, \quad (26)$$

где  $H_{Г42}$  – геодезическая высота точки, определенная относительно РЭ;

$H_{42}$  – нормальная высота точки, взятая из каталога координат.

Во втором способе для расчета аномалии высоты  $\zeta_{84}$  используется каталог значений аномалий высоты, вычисленных с использованием модели EGM-96 (либо EGM-08) относительно поверхности эллипсоида WGS-84 в узлах сетки географических трапеций (прил. 2). Сначала по заданным эллипсоидальным координатам точки из каталога выбирается соответствующая трапеция с аномалиями высот в ее узлах. В качестве примера для точки с координатами  $B = 50^\circ 27' 59''$  и  $L = 86^\circ 39' 06''$  соответствующая трапеция показана на рис. 7.

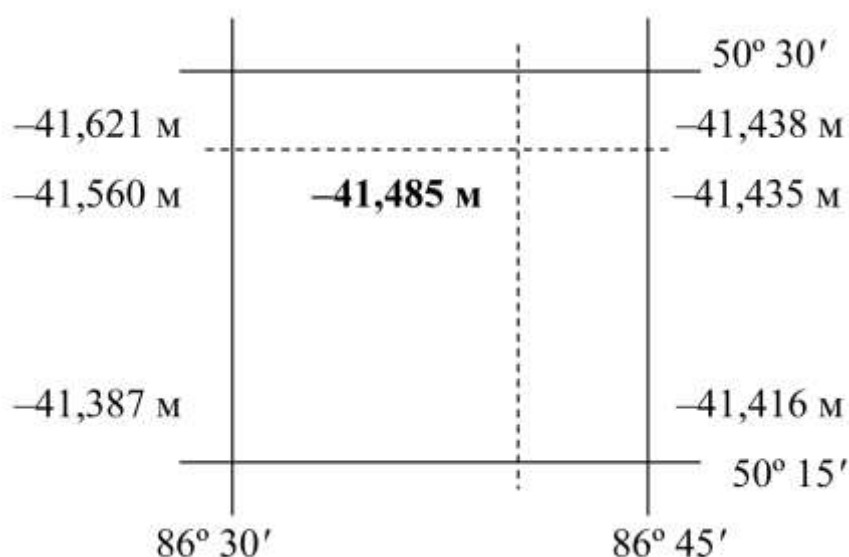


Рис. 7. Географическая трапеция для заданной точки

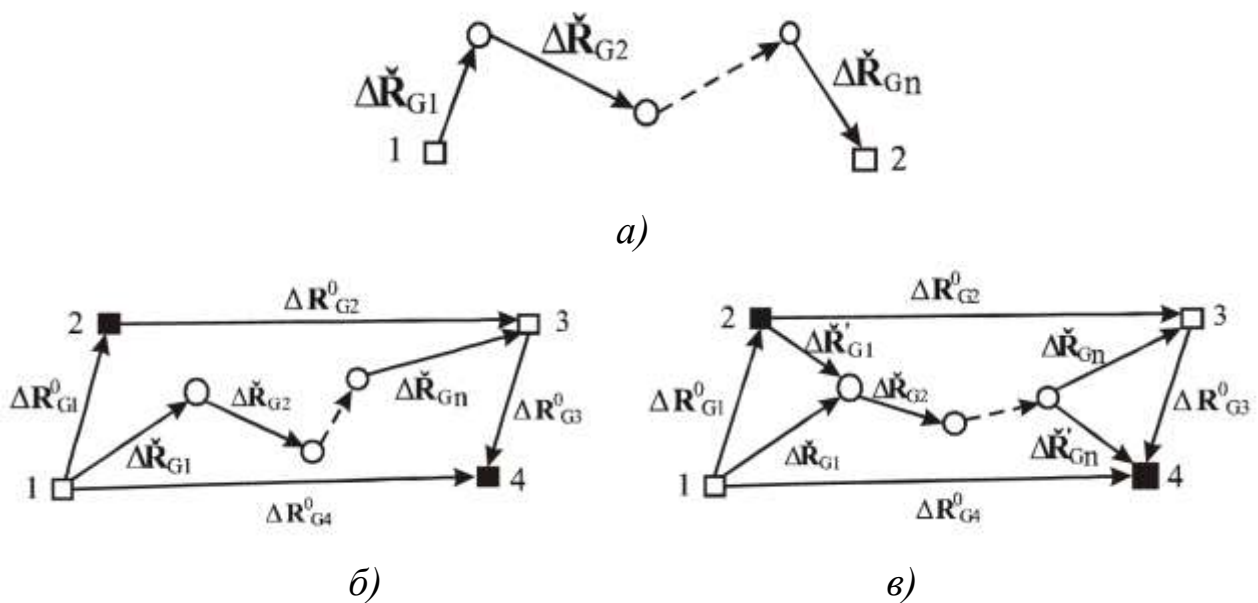
Далее методом линейной интерполяции для параллели с широтой  $B = 50^\circ 27' 59''$  вычисляются значения аномалии высоты на левом меридиане ( $\zeta_{84} = -41,560$  м) и правом меридиане ( $\zeta_{84} = -41,435$  м) трапеции. Затем на параллели с широтой  $B = 50^\circ 27' 59''$  для точки с долготой  $L = 86^\circ 39' 06''$  методом линейной интерполяции вычисляется значение аномалии высоты ( $\zeta_{84} = -41,485$  м). Значение аномалии высоты  $\zeta_{42}$  в заданной точке вычисляется по формулам (21), (22) и (25).

В обоих способах переход от нормальной высоты  $H_{42}$  к геодезической  $H_{Г42}$  и наоборот выполняется по формуле (26). Зная геодезическую высоту  $H_{Г42}$ , по формулам (2) можно вычислить пространственные прямоугольные координаты точки. Рассмотренные способы можно применять для определения аномалии высоты относительно любых других РЭ.

## **5. РАЗВИТИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ВЕКТОРНЫМИ ПОСТРОЕНИЯМИ**

Значительная часть геодезических работ связана с построением ГСС и геодезических съемочных сетей с использованием ГНСС-измерений. Часто такие сети создаются в труднопроходимых регионах, в которых плотность пунктов ГГС довольно низкая, например: горные участки местности, районы Крайнего Севера и т. д. Кроме того, приходится выполнять геодезические работы на узких и протяженных (от нескольких десятков до нескольких сотен километров) участках местности, на которых выполняется топографическая съемка надземных и подземных линейных объектов (автомобильных и железных дорог, линий электропередач, трубопроводов различного назначения на нефтяных и газовых месторождениях и т. д.). Расстояние между определяемыми НП здесь, как правило, колеблется от сотен метров до 20 км. В таких случаях целесообразно развивать ГСС пространственными векторными ходами (далее по тексту – векторными ходами) с применением относительного метода [12, 13, 15]. В векторном ходе в качестве исходных достаточно иметь два пункта ГГС (рис. 8, а). Если на участке работ требуется определять ЭВО геодезических систем координат, то в число исходных необходимо включать один или два дополнительных пункта ГГС (рис. 8, б и 8, в).

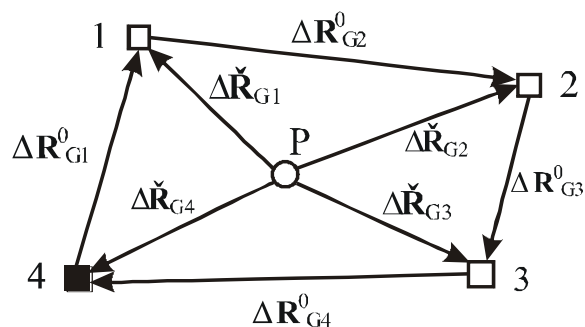
Для определения координат отдельных НП можно применять пространственную векторную засечку [11]. Эта засечка представляет собой пространственную фигуру, в общем случае – многоугольную пирамиду, у которой боковые ребра образованы базовыми векторами, полученными после выполненных относительных ГНСС-измерений в режиме «Static». В ее основании располагаются исходные НП, а в вершине – определяемый пункт (рис. 9). При построении засечек в число исходных желательно также включать один или два дополнительных НП.



□ – исходный пункт; ■ – дополнительный пункт; ○ – определяемый пункт

Рис. 8. Некоторые варианты схем построения векторных ходов:

а) схема 1; б) схема 2; в) схема 3



□ – исходный пункт; ■ – дополнительный пункт; ○ – определяемый пункт

Рис. 9. Вариант построения пространственной векторной засечки

В векторном ходе (рис. 8, а) измеряются базовые векторы  $\Delta \mathbf{R}_{Gi}^0 = [\Delta X_{Gi}^0 \ \Delta Y_{Gi}^0 \ \Delta Z_{Gi}^0]^T$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  – число базовых векторов) между пунктами хода. Эти векторы, как правило, представлены в общеземной системе координат  $(OXYZ)_G$ . На этапе математической обработки измерений плоские прямоугольные координаты и нормальные высоты исходных

НП преобразуются в пространственные, т. е. вычисляются их радиусы-векторы  $\mathbf{R}_{\Gamma k}^0 = [X_{\Gamma k}^0 \ Y_{\Gamma k}^0 \ Z_{\Gamma k}^0]^T$  ( $k = 1, 2, \dots, L$ ;  $L$  – число исходных НП) в референционной системе координат  $(OXYZ)_{\Gamma}$ . Затем по каждой из координатных осей системы  $(OXYZ)_{\Gamma}$  находятся вектор-столбец  $\mathbf{W} = [W_X \ W_Y \ W_Z]^T$  невязок координат и вектор-столбец поправок  $\mathbf{V}_i = [V_{Xi} \ V_{Yi} \ V_{Zi}]^T$  к измеренным значениям базовых векторов:

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{R}_{Gi}^0 - \mathbf{R}_{\Gamma 1}^0 - \mathbf{R}_{\Gamma 2}^0; \quad (27)$$

$$\mathbf{V}_i = -\mathbf{W} \cdot \mathbf{S}_i / S; \quad (28)$$

$$S_i = \sqrt{\Delta X_{Gi}^2 + \Delta Y_{Gi}^2 + \Delta Z_{Gi}^2}, \quad (29)$$

где  $\sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{R}_{Gi}^0$  – сумма измеренных базовых векторов;

$\mathbf{R}_{\Gamma 1}^0$  и  $\mathbf{R}_{\Gamma 2}^0$  – радиусы-векторы первого и последнего по ходу исходных пунктов;

$S_i$  – длина  $i$ -го базового вектора;

$S$  – сумма длин базовых векторов хода (общая длина хода).

Исправленные значения базовых векторов  $\Delta \mathbf{R}_{\Gamma i} = [\Delta X_{\Gamma i} \ \Delta Y_{\Gamma i} \ \Delta Z_{\Gamma i}]^T$  вычисляются в системе координат  $(OXYZ)_{\Gamma}$  по формуле

$$\Delta \mathbf{R}_{\Gamma i} = \Delta \mathbf{R}_{Gi}^0 + \mathbf{V}_i. \quad (30)$$

Радиусы-векторы НП векторного хода  $\mathbf{R}_{\Gamma j} = [X_{\Gamma j} \ Y_{\Gamma j} \ Z_{\Gamma j}]^T$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ;  $m$  – число определяемых НП) в референционной системе координат определяются, как

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Gamma 1} &= \mathbf{R}_{\Gamma 1}^0 + \Delta \mathbf{R}_{\Gamma 1}, \\ \mathbf{R}_{\Gamma 2} &= \mathbf{R}_{\Gamma 1} + \Delta \mathbf{R}_{\Gamma 2}, \\ &\dots \\ \mathbf{R}_{\Gamma m} &= \mathbf{R}_{\Gamma m-1} + \Delta \mathbf{R}_{\Gamma m-1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Вектор-столбец  $\mathbf{f} = [1 / f_X \ 1 / f_Y \ 1 / f_Z]^T$  относительных ошибок пространственных координат пунктов векторного хода находится по формуле

$$\mathbf{f} = 1 / (S / \mathbf{W}). \quad (32)$$

В конце уравнительных вычислений пространственные координаты пунктов векторного хода пересчитываются в систему плоских прямоугольных координат и нормальных высот.

Для оценки точности координат определяемых НП в системе плоских прямоугольных координат и нормальных высот вычисляется радиус-вектор  $\mathbf{R}_{\Gamma 2}^0 = [\dot{X}_{\Gamma 2}^0 \ \dot{Y}_{\Gamma 2}^0 \ \dot{Z}_{\Gamma 2}^0]^T$  конечного НП векторного хода (см. рис. 8, а)

$$\mathbf{R}_{\Gamma 2}^0 = \mathbf{R}_{\Gamma 1}^0 + \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{R}_{Gi}^0 \quad (33)$$

и выполняется переход от пространственных координат  $\dot{X}_{\Gamma 2}^0$ ,  $\dot{Y}_{\Gamma 2}^0$  и  $\dot{Z}_{\Gamma 2}^0$  к плоским прямоугольным координатам  $\dot{X}_2^0$ ,  $\dot{Y}_2^0$  и нормальной высоте  $\dot{H}_2^0$ . Затем вычисляются вектор-столбец  $\mathbf{N} = [N_X \ N_Y \ N_H]^T$  невязок и вектор-столбец  $\mathbf{F} = [1 / F_X \ 1 / F_Y \ 1 / F_H]^T$  относительных ошибок координат НП векторного хода:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_X \\ N_Y \\ N_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}_2^0 - X_2^0 \\ \dot{Y}_2^0 - Y_2^0 \\ \dot{H}_2^0 - H_2^0 \end{bmatrix}; \quad (34)$$

$$\mathbf{F} = 1 / (S / \mathbf{N}), \quad (35)$$

где  $X_2^0$ ,  $Y_2^0$  и  $H_2^0$  – взятые из каталога плоские прямоугольные координаты и нормальная высота конечного НП в векторном ходе;

$S$  – длина хода.

В пространственной векторной засечке для определения базовых векторов  $\Delta \mathbf{R}_{Gi}^0$  между определяемым и исходными пунктами применяется относительный метод ГНСС-измерений. Здесь геоцентрический радиус-

вектор  $\mathbf{R}_p = [X_p \ Y_p \ Z_p]^T$  определяемого пункта вычисляется в референционной системе координат по каждому базовому вектору отдельно (здесь число базовых векторов совпадает с числом исходных НП), как

$$\mathbf{R}_{Pi} = \mathbf{R}_{Gi}^0 + \Delta \mathbf{R}_{Gi}^0. \quad (36)$$

Окончательно пространственное положение определяемого НП при равноточных ГНСС-измерениях базовых векторов находится по формуле

$$\mathbf{R}_p = (\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_{Pi}) / n, \quad (37)$$

где  $n$  – число измеренных базовых векторов.

Средняя квадратическая ошибка единицы веса координат определяемого НП вычисляется, как

$$\mu = (\sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i^T \cdot \mathbf{V}_i)^{1/2} / (3 \cdot n - 1). \quad (38)$$

Здесь вектор-столбец вероятных поправок  $\mathbf{V}_i = [V_{Xi} \ V_{Yi} \ V_{Zi}]^T$  к измеренным базовым векторам определяется по формуле

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{R}_{Pi} - \mathbf{R}_p. \quad (39)$$

На заключительном этапе вычисленные пространственные координаты определяемого НП преобразуются в систему плоских прямоугольных координат и нормальных высот.

Представленные алгоритмы уравнивания векторных построений просты и при их использовании координаты определяемых НП получаются в системе координат исходных НП. Для выполнения уравнивательных вычислений значения базовых векторов выбираются из электронного протокола работы утилиты «Baselines» программного комплекса «GPSurvey», либо «Trimble Geomatics Office» и др.

Точность определения координат определяемых НП можно повысить, если измеренные значения базовых векторов  $\Delta \mathbf{R}_{Gi}^0$  преобразовать из об-

щеземной системы координат в референционную, т. е. получить радиусы-векторы  $\Delta \mathbf{R}_{\Gamma i}^0$ . Такое преобразование выполняется по формуле

$$\Delta \mathbf{R}_{\Gamma i}^0 = \mathbf{R}^T(\omega) \cdot \Delta \mathbf{R}_{Gi}^0, \quad (40)$$

в которой матрица вращения  $\mathbf{R}(\omega)$  координатных осей системы  $(OXYZ)_{\Gamma}$  относительно одноименных осей системы  $(OXYZ)_G$  определяется по формуле (11). После выполненного преобразования (40) в уравнительных вычислениях вместо базовых векторов  $\Delta \mathbf{R}_{Gi}^0$  следует использовать базовые векторы  $\Delta \mathbf{R}_{\Gamma i}^0$ .

Чтобы определить численные значения углов  $\omega$  для района работ, нужно измерить базовые векторы  $\Delta \mathbf{R}_{Gj}^0 = [\Delta X_{Gj}^0 \ \Delta Y_{Gj}^0 \ \Delta Z_{Gj}^0]^T$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ;  $M$  – число измеренных базовых векторов) между исходными пунктами ГГС. Например, в векторном ходе (см. рис. 8, б) и в векторной засечке (см. рис. 9) измеряются базовые векторы  $\Delta \mathbf{R}_{G1}^0$ ,  $\Delta \mathbf{R}_{G2}^0$ ,  $\Delta \mathbf{R}_{G3}^0$  и  $\Delta \mathbf{R}_{G4}^0$ . На основе измеренных базовых векторов формируется система линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 \cdot \omega &= \Delta \mathbf{R}_{G1}^0 - \Delta \mathbf{R}_{\Gamma 1}^0; \\ &\dots \\ \mathbf{D}_j \cdot \omega &= \Delta \mathbf{R}_{Gj}^0 - \Delta \mathbf{R}_{\Gamma j}^0; \\ &\dots \\ \mathbf{D}_M \cdot \omega &= \Delta \mathbf{R}_{GM}^0 - \Delta \mathbf{R}_{\Gamma M}^0. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь базовые векторы  $\Delta \mathbf{R}_{\Gamma j}^0 = [\Delta X_{\Gamma j}^0 \ \Delta Y_{\Gamma j}^0 \ \Delta Z_{\Gamma j}^0]^T$  вычисляются в референционной системе по пространственным координатам тех исходных пунктов ГГС, между которыми были выполнены относительные ГНСС-измерения

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{\Gamma 1}^0 &= \mathbf{R}_{\Gamma 2}^0 - \mathbf{R}_{\Gamma 1}^0; \\ &\dots \\ \Delta \mathbf{R}_{\Gamma M}^0 &= \mathbf{R}_{\Gamma L}^0 - \mathbf{R}_{\Gamma L-1}^0, \end{aligned} \quad (42)$$

а матрицы  $\mathbf{D}_j$  составлены из координат измеренных базовых векторов  $\Delta \mathbf{R}_{Gj}^0$  и имеют вид:

$$\mathbf{D}_j = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z_{Gj}^0 & \Delta Y_{Gj}^0 \\ \Delta Z_{Gj}^0 & 0 & -\Delta X_{Gj}^0 \\ -\Delta Y_{Gj}^0 & \Delta X_{Gj}^0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Из решения системы уравнений (41) находится вектор-столбец  $\omega$ .

Углы  $\omega$  лучше определять по пяти или шести базовым векторам, измеренным между исходными НП. Если эти углы определять по трем или четырем базовым векторам, то система уравнений (41) будет плохо обусловлена, что приведет к большим ошибкам вычисленных значений углов  $\omega$ . Для улучшения обусловленности этой системы уравнений требуется дополнительно измерить диагональ в четырехугольнике, например 1–3 (см. рис. 8, б и в). Лучшие результаты получаются тогда, когда в четырехугольнике дополнительно измерены две диагонали, например 1–3 и 2–4 (см. рис. 8, б и в).

Для уменьшения затрат на производство полевых работ можно не измерять базовые векторы между исходными НП, а использовать замыкающие векторы. В зависимости от сложности района работ применение такого приема может обеспечить значительный экономический эффект. Значения замыкающих векторов определяются путем суммирования измеренных базовых векторов (с учетом их направленности) между исходными и определяемыми НП, например, для построения векторного хода по схеме 3 (см. рис. 8, в):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{G1}^0 &= \Delta \mathbf{R}_{G1}^{\%} - \Delta \mathbf{R}_{G1}^{\%}; & \Delta \mathbf{R}_{G2}^0 &= \Delta \mathbf{R}_{G1}^{\%} + \sum_{i=2}^n \Delta \mathbf{R}_{Gi}^{\%}; \\ \Delta \mathbf{R}_{G3}^0 &= \Delta \mathbf{R}_{Gn}^{\%} - \Delta \mathbf{R}_{Gn}^{\%}; & \Delta \mathbf{R}_{G4}^0 &= \Delta \mathbf{R}_{Gn}^{\%} + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta \mathbf{R}_{Gi}^{\%}, \end{aligned} \quad (44)$$

где  $\Delta \mathbf{R}_{G1}^{\%}$ ,  $\Delta \mathbf{R}_{Gn}^{\%}$  – дополнительно измеренные базовые векторы в общеземной системе координат.

Для этого же построения базовые векторы  $\Delta \mathbf{R}_{G5}^0$  и  $\Delta \mathbf{R}_{G6}^0$  по диагоналям 1–3 и 2–4 четырехугольника вычисляются, как

$$\Delta \mathbf{R}_{G5}^0 = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{R}_{Gi}^0; \Delta \mathbf{R}_{G6}^0 = \Delta \mathbf{R}_{G1}^0 + \sum_{i=2}^{n-1} \Delta \mathbf{R}_{Gi}^0 + \Delta \mathbf{R}_{Gn}^0. \quad (45)$$

В построении по схеме 2 (см. рис. 8, б) можно измерить только базовые векторы  $\Delta \mathbf{R}_{G1}^0$  и  $\Delta \mathbf{R}_{G3}^0$ . Базовые векторы  $\Delta \mathbf{R}_{G2}^0$ ,  $\Delta \mathbf{R}_{G4}^0$  и базовый вектор  $\Delta \mathbf{R}_{G5}^0$  между исходными пунктами 1 и 3 могут быть вычислены, как

$$\Delta \mathbf{R}_{G5}^0 = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{R}_{Gi}^0; \Delta \mathbf{R}_{G2}^0 = \Delta \mathbf{R}_{G5}^0 - \Delta \mathbf{R}_{G1}^0; \Delta \mathbf{R}_{G4}^0 = \Delta \mathbf{R}_{G5}^0 + \Delta \mathbf{R}_{G3}^0. \quad (46)$$

Если в векторной засечке (рис. 9) измерены базовые векторы только между определяемым и исходными НП, то базовые векторы между исходными НП по ее периметру и по диагоналям вычисляются так же, как и в двух предыдущих случаях.

## 6. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ГНСС-ИЗМЕРЕНИЙ

Определение координат пунктов с использованием ГНСС-технологий может выполняться либо абсолютным, либо относительным методами. При использовании абсолютного метода спутниковый приемник устанавливается на определяемом НП и выполняет синхронные ГНСС-измерения нескольких КА (не менее четырех). В процессе математической обработки этих измерений вычисляется радиус-вектор определяемого пункта  $\mathbf{R}_G$  в той общеземной системе координат  $(OXYZ)_G$ , в которой задаются пространственные положения навигационных КА используемой для работы ГНСС. В настоящее время для пространственно-временного обеспечения проводимых навигационных и топографо-геодезических работ используются ГНСС GPS (NAVSTAR) и ГЛОНАСС. Для примера в качестве рабочей ГНСС будет принята система GPS (NAVSTAR). Пространственное положение спутников этой ГНСС задается в общеземной системе координат WGS-84. Поэтому под общеземной системой здесь будет подразумеваться система координат WGS-84. Чтобы получить пространственные координаты НП (радиус-вектор  $\mathbf{R}_P$ ) в некоторой референцной системе  $(OXYZ)_P$  (например, СК-42), необходимо выполнить матричное преобразование (10) геоцентрического радиуса-вектора  $\mathbf{R}_G$  НП из общеземной системы координат в референцную. Для этого необходимо знать ЭВО референцной системы координат относительно общеземной.

При использовании относительного метода один спутниковый приемник устанавливается на исходном НП, второй – на определяемом. При этом, как правило, пространственное положение исходного НП задается (известно) в референцной системе координат. Если во время одного сеанса относительных ГНСС-измерений одновременно задействовано три и более спутниковых приемника, то время выполнения полевых работ существенно сокращается. В процессе работы приемники синхронно отслеживают не-

сколько спутников ГНСС. После математической обработки результатов ГНСС-измерений определяется вектор-столбец  $\Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1} = [\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z]_{Gi,i+1}^T$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Здесь  $n$  – число измеренных относительных положений (базовых векторов) определяемых НП к исходным НП в системе координат  $(OXYZ)_G$ . Если бы было известно пространственное положение  $\mathbf{R}_{Gi}$  исходного НП в общеземной системе координат, то пространственное положение  $\mathbf{R}_{Gi+1}$  определяемого НП в этой же системе можно определить по формуле

$$\mathbf{R}_{Gi+1} = \mathbf{R}_{Gi} + \Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1}. \quad (47)$$

Если будет известно пространственное положение  $\mathbf{R}_{\Gamma i}$  исходного НП и вектор  $\Delta \mathbf{R}_{\Gamma i,i+1} = [\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z]_{\Gamma i,i+1}^T$  относительного положения НП в референцной системе координат, то пространственное положение  $\mathbf{R}_{\Gamma i+1}$  определяемого НП в этой же системе можно найти, как

$$\mathbf{R}_{\Gamma i+1} = \mathbf{R}_{\Gamma i} + \Delta \mathbf{R}_{\Gamma i,i+1}. \quad (48)$$

Здесь вектор  $\Delta \mathbf{R}_{\Gamma i,i+1}$  определяется из равенства

$$\Delta \mathbf{R}_{\Gamma i,i+1} = \mathbf{R}^T(\omega) \cdot \Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1}. \quad (49)$$

Перемножив матрицы  $\mathbf{R}^T(\omega)$  на вектор  $\Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1}$  в формуле (49) и поделив при этом вектор  $\omega$ , запишем следующее матричное выражение вида

$$\Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1} = \Delta \mathbf{R}_{\Gamma i,i+1} + \mathbf{D}_4 \cdot \omega. \quad (50)$$

В выражении (50) матрица  $\mathbf{D}_4$  составлена из компонент вектора  $\Delta \mathbf{R}_G$  и имеет вид

$$\mathbf{D}_4 = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z_G & \Delta Y_G \\ \Delta Z_G & 0 & -\Delta X_G \\ -\Delta Y_G & \Delta X_G & 0 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

С учетом выражения (48) равенство (50) можно записать, как

$$\Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1} = \mathbf{D}_4 \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_{\Gamma i+1} - \mathbf{R}_{\Gamma i}. \quad (52)$$

При формировании матрицы  $\mathbf{D}_4$  следует учитывать направление вектора  $\Delta \mathbf{R}_G$ , оно должно совпадать с направлением вектора  $\Delta \mathbf{R}_\Gamma$  из выражения (48).

Матричное преобразование (52) является математической моделью измерений и может быть представлено в общем виде:

$$\Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1} = \Delta \mathbf{R}_G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}_{\Gamma i}, \mathbf{R}_{\Gamma i+1}). \quad (53)$$

Разложив его правую часть в ряд Тейлора в малой окрестности априорных значений векторов  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{R}_{\Gamma i}$  и  $\mathbf{R}_{\Gamma i+1}$ , ограничившись при этом первыми членами разложения, можно записать:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1} = & \Delta \mathbf{R}_G(\boldsymbol{\omega}', \mathbf{R}'_{\Gamma i}, \mathbf{R}'_{\Gamma i+1}) + \left. \frac{\partial \Delta \mathbf{R}_G}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right|_{\substack{\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}' \\ \mathbf{R}_\Gamma=\mathbf{R}'_\Gamma}} \cdot \delta \boldsymbol{\omega} + \\ & + \left. \frac{\partial \Delta \mathbf{R}_G}{\partial \mathbf{R}_{\Gamma i}} \right|_{\substack{\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}' \\ \mathbf{R}_\Gamma=\mathbf{R}'_\Gamma}} \cdot \delta \mathbf{R}_i + \left. \frac{\partial \Delta \mathbf{R}_G}{\partial \mathbf{R}_{\Gamma i+1}} \right|_{\substack{\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}' \\ \mathbf{R}_\Gamma=\mathbf{R}'_\Gamma}} \cdot \delta \mathbf{R}_{i+1}, \end{aligned} \quad (54)$$

где  $\boldsymbol{\omega}'$ ,  $\mathbf{R}'_{\Gamma i}$  и  $\mathbf{R}'_{\Gamma i+1}$  – априорные значения векторов  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{R}_{\Gamma i}$  и  $\mathbf{R}_{\Gamma i+1}$ .

Величины  $\delta \boldsymbol{\omega}$ ,  $\delta \mathbf{R}_i$  и  $\delta \mathbf{R}_{i+1}$  являются поправками к априорным значениям векторов  $\boldsymbol{\omega}'$ ,  $\mathbf{R}'_{\Gamma i}$  и  $\mathbf{R}'_{\Gamma i+1}$  и определяются, как

$$\delta \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}'; \quad \delta \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{\Gamma i} - \mathbf{R}'_{\Gamma i}; \quad \delta \mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_{\Gamma i+1} - \mathbf{R}'_{\Gamma i+1}. \quad (55)$$

Для нахождения частных производных в выражении (54) воспользуемся равенством (52). Можно записать

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{R}_G}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{D}_4; \quad \frac{\partial \Delta \mathbf{R}_G}{\partial \mathbf{R}_{\Gamma i}} = -\mathbf{E}; \quad \frac{\partial \Delta \mathbf{R}_G}{\partial \mathbf{R}_{\Gamma i+1}} = \mathbf{E}, \quad (56)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица размерности  $3 \times 3$ .

Подставив зависимости (56) в разложение (54), получим

$$\Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1} = \Delta \mathbf{R}_G(\boldsymbol{\omega}', \mathbf{R}'_{\Gamma i}, \mathbf{R}'_{\Gamma i+1}) + \mathbf{D}'_4 \cdot \delta \boldsymbol{\omega} - \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{R}_i + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{R}_{i+1}. \quad (57)$$

В равенстве (57) матрица  $\mathbf{D}'_4$  вычисляется с использованием априорных (приближенных) значений векторов  $\Delta \mathbf{R}'_{\Gamma}$  и  $\boldsymbol{\omega}'$  по формулам:

$$\mathbf{D}'_4 = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z'_G & \Delta Y'_G \\ \Delta Z'_G & 0 & -\Delta X'_G \\ -\Delta Y'_G & \Delta X'_G & 0 \end{bmatrix}; \quad (58)$$

$$\Delta \mathbf{R}'_{Gi,i+1} = \Delta \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}', \mathbf{R}'_{\Gamma i}, \mathbf{R}'_{\Gamma i+1}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}') \cdot \Delta \mathbf{R}'_{\Gamma i,i+1}; \quad (59)$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}') = \begin{bmatrix} 1 & \omega'_Z & -\omega'_Y \\ -\omega'_Z & 1 & \omega'_X \\ \omega'_Y & -\omega'_X & 1 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Теперь для одного измерения [16] равенство (57) можно записать, как

$$\mathbf{D}'_4 \cdot \delta \boldsymbol{\omega} - \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{R}_i + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{R}_{i+1} = \Delta \mathbf{R}^{\%}_{Gi,i+1} - \Delta \mathbf{R}'_{Gi,i+1} + \mathbf{V}, \quad (61)$$

где  $\Delta \mathbf{R}^{\%}_{Gi,i+1}$  – трехмерный вектор-столбец результатов относительных ГНСС-измерений в общеземной системе координат (измеренный базовый вектор, проекции которого выбираются из протокола работы утилиты «Baselines» программного комплекса «GPSurvey» или «Trimble Geomatics Office» и т. п.);

$\Delta \mathbf{R}'_{Gi,i+1}$  – трехмерный вектор-столбец (вычисленный базовый вектор), определяемый по формуле (59) с использованием приближенных значений векторов  $\boldsymbol{\omega}'$  и  $\Delta \mathbf{R}'_{\Gamma i,i+1}$ ;

$\mathbf{V}$  – трехмерный вектор-столбец поправок к измеренному вектору  $\Delta \mathbf{R}^{\%}_G$ .

Выражение (61) является уравнением поправок, в котором матрицы  $\mathbf{D}'_4$  и  $\mathbf{E}$  будут матрицами коэффициентов, векторы  $\delta\boldsymbol{\omega}$ ,  $\delta\mathbf{R}_i$  и  $\delta\mathbf{R}_{i+1}$  – неизвестными поправками к приближенным (вычисленным) значениям векторов  $\boldsymbol{\omega}'$ ,  $\mathbf{R}'_{\Gamma i}$  и  $\mathbf{R}'_{\Gamma i+1}$ , а разность  $\Delta\mathbf{R}^0_{Gi,i+1} - \Delta\mathbf{R}'_{Gi,i+1}$  – вектором правой части.

Матрицу  $\mathbf{D}'_4$  в формуле (58) предпочтительнее формировать из компонент измеренного базового вектора  $\Delta\mathbf{R}^0_G$ . Это имеет большое значение, так как при решении систем нелинейных уравнений итерационными методами более точное значение элементов матрицы коэффициентов линеаризованной системы уравнений дает более точное ее решение и приводит к уменьшению числа итераций. В преобладающем числе случаев вектор  $\Delta\mathbf{R}^0_G$  известен точнее, чем пространственные положения исходных НП.

Для  $n$  относительных ГНСС-измерений уравнение (61) образует систему линейных уравнений поправок

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'_{41} \cdot \delta\boldsymbol{\omega} - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_1 + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_2 &= \Delta\mathbf{R}^0_{G1,2} - \Delta\mathbf{R}'_{G1,2} + \mathbf{V}_1; \\ \mathbf{D}'_{42} \cdot \delta\boldsymbol{\omega} - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_2 + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_3 &= \Delta\mathbf{R}^0_{G2,3} - \Delta\mathbf{R}'_{G2,3} + \mathbf{V}_2; \\ &\dots \\ \mathbf{D}'_{4n} \cdot \delta\boldsymbol{\omega} - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_{p-1} + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_p &= \Delta\mathbf{R}^0_{Gn} - \Delta\mathbf{R}'_{Gn} + \mathbf{V}_n, \end{aligned} \quad (62)$$

где  $p$  – число определяемых пунктов.

Систему уравнений поправок (62) можно представить как СЛАУ вида

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F} + \mathbf{V}. \quad (63)$$

В ней матрица коэффициентов  $\mathbf{A}$  является блочной матрицей и в общем случае может быть записана, как

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{41} & -\mathbf{E} & \mathbf{E} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}'_{42} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \mathbf{D}'_{4n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad (64)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная  $3 \times 3$  матрица;

$\mathbf{0}$  – нулевая  $3 \times 3$  матрица.

Вектор-столбец неизвестных  $\mathbf{X}$  в СЛАУ (63) составлен из поправок к приближенным значениям малых углов поворота  $\omega'$ , координатам определяемых НП  $\mathbf{R}'_{\Gamma i}$ ,  $\mathbf{R}'_{\Gamma i+1}$  и имеет вид:

$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} \delta\omega^T & \delta\mathbf{R}_1^T & \delta\mathbf{R}_2^T & \dots & \delta\mathbf{R}_{P-1}^T & \delta\mathbf{R}_P^T \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Поправки к приближенным значениям малых углов поворота здесь выступают только в роли согласующих параметров. Вектор правой части  $\mathbf{F}$  является вектором-столбцом размерности  $3 \times n$  и определяется как разность измеренных базовых векторов  $\Delta\mathbf{R}_{Gi,i+1}^0$  и их вычисленных значений  $\Delta\mathbf{R}_{Gi,i+1}$ :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{R}_{G1,2}^0 - \Delta\mathbf{R}'_{G1,2} \\ \Delta\mathbf{R}_{G2,3}^0 - \Delta\mathbf{R}'_{G2,3} \\ \dots \\ \Delta\mathbf{R}_{Gn}^0 - \Delta\mathbf{R}'_{Gn} \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Если за приближенные значения малых углов поворота принять нулевые значения  $\omega' = 0$ , то в равенстве (55) будет  $\delta\omega = \omega$ . Тогда вектор неизвестных (65) примет вид:

$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} \omega^T & \delta\mathbf{R}_1^T & \delta\mathbf{R}_2^T & \dots & \delta\mathbf{R}_{P-1}^T & \delta\mathbf{R}_P^T \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Решение системы линейных уравнений поправок (62) выполняется методом последовательных приближений. Пример формирования системы линейных уравнений поправок при уравнивании геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений представлен в прил. 3.

Решение задачи, рассмотренное выше, можно выполнить иначе. Для  $k$  относительных ГНСС-измерений формируется СЛАУ:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{31} \cdot \omega &= \Delta\mathbf{R}_{G1}^0 - \Delta\mathbf{R}_{\Gamma 1}; \\ &\dots \\ \mathbf{D}_{3K} \cdot \omega &= \Delta\mathbf{R}_{GK}^0 - \Delta\mathbf{R}_{\Gamma K}, \end{aligned} \quad (68)$$

в которой матрица  $\mathbf{D}_3$  составлена из компонент вектора  $\Delta \mathbf{R}_\Gamma$  и имеет вид:

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z_\Gamma & \Delta Y_\Gamma \\ \Delta Z_\Gamma & 0 & -\Delta X_\Gamma \\ -\Delta Y_\Gamma & \Delta X_\Gamma & 0 \end{bmatrix}.$$

После решения СЛАУ (68) находятся углы малых поворотов  $\omega$ . Затем уже после решения системы уравнений поправок (62) – пространственные положения определяемых НП. При таком подходе данная система уравнений упрощается, так как из нее исключается вектор неизвестных  $\delta \omega$ . Для определения вектора  $\omega$  в СЛАУ (68) можно применить один из двух приемов. Первый – измерить базовые векторы между опорными НП. Например, векторы  $\Delta \mathbf{R}_{G2,1}^0$ ,  $\Delta \mathbf{R}_{G2,3}^0$  и  $\Delta \mathbf{R}_{G3,1}^0$  (прил. 3, рис. П.3.1). Но такой подход приводит к увеличению затрат на выполнение полевых работ. Второй – вместо непосредственно измеренных базовых векторов между опорными НП взять замыкающие векторы, полученные из суммы измеренных базовых векторов по векторным ходам, проложенными между опорными и определяемыми НП. Например, базовые векторы  $\Delta \mathbf{R}_{G2,1}^0$ ,  $\Delta \mathbf{R}_{G2,3}^0$  и  $\Delta \mathbf{R}_{G3,1}^0$  (прил. 3, рис. П.3.1) могут быть найдены, как  $\Delta \mathbf{R}_{G3,1}^0$ :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{G2,1}^0 &= \Delta \mathbf{R}_{G2,4}^0 + \Delta \mathbf{R}_{G4,6}^0 + \Delta \mathbf{R}_{G6,1}^0; \\ \Delta \mathbf{R}_{G2,3}^0 &= \Delta \mathbf{R}_{G2,4}^0 + \Delta \mathbf{R}_{G4,5}^0 + \Delta \mathbf{R}_{G3,5}^0; \\ \Delta \mathbf{R}_{G3,1}^0 &= \Delta \mathbf{R}_{G3,5}^0 + \Delta \mathbf{R}_{G5,6}^0 + \Delta \mathbf{R}_{G6,1}^0. \end{aligned} \tag{69}$$

Следует иметь в виду, что в равенствах (69) алгебраическое сложение векторов нужно выполнять с учетом их направленности. На основе измеренных либо вычисленных (как замыкающие векторы) значений базовых векторов формируется СЛАУ (68). После ее решения находится вектор  $\omega$ .

Представленный метод уравнивания дает высокие точности определения координат определяемых НП в геодезических сетях, создаваемых с использованием ГНСС-технологий. Он может применяться при развитии локальных и региональных геодезических сетей сгущения. Для достижения хороших результатов желательно, чтобы геодезические построения

содержали в себе не менее 4 исходных НП. Соблюдение этого условия приводит к тому, что система линейных уравнений (62) будет хорошо обусловлена и мало чувствительна к ошибкам исходных данных: к ошибкам координат исходных пунктов и результатов измерений.

С целью уменьшения численных значений поправок  $\mathbf{V}$  к измеренным значениям базовых векторов можно по формуле (49) измеренные базовые векторы  $\Delta \mathbf{R}_{i,i+1}^{\%}$  преобразовать из общеземной системы координат в референцную и получить базовые векторы  $\Delta \mathbf{R}_{\Gamma i,i+1}^{\%}$ :

$$\Delta \mathbf{R}_{\Gamma i,i+1}^{\%} = \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\omega}) \cdot \Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1}^{\%}. \quad (70)$$

Затем эти векторы использовать в формулах (61), (62), (64), (66) и (П.3.1)–(П.3.3) из прил. 3 в качестве измеренных, т. е. вместо векторов  $\Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1}^{\%}$ . В этом случае необходимо предварительно определить вектор-столбец  $\boldsymbol{\omega}$  малых углов поворота координатных осей, как это было сказано выше. Здесь следует иметь в виду, что определение вектора  $\boldsymbol{\omega}$  по трем исходным НП дает плохие результаты. Лучше решать эту задачу по четырем исходным НП [4, 5].

## **7. НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ И ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ГНСС-ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ТОПОГРАФО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РАБОТ**

В последние годы ГНСС-технологии стали активно использоваться не только для создания различных геодезических сетей, но и при выполнении топографических съемок участков земной поверхности. В этом случае процесс создания планов различных масштабов значительно ускоряется. При выполнении крупномасштабных топографических съемок должны выдерживаться жесткие требования к точности определения плановых координат и высотных отметок съемочных точек (пикетов). Поэтому для надежного и качественного выполнения таких съемок исполнителю следует соблюдать определенные технологические приемы и правила производства полевых работ с использованием спутниковых приемников. Ниже приведем некоторые из них [7, 8].

Точные топографо-геодезические работы желательно производить с помощью геодезической (фазовой) аппаратуры [10], лучше двухчастотной. Соблюдение последнего условия во многих случаях значительно ослабляет влияние на результаты измерений ионосферной рефракции, приводящей к большим ошибкам определения пространственного положения (особенно значений высот) приемных антенн подвижного (роверного) и неподвижного (базового) приемников. Во время работы базовый приемник необходимо устанавливать, по возможности, на открытых местах.

На открытых площадях подвижным приемником можно выполнять съемку практически в любых интервалах времени в течение суток. На закрытых участках местности работа осуществляется в такие интервалы времени, в течение которых обеспечивается устойчивый прием сигналов как минимум с 6 навигационных спутников, равномерно расположенных над горизонтом. При этом высоты спутников над местным горизонтом должны быть не менее  $10^\circ$  (этот предел устанавливается на стадии настроек приемников), геометрический фактор  $PDOP \leq 6$ , отношение сиг-

нал/шум не меньше 15. Для экономии памяти приемников и увеличения времени их непрерывной работы в сеансе следует разумно подходить к выбору дискретности записи измерений в подвижный и неподвижный приемники. Обычно эта дискретность составляет величину от 5 до 20 с.

Если пикеты расположены у основания каких-либо строений, сооружений или иных объектов, исполнителю необходимо следить за тем, чтобы не было срыва радиосигнала от навигационных спутников. Для этого при подходе к таким сооружениям следует постепенно поднимать антенну спутникового приемника и устанавливать ее над пикетом выше этих объектов.

При передвижении от пикета к пикету необходимо следить за тем, чтобы не было срывов радиосигналов. Для этого следует прокладывать маршруты передвижения так, чтобы обеспечивалась устойчивая связь как минимум с четырьмя спутниками. Бывают случаи, когда исполнителю необходимо пронести антенну роверного приемника под такими сооружениями, как узкие мосты, воздушные петли трубопроводов и т. п. В таких ситуациях антенна приемника медленно подносится к объекту с последующей остановкой под ним на несколько секунд. После чего возобновляется медленное движение дальше по маршруту на безопасное расстояние от препятствия. В этом случае приемник успевает восстановить утраченные каналы радиосвязи с навигационными спутниками.

Если пикет расположен у основания объекта (узкие высокие сооружения типа деревянных или железобетонных столбов и т. п.), над которым нельзя приподнять антенну, то она не доводится до этого объекта на расстояние, не превышающее половины значения допустимой ошибки выполнения съемки заданного масштаба. В противном случае будет получена смещенная оценка определяемых координат пикета. Нередко величина такого смещения значительно превосходит заданную ошибку определения координат, хотя на этапе математической обработки ГНСС-измерений средняя квадратическая ошибка находится в допустимых пределах.

В зависимости от сложности участка работы, требуемой точности определения координат и погодных условий топографическая съемка участка местности может выполняться как в режимах «непрерывная кинематика» или «stop-and-go», так и в режиме «статика».

Общий процесс создания съемочных сетей складывался из тщательной проработки отдельных этапов работы – рекогносцировка и подготовка имеющихся пунктов ГГС, планирование полевых измерений, закрепление на местности определяемых пунктов для установки на них спутниковых приемников, выполнение ГНСС-измерений, статистическая обработка полученных результатов измерений.

На этапе планирования работ создается общий проект сети, учитывающий топографию местности, наличие сохранившихся пунктов ГГС и грунтовых реперов и их взаимное расположение, а также возможность подъезда или подхода к ним и их пригодность к работе. Местоположение определяемых НП выбирается таким образом, чтобы они располагались как можно ближе к снимаемым объектам и находились от пунктов ГГС на удалении не более 15 км. При этом определяемые НП должны закрепляться на достаточном удалении от возвышающихся над землей инженерных сооружений, линий электропередач, крутых холмов, деревьев и т. д. При наличии грунтовых в районе работ нивелирных реперов, их желательно включать в создаваемую съемочную сеть. Это позволит более точно получать высотные отметки определяемых пунктов, так как значительное число высотных отметок пунктов ГГС получено из тригонометрического нивелирования. Для повышения жесткости съемочной сети и сокращения сроков ее создания на исходных и определяемых пунктах следует спланировать одновременную работу двух, трех и более спутниковых приемников (при их наличии). Для этого рассчитывается время переездов и переходов, подготовки пунктов и приборов для выполнения ГНСС-измерений. Должны также учитываться рекомендации утилиты Plan программы GPSurvey и др. о времени появления в данном районе наилучшей геометрии созвездия навигационных спутников. В итоге составляется временной график синхронной работы приемников. Заметим, что для выполнения относительных ГНСС-измерений требуется всего два приемника. В этом случае из одного сеанса будет определен только один базовый вектор. Если же измерения выполняются тремя и более приемниками, то из одного сеанса может быть получено сразу не менее трех базовых векторов, образующих пространственные треугольники. Помимо повышения жесткости сети здесь

получаются дополнительные измерения, что позволяет на этапе уравнивания сети осуществить качественную отбраковку плохих векторов.

При подготовке геодезических пунктов к ГНСС-измерениям помимо прочих работ вокруг них вырубается поросль на высоту, не превышающую высоту устанавливаемой приемной антенны. Причем с удалением от нее поросль убирается с учетом угла «отсечки» спутников, который обычно находится в пределах от  $10^\circ$  до  $20^\circ$ . Все это делается для того, чтобы для измерений как можно больше расширить видимый горизонт и ослабить отрицательное влияние отраженных радионavigационных сигналов. Перед началом работы спутниковых приемников необходимо позаботиться о неподвижности установленного на пункте штатива (вешки и т. п.) с приемной антенной. В весенний период ножки штатива нагреваются солнцем, поэтому из-за подтаивания снега за время сеанса фазовый центр антенны смещается относительно своего изначального положения до нескольких сантиметров в плане и по высоте. В летний период смещение антенны обусловлено перенасыщенным водой грунтом, мягким слоем из растений и их остатков.

Продолжительность сеанса ГНСС-измерений зависит от геометрии созвездия навигационных спутников, степени открытости горизонта, типа приемников, заданной точности определения координат НП сети. Его величина лежит в пределах от десятков минут до нескольких часов. Лучше всего измерения выполнять двухчастотной фазовой аппаратурой относительным методом в режиме СТАТИКА. Дискретность записи измерений в память приемника обычно составляет от 10 до 15 с. Уменьшение дискретности не повышает точность определений, а только зря занимает память приемника. Последнее обстоятельство приводит к сокращению общего времени работы приемника до момента очистки его памяти.

Для получения оптимальных статистических оценок определяемых базовых векторов на этапе математической обработки ГНСС-измерений следует подбирать рабочие созвездия спутников путем варьирования их минимальных высот над горизонтом. Иногда возникают такие ситуации, когда два спутника находятся в одном направлении. При этом нередко статистическая оценка базового вектора получается неудовлетворительной. В таком случае на этапе обработки измерений следует исключить

один из спутников, статистическая оценка базового вектора при этом, как правило, существенно улучшается.

Соблюдение известных правил выполнения ГНСС-измерений и приведенных выше рекомендаций позволит надежно, в короткие сроки и с минимальными затратами создавать геодезические сети в заданном районе.

При проведении полевых работ нередко бывает так, что определяемый объект находится в труднодоступном или недоступном месте. Например, опоры линий электропередач, расположенные в озерах или болотах, а также около трансформаторных площадок или электроподстанций. В последних двух случаях ГНСС-определения лучше не выполнять из-за электромагнитного поля, которое сильно искажает радионавигационные сигналы. В подобных случаях следует применять методики, изложенные ниже.

Пространственные координаты недоступных или труднодоступных точек определяются прямыми угловыми засечками или створными промерами (рис. 10) [6]. В случае использования прямой угловой засечки в местах прямой видимости на пункт (пикет)  $P$  рядом с ним разбивается временный базис, состоящий из трех базисных точек  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ , не лежащих на одной прямой. Их плоские прямоугольные координаты  $X_i$ ,  $Y_i$  и высотная отметка  $H_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определяются после соответствующей обработки ГНСС-измерений. Здесь измерения проводятся либо в статическом, либо в кинематическом режиме в зависимости от требуемой точности топографической съемки. Между сторонами базиса и направлениями на точку  $P$  теодолитом измеряются горизонтальные углы  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ).

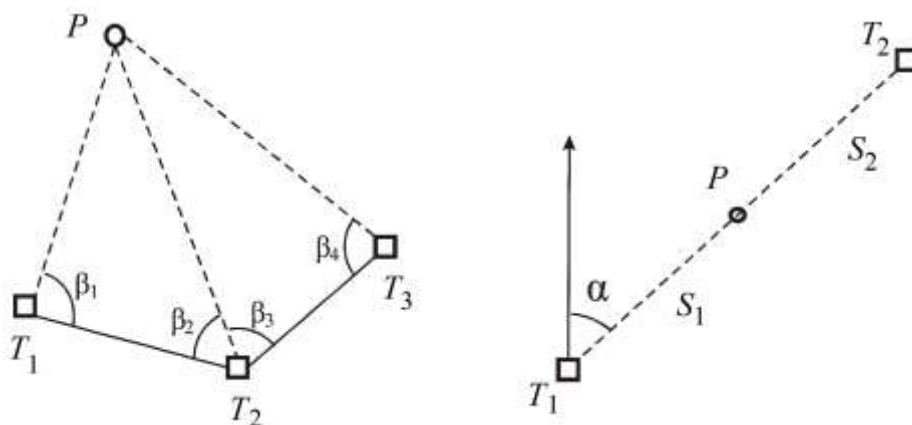


Рис. 10. Примеры прямой угловой засечки и створного промера

Координаты  $X_p$  и  $Y_p$  определяемого пункта  $P$  вычисляются по формулам Юнга [18]:

$$\begin{aligned} X_p &= (X_1 \cdot \operatorname{ctg} \beta_2 - Y_1 + X_2 \cdot \operatorname{ctg} \beta_1 + Y_2) / (\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2); \\ Y_p &= (Y_1 \cdot \operatorname{ctg} \beta_2 + X_1 + Y_2 \cdot \operatorname{ctg} \beta_1 - X_2) / (\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2). \end{aligned} \quad (71)$$

Координаты точки  $P$  вычисляются дважды – из одного и другого треугольников. В качестве окончательных значений координат принимаются их средние значения.

Чтобы получить высотную отметку  $H_p$  определяемой точки, с пунктов временного базиса необходимо измерить на нее вертикальные углы  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и по каждому направлению вычислить отметки  $H_{pi}$  [9]:

$$H_{pi} = H_i + S_i \cdot \sin v_i. \quad (72)$$

Здесь расстояния  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) между пунктами временного базиса и точкой  $P$  вычисляются по уже известным координатам базисных точек и пикета:

$$S_i = \sqrt{(X_i - X_p)^2 + (Y_i - Y_p)^2}. \quad (73)$$

За окончательную высотную отметку принимается среднее значение из вычисленных отметок  $H_{pi}$ .

В случае створных промеров на местности также разбивается временный базис, у которого базисные точки  $T_1$ ,  $T_2$  и определяемый пункт  $P$  находятся на одной прямой (см. рис. 10). При этом пункт  $P$  может находиться не только внутри базиса, но и за его пределами. Здесь координаты базисных точек  $T_1$  и  $T_2$  определяются подвижным приемником, а рулеткой или дальномером измеряется длина либо линии  $S_1$ , либо  $S_2$ . В зависимости от ситуации длины этих линий можно измерять как непосредственно в створе  $T_1 T_2$ , так и рядом с ним между перпендикулярами, опущенными к этой линии в базисных точках и пикету. Из решения обратной геодезической задачи находится значение дирекционного угла  $\alpha$  базисной линии. Затем из

решения прямой геодезической задачи – плоские координаты  $X_p$  и  $Y_p$ . Для определения высотной отметки пикета с базисных точек на пикет измеряются вертикальные углы и для вычислений применяется формула (72).

Координаты центров оснований таких сооружений, как металлические опоры линий электропередач, заводские трубы и т. п., определяются следующим образом. Как и в предыдущем случае, на местности разбивается линейный базис с базисными точками  $T_1$  и  $T_2$ , но находящимися на одинаковом удалении от центра основания таких сооружений. Подвижным приемником определяют их координаты. Из решения задачи линейного интерполирования координат этих базисных точек находятся координаты центров оснований сооружения. При работе у опор линий электропередач необходимо следить за тем, чтобы базисные точки не находились под проводами.

Другой способ определения координат недоступных объектов при проведении топографических съемок спутниковыми приемниками заключается в следующем [9]. На одной прямой линии с точкой  $P$  в удобных местах располагаются два базисных пункта  $T_1$  и  $T_2$ , на которых проводятся ГНСС-измерения (рис. 11). Пункт  $P$  может находиться как внутри отрезка  $T_1T_2$ , так и за его пределами. В некотором удалении от базиса  $T_1T_2$  между перпендикулярами к нему измеряется расстояние  $S$ .

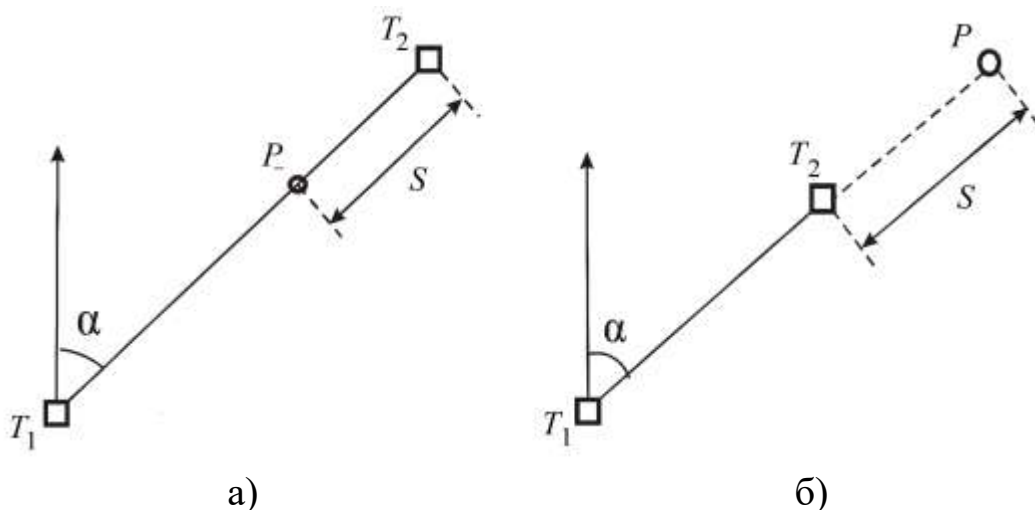


Рис. 11. Схемы съемки недоступных объектов:

а) схема 1; б) схема 2

По известным координатам  $X_\kappa$  и  $Y_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2$ ) базисных пунктов можно вычислить дирекционный угол  $\alpha$  линии  $T_1T_2$ :

$$\alpha = \arctg[(Y_2 - Y_1)/(X_2 - X_1)]. \quad (74)$$

Теперь координаты точки  $P$  для схем 1 и 2 (см. рис. 11) находятся по формулам (75) и (76) соответственно:

$$X_p = X_2 - S \cdot \cos \alpha; \quad Y_p = Y_2 - S \cdot \sin \alpha; \quad (75)$$

$$X_p = X_2 + S \cdot \cos \alpha; \quad Y_p = Y_2 + S \cdot \sin \alpha. \quad (76)$$

Если измерен вертикальный угол хотя бы по одному из направлений  $T_1P$  или  $T_2P$ , то высотная отметка определяемого пункта находится по формуле (72).

При использовании прямой угловой засечки (см. рис. 10) необходимо иметь в виду следующий факт. Если горизонтальные углы измерены теодолитом малой точности, то при вычислении координат точки  $P$  по формулам Юнга в мантиссах чисел, характеризующих координаты пунктов временного базиса, в зависимости от удаленности точки  $P$ , следует удерживать только 3 или 4 цифры слева от запятой. Это означает, что необходимо перейти в новую прямоугольную систему координат ( $O'X'Y'$ ), у которой оси параллельны одноименным осям исходной системы ( $OXY$ ), но с перемещенным их началом. После того, как по формулам Юнга будут получены координаты точки  $P$  в системе ( $O'X'Y'$ ), их следует преобразовать в исходную систему. Если этого не сделать, произойдет существенное снижение точности вычисленных координат определяемого НП.

В качестве примера приведем реальные данные, полученные в ходе выполнения производственных работ [9]. Здесь координаты пунктов временного базиса (табл. 1) определены спутниковым приемником 4700 фирмы Trimble Navigation в режиме быстрой статики, а горизонтальные углы измерены теодолитом Т30 и имеют следующие значения:  $\beta_1 = 53^\circ 42'$ ,  $\beta_2 = 87^\circ 15'$ ,  $\beta_3 = 38^\circ 53'$ ,  $\beta_4 = 94^\circ 24'$  (см. рис. 10). Приведем два варианта вычисления координат определяемого пункта  $P$ : с укороченными (вари-

ант 1) и полными (вариант 2) мантиссами чисел, характеризующими плоские прямоугольные координаты пунктов временного базиса (табл. 2).

Таблица 1

Координаты пунктов временного базиса

| Название точки | X (м)        | Y (м)      |
|----------------|--------------|------------|
| $T_1$          | 7 081 326,63 | 430 219,35 |
| $T_2$          | 7 081 297,65 | 430 194,03 |
| $T_3$          | 7 081 301,26 | 430 152,85 |

Таблица 2

Вычисление координат определяемого пункта

| Вариант | Вычисленные координаты |            | Средние значения координат |            |
|---------|------------------------|------------|----------------------------|------------|
|         | X (м)                  | Y (м)      | X (м)                      | Y (м)      |
| 1       | 7 081 350,49           | 430 196,12 | 7 081 350,40               | 430 196,12 |
|         | 7 081 350,32           | 430 196,11 |                            |            |
| 2       | 7 081 306,78           | 430 245,94 | 7 081 276,02               | 430 216,42 |
|         | 7 081 245,25           | 430 186,89 |                            |            |

Здесь начало  $O'$  новой системы координат ( $O'X'Y'$ ) было смещено относительно начала  $O$  исходной системы ( $OXY$ ) по оси абсцисс на 7 081 000,00 м и по оси ординат на 430 000,00 м. При этом для работы с формулами Юнга за исходные принимались преобразованные координаты пунктов временного базиса, например, для пункта  $T_1$ :  $X' = 326,63$  м,  $Y' = 219,35$  м. В новой системе для варианта 1 с точек  $T_1$  и  $T_2$  были получены следующие координаты пункта  $P$ :  $X'_p = 350,49$  м и  $Y'_p = 196,12$  м. С точек  $T_2$  и  $T_3$ :  $X'_p = 350,32$  м и  $Y'_p = 196,11$  м. После осреднения и преобразования в исходную систему ( $OXY$ ) они приняли такие значения:  $X_p = 7\,081\,350,40$  м,  $Y_p = 430\,196,12$  м (см. табл. 2). Из этого примера видно, что без преобразования координат ошибка в вычислениях может достигать нескольких десятков метров.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Герасимов А. П., Тюлькин В. В. Определение высот спутниковыми методами // Геодезия и картография. – 2005. – № 4. – С. 20–26.
2. ГОСТ Р 51794–2008. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек : нац. стандарт РФ. – Введ. 18.12.2008. – Стандартинформ, 2009. – 16 с. – (Глобальные навигационные спутниковые системы).
3. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. – М. : Наука, 1976. – 512 с.
4. Дударев В. И. Планирование задач оценивания элементов ориентирования геодезических систем координат // Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000) : сб. ст. – Новосибирск : СГГА, 2001. – С. 3–11.
5. Дударев В. И. Влияние ошибок расчета матрицы коэффициентов и вектора правой части на решение СЛАУ в некоторых задачах космической геодезии // Вестник СГГА. – 2002. – Вып. 7. – С. 21–25.
6. Дударев В. И. Опыт выполнения топографических съемок с применением спутниковых приемников // Сб. материалов LIII Междунар. научно-техн. конф. – Новосибирск : СГГА, 2003. – Ч. 3. – С. 265–267.
7. Дударев В. И. Некоторые аспекты построения и уравнивания геодезических сетей сгущения с использованием GPS-технологий // Сб. материалов LIII Междунар. науч.-техн. конф. – Новосибирск : СГГА, 2003. – Ч. 3. – С. 268–269.
8. Дударев В. И., Середович В. А. Построение геодезических съемочных сетей в районах Крайнего Севера с использованием спутниковых приемников // Вестник СГГА. – 2005. – Вып. 10. – С. 58–61.
9. Дударев В. И. Определение местоположения недоступных объектов при проведении топографических съемок с помощью GPS-технологий // Вестник СГГА. – 2005. – Вып. 10. – С. 66–69.

10. Дударев В. И. Выявление стабильных и мобильных пунктов Государственной геодезической сети в северных регионах // Вестник СГГА. – 2005. – Вып. 10. – С. 70–72.
11. Дударев В. И. Построение пространственной векторной засечки // ГЕО-Сибирь-2006. Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 24–28 апреля 2006 г.). – Новосибирск : СГГА, 2006. Т. 1, ч. 1. – С. 119–120.
12. Дударев В. И. Уравнивание пространственного векторного хода // Геодезия, картография, кадастр в освоении природных ресурсов Байкальского региона : материалы 2-й региональной научно-произв. конф. – Иркутск : ИрГТУ, 2006. – С. 41–44.
13. Дударев В. И. Создание геодезической сети сгущения на территории Самбургского газового месторождения с использованием GPS-технологий // ГЕО-Сибирь-2007. III Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 25–27 апреля 2007 г.). – Новосибирск : СГГА, 2007. Т. 1, ч. 1. – С. 139–141.
14. Дударев В. И., Панаев Г. А. К вопросу расчета аномалии высоты при GPS-определениях пространственных координат точек // Геодезия и картография. – 2008. – № 2. – С. 78.
15. Дударев В. И. Развитие геодезических сетей пространственными векторными построениями // Геодезия и картография. – 2010. – № 8. – С. 4–8.
16. Дударев В. И. Уравнивание геодезических сетей по результатам относительных GPS-измерений // ГЕО-Сибирь-2011. VII Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 19–29 апреля 2011 г.). – Новосибирск : СГГА, 2011. Т. 1, ч. 1. – С. 108–116.
17. Изотов А. А., Зубинский В. И., Макаренко Н. Л. Основы спутниковой геодезии. – М. : Недра, 1974. – 320 с.
18. Маслов А. В., Гордеев А. В., Александров Н. Н. Геодезия. – М. : Недра, 1972. – 528 с.
19. Машимов М. М. Уравнивание геодезических сетей. – М. : Недра, 1979. – 367 с.

20. Остроумов В. З., Шануров Г. А., Епишин В. И. Высотная основа уровенных постов: геодезический аспект // Геодезия и картография. – 2006. – № 11. – С. 37–39.
21. Панаев Г. А. Построение моделей геоида с использованием геодезических спутниковых технологий и нивелирования // Геодезия и картография. – 1998. – № 1. – С. 17–21.
22. Приказчиков С. Б. О необходимости создания региональных карт высотных аномалий // Геодезия и картография. – 2004. – № 9. – С. 26–27.
23. Стандартная Земля / под ред. К. Лунквиста., Г. Вейса. – М. : Мир, 1969. – 277 с.
24. NGA/NASA EGM96, N=M=360 Earth Gravitational Model [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.earth-info.nga.mil/GrandG/wgs84/gravitymod/egm96>.
25. Velez, C. E. Calculation of precision satellite orbits with nonsingular elements (VOP formulation) [Text] / C. E. Velez, P. J. Cefola, A. C. Long, K. S. Nimitz // Lecture Notes in Math., Springer Verlag. – 1974. – V. 362. – P. 183–205.

## КЛАССИФИКАЦИЯ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ

Название и классификационные признаки координатных систем

| Классификационный признак системы координат  | Наименование                                    | Описание классификационного признака                                                              | Пример обозначения                                                                                       |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Вид                                          | Прямоугольная                                   | Определяется направлением нормали к основной координатной плоскости                               | $x, y, z$<br>$X, Y, Z$                                                                                   |
|                                              | Сферическая                                     | Определяется направлением нормали к поверхности сферы                                             | $\alpha, \delta, \rho$<br>$\Phi, \lambda, R$                                                             |
|                                              | Сфероидическая (эллипсоидальная, геодезическая) | Определяется направлением нормали к поверхности эллипсоида                                        | $B, L, H$                                                                                                |
|                                              | Астрономическая                                 | Определяется направлением нормали к поверхности геоида                                            | $\varphi, \lambda, H^{\gamma}$                                                                           |
|                                              | Цилиндрическая                                  | Определяется направлением нормали к поверхности цилиндра                                          | $\rho, \varphi, z$                                                                                       |
| Расположение начала отсчета                  | Геоцентрическая                                 | Начало координат расположено в центре масс Земли                                                  | $x, y, z$<br>$X, Y, Z$                                                                                   |
|                                              | Квазигеоцентрическая (референцная)              | Начало координат расположено вблизи центра масс Земли                                             | $X_{\Gamma}, Y_{\Gamma}, Z_{\Gamma}$                                                                     |
|                                              | Топоцентрическая                                | Начало координат расположено на поверхности Земли                                                 | $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$<br>$\bar{\alpha}, \bar{\delta}, \bar{\rho}$                                  |
|                                              | Селеноцентрическая                              | Начало координат расположено в центре масс Луны                                                   | $x_{\zeta}, y_{\zeta}, z_{\zeta}$                                                                        |
|                                              | Барицентрическая                                | Начало координат расположено в барицентре (центре масс образования Земля – Луна)                  | $x_{\text{Б}}, y_{\text{Б}}, z_{\text{Б}}$                                                               |
| Ориентировка основной координатной плоскости | Экваториальная                                  | За основную координатную плоскость принимается плоскость экватора или плоскость, параллельная ей  | $x, y, z$<br>$\alpha, \delta, \rho$                                                                      |
|                                              | Горизонтальная (горизонтная)                    | За основную координатную плоскость принимается плоскость горизонта или плоскость, параллельная ей | $A, h, \rho$<br>$X_{\text{Н}}, Y_{\text{Н}}, Z_{\text{Н}}$<br>$x_{\text{Н}}, y_{\text{Н}}, z_{\text{Н}}$ |

| Классификационный признак системы координат | Наименование          | Описание классификационного признака                                                                                              | Пример обозначения                                                                                    |
|---------------------------------------------|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                             | Орбитальная           | За основную координатную плоскость принимается плоскость орбиты или плоскость, параллельная ей                                    | $\xi, \eta, \zeta$<br>$u, w, \rho$                                                                    |
|                                             | Эклиптическая         | За основную координатную плоскость принимается плоскость эклиптики или плоскость, параллельная ей                                 | $x_{\text{Э}}, y_{\text{Э}}, z_{\text{Э}}$<br>$\alpha_{\text{Э}}, \delta_{\text{Э}}, \rho_{\text{Э}}$ |
| Ориентировка оси абсцисс                    | Земная                | Ось абсцисс направлена в точку $G$ пересечения меридиана Гринвича с экватором                                                     | $X_G, Y_G, Z_G$<br>$x_G, y_G, z_G$                                                                    |
|                                             | Звездная              | Ось абсцисс направлена в точку весеннего равноденствия $\gamma$                                                                   | $x_{\gamma}, y_{\gamma}, z_{\gamma}$                                                                  |
| Тип                                         | Средняя               | Ось абсцисс связана со средней точкой $\gamma$ (или $G$ ) и средним полюсом мира $P_m$ (или средним полюсом Земли $P$ )           | $X, Y, Z$<br>$x, y, z$<br>$\alpha, \delta, \rho$                                                      |
|                                             | Истинная (мгновенная) | Ось абсцисс связана с истинной точкой $\gamma'$ (или $G'$ ) и истинным полюсом мира $P_m'$ (или мгновенным полюсом Земли $P_G'$ ) | $X', Y', Z'$<br>$x', y', z'$<br>$\alpha', \delta', \rho'$                                             |

# КАТАЛОГ АНОМАЛИЙ ВЫСОТЫ $\zeta_{84}$ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА WGS-84

Значения аномалии высоты

| Долгота | Широта  |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
|         | 50° 45' | 50° 30' | 50° 15' | 50° 00' |
| 84° 00' | –40,493 | –40,232 | –40,997 | –42,656 |
| 84° 15' | –40,367 | –40,164 | –41,036 | –42,824 |
| 84° 30' | –40,400 | –40,296 | –41,199 | –42,958 |
| 84° 45' | –40,562 | –40,537 | –41,334 | –42,879 |
| 85° 00' | –40,812 | –40,798 | –41,337 | –42,506 |
| 85° 15' | –41,103 | –41,036 | –41,209 | –41,907 |
| 85° 30' | –41,380 | –41,246 | –41,045 | –41,374 |
| 85° 45' | –41,577 | –41,433 | –40,967 | –40,824 |
| 86° 00' | –41,630 | –41,585 | –41,037 | –40,678 |
| 86° 15' | –41,514 | –41,663 | –41,218 | –40,801 |
| 86° 30' | –41,250 | –41,621 | –41,387 | –41,030 |
| 86° 45' | –40,939 | –41,438 | –41,416 | –41,169 |
| 87° 00' | –40,650 | –41,140 | –41,242 | –41,105 |
| 87° 15' | –40,457 | –40,800 | –40,913 | –40,864 |
| 87° 30' | –40,375 | –40,508 | –40,560 | –40,583 |
| 87° 45' | –40,373 | –40,336 | –40,322 | –40,411 |
| 88° 00' | –40,394 | –40,306 | –40,273 | –40,418 |

Примечания. 1. В таблице представлен фрагмент каталога аномалий высоты [24]. 2. Аномалии высоты даны в метрах. Отрицательное значение аномалии высоты говорит о том, что в данной точке поверхность геоида располагается ниже поверхности эллипсоида.

## ПРИМЕР ФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОПРАВОК

В качестве примера на простой схеме геодезической сети (рис. П.3.1) рассмотрим последовательность формирования системы линейных уравнений поправок вида (4.37). Будем полагать, что в этой сети измерены базовые векторы  $\Delta\check{\mathbf{R}}_{G2,4}^0$ ,  $\Delta\check{\mathbf{R}}_{G3,5}^0$ ,  $\Delta\check{\mathbf{R}}_{G6,1}^0$ ,  $\Delta\check{\mathbf{R}}_{G4,5}^0$ ,  $\Delta\check{\mathbf{R}}_{G4,6}^0$  и  $\Delta\check{\mathbf{R}}_{G5,6}^0$ .

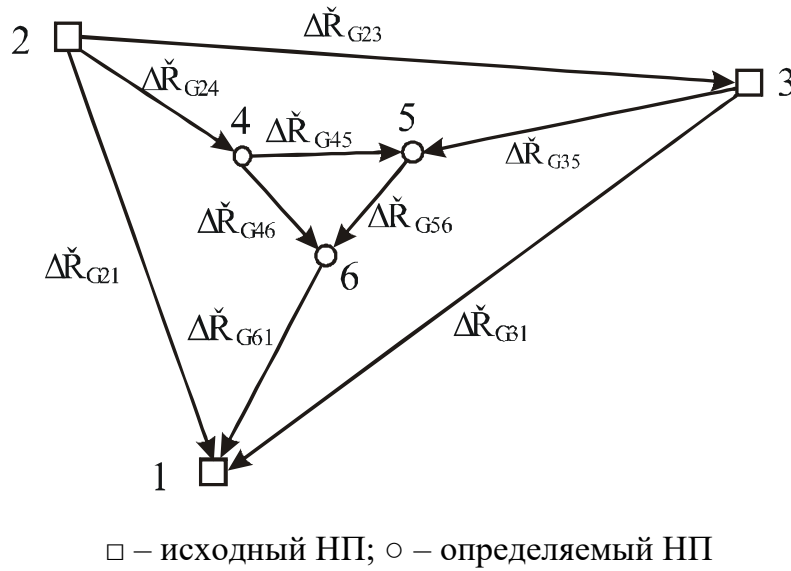


Рис. П.3.1. Схема геодезической сети:

Для этой сети система линейных уравнений поправок будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}'_{41} \cdot \delta\omega + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_4 + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_5 - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_6 &= \Delta\check{\mathbf{R}}_{G6,1}^0 - \Delta\mathbf{R}'_{G6,1} + \mathbf{V}_1; \\
 \mathbf{D}'_{42} \cdot \delta\omega + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_4 + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_5 + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_6 &= \Delta\check{\mathbf{R}}_{G2,4}^0 - \Delta\mathbf{R}'_{G2,4} + \mathbf{V}_2; \\
 \mathbf{D}'_{43} \cdot \delta\omega + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_4 + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_5 + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_6 &= \Delta\check{\mathbf{R}}_{G3,5}^0 - \Delta\mathbf{R}'_{G3,5} + \mathbf{V}_3; \\
 \mathbf{D}'_{44} \cdot \delta\omega - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_4 + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_5 + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_6 &= \Delta\check{\mathbf{R}}_{G4,5}^0 - \Delta\mathbf{R}'_{G4,5} + \mathbf{V}_4; \\
 \mathbf{D}'_{45} \cdot \delta\omega + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_4 - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_5 + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_6 &= \Delta\check{\mathbf{R}}_{G5,6}^0 - \Delta\mathbf{R}'_{G5,6} + \mathbf{V}_5; \\
 \mathbf{D}'_{46} \cdot \delta\omega - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_4 + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_5 + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_6 &= \Delta\check{\mathbf{R}}_{G4,6}^0 - \Delta\mathbf{R}'_{G4,6} + \mathbf{V}_6.
 \end{aligned} \tag{П.3.1}$$

Приближенные значения измеренных значений базовых векторов для данной сети можно получить следующим образом. Сначала вычисляются приближенные значения пространственных координат определяемых НП (геоцентрические радиусы-векторы  $\mathbf{R}'_{\Gamma 4}$ ,  $\mathbf{R}'_{\Gamma 5}$  и  $\mathbf{R}'_{\Gamma 6}$  в референцной системе) по известным координатам опорных НП и измеренным значениям  $\Delta \mathbf{R}^{\circ}_{G2,4}$ ,  $\Delta \mathbf{R}^{\circ}_{G3,5}$  и  $\Delta \mathbf{R}^{\circ}_{G6,1}$  базовых векторов (с учетом их направленности) по формулам

$$\mathbf{R}'_{\Gamma 4} = \mathbf{R}_{\Gamma 2} + \Delta \mathbf{R}^{\circ}_{G2,4}; \quad \mathbf{R}'_{\Gamma 5} = \mathbf{R}_{\Gamma 3} + \Delta \mathbf{R}^{\circ}_{G3,5}; \quad \mathbf{R}'_{\Gamma 6} = \mathbf{R}_{\Gamma 1} + \Delta \mathbf{R}^{\circ}_{G6,1}. \quad (\text{П.3.2})$$

Затем при  $\omega' = 0$  вычисляются значения базовых векторов  $\Delta \mathbf{R}'_G$ , как

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}'_{G6,1} &= \Delta \mathbf{R}^{\circ}_{G6,1}; \quad \Delta \mathbf{R}'_{G3,5} = \Delta \mathbf{R}^{\circ}_{G3,5}; \quad \Delta \mathbf{R}'_{G2,4} = \Delta \mathbf{R}^{\circ}_{G2,4}; \\ \Delta \mathbf{R}'_{G4,5} &= \mathbf{R}'_{\Gamma 5} - \mathbf{R}'_{\Gamma 4}; \quad \Delta \mathbf{R}'_{G4,6} = \mathbf{R}'_{\Gamma 6} - \mathbf{R}'_{\Gamma 4}; \quad \Delta \mathbf{R}'_{G5,6} = \mathbf{R}'_{\Gamma 6} - \mathbf{R}'_{\Gamma 5}. \end{aligned} \quad (\text{П.3.3})$$

Далее на основе измеренных компонент базовых векторов  $\Delta \mathbf{R}^{\circ}$ , формируются матрицы  $\mathbf{D}'_{41}, \dots, \mathbf{D}'_{45}, \mathbf{D}'_{46}$

$$\mathbf{D}'_{41} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z^{\circ}_{G6,1} & \Delta Y^{\circ}_{G6,1} \\ \Delta Z^{\circ}_{G6,1} & 0 & -\Delta X^{\circ}_{G6,1} \\ -\Delta Y^{\circ}_{G6,1} & \Delta X^{\circ}_{G6,1} & 0 \end{bmatrix};$$

...,

$$\mathbf{D}'_{46} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z^{\circ}_{G4,6} & \Delta Y^{\circ}_{G4,6} \\ \Delta Z^{\circ}_{G4,6} & 0 & -\Delta X^{\circ}_{G4,6} \\ -\Delta Y^{\circ}_{G4,6} & \Delta X^{\circ}_{G4,6} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.3.4})$$

После решения системы линейных уравнений (П.3.2) по формулам (55) находятся уточненные численные значения радиусов-векторов  $\mathbf{R}_{\Gamma i}$  определяемых НП, т. е.

$$\mathbf{R}_{\Gamma 4} = \mathbf{R}'_{\Gamma 4} + \delta \mathbf{R}_4; \quad \mathbf{R}_{\Gamma 5} = \mathbf{R}'_{\Gamma 5} + \delta \mathbf{R}_5; \quad \mathbf{R}_{\Gamma 6} = \mathbf{R}'_{\Gamma 6} + \delta \mathbf{R}_6. \quad (\text{П.3.5})$$

*Учебное издание*

**Дударев** Владимир Иванович

## **ОСНОВЫ ГНСС-ТЕХНОЛОГИЙ**

Редактор *Е. Н. Ученова*

Компьютерная верстка *Е. М. Федяевой*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 15.12.2016. Формат 60 × 84 1/16

Усл. печ. л. 3,49. Тираж 111 экз. Заказ .

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ  
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ  
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.