ЛЕКЦИЯ № 3

Затухающие колебания

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Период затухающих колебаний. Логарифмический декремент. Добротность

В реальных условиях движению тела, совершающего свободные колебания, всегда препятствуют силы сопротивления (трения). Взаимодействие колеблющейся системы со средой приводит к рассеянию (диссипации) энергии и уменьшению амплитуды колебаний. Колебания, при которых амплитуда с течением времени уменьшается, называются затухающими.

§ 1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

Рассмотрим колебание грузика, прикрепленного к пружинке, учтем влияние трения на движение грузика (рис. 3.1). На тело действует сила упругости (см. формулу (1.11)):

$$F_{упр} = -k_{упр}x.$$

Сила трения препятствует движению.

Будем считать, что мы имеем дело с силой вязкого трения (см. ч. 1, (4.10)), она пропорциональна скорости:

$$F_{тр} = -rv, \qquad (3.1)$$

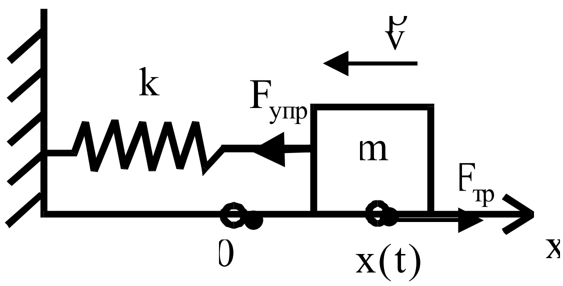

Рис. 3.1

где r – коэффициент трения или коэффициент сопротивления.

Знак «минус» показывает, что сила трения направлена против движения.

По второму закону Ньютона (1.7):

$$ma = -k_{упр}x - rv;$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\ a = a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний пружинного маятника имеет вид:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k_{упр}}{m}x = 0.$$

Введем обозначения:

$$\frac{r}{m} \equiv 2\beta; \tag{3.2}$$

$$\frac{k_{упр}}{m} = \omega_0^2 \text{ (см. формулу (1.13)),}$$

где β – коэффициент затухания;

ω_0 – частота собственных незатухающих колебаний.

Тогда:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{3.3}$$

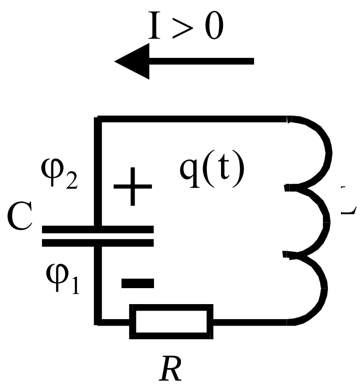

Рис. 3.2

Рассмотрим еще одну систему, в которой совершаются затухающие колебания. Это колебания заряда q в колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкостью C, катушки с индуктивностью L и резистора с активным сопротивлением R (рис. 3.2). Для колебательного контура из закона Ома для неоднородного участка цепи (см. ч. 2, (7.11))

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon$$

следует дифференциальное уравнение затухающих колебаний заряда q на обкладках конденсатора:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{3.3а}$$

Здесь мы учли, что $I = \dot{q}$ (см. ч. 2, (6.1)), $\varphi_1 - \varphi_2 = -q/C$ (см. ч. 2, (5.4)), знак «минус» в правой части последней формулы связан с выбранным нами положительным направлением тока (см. рис. 3.2). ЭДС ε равна ЭДС самоиндукции: $\varepsilon_{сам} = -L\dot{I} = -L\ddot{q}$ (см. ч. 2, (12.5)).

Если, как и в лекции № 1, ввести обобщенную координату ξ(t), понимая под ней смещение любой физической величины от положения равновесия, то уравнения (3.3) и (3.3а) перейдут в дифференциальное уравнение, описывающее затухающие колебания любой природы:

$$\ddot{\xi}(t) + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi(t) = 0. \tag{3.4}$$

Для пружинного маятника:

$$\xi(t) = x(t),$$

а для колебательного контура:

$$\xi(t) = q(t), \quad \frac{R}{L} = 2\beta, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \tag{3.4a}$$

Решение уравнения (3.4) будем искать в виде:

$$\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha). \tag{3.5}$$

Амплитуда затухающих колебаний:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}, \tag{3.6}$$

где e = 2,71828...

Из (3.6) следует, что амплитуда убывает по экспоненциальному закону.

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что *функция* (3.5) будет *решением дифференциального уравнения* (3.4) при условии, что **частота затухающих колебаний**:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{3.7}$$

График затухающих колебаний представлен на рис. 3.3

$$\beta < \omega_0.$$

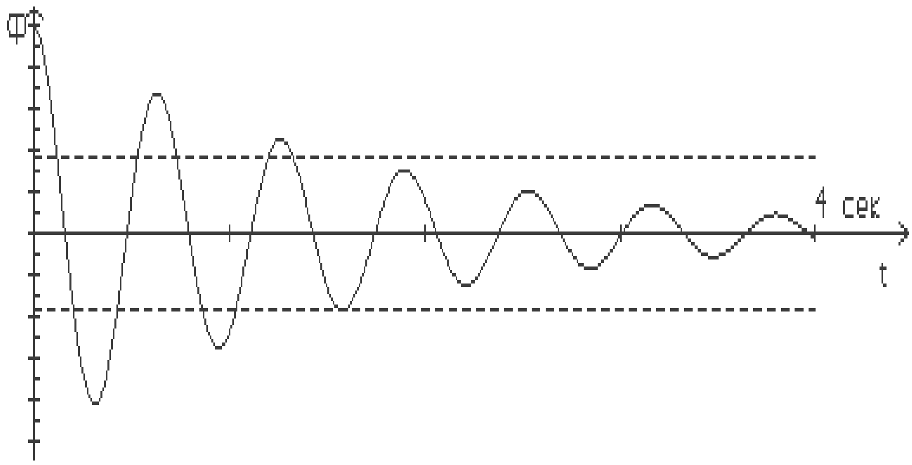

Рис. 3.3

§ 2. Период затухающих колебаний

Период затухающих колебаний зависит от коэффициента затухания β. При $\beta \ll \omega_0$ период колебаний практически равен (см. (1.2)):

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

т. е. периоду собственных незатухающих колебаний. С ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается. Это происходит потому, что силы сопротивления (трения) тормозят движение, в результате система возвращается к положению равновесия медленнее

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (3.8)$$

Как следует из формулы (3.8), при $\beta = \omega_0$ период обращается в бесконечность. Это означает, что движение перестает быть периодическим. Система возвращается к положению равновесия, не совершая колебаний. Движение перестает быть колебательным при $\beta \geq \omega_0$. Такое движение называется апериодическим. На рис. 3.4 приведены графики апериодического движения для разных значений начальной скорости v(0). График 2 на этом рисунке соответствует случаю, когда системе, выведенной из положения равновесия, сообщена достаточно большая начальная скорость. График 1 соответствует движению без начальной скорости.

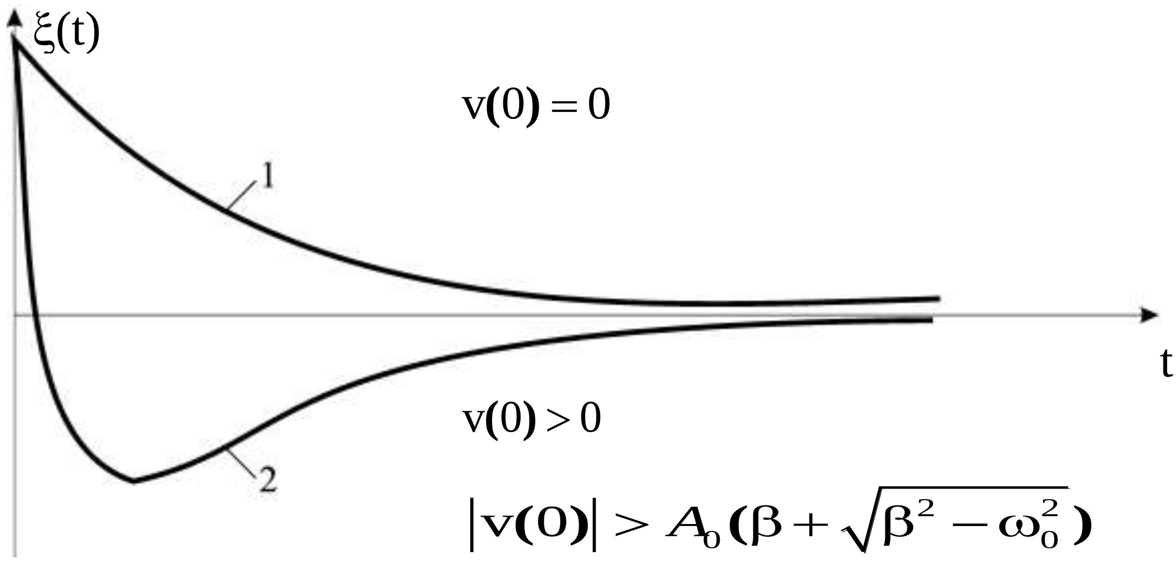

Рис. 3.4

§ 3. Логарифмический декремент затухания

В качестве характеристики затухания вводится величина, называемая логарифмическим декрементом затухания.

Логарифмическим декрементом затухания λ *называется натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд, взятых через период*.

$$\lambda \equiv \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}. \qquad (3.9)$$

Подставим в формулу 3.5 $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$.

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta (t+T)}} = \ln e^{\beta t} = \beta T,$$

$$\boxed{\lambda = \beta T}. \qquad (3.10)$$

Формула (3.10) выражает связь между логарифмическим декрементом затухания и коэффициентом затухания β.

§ 4. Добротность

Выясним физический смысл логарифмического декремента затухания.

Введем понятие времени релаксации.

Время релаксации – *это время τ, за которое амплитуда (3.6) уменьшилась в e = 2,71 раз.*

Учитывая (3.10), получим:

$$A(\tau) = A_o e^{-\beta\tau} = A_o e^{-\lambda\frac{\tau}{T}} = A_o e^{-1},$$

тогда

$$\lambda\frac{\tau}{T} = 1 \text{ и } \lambda = \frac{T}{\tau}.$$

Так как $\frac{\tau}{T} = N_e$ – число колебаний за время **τ**, то:

$$\lambda = \frac{1}{N_e}. \tag{3.11}$$

Логарифмический декремент по величине обратен числу колебаний, за которое амплитуда убывает в e = 2,71 раз.

Характеристикой затухания также является добротность, которая вводится как

$$Q \equiv \frac{\pi}{\lambda}.$$

С учетом (3.11):

$$Q = \pi N_e. \tag{3.12}$$

Добротность пропорциональна числу колебаний, совершаемых системой за время, в течение которого амплитуда уменьшается в e = 2,71… раз.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 3

1. Свободные колебания в системах с трением затухают и не являются гармоническими.

2. Амплитуда затухающих колебаний убывает со временем по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \qquad (3.6)$$

3. Частота затухающих колебаний ω зависит от коэффициента затухания β:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

где ω_0 – частота собственных незатухающих колебаний.

При $\beta \geq \omega_0$ наблюдается апериодическое движение.

4. Для характеристики затухания вводится логарифмический декремент затухания. Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд, взятых через период:

$$\lambda \equiv \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}. \qquad (3.9)$$

5. Связь логарифмического декремента затухания λ с коэффициентом затухания β выражается формулой (3.10):

$$\lambda = \beta T.$$

6. Время релаксации – это время, за которое амплитуда уменьшается в e = 2,71 раз.

7. Добротность вводится как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания (3.12):

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}.$$

ЛЕКЦИЯ № 4

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Уравнение установившихся колебаний. Резонанс

Вынужденные колебания – *это колебания, происходящие под действием периодического внешнего воздействия.*

§ 1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Рассмотрим вынужденные колебания пружинного маятника (рис. 4.1).

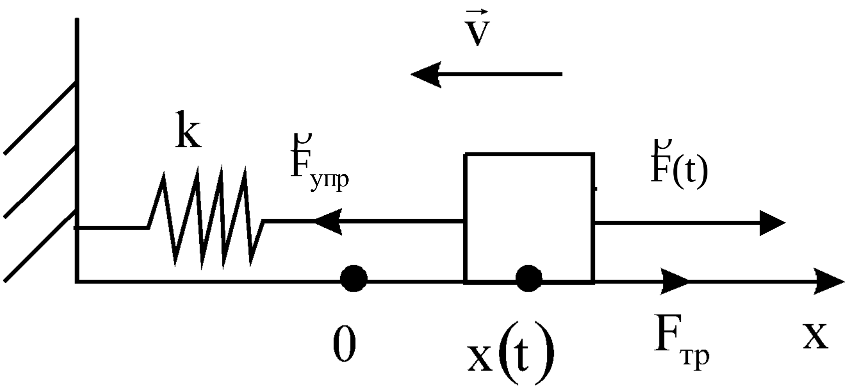

Рис. 4.1

На грузик массой m действуют внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \cdot \cos\omega t, \tag{4.1}$$

а также упругая сила (1.11) и сила трения (3.1).

Законом движения является второй закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cdot \cos\omega t.$$

Приведем уравнения к каноническому виду – делим на коэффициент при старшей производной и переносим все члены уравнения, содержащие неизвестную функцию, в левую часть:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cdot\cos\omega t.$$

Введем обозначения:

$$x(t) \equiv \xi(t); \qquad \frac{r}{m} \equiv 2\beta; \qquad \frac{k}{m} \equiv \omega_0^2; \qquad \frac{F}{m} \equiv f_0.$$

Дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания, будет иметь вид:

$$\ddot{\xi}(t) + 2\beta\dot{\xi}(t) + \omega_0^2\xi(t) = f_0\cdot\cos\omega t. \tag{4.2}$$

Отметим, что такой же вид имеет дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания в колебательном контуре (рис. 4.2а).

В контур включен последовательно источник переменного напряжения, изменяющегося по гармоническому закону:

$$u(t) = u_m\cos\omega t.$$

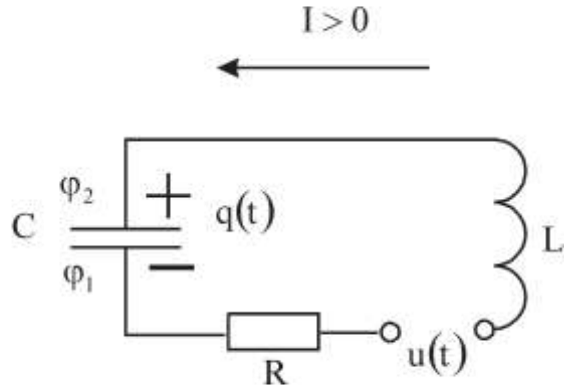

Рис. 4.2а

Если в правую часть уравнения (3.3а) вместо нуля подставить

$$\frac{U(t)}{L} = \frac{U_m}{L}\cos\omega t$$

и ввести обозначения:

$$q(t) \equiv \xi(t); \qquad \frac{R}{L} \equiv 2\beta; \qquad \frac{1}{LC} \equiv \omega_0^2; \qquad \frac{u_m}{L} \equiv f_0,$$

то мы уже получим уравнение (4.2).

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний – $\xi(t)$ (рис. 4.2б) – состоит из двух слагаемых:

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t), \tag{4.3}$$

здесь $\xi_1(t)$ – общее решение однородного уравнения (3.4). Роль этого слагаемого существенна при переходных процессах, при установлении колебаний;

$\xi_2(t)$ – частное решение неоднородного уравнения (4.2). Именно это слагаемое описывает установившиеся вынужденные колебания.

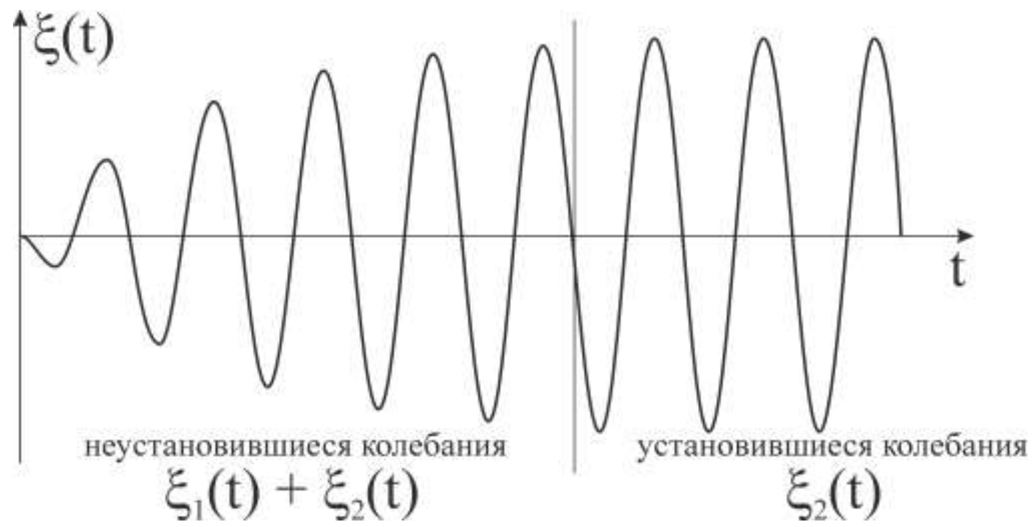

Рис. 4.2б

§ 2. Уравнение установившихся колебаний. (Частное решение неоднородного уравнения)

Ищем $\xi_2(t)$ в виде гармонической функции, изменяющейся с частотой внешнего воздействия ω:

$$\xi_2 = A \cdot \cos(\omega t - \varphi). \tag{4.4}$$

Первая и вторая производные от этой функции также будут гармоническими функциями, изменяющимися с частотой ω. Значит, в левой части уравнения (4.2) будет сумма трех гармонических функций одинаковой частоты, справа – гармоническая функция той же частоты, т. е. сумма трех колебаний одной частоты равна четвертому колебанию той же частоты. Задачу о сложении колебаний мы решим методом векторных диаграмм (см. лекцию № 2, § 1, 2). Для этого $\dot{\xi}$ и $\ddot{\xi}$, после нахождения этих производных, запишем с помощью функции косинуса:

$$\dot{\xi}_2 = -A\omega\sin(\omega t - \varphi) = A\omega\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \qquad (4.5)$$

$$\ddot{\xi}_2 = -A\omega^2\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = A\omega^2\cos(\omega t - \varphi + \pi). \qquad (4.6)$$

Изобразим эти колебания с помощью векторов, амплитуды которых получаются после умножения $\dot{\xi}_2$ на 2β, а ξ_2 – на ω_0^2 (рис. 4.3). После подстановки формул (4.4), (4.5), (4.6) в уравнение (4.2) получим:

$$A\omega^2\cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta A\omega\cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) + \omega_0^2 A\cdot\cos(\omega t - \varphi) = f_0\cdot\cos\omega t.$$

Векторная диаграмма представлена на рис. 4.3.

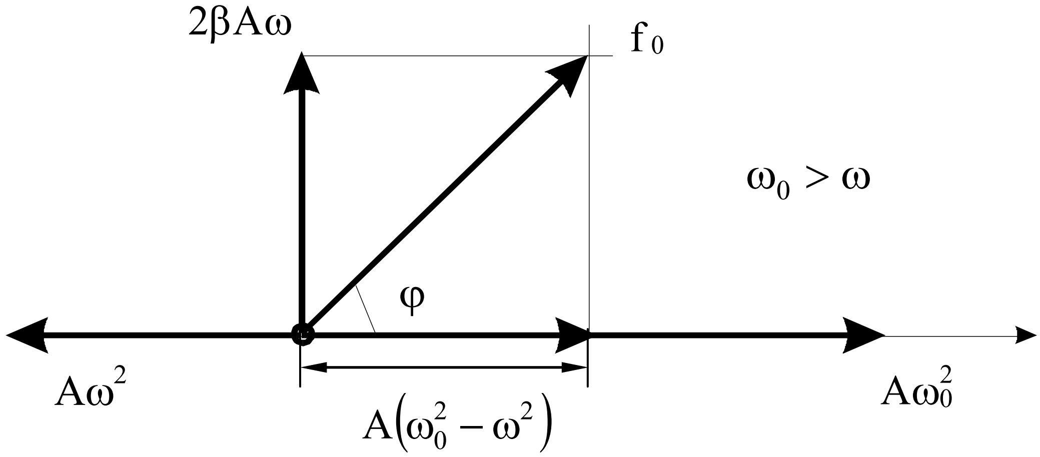

Рис. 4.3

Из векторной диаграммы найдем амплитуду А и начальную фазу φ вынужденных колебаний. Из рис. 4.3 следует:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}; \qquad (4.7)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (4.8)$$

По теореме Пифагора:

$$f_0^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2 + 4\beta^2 A^2 \omega^2 .$$

Амплитуда вынужденных колебаний равна:

$$\boxed{A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}. \qquad (4.9)$$

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы.

§ 3. Резонанс

Проанализируем, как амплитуда вынужденных колебаний изменяется с изменением частоты внешнего воздействия. При определенной частоте амплитуда достигает максимума. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота $\omega_{рез}$ – резонансной. Для определения $\omega_{рез}$ исследуем функцию $A(\omega)$ (формула (4.9)) на максимум, для этого достаточно найти минимум знаменателя у выражения $A(\omega)$. Возьмем от него производную по ω и приравняем к нулю:

$$-2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot 2\omega + 8\beta^2\omega = 0,$$

откуда резонансная частота:

$$\boxed{\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}. \qquad (4.10)$$

При $2\beta^2 > \omega_0^2$ резонанс отсутствует ($\omega_{рез}$ – мнимое число).

Амплитуда при резонансе

Амплитуда при резонансе получается при подстановке найденного выражения $\omega_{рез}$ (4.10) в формулу для $A(\omega)$ (4.9):

$$\boxed{A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}. \qquad (4.11)$$

Из (4.11) следует, что при уменьшении коэффициента затухания β резонансная амплитуда возрастет. Если $\beta \to 0$, то $A_{рез} \to \infty$. При этом резонансная частота (4.10) стремится к частоте незатухающих собственных колебаний ω_0.

При $\beta << \omega_0$:

$$A_{рез} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}. \qquad (4.12)$$

Резонансные кривые

Графики зависимости $A(\omega)$ при различных β носят название резонансных кривых. Они представлены на рис. 4.4.

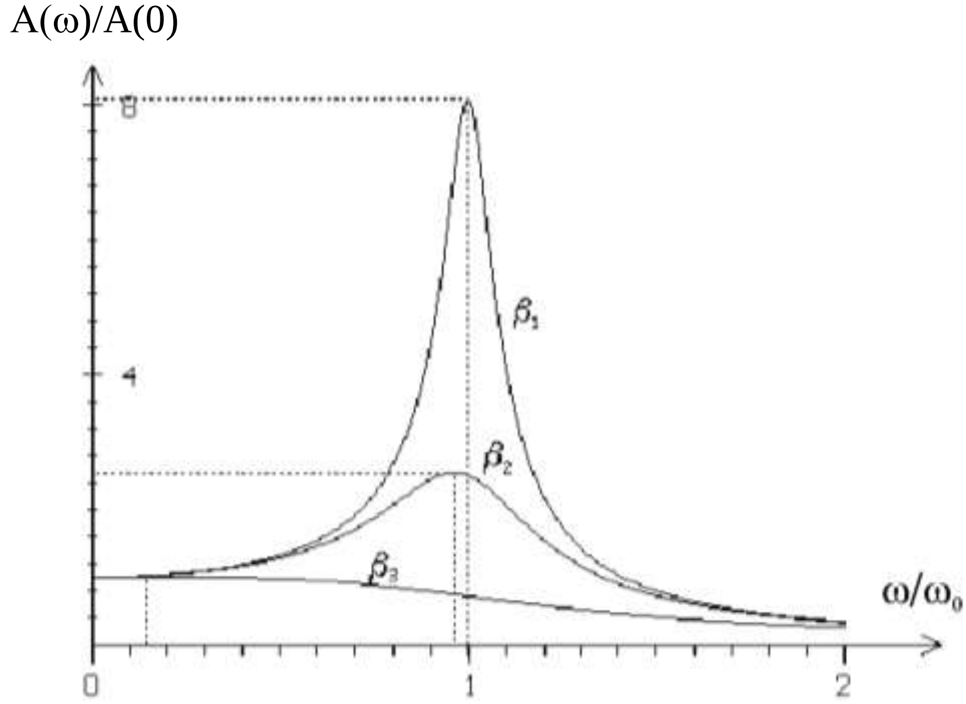

Рис. 4.4

На рис 4.4 $\beta^1 < \beta_2 < \beta_3$. В случае, если $2\beta_3^2 > \omega_0^2$ – резонанса нет.

Резонанс необходимо учитывать в технике. Жилые дома, промышленные корпуса, железные дороги, мосты, туннели и т. д. являются колебательными системами, в которых при определенных условиях могут возникать вынужденные колебания. Иногда амплитуда вынужденных колебаний становится столь большой, что это может вызвать разрушения. В ряде случаев резонанс может давать положительный эффект, например, при погружении свай и труб на строительстве морских и озерных сооружений.

Исключительно важную роль играет резонанс в радиотехнике и электронике, где резонансные свойства колебательного контура и других резонансных электрических систем используются для выделения сигналов нужной частоты. Например, настройка на нужную станцию радио- и телевизионных приемников производится путем изменения собственных частот колебательных контуров в этих устройствах.

ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 4

1. Вынужденные колебания возникают в том случае, когда на колеблющуюся систему действует внешняя периодически изменяющаяся сила.

2. Частота установившихся вынужденных колебаний равна частоте вынуждающей силы. Дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания, имеет вид (4.2):

$$\ddot{\xi}(t) + 2\beta\dot{\xi}(t) + \omega_0^2\xi(t) = f_0 \cdot \cos\omega t.$$

3. Амплитуда установившихся вынужденных колебаний зависит от амплитуды вынуждающей силы f_0 и ее частоты ω (4.9):

$$\boxed{A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}.$$

4. Резонансом называют резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний, происходящее при приближении частоты вынужденных колебаний к резонансной частоте колебаний системы. Амплитуда при резонансе дается формулой (4.11):

$$\boxed{A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}.$$

5. Резонансная частота $\omega_{\text{рез}}$ зависит от частоты собственных колебаний ω_0 и коэффициента затухания β (4.10):

$$\boxed{\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}.$$

При $2\beta^2 > \omega_0^2$ резонанса нет.