КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
(лекции 7–9)

ЛЕКЦИЯ № 7

Кинематика вращательного движения

§ 1. Поступательное и вращательное движение

В предыдущих лекциях мы познакомились с механикой материальной точки. Использование модели материальной точки позволило нам сравнительно простыми средствами описать *состояние* материальной точки в любой момент времени и изменение этого состояния со временем (см. лекцию № 3, § 3 и вывод 7 из лекции № 3).

Модель абсолютно твердого тела (см. лекцию № 1, § 1) расширяет наши возможности и позволяет ввести различие между поступательным и вращательным движением.

Поступательным движением *называется такое движение, при котором любая линия, проведенная в теле, остается параллельной самой себе.*

Вращательным движением *называется такое движение, при котором каждая точка твердого тела движется по своей окружности, центры всех окружностей лежат на одной прямой, называемой* **осью вращения**.

На рис. 7.1а, 7.1б проиллюстрировано это различие. Отметим, что если на этих рисунках заменить изображенное затененным овалом твердое тело на материальную точку, расположенную в центре масс тела, то различие между поступательным и вращательным движением исчезает. Более того, если ось вращения проходит через центр масс тела, то при использовании модели материальной точки говорить о вращении точки вокруг оси, проходящей через эту точку, не имеет никакого смысла.

Поступательное движение (см. рис. 7.1а). *Любая линия, проведенная в твердом теле, при движении остается параллельной самой себе.*

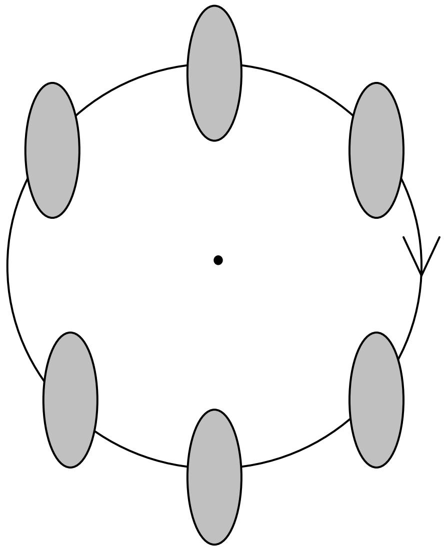


Рис. 7.1а

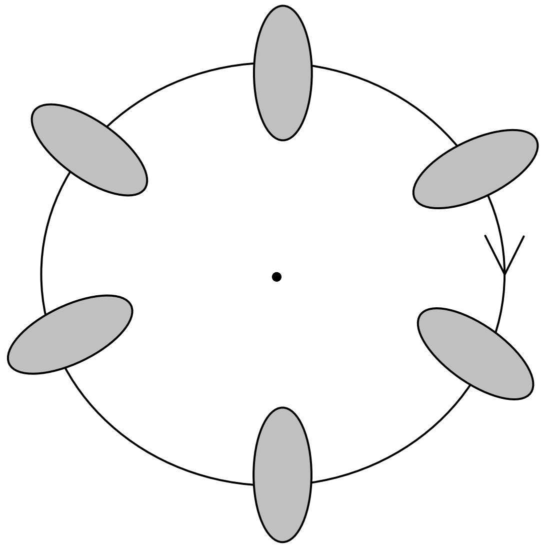


Рис. 7.1б

В данном примере траектория центра масс – окружность, остальные точки тела также движутся по окружностям, но центры этих окружностей не лежат на одной прямой.

Вращательное движение (рис. 7.1б). Центр масс движется по окружности того же радиуса. Каждая точка твердого тела движется по своей окружности; центры всех окружностей лежат на прямой, называемой осью вращения.

Здесь, как и в предыдущем примере, центр масс тела движется по той же окружности.

§ 2. Псевдовектор бесконечно малого поворота

Любое движение твердого тела можно разложить на поступательное и вращательное. Например, движение Земли состоит из *поступательного* движения по эллиптической траектории вокруг Солнца и *вращательного* движения вокруг собственной оси. При изучении поступательного движения в большинстве случаев можно использовать модель материальной точки. При изучении вращательного движения используют модель абсолютно твердого тела. При этом, в случае закрепленной оси вращения, положение абсолютно твердого тела в пространстве можно задать всего лишь *одной* переменной – зависящим от времени углом поворота $\varphi(t)$. Оказывается, бесконечно малым углам поворота можно придать векторный характер, при этом направление вектора связывают с направлением вращения.

Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются *псевдовекторами*.

При повороте тела на угол $d\varphi$ вводят *псевдовектор* бесконечно малого поворота $d\vec{\varphi}$. В правой системе координат направление $d\vec{\varphi}$ определяют правилом правого винта: *винт, расположенный вдоль оси, вращается вместе с телом, направление его поступательного движения определяет направление псевдовектора* (рис. 7.2).

В левой системе координат направление псевдовектора изменится на обратное, истинный вектор при этом не меняет направления.

Модуль псевдовектора $d\vec{\varphi}$ равен величине угла поворота.

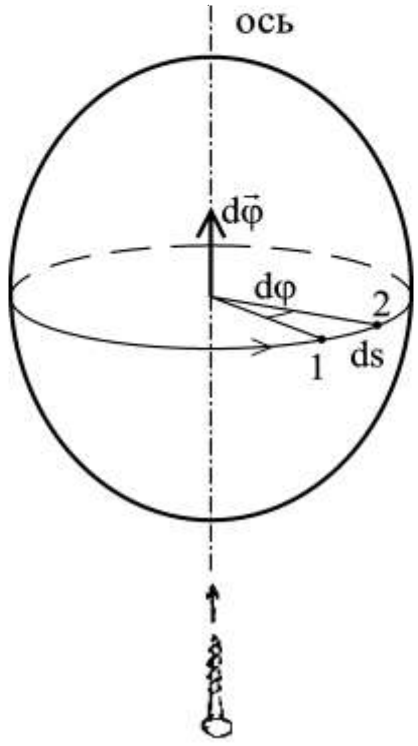


Рис. 7.2

§ 3. Угловая скорость и угловое ускорение

Угловая скорость и угловое ускорение вводятся с помощью *определений*, аналогичных определениям скорости (2.1) и ускорения (2.7).

Угловая скорость

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени

$$\boxed{\vec{\omega} \equiv \frac{d\vec{\varphi}}{dt}}, \text{ или } \boxed{\vec{\omega} \equiv \dot{\vec{\varphi}}}. \qquad (7.1)$$

Псевдовектор $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения так же, как и псевдовектор $d\vec{\varphi}$ (рис. 7.3).

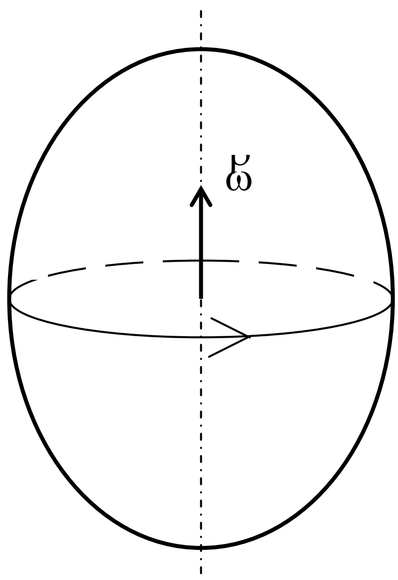


Рис. 7.3

Радиан – единица измерения угла – величина безразмерная (см. $\Delta\varphi$ на рис. 3.2), поэтому из (7.1) следует, что угловая скорость измеряется в рад/с или в $с^{-1}$.

Угловое ускорение

Угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$ называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени или второй производной угла поворота по времени

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}}. \qquad (7.2)$$

Из (7.2) следует, что размерность углового ускорения $[\varepsilon] = c^{-2}$. Из определения (7.2) следует, что угловое ускорение является псевдовектором.

В случае закрепленной оси вращения направление углового ускорения совпадает с направлением угловой скорости при ускоренном движении и противоположно при замедленном.

§ 4. Связь угловых и линейных кинематических величин

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек с неизменными расстояниями между ними. Эти точки при вращательном движении движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения (см. рис. 7.1б). Линейные скорости $\vec{v}$ точек твердого тела и их линейные ускорения $\vec{a}$ связаны с угловыми кинематическими величинами $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$, а также зависят от R – расстояния материальной точки до оси вращения.

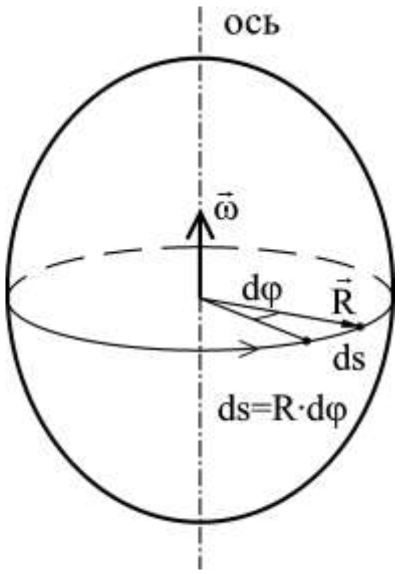


Рис. 7.4

Найдем связь линейной скорости материальной точки твердого тела и угловой скорости. Из *определения* радианной меры угла следует связь бесконечно малого отрезка пути ds материальной точки, удаленной от оси вращения на расстояние R с углом поворота dφ (рис. 7.4, а также см. рис. 3.2). Используя эту связь и определение модуля линейной скорости (2.3), получим:

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt},$$

откуда

$$\boxed{v = R\omega}. \qquad (7.3)$$

Формула (7.3) выражает связь между модулями линейной и угловой скорости: линейная скорость равна угловой, умноженной на радиус окружности, по которой движется материальная точка.

В векторном виде связь $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ записывается следующим образом:

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right], \qquad (7.4)$$

здесь квадратные скобки обозначают *векторное произведение* векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$.

Направление векторного произведения определяется по *правилу правого винта*:

а) винт устанавливают перпендикулярно перемножаемым векторам (у нас это $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$);

б) винт вращают от первого вектора ко второму по кратчайшему расстоянию (у нас – от $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$);

в) *направление поступательного движения винта* укажет направление векторного произведения (у нас – направление вектора $\vec{v}$).

Модуль векторного произведения:

$$v = \omega R \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$.

Если $\alpha = 90°$, то $\sin\alpha = 1$, и связь между модулями линейной и угловой скорости дается формулой:

$$v = \omega R,$$

совпадающей с формулой (7.3).

Связь модуля линейного ускорения материальной точки твердого тела с угловой скоростью и угловым ускорением найдем, если продифференцируем по времени формулу (7.3):

$$(v = R\omega)'_t;$$

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt},$$

так как $\dfrac{dv}{dt} = a_\tau$ (см. (3.3а)), то, используя (7.2), получим:

$$\boxed{a_\tau = R\varepsilon}. \tag{7.5}$$

В векторной форме:

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon} \cdot \vec{R}\right]. \tag{7.5а}$$

Формула (7.5а) дает связь тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ с угловым $\vec{\varepsilon}$. Найдем связь нормального ускорения с угловой скоростью.

Так как $\dfrac{v^2}{R} = a_n$ (3.4а), заменяя в этой формуле v на ωR из (7.3), получим связь нормального ускорения a_n с угловой скоростью ω:

$$\boxed{a_n = R\omega^2}. \tag{7.6}$$

В векторном виде:

$$\vec{a}_n = -\vec{R}\omega^2. \tag{7.7}$$

Знак «минус» указывает на то, что векторы $\vec{a}_n$ и $\vec{R}$ имеют противоположные направления.

§ 5. Решение основной задачи механики для вращательного движения тела с закрепленной осью

При вращательном движении положение абсолютно твердого тела задается зависимостью угла поворота φ от времени t. В случае равномерного вращения $(\vec{\omega} = \text{const})$ и равноускоренного вращения $(\vec{\varepsilon} = \text{const})$ такая зависимость может быть найдена по аналогии с равномерным (см. лекцию № 2, § 2) и равноускоренным движением материальной точки (см. лекцию № 3, § 2 и формулы (3.6) и (3.7)).

Рассмотрим сначала **равномерное вращение**. Запишем следствие из определения (7.1) угловой скорости $\vec{\omega}$ в следующем виде:

$$d\varphi = \omega dt, \tag{7.1а}$$

здесь мы опустили знаки векторов, так как ось вращения закреплена.

При ω = const интегрирование формулы (7.1а), выполненное аналогично интегрированию формулы (2.3а) в лекции № 2, § 2, дает следующий результат:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t, \tag{7.8}$$

здесь φ_0 – значение угла поворота в начальный момент времени. При $\varphi_0 = 0$ имеем:

$$\varphi(t) = \omega t. \tag{7.8a}$$

Формула (7.8а) аналогична формуле (2.5), по которой находится путь при равномерном движении материальной точки.

Периодом равномерного вращения T называют время одного оборота. Так как в одном обороте 2π радиан, то из (7.8а) получим связь угловой скорости ω с периодом T:

$$2\pi = \omega T,$$

откуда:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\cdot \tag{7.9}$$

Величина ν, обратная периоду T, дает, очевидно, число оборотов в единицу времени и называется *частотой вращения*:

$$\nu \equiv \frac{1}{T}\cdot \tag{7.10}$$

Из (7.9) и (7.10) следует связь ω и ν:

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{7.11}$$

Для произвольного вращательного движения с переменным угловым ускорением $\varepsilon = \varepsilon(t)$ зависимость скорости от времени находится интегрированием функции $\varepsilon(t)$:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon(t)dt. \tag{7.12}$$

Затем, интегрируя найденную функцию $\omega(t)$ (7.12), можно найти зависимость угла поворота от времени:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega(t)dt. \tag{7.13}$$

Задача нахождения зависимости углового ускорения от времени выходит за рамки кинематики. Она решается в рамках динамики вращательного движения.

Для равноускоренного вращения ($\vec{\varepsilon} = \text{const}$), действуя так же, как и при выводе формул (3.6) и (3.7), получим:

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t; \tag{7.14}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{7.15}$$

здесь ω_0 – начальная угловая скорость;

φ_0 – начальный угол поворота.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 7

1. При изучении вращательного движения используют модель абсолютно твердого тела, позволяющую ввести различие между поступательным и вращательным движением (§ 1).

2. Положение вращающегося тела определяется зависимостью от времени одной переменной – угла поворота φ.

3. Бесконечно малому углу поворота $d\varphi$ можно придать в соответствии с правилом правого винта векторный характер – ввести *псевдовектор* бесконечно малого поворота $d\vec{\varphi}$.

4. Угловая скорость $\vec{\omega}$ (7.1) вводится как производная по времени от угла поворота. Направлен вектор $\vec{\omega}$ так же, как и псевдовектор $d\vec{\varphi}_0$:

$$\boxed{\vec{\omega} \equiv \frac{d\vec{\varphi}}{dt}}.$$

5. Угловое ускорение (7.2) вводится как производная угловой скорости $\vec{\omega}$ по времени:

$$\boxed{\vec{\varepsilon} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt}}.$$

Угловая скорость равна второй производной угла поворота по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

6. Линейная скорость v материальной точки твердого тела связана с его угловой скоростью равенством (7.3):

$$v = R\omega,$$

где R – расстояние от точки до оси вращения.

7. Для тангенциального a_τ и нормального a_n ускорения материальной точки твердого тела справедливы формулы (7.5) и (7.6):

$$a_\tau = R\varepsilon;$$

$$a_n = R\omega^2.$$

8. При равномерном вращении угол поворота φ пропорционален времени (7.8а):

$$\varphi(t) = \omega t.$$

9. При равноускоренном вращении угловая скорость ω и угол поворота φ следующим образом зависят от времени (7.14) и (7.15):

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t;$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

здесь ω_0 и φ_0 – начальные значения угловой скорости и угла поворота.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ № 8

Момент силы и момент инерции

§ 1. Работа при вращательном движении. Момент силы

На рис. 8.1 приведен самый простой пример вращения твердого тела при действии внешней силы. Тело представляет собою диск, который может вращаться вокруг неподвижной оси Z, проходящей через его центр перпендикулярно рисунку. Внешняя сила F_τ направлена по касательной к диску (такую силу можно создать с помощью нити, намотанной на диск).

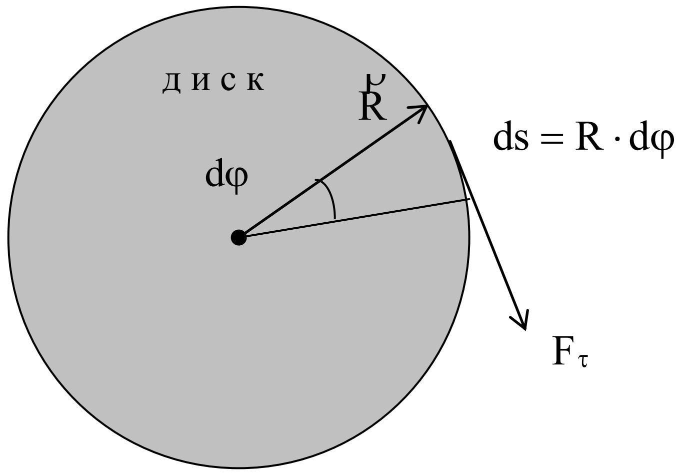


Рис. 8.1

Найдем работу dA, совершаемую силой F_τ при повороте диска на угол $d\varphi$.

В соответствии с (5.4): $dA = F_s ds$, у нас F_s равна F_τ. Величину ds выразим через $d\varphi$ (см. рис. 8.1), воспользовавшись определением радианной меры угла. В результате получим:

$$dA = F_\tau ds = F_\tau R d\varphi = M_z d\varphi,$$

итак:

$$dA = M_z d\varphi. \tag{8.1}$$

Здесь мы ввели новую величину M_z, являющуюся мерой внешнего воздействия при вращательном движении:

$$\boxed{M_z = RF_\tau}. \tag{8.2}$$

Величина M_z называется моментом силы F_τ относительно оси вращения Z.

Формулу (8.2) можно записать в векторном виде:

$$\boxed{\vec{M}_Z \equiv [\vec{R}\vec{F}_\tau]}. \quad (8.3)$$

Векторное произведение векторов $\vec{R}$ и $\vec{F}_\tau$ направлено вдоль оси вращения Z в соответствии с правилом правого винта, введенным в § 3 лекции № 7. При произвольном направлении внешней силы $\vec{F}$ направление векторного произведения $\vec{R}$ на $\vec{F}$ может не совпадать с осью вращения. В этом случае *вектор* M_z определяется как *составляющая* вектора $\vec{M} = [\vec{R}\vec{F}]$, направленная вдоль оси вращения. Отметим, что модуль вектора $\vec{R}$ равен расстоянию от точки приложения силы до оси вращения.

В механике вводят также понятие вектора момента силы относительно произвольной точки О в соответствии со следующим определением:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}], \quad (8.4)$$

здесь $\vec{r}$ – вектор, проведенный из точки О в точку приложения силы (радиус-вектор).

Следовательно, момент силы относительно точки равен векторному произведению радиус-вектора на вектор силы.

Можно показать, что *если точка О расположена на оси вращения* (в любом месте этой оси), то *момент* M_Z *силы* $\vec{F}$ *относительно оси вращения Z будет равен проекции вектора* $\vec{M}$ *из (8.4) на эту ось.*

На рис. 8.2 это иллюстрируется для частного случая, когда сила $\vec{F} = \vec{F}_\tau$, т. е. не имеет составляющих вдоль оси Z и вектора $\vec{R}$ (проекции моментов этих составляющих на ось z равны нулю, поэтому мы их не рассматриваем).

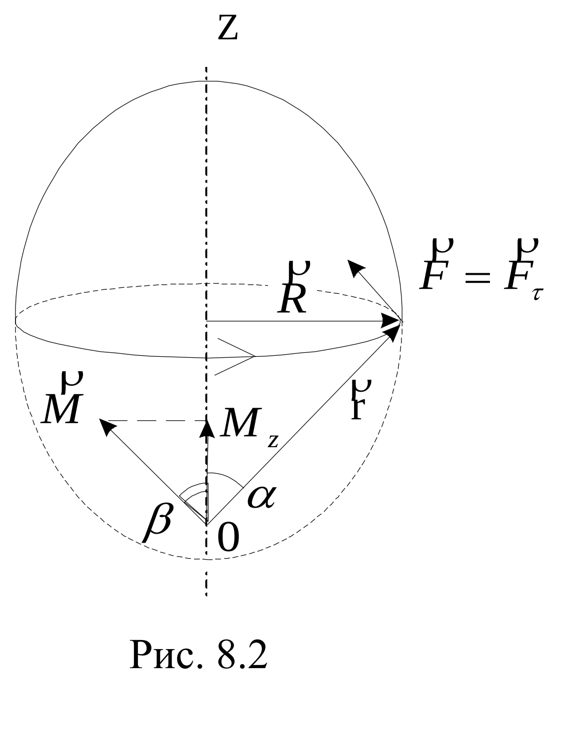


Рис. 8.2

В соответствии с формулой (8.4), примененной для нашего случая, модуль вектора $\vec{M}$ – момента силы относительно точки О:

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_\tau|.$$

Спроектируем вектор $\vec{M}$ на ось Z, тогда из рис. 8.2 видно, что:

$$M_Z = |\vec{M}| \cdot \cos\beta\,\vec{M},$$

используя предыдущую формулу, получим:

$$M_z = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_\tau| \cdot \cos\beta.$$

В соответствии с правилом определения направления векторного произведения (лекция № 6, § 3), вектор $\vec{M}$ перпендикулярен вектору $\vec{r}$, значит, $\beta + \alpha = 90°$ и $\cos\beta = \sin\alpha$, следовательно:

$$M_z = |\vec{F}_\tau| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\alpha.$$

Но $r \cdot \sin\alpha = R$, и мы получаем:

$$M_z = |\vec{F}_\tau| \cdot R,$$

что совпадает с формулой (8.2).

§ 2. Кинетическая энергия при вращательном движении. Момент инерции

Как уже отмечалось (см. лекцию № 7, § 4), абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек с неизменными расстояниями между ними. Кинетическую энергию вращающегося тела можно найти как сумму кинетических энергий (5.8) *всех* материальных точек, составляющих данное тело. Скорости этих точек v_i в соответствии с формулой (7.3), связаны с угловой скоростью ω и расстояниями от точек до оси вращения (рис. 8.3). Воспользовавшись этим, мы можем выразить кинетическую энергию вращающегося тела *через его угловую скорость*:

$$W_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} m_i R_i^2.$$

Введем новую величину I_z, являющуюся мерой инертности при *вращательном движении:*

$$\boxed{I_z \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2}. \qquad (8.5)$$

Величина I_z называется *моментом инерции твердого тела* относительно оси Z.

Таким образом:

$$W_к = \frac{I_z \omega^2}{2}. \qquad (8.6)$$

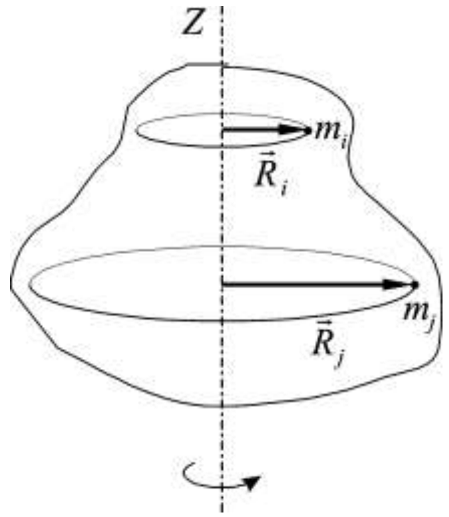


Рис. 8.3

Величину, стоящую под знаком суммы в формуле (8.5), называют *моментом инерции материальной точки относительно оси z:*

$$I_{zi} \equiv m_i R_i^2. \qquad (8.7)$$

Следовательно, *момент инерции материальной точки равен произведению массы этой точки на квадрат ее расстояния до оси вращения.*

Таким образом, момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции *всех* материальных точек, составляющих это тело:

$$I_z = \sum_{i=1}^{\infty} I_{zi}. \qquad (8.8)$$

Как видно из формулы (8.5), величина момента инерции материальной точки I_{zi} может быть *разной* для материальных точек *с одинаковыми массами* m_i вследствие возможного различия расстояний R_i от этих точек до оси вращения. Из формул (8.5), (8.7) и (8.8) следует, что величина момента инерции твердого тела I_z зависит от распределения масс в твердом теле и от положения оси вращения.

При непрерывном распределении массы величина m_i в формуле (8.5) заменяется на бесконечно малую массу dm, а сумма заменяется на интеграл, который берется по всему объему тела:

$$I_z = \int dm R^2. \qquad (8.9)$$

При вычислении момента инерции величину dm выражают через *плотность* тела и бесконечно малый объем dV:

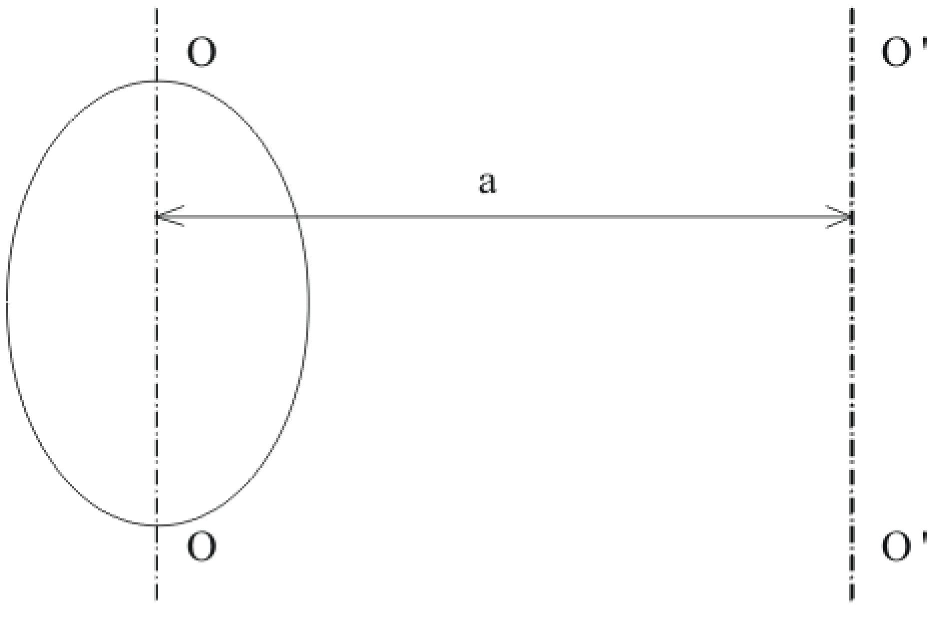
$$dm = \rho dV. \qquad (8.10)$$

Подставляя (8.10) в (8.9), получим формулу, решающую *в общем виде* задачу о нахождении момента инерции тела относительно заданной оси:

$$I_z = \int \rho R^2 dV. \qquad (8.11)$$

Теорема Штейнера

Для симметричных тел вычисления по формуле (8.11) значительно упрощаются, если ось вращения проходит через центр масс тела. Обозначим момент инерции твердого тела относительно оси ОО, проходящей через центр масс, через I_0 (рис. 8.4). Тогда для нахождения момента инерции относительно *произвольной* оси $O'O'$, параллельной оси ОО и удаленной от нее на расстояние а, можно воспользоваться *теоремой Штейнера*, которую иллюстрирует рис. 8.2.



$$I_0 \quad + \quad m \cdot a^2 \quad = \quad I$$

Рис. 8.4

В соответствии с рис. 8.2, теорему Штейнера запишем следующей формулой:

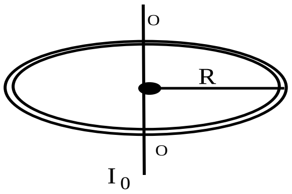
$$\boxed{I = I_0 + ma^2}, \qquad (8.12)$$

где I_0 – момент инерции относительно оси ОО;

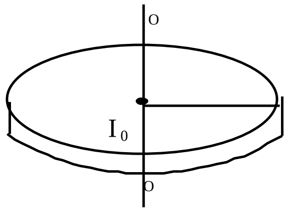
I – момент инерции относительно оси $O'O'$;

а – расстояние между осями.

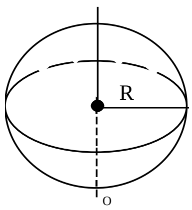
Ниже приведем моменты инерции I_0 для некоторых тел.

Обруч: 

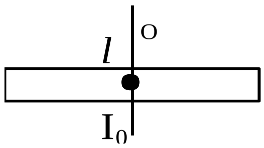
$I_0 = mR^2$, где R – радиус обруча. (8.13)

Диск: 

$I_0 = \dfrac{mR^2}{2}$, где R – радиус диска. (8.14)

Шар: 

$I_0 = \dfrac{2}{5} mR^2$, где R – радиус шара. (8.15)

Стержень: 

$I_o = \dfrac{1}{12} ml^2$, где l – длина стержня; (8.16)

m – масса рассматриваемых тел.

Приведем пример применения теоремы Штейнера для нахождения момента инерции тонкого однородного стрежня относительно перпендикулярной к нему и проходящей через конец стержня оси O'O'. В нашем примере I_0 определяется формулой (8.16), величина $a = l/2$. Применяя теорему Штейнера (8.12), получим:

$$I = I_0 + ma^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{ml^2}{4} = \frac{1}{3} ml^2. \qquad (8.17)$$

В заключение отметим, что всякое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или находится в покое. (При вращательном движении момент инерции является мерой инертности. Момент инерции зависит от массы тела и от распределения этой массы относительно оси вращения.)

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 8

1. Мерой внешнего воздействия при вращательном движении твердого тела вокруг закрепленной оси является момент силы M_Z относительно оси z. Модуль момента силы M_z дает формула (8.2):

$$M_Z = RF_\tau$$

и иллюстрирует рис. 8.1.

2. Элементарная работа dA при повороте на угол dφ равна произведению момента силы M_z на угол поворота dφ и выражается формулой (8.1):

$$dA = M_z d\varphi.$$

3. Момент инерции твердого тела I_z относительно оси z является мерой инертности при вращательном движении и *по определению* (8.5) равен сумме произведений масс на квадраты их расстояний до оси вращения:

$$I_Z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2.$$

4. Кинетическая энергия $W_к$ при вращательном движении находится по формуле (8.6):

$$W_к = \frac{I_z \omega^2}{2}.$$

5. Теорема Штейнера позволяет найти момент инерции I относительно любой оси, если известен момент инерции I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела (8.12):

$$I = I_0 + ma^2,$$

здесь a – расстояние между осями.

ЛЕКЦИЯ № 9

Уравнение динамики вращательного движения. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

§ 1. Уравнение динамики вращательного движения

Как отмечено в лекции № 7, § 5, для решения основной задачи механики вращательного движения тела с закрепленной осью необходимо знать зависимость углового ускорения ε от времени. Эта зависимость находится из уравнения динамики вращательного движения, которое аналогично второму закону Ньютона (4.4) в динамике материальной точки. Как мы выяснили в § 1, 2 предыдущей лекции, мерой внешнего воздействия при вращательном движении, аналогом силы F, является момент силы M_Z относительно оси вращения Z; аналогом массы, мерой инертности при вращательном движении является момент инерции I_Z относительно оси Z. Роль ускорения играет угловое ускоре-ние ε. По аналогии со вторым законом Ньютона, можно сконструировать из M_Z, I_Z, ε уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad M_z = I_z\varepsilon.$$

Так как мы рассматриваем вращение вокруг закрепленной оси z, то уравнение динамики вращательного движения записано, в отличие от второго закона Ньютона, не в векторном виде, а в скалярном. Можно строго доказать, что из второго закона Ньютона следует уравнение динамики вращательного движения, т. е. стрелочка, связывающая две предыдущие формулы, обозначает слово «следует».

Мы получим уравнение динамики вращательного движения, опираясь на теорему о кинетической энергии. Из (5.7) и (5.8) имеем:

$$dA = dW_к.$$

Работу dA и приращение кинетической энергии $dW_К$ выразим, в соответствии с формулами (8.1) и (8.6), через величины, характеризующие вращательное движение:

$$M_z d\varphi = d\left(\frac{I_z\omega^2}{2}\right).$$

Заменяя, в соответствии с (7.1а), $d\varphi = \omega dt$ и выполняя дифференцирование в правой части, получим:

$$M_z \omega\, dt = I_z \omega\, d\omega .$$

Откуда

$$M_z = I_z \frac{d\omega}{dt} . \quad (9.1)$$

Наконец, используя определение углового ускорения (7.2), получим **основное уравнение динамики вращательного движения:**

$$\boxed{M_z = I_z \varepsilon} . \quad (9.2)$$

Отметим, что формула (9.1) так же как и (9.2), является выражением уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно закрепленной оси.

§ 2. Момент импульса

Запишем основной закон динамики вращательного движения в форме (9.1), а затем занесем момент инерции I_z под знак производной по времени:

$$M_Z = I_Z \frac{d\omega}{dt},$$

или

$$M_z = \frac{d\ (I_z \omega)}{dt} . \quad (9.3)$$

Формула (9.3) эквивалентна формуле (9.1) при постоянном моменте инерции. Более общей является формула (9.3), она справедлива и в том случае, если момент инерции тела изменяется с течением времени. Эта ситуация аналогична соотношению между двумя формами записи основного закона динамики материальной точки – второго закона Ньютона – в виде (4.3а) и (4.4).

Введем понятие момента импульса L_z абсолютно твердого тела относительно оси вращения Z следующим определением:

$$\boxed{L_z \equiv I_z \omega} . \quad (9.4)$$

Можно показать, что для однородного симметричного тела, вращающегося вокруг оси симметрии, справедлива векторная формула:

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}. \tag{9.5}$$

Формула (9.5) утверждает, что вектор момента импульса $\vec{L}$ направлен так же, как и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$.

Для несимметричных тел это утверждение справедливо, если они вращаются вокруг одной из главных осей инерции.

С учетом (9.4) формулу (9.3) можно записать в следующем виде:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}. \tag{9.6}$$

Это еще одна форма уравнения динамики вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.

Понятие момента импульса используется не только для описания вращения твердых тел, но и для более общего случая движения произвольной системы материальных точек. В этом случае **моментом импульса $\vec{L}$ системы материальных точек** называется векторная сумма $\vec{L}_i$ моментов импульса материальных точек, входящих в систему:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i. \tag{9.7}$$

Момент импульса материальной точки относительно произвольной точки O пространства определяется как векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}_i$ материальной точки, проведенного из точки O, на вектор импульса $\vec{p}_i$ этой материальной точки (рис. 9.1), т. е.:

$$\vec{L}_i \equiv [\vec{r}_i \vec{p}_i] = [\vec{r}_i m_i \vec{v}_i]. \tag{9.8}$$

На рис 9.1 материальная точка массы m движется по окружности радиуса r. Начало координат выбрано в *центре этой окружности,* поэтому *радиус-вектор* $\vec{r}$ материальной точки начинается в центре окружности, по которой движется

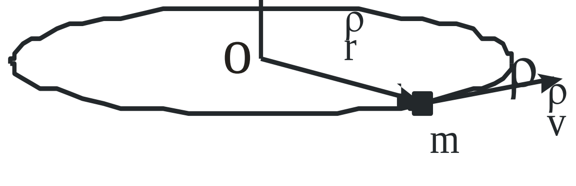


Рис. 9.1

точка. В этом случае векторное произведение $[\vec{r}\,\vec{p}]$ и, следовательно, момент импульса $\vec{L}$ направлены перпендикулярно плоскости окружности, по которой движется точка.

Опираясь на второй закон Ньютона в форме (4.3), можно показать, что закон изменения со временем момента импульса $\vec{L}$ системы имеет следующий вид:

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}, \tag{9.9}$$

здесь $\vec{M}$ – суммарный момент *внешних* сил.

При сделанных выше оговорках относительно осей вращения, закон изменения момента импульса (9.9) применим и для описания вращения твердых тел.

§ 3. Закон сохранения момента импульса

По (9.9) производная от момента импульса по времени равна суммарному моменту внешних сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Если суммарный момент внешних сил $\vec{M} = 0$, то:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

следовательно,

$$\vec{L} = \text{const}.$$

Мы получили закон **сохранения момента импульса**, который формулируется так: *момент импульса системы материальных точек остается постоянным, если суммарный момент внешних сил равен нулю*.

Закон сохранения момента импульса можно применить к вращающемуся телу.

Так как $\vec{L} = \text{const}$, то величина $I_z\omega$ будет иметь одинаковые значения для любых интересующих нас моментов времени, т. е.:

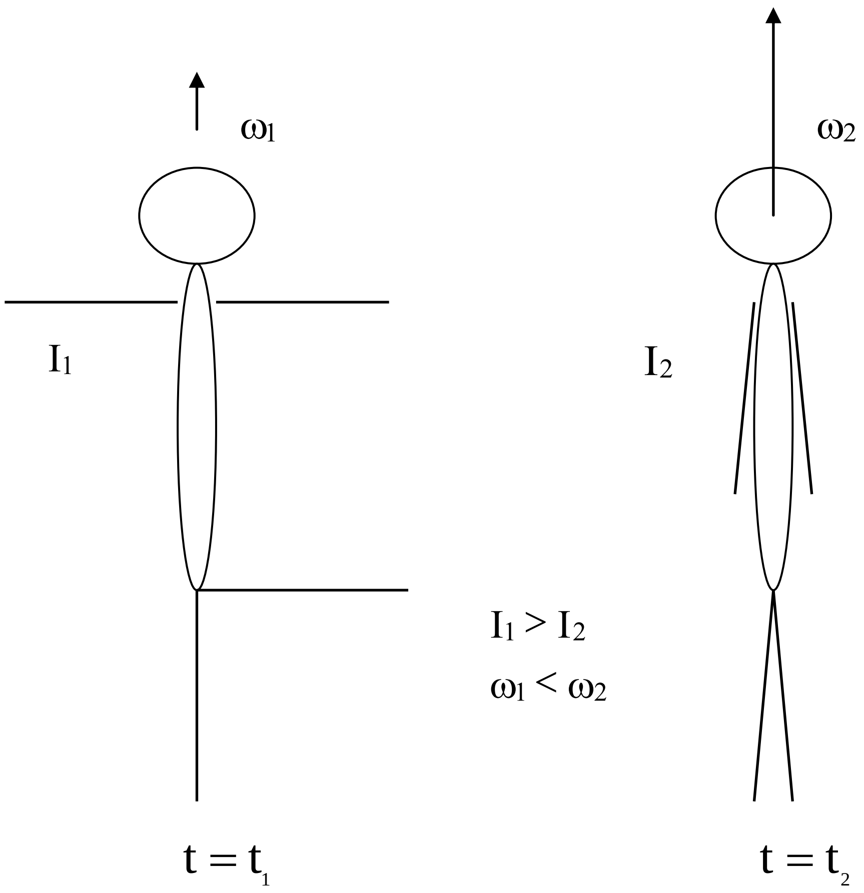
$$I_z\omega\Big|_{t=t_1} = I_z\omega\Big|_{t=t_2},$$

или

$$I_{z1}\omega_1 = I_{z2}\omega_2.$$

Вращающееся тело может изменить свой момент инерции, изменится и его угловая скорость, но при равенстве нулю суммарного момента внешних сил величина $I_z\omega$ останется постоянной.

Пример – фигурист в «волчке», схематически изображенный на рис. 9.2, иллюстрирует применение закона сохранения момента импульса.



$$I_{z1}\omega_1 = I_{z2}\omega_2, \text{ откуда } \omega_2 = \omega_1 \frac{I_{я1}}{I_{я2}}$$

Рис. 9.2

Фигурист, раскинув руки в стороны, отталкивается ногой ото льда и начинает вращаться с угловой скоростью ω_1. При этом его момент инерции I_1 за счет отведенной в сторону ноги и раскинутых рук велик. Затем фигурист прижимает к туловищу руки и сводит вместе ноги, уменьшая их расстояние до оси вращения. Поэтому его момент инерции I_2 становится заметно меньше, чем I_1. Так как трение об лед невелико, то можно считать, что момент импульса $I\omega$ остается постоянным, поэтому угловая скорость фигуриста ω_2 становится заметно больше, чем ω_1.

Аналогичные приемы используют балерины, выполняя фуэте, акробаты и гимнасты, делая сальто. Во всех этих случаях работает закон сохранения момента импульса.

§ 4. Гироскопы

Гироскопом *называется быстро вращающееся массивное симметричное тело, ось вращения которого (его ось симметрии) может изменять свое направление в пространстве.*

У гироскопов, применяемых в технике, свободный поворот оси гироскопа обеспечивают, закрепляя гироскопы в рамках (кольцах) карданова подвеса (рис. 9.3).

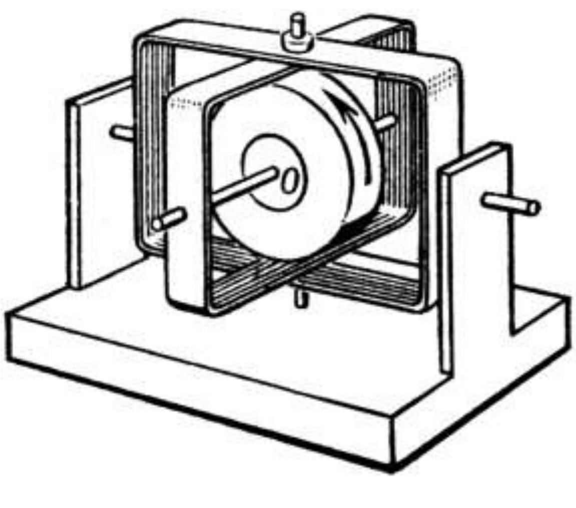


Рис. 9.3

Такой гироскоп имеет три степени свободы: он может совершать независимые повороты вокруг трех осей, пересекающихся в центре подвеса O.

Если центр тяжести гироскопа совпадает с центром подвеса O, то момент сил тяжести, действующих на гироскоп, будет равен нулю.

Трение в подшипниках всех трех осей стараются сделать как можно меньше, таким, чтобы моментом сил трения можно было пренебречь. С учетом этого, момент внешних сил $\vec{M}$ относительно центра гироскопа можно считать равным нулю. Как было показано в § 3 на основе формулы (9.9), при этом условии момент импульса гироскопа $\vec{L}$ *не изменяется с течением времени*. Для симметричного тела, вращающегося вокруг оси симметрии, момент импульса, в соответствии с (9.5), равен:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Таким образом, направление вектора угловой скорости гироскопа $\vec{\omega}$ остается неизменным с течением времени.

Это значит, что ось гироскопа сохраняет свое направление в мировом пространстве неизменным. Если эта ось при раскрутке гироскопа была направлена на какую-нибудь звезду, то при *любых* перемещениях гироскопа она будет продолжать указывать на эту звезду.

Удивительным, с точки зрения житейского здравого смысла, является поведение гироскопа при действии на него момента внешних сил.

Пусть, как это изображено на рис. 9.4, ось гироскопа закреплена в точке О. Сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$, казалось бы, должна поворачивать гироскоп вниз, вокруг оси y. Опыт же показывает, что гироскоп будет двигаться не по направлению силы $m\vec{g}$, а перпендикулярно ей! Он будет вращаться относительно оси z в сторону оси y.

Этот результат согласуется с предсказанием закона изменения момента импульса (9.9):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

В самом деле, момент силы тяжести относительно точки О, в соответствии с формулой (8.4), направлен по правилу правого винта вдоль оси y:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right] = \left[\vec{r} \cdot m\vec{g}\right].$$

Бесконечно малое приращение момента импульса $d\vec{L}$, в соответствии с (9.9), будет направлено туда же:

$$d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt\,. \qquad (9.10)$$

На рис. 9.4 вектор начального момента импульса $\vec{L}_o$ изображен исходящим из точки О. Вектор $\vec{L}$, изображающий момент импульса через промежуток времени dt, будет повернут относительно оси z в направлении оси y, так как (см. рис. 9.4):

$$\vec{L} = \vec{L}_o + d\vec{L} = \vec{L}_o + \vec{M} \cdot dt.$$

Это парадоксальное, на первый взгляд, предсказание закона изменения момента импульса, как было уже сказано выше, согласуется с реальным поведением гироскопа. Такое движение гироскопа называется *регулярной прецессией.*

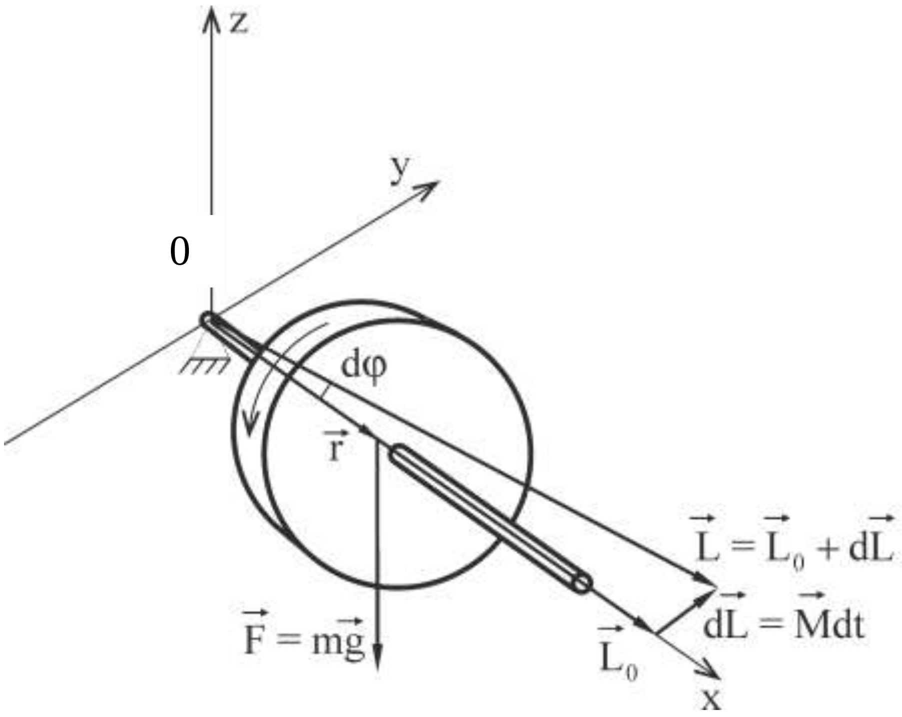


Рис. 9.4

Найдем угловую скорость прецессии $\omega_{пр}$. В соответствии с определением (7.1):

$$\omega_{пр} = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (9.11)$$

Из рис. 9.4. радианная мера угла dφ будет равна:

$$d\varphi = \frac{|d\vec{L}|}{L_o}. \qquad (9.12)$$

Из (9.10) и (9.12) следует, что

$$d\varphi = \frac{|\vec{M}| \cdot dt}{L_o}. \qquad (9.13)$$

Из (9.11) и (9.13) получим:

$$\omega_{пр} = \frac{|\vec{M}|}{L_o}. \qquad (9.14)$$

Подставляя $L_o = I \cdot \omega_o$, где ω_o - скорость вращения гироскопа, получим:

$$\omega_{пр} = \frac{\left|\vec{M}\right|}{I \cdot \omega_o}. \qquad (9.15)$$

Формула (9.15) замечательна тем, что в соответствии с ней угловая скорость прецессии $\omega_{пр}$ будет *постоянной* при действии на гироскоп момента внешней силы. При исчезновении этого момента $\omega_п$ также обращается в ноль. Из (9.15) следует, что чем больше момент импульса гироскопа $I \cdot \omega_o$, тем меньше скорость прецессии $\omega_{пр}$.

Отметим, что формула (9.15) справедлива при условии, что угловая скорость вращения гироскопа намного больше, чем скорость прецессии, т. е., если $\omega_o >> \omega_{пр}$.

В заключение скажем, что в настоящее время разработаны и используются гироскопы, работающие на других физических принципах. Это *волоконно-оптические* гироскопы, *лазерные* гироскопы, *ядерные* гироскопы.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 9

1. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно закрепленной оси имеет следующий вид (9.2):

$$M_z = I_z \varepsilon.$$

2. Моментом импульса L_z абсолютно твердого тела относительно оси z (9.4) называется произведение момента инерции I_z на угловую скорость ω:

$$L_z = I_z \omega.$$

3. Основное уравнение динамики вращательного движения можно записать в виде (9.6):

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}.$$

4. Момент импульса материальной точки m_i относительно произвольной точки О пространства равен векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$ на импульс $\vec{p}$ (9.8):

$$\vec{L}_i \equiv [\vec{r}_i \vec{p}_i] = [\vec{r}_i m_i \vec{v}_i].$$

5. Момент импульса системы материальных точек $\vec{L}$ равен векторной сумме моментов импульса материальных точек, входящих в систему (9.7):

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i.$$

6. Закон изменения момента импульса системы со временем имеет следующий вид (9.9):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

здесь $\vec{M}$ – суммарный момент внешних сил.

7. Закон сохранения момента импульса гласит: *момент импульса системы материальных точек остается постоянным, если суммарный момент внешних сил равен нулю*.

8. Гироскопом называется быстро вращающееся массивное симметричное тело, ось вращения которого (его ось симметрии) может изменять свое направление в пространстве.

9. Если центр тяжести гироскопа совпадает с центром подвеса, то ось гироскопа сохраняет свое направление в пространстве неизменным.

10. При действии на гироскоп момента внешних сил он совершает прецессию (см. рис. 9.4) со скоростью $\omega_{пр}$, определяемой формулой (9.15):

$$\omega_{пр} = \frac{|\vec{M}|}{I \cdot \omega_o},$$

где $|\vec{M}|$ – модуль момента внешних сил, действующих на гироскоп;

I – момент инерции гироскопа;

ω_o – угловая скорость его вращения.