# ВОЛНЫ

**Лекция № 5. Волны в упругой среде**

**Лекция № 6. Энергия упругих волн. Стоячие волны**

**Лекция № 7. Электромагнитные волны**

# ЛЕКЦИЯ № 5

# ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

***Упругие волны. Основные определения для волнового процесса. Уравнение плоской волны. Фазовая скорость. Уравнение сферической волны. Волновое уравнение***

## § 1. Упругая волна

Среда называется упругой, если между ее частицами существуют силы взаимодействия, препятствующие какой-либо деформации этой среды. Существует объемная упругость и упругость формы. Например, давление газов на стенки сосуда обеспечивает способность газов сопротивляться изменению их объема. В то же время, газы беспрепятственно изменяют свою форму. Следовательно, газы обладают объемной упругостью, но не обладают упругостью формы. Такими же свойствами обладают жидкости. Твердые тела обладают как объемной упругостью, так и упругостью формы.

Если в каком-либо месте упругой среды (твердой, жидкой или газообразной) возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами эти колебания будут распространяться в среде от частицы к частице, создавая **упругие волны**. Колебания твердых тел при взрывах и землетрясениях, звуковые волны – все это примеры упругих волн.

Частицы среды при волновом процессе не переносятся волной, а лишь колеблются около своих положений равновесия. Причем, вследствие инерции колебания частиц сдвинуты по фазе. Распространение колебаний в среде связано с передачей энергии от одной колеблющейся частицы к другой. Таким образом, волны переносят энергию от одной колеблющейся частицы к другой.

Итак, **упругая волна** – *это процесс распространения механических колебаний в упругой среде*. Характерное свойство волны – перенос энергии без переноса вещества.

Для описания волны надо ввести функцию, в общем случае – векторную, задающую смещение от положения равновесия каждой частицы упругой среды для любого момента времени. Обозначим эту функцию греческой буквой $\vec{\xi}$ (кси). Аргументами ее, в соответствии с вышесказанным, будут три пространственные переменные – x, y, z, задающие положение частицы (или радиус-вектор $\vec{r}$) и время t, т. е.

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(x, y, z, t) = \vec{\xi}(\vec{r}, t).$$

**Скорость движения частиц упругой среды** – это частная производная от смещения по времени, т. е.

$$\vec{v}_r = \frac{\partial \vec{\xi}(\vec{r}, t)}{\partial t}.$$

С такой скоростью частицы среды колеблются около своих положений равновесия. Колебания частиц среды могут совершаться *вдоль* направления распространения волны или *поперек*. Поэтому различают **продольные и поперечные волны.**

Обозначим через $\vec{v}$ скорость распространения волны. *Если направление смещения* $\vec{\xi}$ *(и скорость частицы* $\partial\vec{\xi}/\partial t$*) совпадают с направлением скорости волны, то волна называется* **продольной**. *Если* $\vec{v}$ *и* $\partial\vec{\xi}/\partial t$ *взаимно перпендикулярны, то волна* **поперечная**. В газах и жидкостях могут существовать только продольные волны, в твердых телах – как продольные, так и поперечные.

## § 2. Основные определения для волнового процесса

Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства.

**Фронт волны** – поверхность, отделяющая часть пространства, охваченную волновым процессом, от той части, где колебания еще не возникли.

**Волновая поверхность** – это геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Во всякой волне можно выделить множество волновых поверхностей, в то время как фронт волны один.

Для плоской волны – волновые поверхности и фронт волны представляют собой плоскости. Для сферической волны – волновые поверхности и фронт волны представляют собой сферы. В общем случае форма волновых поверхностей может быть любой.

**Длина волны** – это расстояние, на которое распространяется волна за один период колебаний.

$$\boxed{\lambda = vT}. \tag{5.1}$$

Так как

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega},$$

то

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega}. \tag{5.2}$$

**Волновое число –** это величина

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{или} \quad k = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}. \tag{5.3}$$

**Волновой вектор** – $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$, где $\vec{n}$ – единичный вектор, указывающий направление распространения волны.

## § 3. Уравнение плоской волны

Пусть в начале координат находится твердая плоскость, которая колеблется по гармоническому закону и вынуждает частицы упругой среды, находящейся рядом с ней, колебаться по этому же закону. Направим ось x перпендикулярно этой плоскости (рис. 5.1). Тогда вдоль этой оси будет распространяться плоская гармоническая продольная волна. Наша задача – найти $\xi(x,t)$ – уравнение волны, если задано $\xi(0,t) = A \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, т. е. задано уравнение колебаний источника.

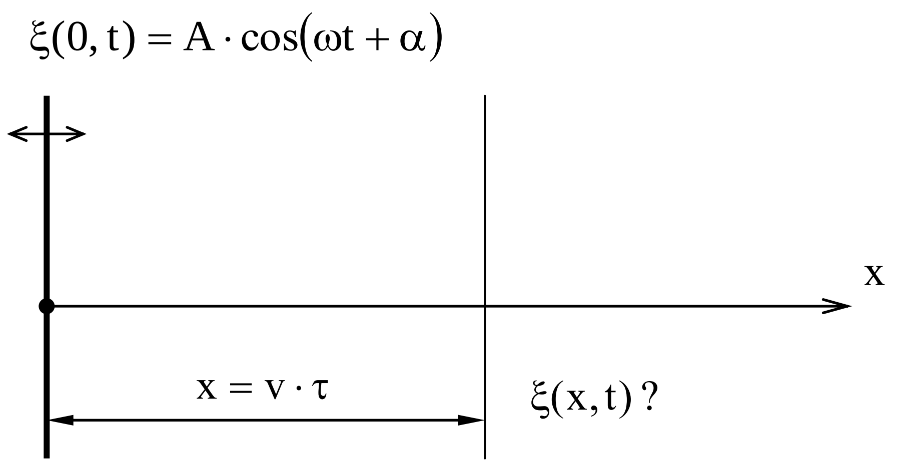


Рис. 5.1

Колебания до волновой поверхности, удаленной от начала координат на расстояние x, дойдут через время $\tau = x/v$, значит, уравнение волны

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos[\omega(t-\tau)+\alpha] = A \cdot \cos\left[\omega(t-\frac{x}{v})+\alpha\right]. \qquad (5.4)$$

где $\xi(x,t)$ – смещение частиц среды от положения равновесия;

x – расстояние от источника до точки наблюдения;

A – амплитуда волны;

ω – частота колебаний источника;

t – время распространения колебаний;

$\omega(t-\frac{x}{v})+\alpha$ – фаза волны, т. е. аргумент у косинуса в уравнении волны.

Фаза плоской волны зависит от двух переменных – x и t.

Найдем симметричную форму уравнения плоской волны. Преобразуем уравнение (5.4):

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos\left[\omega(t-\frac{x}{v})+\alpha\right] = A \cdot \cos(\omega t - \frac{\omega}{v}x+\alpha).$$

Учтем:

$$\boxed{k = \frac{\omega}{v}} \text{ – волновое число.}$$

Тогда:

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx+\alpha). \qquad (5.5)$$

При такой записи координата x и время t входят в уравнение волны симметрично.

**Уравнение плоской волны**, распространяющейся в направлении, противоположном оси x, имеет вид:

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t + kx+\alpha). \qquad (5.5a)$$

Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении, имеет вид:

$$\xi(\vec{r},t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}+\alpha), \qquad (5.6)$$

здесь $\vec{k}$ – волновой вектор;

$k_x$, $k_y$, $k_z$ – его проекции на оси координат;

$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ – скалярное произведение волнового вектора и радиус-вектора.

## § 4. Фазовая скорость

**Фазовая скорость** – это скорость перемещения в пространстве поверхности, вдоль которой фаза волны остается постоянной, т. е. это скорость, с которой распространяется фронт волны или какая-либо волновая поверхность, например, гребень волны.

Зафиксируем значение фазы, стоящее в выражении (5.4):

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha = \text{const}.$$

Найдем производную от этого выражения по времени:

$$\omega - \frac{\omega}{v} \cdot \frac{dx}{dt} = 0,$$

откуда искомая фазовая скорость волны:

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Как направлена фазовая скорость? В случае однородной и изотропной среды фазовая скорость в каждой точке среды направлена перпендикулярно к элементу волновой поверхности.

Фазовая скорость зависит от механических свойств среды. Например, для продольных волн в твердых телах:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

для поперечных волн:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

для продольных волн в жидкостях:

$$v = \sqrt{\frac{k_{сж}}{\rho}}.$$

В этих формулах:

E – модуль упругости (модуль Юнга);

G – модуль сдвига;

$k_{сж}$ – модуль всестороннего сжатия;

$\rho$ – плотность среды.

Значения этих величин для разных сред можно найти в справочниках. По справочным данным, которые получены из опыта, G < E, т. е. скорость поперечных волн в твердых телах меньше, чем продольных.

Это обстоятельство используется, например, для определения расстояния от очага землетрясения до сейсмической станции. Вначале на станции регистрируется продольная волна, потом поперечная. Зная скорость распространения продольных и поперечных волн в земной коре и время запаздывания поперечной волны, можно определить расстояние до очага землетрясения.

## § 5. Уравнение сферической волны

Всякий реальный источник обладает некоторой протяженностью. Однако, если ограничиться рассмотрением волн на расстояниях от источника, значительно превышающих его размеры, то источник можно считать **точечным**. Точечный источник в однородной и изотропной среде создает **сферические** волны. Найдем уравнение сферической волны. Допустим, что фаза колебаний источника равна $(\omega t + \alpha)$. Тогда точки, лежащие на расстоянии r от источника, будут колебаться с фазой:

$$\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) + \alpha = \omega t - kr + \alpha.$$

Амплитуда незатухающей сферической волны равна:

$$A_r = \frac{A_o}{r}, \tag{5.7}$$

где $A_o$ – постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии r, равном единице.

Формула (5.7) справедлива при $r \gg l$, где $l$ – размеры источника (при $r \to 0$ ее применять нельзя).

Уравнение сферической волны имеет вид:

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (5.8)$$

## § 6. Волновое уравнение

Уравнение волны (5.5) есть решение соответствующего дифференциального уравнения, называемого волновым. Волновое уравнение связывает вторые частные производные от смещения по координатам со вторыми частными производными от смещения по времени. Чтобы найти волновое уравнение, продифференцируем дважды уравнение плоской волны (5.5) по времени, а затем продифференцируем это же уравнение по координате. Получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -Ak^2 \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha); \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (5.10)$$

Разделим (5.9) на (5.10) и учтем, что $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{v}$.

Тогда получим волновое уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся в направлении оси x:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \quad (5.11)$$

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad (5.12)$$

где v – фазовая скорость волны.

Для волны, распространяющейся в произвольном направлении, волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (5.13)$$

Решением уравнения (5.13) в зависимости от дополнительных условий могут быть уравнения плоской, сферической и других волн.

# ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 5

1. Упругой волной называется процесс распространения механических волн в упругой среде (твердой, жидкой или газообразной). Характерное свойство волн – перенос энергии без переноса вещества.

2. Волны бывают продольные и поперечные.

3. Фронт волны – это геометрическое место точек, до которых дошли колебания. Волновая поверхность – это геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

4. Фазовая скорость волны – это скорость перемещения в пространстве волновой поверхности, например, фронта волн. Фазовая скорость зависит от плотности и упругих свойств среды.

5. Длина волны – это путь, пройденный волной за период (5.1):

$$\lambda = vT.$$

Связь длины волны и частоты выражается формулой (см. (5.2)):

$$\lambda = \frac{v}{\nu}.$$

6. Волновое число (5.3) – это:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

7. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x (5.5):

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha).$$

8. Уравнение сферической волны (5.8):

$$\xi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha).$$

9. Уравнение любой гармонической волны есть решение волнового уравнения (5.13):

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

где v – фазовая скорость волны (5.12):

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Эта формула полностью согласуется с формулой (5.3).

# ЛЕКЦИЯ № 6

# ЭНЕРГИЯ УПРУГИХ ВОЛН. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

***Плотность энергии. Вектор Умова. Интенсивность. Колебания струны, закрепленной с двух концов***

## § 1. Энергия упругой волны

Любая волна несет с собой энергию.

Найдем полную механическую энергию для выделенного нами элемента упругой среды, в которой распространяется продольная упругая волна (рис. 6.1).

Полная энергия складывается из кинетической и потенциальной:

$$\Delta W = \Delta W_{к} + \Delta W_{п}.$$

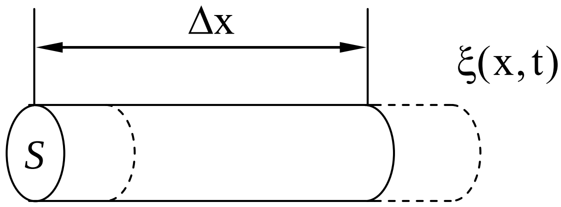


Рис. 6.1

Кинетическая энергия равна:

$$\Delta W_k = \frac{\Delta m v_r^2}{2}.$$

Масса $\Delta m$ выделенного элемента среды равна произведению плотности на объем: $\Delta m = \rho \Delta V$.

Так как объем $\Delta V = S\Delta x$, то $\Delta m = \rho S \Delta x$.

Скорость $v_r$ движения частицы упругой среды (не путать с фазовой скоростью волны v!) равна:

$$v_r = \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

тогда

$$\Delta W_k = \frac{\rho}{2} \cdot \left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\right]^2 \cdot S\Delta x. \tag{6.1}$$

Из теории упругости известно, что потенциальная энергия упругой деформации среды:

$$\Delta W_{п} = \frac{\rho}{2} v^2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]^2 S\Delta x, \tag{6.2}$$

где $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ – относительная деформация среды;

v – *фазовая скорость* волны.

Полная энергия выделенного элемента объемом $S\Delta x$ будет равна:

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_n = \frac{\rho}{2} \cdot \left\{\left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\right]^2 + v^2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]^2\right\} \cdot S\Delta x. \tag{6.2a}$$

## § 2. Плотность энергии упругой волны

Плотность энергии упругой волны – это энергия, заключенная в единице объема. Используя (6.2а), получим:

$$w \equiv \frac{\Delta W}{S\Delta x} = \frac{\rho}{2}\left\{\left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\right]^2 + v^2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]^2\right\}. \tag{6.3}$$

Найдем плотность энергии упругой волны в зависимости от времени и координаты.

Плотность энергии плоской гармонической волны найдем, продифференцировав уравнение плоской волны (5.5):

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

один раз по t, другой раз – по x:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -A\omega \cdot \sin(\omega t - kx + \alpha),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -Ak \cdot \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Подставим полученное выражение в (6.3) и учтем, что $\omega / k = v$ (см. (5.12)). В результате получим плотность энергии, возникающей в упругой среде при распространении в ней плоской гармонической волны:

$$w = \frac{\rho}{2} A^2 \cdot \left[\omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) + \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \cdot k^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)\right];$$

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha). \tag{6.4}$$

Формула (6.4) справедлива для гармонических волн *любого вида*, так как в ней нет величин, которые бы указывали на характер волны.

Найдем среднее по времени значение плотности энергии упругой *гармонической* волны. Из (6.4) следует, что в каждый момент времени плотность энергии в разных точках пространства различна. В одной и той же точке плотность энергии изменяется по закону квадрата синуса. Из математики известно, что среднее значение квадрата синуса равно одной второй, т. е.:

$$<\sin^2(\omega t - kx + \alpha)> = \frac{1}{2}.$$

Тогда:

$$<w> = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2. \tag{6.5}$$

Плотность энергии (6.4) и ее среднее значение (6.5) пропорциональны плотности среды, квадрату амплитуды A и квадрату частоты $\omega$ волны.

## § 3. Плотность потока энергии

Среда, в которой распространяется упругая волна, обладает дополнительной механической энергией. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды самой волной. Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется **потоком энергии Ф**:

$$\Phi \equiv \frac{dW}{dt}. \tag{6.6}$$

Поток энергии – скалярная величина, размерность которой совпадает с размерностью мощности (т. е. $\text{Дж}/\text{с} = \text{Вт}$). Для характеристики течения энергии в разных точках пространства используется векторная величина, называемая **плотностью потока энергии**.

Плотностью потока энергии называется физическая величина, численно равная потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно направлению, в котором переносится энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением распространения волны.

Модуль плотности потока энергии равен:

$$j \equiv \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S_{\perp}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_{\perp}} = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}}. \qquad (6.7)$$

Размерность j определяется из формулы (6.7):

$$[j] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

## § 4. Вектор Умова. Интенсивность

Найдем связь плотности потока энергии с плотностью энергии упругой волны.

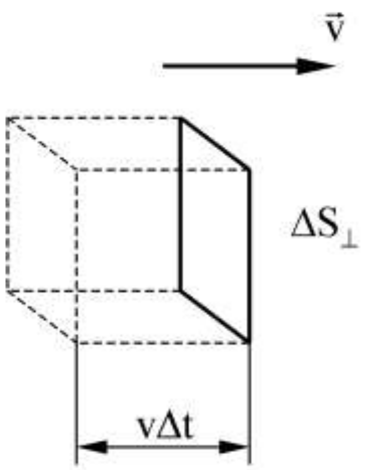

Рис. 6.2

Через площадь $\Delta S_{\perp}$ (рис. 6.2) за время $\Delta t$ проходит энергия, заключенная в объеме $\Delta S_{\perp} v \Delta t$. Из формулы плотности энергии (6.3) и рис. 6.2 следует, что:

$$\Delta W = w \Delta S_{\perp} v \Delta t.$$

Подставляя это выражение в определение j (6.7), получим:

$$j = \frac{w \Delta S_{\perp} v \Delta t}{\Delta t \Delta S_{\perp}} = wv. \qquad (6.8)$$

В векторном виде:

$$\boxed{\vec{j} = w\vec{v}}. \qquad (6.9)$$

Этот вектор для упругих волн был введен в 1874 г. русским физиком Н.А. Умовым и называется вектором Умова. Вектор Умова характеризует перенос энергии механическими (упругими) волнами. Направление вектора Умова совпадает с направлением переноса энергии (т. е. с направлением скорости волны $\vec{v}$), а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Модуль плотности потока энергии различен в разных точках пространства, а в данной точке изменяется со временем по закону квадрата синуса (см. (6.4)).

**Интенсивность волны** – это среднее по времени от модуля вектора плотности потока энергии:

$$I = <|\vec{j}|> = <wv>. \qquad (6.10)$$

Для упругой волны интенсивность равна (см. формулу (6.5)):

$$I =< w > v = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v. \qquad (6.10а)$$

Для упругой волны интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату частоты.

Понятие «интенсивность» широко используется в физике. Для электромагнитных волн оно характеризует интенсивность излучения, для звуковых – силу звука, для световых – силу света. Во всех случаях интенсивность равна средней энергии, переносимой волной в единицу времени через единицу площади площадки, расположенной перпендикулярно направлению распространения волны.

## § 5. Стоячие волны

При наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой возникает колебательный процесс, называемый стоячей волной. При этом переноса энергии не происходит.

Найдем уравнение стоячей волны.

Для волны, бегущей по оси x (см. (5.5)):

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - kx).$$

Для волны, бегущей против оси x (см. (5.5а)):

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t + kx).$$

Для простоты мы положили равным нулю значение начальных фаз этих волн. Сумма этих уравнений и дает уравнение стоячей волны:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = A\cdot[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)] =$$
$$= 2A\cos kx\cdot\cos\omega t = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\,\cos\omega t. \qquad (6.11)$$

Амплитуда стоячей волны – это модуль выражения, стоящего перед множителем $\cos\omega t$, т. е.

$$A_{ст} = \left|2A \cdot \cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|. \qquad (6.12)$$

Амплитуда стоячей волны зависит от координаты. В некоторых точках $A_{ст} = 0$, в некоторых $A_{ст} = 2A$.

### Узлы и пучности

Поверхности, где амплитуда колебаний равна нулю, называют **узлами стоячей волны**. Для узлов:

$$\left|2A \cdot \cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 0 \;\;\rightarrow\;\; \frac{2\pi}{\lambda}x = \pm\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right),\; n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

Следовательно, координаты узлов:

$$x_{узл} = \pm(n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}.$$

Поверхности, где амплитуда колебаний достигает максимума, называют **пучностями стоячей волны**.

Для пучностей:

$$\left|2A \cdot \cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| - 2A \qquad \rightarrow \qquad \frac{2\pi}{\lambda}x = \pm n\pi,\;\; n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

Координаты пучностей:

$$x_{п} = \pm n\frac{\lambda}{2}.$$

В отличие от бегущей волны, в стоячей волне не происходит переноса энергии. Это объясняется тем, что в образующих ее падающей и отраженной волнах энергия переносится в равных количествах в противоположных направлениях.

## § 6. Колебания струны, закрепленной с двух концов

Стоячие волны можно возбудить в струне, закрепленной с двух концов (рис. 6.3).

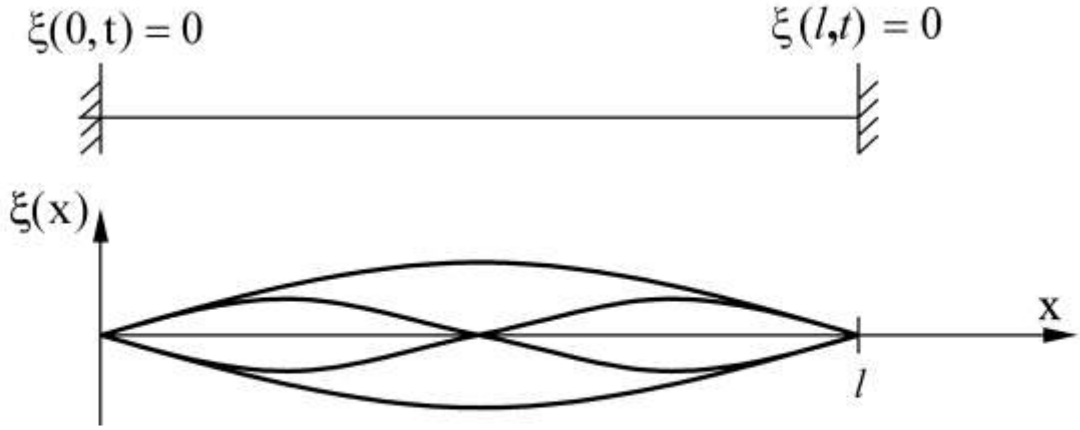


Рис. 6.3

В силу граничных условий, заданных закреплением концов струны, уравнение стоячей волны при выборе начала координат на одном из концов струны следует записать через функцию sin kx, т. е.

$$\xi(x,t) = 2A \cdot \sin kx \cdot \sin \omega t\,.$$

Тогда условие $\xi(0,t) = 0$ будет выполнено. Для выполнения граничного условия на другом конце струны $\xi(l,t) = 0$ мы должны потребовать, чтобы

$$\sin kl = 0 \quad \rightarrow \quad kl = n\pi.$$

Это приводит к *квантованию* волнового числа, т. е. k может принимать не любые значения, а только дискретные, определяемые равенством:

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Так как

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{5.3}$$

то

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l} \rightarrow \boxed{l = n\frac{\lambda_n}{2}}.$$

Вдоль струны должно укладываться целое число полуволн! Из (5.2) $\lambda_n = \dfrac{v}{\nu_n}$, и мы получаем дискретный спектр (набор) частот, на которых может колебаться закрепленная с двух концов струна:

$$\boxed{\nu_n = \frac{v}{2l}n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (6.13)$$

Частота $\nu_1$ называется основным тоном, $\nu_2$ – первым обертоном и т. д.

Гармонические колебания с частотами (6.13) называют собственными, или нормальными колебаниями. Их называют также гармониками. В общем случае колебания струны представляют собой наложение различных гармоник. В последнее время в отечественной литературе популярность, наряду с терминами «нормальные колебания», «гармоники», приобретает их синоним: «*нормальные моды»*, или просто моды колебаний.

Как следует из формулы (6.13), для того, чтобы изменить собственные частоты, необходимо изменить длину струны. Этим пользуются при игре на струнных инструментах. Аналогичная ситуация и для духовых инструментов, только там параметр *l* определяет длину колеблющегося столба воздуха.

## ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 6

1. Среда, в которой распространяется упругая волна, обладает дополнительной механической энергией. Эта энергия складывается из кинетической энергии частиц среды и потенциальной энергии упругой деформации среды.

2. Плотность энергии упругой гармонической волны в каждой точке пространства изменяется со временем по закону квадрата синуса (6.4). Среднее значение плотности энергии упругой волны пропорционально плотности среды, квадрату амплитуды и квадрату круговой частоты (6.5):

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2.$$

3. Потоком энергии называется количество энергии, переносимой волной через некоторую поверхность в единицу времени (6.6). Это скалярная величина.

$$\Phi \equiv \frac{dW}{dt}.$$

4. Плотностью потока энергии называется векторная величина, сонаправленная с $\vec{v}$ – фазовой скоростью волны, численно равная потоку энергии через единичную площадку (6.7) и (6.9):

$$j \equiv \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S_{\perp}}, \qquad \vec{j} = w\vec{v},$$

где w – плотность энергии упругой волны.

Вектор $\vec{j}$ для упругих волн называется вектором Умова.

5. Интенсивностью волны называется средняя энергия, переносимая волной в единицу времени через единицу площади площадки, расположенной перпендикулярно направлению распространения волны. Для упругой волны интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды волны и квадрату частоты (6.10а):

$$I = \langle w \rangle\, v = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 v.$$

6. Стоячая волна возникает при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Уравнение стоячей волны (6.11) имеет следующий вид:

$$\xi(x,t) = 2A \cdot \cos kx \cdot \cos\omega t = 2A \cdot \cos\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos\omega t,$$

где $A_{ст} = \left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$ – амплитуда стоячей волны.

7. В струне, закрепленной с двух концов, возбуждаются стоячие волны с дискретным спектром частот, определяемым формулой (6.13):

$$\nu_n = \frac{v}{2l}n, \qquad n = 1, 2, 3,$$

здесь $l$ – длина струны;

v – фазовая скорость упругой волны.

# ЛЕКЦИЯ № 7

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

***Понятие об электромагнитной волне.***
***Плоская электромагнитная волна.***
***Энергия и интенсивность электромагнитной волны.***
***Излучение диполя. Вибратор Герца***

## § 1. Понятие об электромагнитной волне

Электромагнитной волной называется процесс распространения электромагнитных колебаний в пространстве. К электромагнитным волнам относятся радиоволны, свет, рентгеновское излучение, гамма-излучение.

В отличие от механических волн, электромагнитные волны не нуждаются в веществе для своего распространения. Они могут существовать в вакууме, т. е. в пространстве, не содержащем атомов. Несмотря на существенное отличие электромагнитных волн от механических, электромагнитные волны ведут себя подобно механическим, в частности, имеют конечную скорость распространения и переносят с собой энергию.

Существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла (см. ч. 1, лекция № 14).

Возможность существования электромагнитных волн обусловлена тем, что существует связь между переменными электрическими и магнитными полями. Переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле, а переменное во времени электрическое поле создает вихревое магнитное поле. Таким образом, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электрическое поле, то в окружающем заряды пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке в виде электромагнитной волны.

Электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме, характеризуется векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$\vec{E}$ – напряженность электрического поля,

$\vec{H}$ – напряженность магнитного поля.

Из решения уравнений Максвелла следует, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг к другу и перпендикулярны направлению распространения, т. е. $\vec{E} \perp \vec{H}$, $\vec{E} \perp \vec{v}$, $\vec{H} \perp \vec{v}$, $\vec{v}$ – фазовая скорость распространения волн. Это значит, что **электромагнитные волны поперечны**.

Электромагнитная волна называется монохроматической, если ее векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ совершают гармонические колебания постоянной одинаковой частоты, называемой частотой волны. Электромагнитная волна может иметь любое значение частоты.

Классификация волн по частоте называется шкалой электромагнитных волн. Шкала спектра электромагнитных волн представлена в таблице.

*Таблица*

| Название диапазона | Интервал частот, Гц |
|---|---|
| Радиоволны | $\sim 10^4 \div \sim 10^{12}$ |
| Оптическое излучение:<br>- инфракрасное (ИК);<br>- видимый свет;<br>- ультрафиолетовое (УФ) | $\sim 10^{12} \div 3{,}9 \cdot 10^{14}$<br>$3{,}9 \cdot 10^{14} \div 7{,}5 \cdot 10^{14}$<br>$7{,}5 \cdot 10^{14} \div \sim 6 \cdot 10^{17}$ |
| Рентгеновское излучение | $6 \cdot 10^{17} \div \sim 10^{19}$ |
| Гамма-излучение | $10^{19}$ и больше |

В разных частотных диапазонах существуют разные способы возбуждения электромагнитных волн. Электромагнитное излучение возникает в следующих случаях.

1. Изменяющиеся со временем электрические токи порождают электромагнитное излучение. В этом случае излучающей системой является открытый колебательный контур, в частности, вибратор Герца (радиоволны низкой частоты).

2. Отдельные ускоренно движущиеся электрически заряженные частицы испускают электромагнитные волны. Это происходит, например, вследствие процессов, совершаемых в ламповых или полупро-

водниковых приборах (радиоволны высокой частоты). Торможение быстрых электронов в веществе также вызывает излучение (тормозное рентгеновское излучение).

3. Электромагнитное излучение создают атомы, молекулы и другие квантовые системы при квантовых переходах. Все волны оптического излучения (инфракрасное излучение, видимый свет, ультрафиолетовое излучение), а также рентгеновское излучение (характеристическое) связаны с переходами атомов из возбужденного состояния в состояние с меньшей энергией. Гамма-излучение испускается атомными ядрами.

## § 2. Плоская электромагнитная волна

На большом расстоянии от излучателя электромагнитные волны будут плоскими.

Пусть плоская волна распространяется вдоль оси x, вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси y, вектор $\vec{H}$ – вдоль оси z.

Из уравнений Максвелла следуют два волновых уравнения для плоской электромагнитной волны

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \qquad (7.1)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \qquad (7.2)$$

Уравнения (7.1) и (7.2) неразрывно связаны друг с другом. Эти связи зафиксированы в уравнениях Максвелла. В уравнениях (7.1) и (7.2):

$\varepsilon$ – диэлектрическая проницаемость среды;

$\mu$ – магнитная проницаемость;

$\varepsilon_0$ и $\mu_0$ – электрическая и магнитная постоянные.

Как мы знаем, в волновом уравнении коэффициент при второй производной по времени есть величина, обратная квадрату фазовой скорости волны (см. (5.11)). Для электромагнитной волны из волновых уравнений (7.1) и (7.2) получается следующая формула для фазовой скорости:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (7.3)$$

В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$, следовательно:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9},$$ Ф/м (см. ч. 2, лекция № 1);

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7},$$ Гн/м (см. ч. 2, лекция № 8).

Тогда:

$$v = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \equiv c.$$

Полученное значение фазовой скорости электромагнитной волны в вакууме равно скорости света в вакууме – с. С учетом этого, фазовая скорость электромагнитной волны:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{7.3а}$$

Гармонические волны представляют собой простейшие решения волновых уравнений.

Легко проверить, что функции

$$E_y(x,t) = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \tag{7.4}$$

$$H_z(x,t) = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2) \tag{7.4а}$$

являются решениями волновых уравнений (7.1) и (7.2). Эти решения описывают электромагнитную волну, у которой вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси y, вектор $\vec{H}$ – вдоль оси z, волна распространяется вдоль оси x, таким образом, векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{v}$ образуют правую тройку. Остальные компоненты в плоской волне равны нулю:

$$E_x = 0,\; E_z = 0,\; H_x = 0,\; H_y = 0.$$

В уравнениях (7.4) и (7.4а) $E_m$ и $H_m$ – амплитудные значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$;

$\omega$ – круговая частота электромагнитной волны;

k – волновое число;

$\alpha_1$ и $\alpha_2$ – начальные фазы;

x – расстояние от источника колебаний до точки наблюдения.

Из уравнений Максвелла следует связь между амплитудами векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ электромагнитной волны:

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}\ E_m = \sqrt{\mu_0 \mu}\ H_m}. \qquad (7.5)$$

Из уравнений Максвелла также следует, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ колеблются в одинаковой фазе:

$$\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha}.$$

Они одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимальных значений.

Пространственная структура электромагнитной волны изображена на рис. 7.1, на котором для фиксированного момента времени $t_1$ векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ плоской гармонической электромагнитной волны изображены в виде диаграммы.

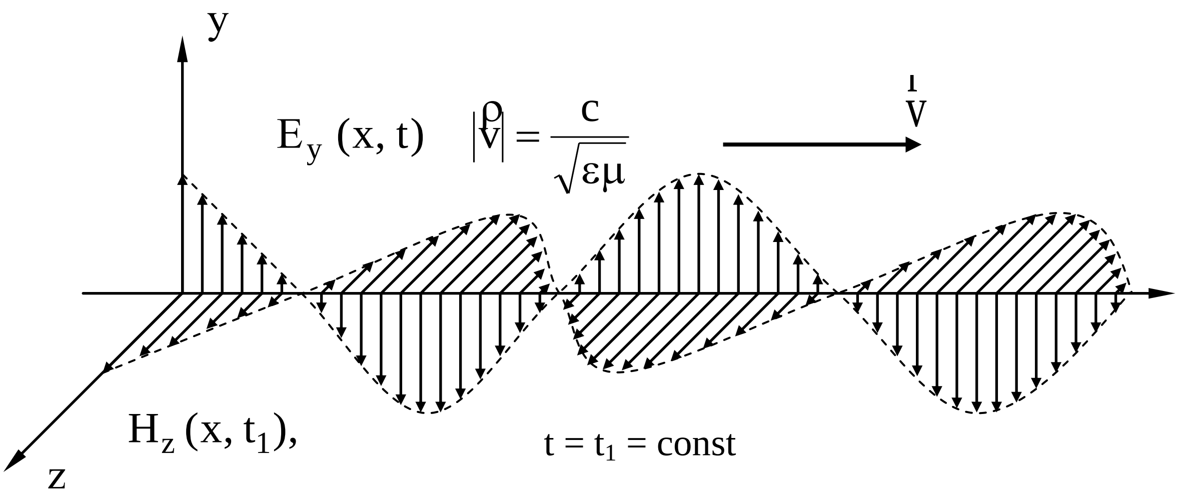


Рис. 7.1

## § 3. Энергия и интенсивность электромагнитной волны

Количество энергии электромагнитного поля характеризуется объемной плотностью энергии. Плотность энергии электромагнитного поля складывается из плотности энергии электрического поля $w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$ и плотности энергии магнитного поля $w_н = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$.

Плотность энергии электромагнитной волны с учетом (7.5) равна:

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2.$$

Воспользовавшись еще раз формулой (7.5) и затем формулой (7.3а), получаем для объемной плотности энергии электромагнитной волны:

$$w = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}EH = \frac{EH}{v}. \tag{7.6}$$

Аналогично упругой волне, для электромагнитной волны вводятся понятие потока энергии (6.6), плотности потока энергий (6.8) и интенсивности (6.10).

Найдем вектор плотности потока энергии электромагнитной волны. Из (6.8):

$$\vec{j} = w\vec{v}.$$

Для электромагнитной волны вектор плотности потока энергии обозначают буквой $\vec{S}$ ($\vec{j} \equiv \vec{S}$) и называют вектором Пойнтинга.

С учетом (7.6) модуль вектора Пойнтинга равен:

$$S = EH.$$

Используя диаграмму (см. рис. 7.1), величине S можно придать векторный характер:

$$\vec{S} = \left[\vec{E}\vec{H}\right]. \tag{7.7}$$

Вектор Пойнтинга $\vec{S}$ равен векторному произведению векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Интенсивность электромагнитной волны – это среднее по времени от модуля вектора Пойнтинга:

$$I \equiv <\left|\vec{S}\right|> = <EH>. \tag{7.8}$$

Интенсивность электромагнитной волны равна среднему значению произведения модулей векторов E и H. Расчет аналогичен (6.4) и (6.5). После усреднения, с учетом (7.4), (7.4а) и (7.5):

$$I = \frac{1}{2}E_m H_m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2,$$

т. е. интенсивность электромагнитной волны пропорциональна среднему значению квадрата амплитуды напряженности электрического поля:

$$I \sim E_m^2. \tag{7.9}$$

## § 4. Излучение диполя

Излучение радиоволн рассмотрим на примере излучения диполя.

**Диполь** – это два равных разноименных точечных заряда +q и –q, находящихся на некотором расстоянии d друг от друга. Диполь характеризуется дипольным электрическим моментом $\vec{p}$ (рис. 7.2)

$$\vec{p} = q\vec{d}. \tag{7.10}$$

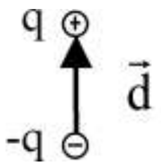


Рис. 7.2а

Пусть расстояние между зарядами диполя периодически изменяется с течением времени, т. е. $\vec{d} = \vec{d}(t)$, диполь колеблется. Тогда $\vec{p} = \vec{p}(t)$. Колебательное движение – это движение с ускорением. Электрическое и магнитное поля диполя будут переменными, диполь будет излучать электромагнитные волны.

Точный расчет на основе уравнений Максвелла показывает, что картина электромагнитного поля в этой волне, распространяющейся в вакууме, в непосредственной близости от диполя будет очень сложной. Она сильно упрощается в так называемой **волновой зоне** (при $r >> \lambda$). Волновая поверхность тогда имеет форму сферы. Направление векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ изображено на рис. 7.2б. Угол θ – это угол между направлением дипольного момента $\vec{p}$ и направлением излучения. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в каждой точке перпендикулярны лучу, т. е. к радиус-вектору, проведенному в данную точку из центра диполя. Вектор $\vec{E}$

направлен по касательной к меридиану, вектор $\vec{H}$ – по касательной к параллели. Если смотреть вдоль луча, то картина будет такой же, как на рис. 7.1, с тем отличием, что амплитуда при перемещении вдоль луча постепенно убывает (сравните с уравнением сферической волны (5.8)).

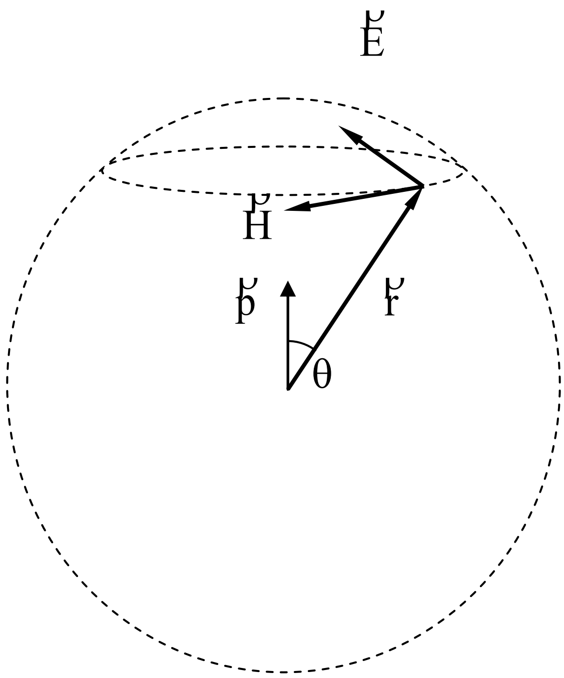


Рис. 7.2б

Рассмотрим электрическое поле диполя, колеблющегося по гармоническому закону.

Пусть $p = p_0 \cos \omega t$, тогда для напряженности электрического поля E, найденной путем решения уравнения Максвелла, имеем:

$$E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p_0 \omega^2 \sin\theta}{c^2 r} \cos(\omega t - kr). \tag{7.11}$$

Для напряженности магнитного поля из (7.5) получим:

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E. \tag{7.12}$$

Интенсивность дипольного гармонического излучения из (7.8) равна:

$$I = \langle EH \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle E^2 \rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0^2} \cdot \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{c^4 r^2} \langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{c^4 r^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{p_0^2 \omega^4}{r^2} \sin^2\theta. \tag{7.13}$$

Таким образом, интенсивность излучения пропорциональна квадрату амплитуды электрического момента диполя и четвертой степени частоты, а также зависит от направления излучения.

**Диаграмма направленности излучения диполя** – это графическое изображение в полярной системе координат зависимости интенсивности излучения I (7.13) от угла $\theta$.

На рис. 7.3 показана половина пространственного изображения диаграммы направленности. Полная диаграмма похожа на бублик без дырки.

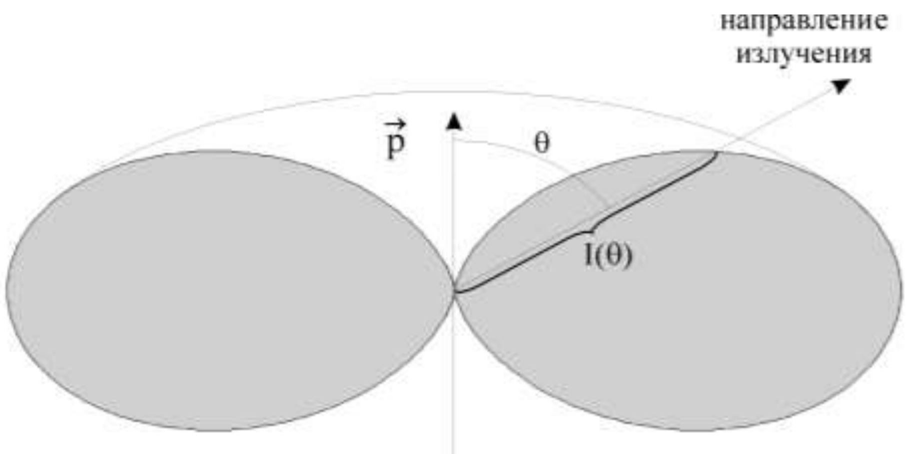


Рис. 7.3

Такую же диаграмму направленности имеет вибратор Герца, линейные размеры которого малы по сравнению с длиной волны, которую он излучает $(l \leq \lambda)$ (диполь Герца).

## § 5. Вибратор Герца

Вибратор Герца – это излучающая система, которая является открытым колебательным контуром (рис. 7.4).

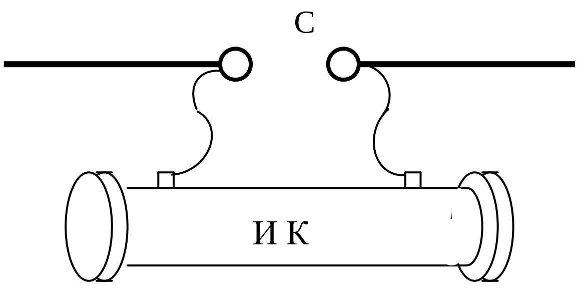


Рис. 7.4

Открытый колебательный контур представляет собой два металлических стержня с двумя металлическими шарами на концах и небольшим искровым промежутком (С) посередине. Источником возбуждения электромагнитных колебаний в вибраторе является индукционная катушка (ИК). Индукционная катушка представляет собой высокочастотный трансформатор. Провода от вторичной обмотки ИК подключаются к искровому промежутку. Когда переменное напряжение во вторичной обмотке катушки достигнет значения пробивного напряжения, в искровом промежутке проскакивает искра, в вибраторе возникают электромагнитные колебания, сопровождающиеся излучением электромагнитных волн. Период таких колебаний, а следовательно, и длина волны, а также частота излучения электромагнитных волн, задаются размерами вибратора. Закономерности электрических колебаний в вибраторе оказываются такими же, как и закономерности механических колебаний струны (см. § 6 лекции № 6). Излучение диполя Герца подобно излучению диполя, рассмотренному в предыдущем параграфе, с той лишь разницей, что переменный электрический момент p диполя задается колебаниями зарядов q, а не периодическими изменениями расстояния между ними. Колебания в вибраторе совершает не одна частица, а огромное число электронов, движущихся согласованно. Излучение волн происходит с максимальной интенсивностью в направлении, перпендикулярном оси вибратора (см. рис. 7.3). Интенсивность излучения вибратора, так же, как интенсивность излучения диполя, пропорциональна четвертой степени частоты и с увеличением частоты очень быстро возрастает.

## ИТОГИ ЛЕКЦИИ № 7

1. Электромагнитной волной называется процесс распространения электромагнитных колебаний в пространстве. Электромагнитная волна может распространяться в вакууме и в среде. Электромагнитная волна характеризуется векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ($\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля).

2. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг другу и перпендикулярны направлению распространения волны, т е. электромагнитные волны поперечны.

3. Электромагнитные волны классифицируются по частоте (или длине волны). К электромагнитным волнам относятся радиоволны, световые волны, рентгеновское излучение, гамма-излучение.

4. Фазовая скорость электромагнитных волн в вакууме равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, в среде – $v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (7.3).

5. Функции (7.4) и (7.4а) – это уравнения плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси x. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в электромагнитной волне колеблются с одинаковой частотой, в одинаковой фазе. Связь между амплитудными значениями векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ дается в виде (7.5):

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_m = \sqrt{\mu\mu_0}H_m.$$

6. Электромагнитная волна переносит энергию электромагнитного поля. Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна (7.6):

$$w = \frac{EH}{v}.$$

7. Плотность потока энергии электромагнитной волны называют вектором Пойнтинга (7.7):

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}].$$

8. Интенсивность волны – это среднее по времени от модуля вектора Пойнтинга (7.8):

$$I = \langle EH \rangle.$$

9. Источниками радиоволн являются изменяющиеся со временем электрические токи, а также отдельные ускоренные движущиеся заряженные частицы. Источником оптического, рентгеновского и гамма-излучения являются атомы, молекулы и другие квантовые системы, излучение которых связано с квантовыми переходами системы из возбужденного состояния в состояние с меньшей энергией.

10. Простейшей излучающей системой является электрический диполь. Интенсивность излучения диполя пропорциональна четвертой степени частоты и зависит от направления излучения. Интенсивность излучения максимальна в направлении, перпендикулярном оси диполя. В направлении оси диполь не излучает энергию. Аналогичная картина наблюдается при излучении вибратора Герца.