

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОСИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ»
(СГУГиТ)

Ю. В. Дементьев, И. Г. Ганагина

КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования для межвузовского использования в качестве учебного пособия для обучающихся по направлению подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2017

УДК 528:629.783

Д302

Рецензенты: главный инженер ОАО «ПО «Инженерная геодезия» *П. К. Шитиков*
кандидат технических наук, доцент, КузГТУ *А. Н. Соловицкий*

Дементьев, Ю. В.

Д302 Космическая геодезия [Текст] : учеб. пособие / Ю. В. Дементьев, И. Г. Ганагина. – Новосибирск : СГУГиТ, 2017. – 120 с.
ISBN 978-5-906948-80-9

В учебном пособии кратко изложены теоретические основы использования искусственных спутников Земли для решения геодезических задач. Большое внимание уделено геодезическим системам отсчета, приведены основы движения космических аппаратов и методы их наблюдений.

Учебное пособие по дисциплине «Космическая геодезия» предназначено для обучающихся по направлению подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата), а также может быть использовано для обучающихся по направлению подготовки 21.05.01 Прикладная геодезия (уровень специалитета).

Рекомендовано к изданию кафедрой космической и физической геодезии, Ученым советом Института геодезии и менеджмента СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 528:629.783

ISBN 978-5-906948-80-9

© СГУГиТ, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| Введение | 5 |
| 1. Системы координат и времени, используемые в космической геодезии | 12 |
| 1.1. Классификация систем координат, применяемых в космической геодезии | 12 |
| 1.2. Системы времени | 13 |
| 1.3. Понятие о пространственной прямоугольной системе координат | 17 |
| 1.4. Преобразование пространственных прямоугольных координат | 18 |
| 1.4.1. Параллельный перенос осей координат | 18 |
| 1.4.2. Поворот осей | 19 |
| 1.5. Небесные системы координат | 23 |
| 1.6. Земные геоцентрические системы координат | 27 |
| 1.7. Референцные системы координат | 32 |
| 1.8. Топоцентрические системы координат | 33 |
| 2. Основы теории орбитального движения искусственных спутников Земли | 36 |
| 2.1. Общие положения | 36 |
| 2.2. Невозмущенное движение спутника | 36 |
| 2.3. Элементы орбиты спутника и их связь с постоянными интегрирования | 40 |
| 2.4. Определение орбиты спутника по двум положениям | 51 |
| 2.5. Прогнозирование невозмущенного движения искусственного спутника Земли | 57 |
| 2.6. Возмущенное движение искусственного спутника Земли | 66 |
| 2.7. Уравнения возмущенного движения спутника в оскулирующих элементах орбиты | 68 |
| 2.8. Возмущения, вызываемые сжатием Земли | 78 |

| | |
|--|-----|
| 2.9. Возмущения, вызываемые притяжением Луны и Солнца..... | 80 |
| 2.10. Давление солнечной радиации | 81 |
| 2.11. Сопротивление атмосферы | 82 |
| 3. Методы космической геодезии | 84 |
| 3.1. Решение геодезических задач по наблюдениям искусст- венного спутника Земли | 84 |
| 3.2. Методы наблюдений искусственного спутника Земли | 86 |
| 3.3. Современные методы космической геодезии..... | 87 |
| 3.4. Глобальные системы спутникового позиционирования | 108 |
| 3.5. Роль спутниковых методов в геодезии | 110 |
| 3.6. Геодинамические исследования методами космической геодезии..... | 112 |
| Заключение | 114 |
| Библиографический список..... | 115 |
| Условные обозначения | 118 |

ВВЕДЕНИЕ

Космической геодезией называется раздел геодезии, в котором изучаются вопросы теории движения искусственных и естественных небесных тел для решения научных и научно-технических задач геодезии. При этом в космической геодезии используются результаты наблюдений, выполненные как с поверхности планеты, так и непосредственно со спутников.

В соответствии с этим космическая геодезия рассматривает:

- теорию использования Луны, искусственных спутников Земли (ИСЗ) и космических аппаратов для решения геодезических задач;
- способы определения, уточнения орбит и вычисления эфемерид;
- требования к геодезическим спутникам в отношении параметров их орбит и состава бортовой аппаратуры;
- требования к расположению станций слежения и их аппаратурному оснащению;
- инструменты и методы наблюдений за спутниками;
- вопросы обработки и интерпретации полученных результатов.

Основными задачами космической геодезии являются:

- определение фундаментальных постоянных, характеризующих форму, размеры и суточное вращение Земли, Луны и планет, а также изменение этих постоянных во времени;
- определение параметров гравитационного поля Земли и планет;
- определение (уточнение) координат пунктов в системе, отнесенных к центру масс Земли, создание единой мировой геодезической сети;
- определение в пространственной геодезической системе координат (с началом в центре масс Земли) положения центра референц-эллипсоида;
- установление связи между различными геодезическими системами.

Космическая геодезия решает также ряд прикладных задач:

- координатно-временную привязку результатов космических съемок Земли и планет, выполняемых при исследовании природных ресурсов и космического картографирования;
- решение прикладных задач в области геодезии;
- решение задач геодинамики, геофизики и т. п.

Космическая геодезия тесно связана с небесной механикой, астрономией, математикой, физикой и другими дисциплинами.

Методы космической геодезии имеют существенные преимущества при решении некоторых задач по сравнению с традиционными методами геодезии. Прежде чем говорить об этих преимуществах, обратимся к истории.

Важное значение для развития геодезических работ с целью решения научных и практических задач имело применение В. Снеллиусом в начале XVII в. триангуляции. С тех пор метод триангуляции в течении трех с половиной столетий являлся основным при создании геодезического обоснования. В XX в. наряду с триангуляцией стала применяться полигонометрия. Ее применение стало особенно широким после внедрения в геодезическое производство свето- и радиодальномеров. Традиционные геодезические построения создаются на отдельных, часто разделенных водными преградами, территориях и образуют референцные геодезические системы (референц-эллипсоиды: Бесселя, Кларка, Хейфорда, Красовского и т. д.). Положение референц-эллипсоидов, образующих геодезические системы на разных континентах, относительно друг друга и центра масс Земли нельзя установить при помощи только триангуляции и полигонометрии. Другими словами, нельзя данными методами осуществить геодезическую связь всех материков в единую мировую геодезическую систему.

Ограниченные возможности традиционной геодезии обусловлены сравнительно небольшими предельными длинами отдельных сторон триангуляции и полигонометрии.

Длина стороны вычисляется по формуле:

$$D_{\text{пред.}} = 3,89 \text{ км} (\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}),$$

где H_1 и H_2 – высоты пунктов над уровнем моря в метрах. Если $H_1 = H_2 = 1\ 600$ м, то $D_{\text{пред.}} = 310$ км; если $H_1 = H_2 = 2\ 500$, то $D_{\text{пред.}} = 389$ км.

Стремление преодолеть возникшие при больших расстояниях трудности привело к созданию в 20-е годы XX в. динамической триангуляции, в которой из-за отсутствия прямой видимости между пунктами ведутся синхронные наблюдения подвижных визирных целей (ПВЦ). Таким образом была осуществлена связь Европы и Африки через о. Крит, Англии и Франции, Дании и Норвегии, Гаити, Кубы и Ямайки с материком Северной Америки.

Дальность передачи при этом определяется формулой:

$$D_{\text{пред.}} = 7,78(\sqrt{H_{\text{ср.}}} + \sqrt{H_{\text{ПВЦ}}}).$$

Если $H_{\text{ср.}} = 1\ 600$ м, $H_{\text{ПВЦ}} = 3\ 600$ м, то $D_{\text{пред.}} = 778$ км.

Если расширить возможности при использовании самолетных радио-геодезических систем:

$$D_{\text{пред.}} = 8,30(\sqrt{H_{\text{ср.}}} + \sqrt{H_t}).$$

Единая система координат, отнесенная к центру масс Земли, может быть создана на основе совместного использования результатов астрономо-геодезических и гравиметрических работ в рамках теории М. С. Молоденского. При этом требуется весьма густая сеть гравиметрических пунктов, распределенных с необходимой плотностью по всей Земле (как на суше, так и на море).

Одновременно с совершенствованием традиционных геодезических методов создались предпосылки для космической геодезии.

Основные этапы развития космической геодезии. Вопрос использования наблюдений Луны в геодезических целях изучался Иоганном Альбрехтом Эйлером (1768 г.). Он обосновал, что из одновременных наблюдений Луны с нескольких пунктов, расположенных на одном меридиане, можно определить расстояние от каждого пункта до Луны. При большом количестве таких пунктов оказывалось возможным определить размеры

земного меридианного эллипса, т. е. изучать геометрическую фигуру Земли. Лунным методом занимались Лаплас, Гельмерт и другие ученые.

Зарождение космической геодезии как раздела геодезической науки следует отнести к началу XX в. В 1902 г. было предложено наблюдать покрытие звезд Луной, при этом определять элементы лунной орбиты и геоцентрические широту и долготу места наблюдений.

В 1929 г. в Польше был разработан метод, основанный на использовании наблюдений солнечных затмений. Разработка этого метода в дальнейшем принадлежит СССР (1945 г.), США и ФРГ (1949 г.).

В основе геодезического применения наблюдений покрытий и солнечных затмений лежит использование теории параллакса. Однако даже при наличии современной теории геоцентрического движения Луны ошибка в определении положения пункта на поверхности Земли по наблюдениям Луны составляет 1 км, если измерить направление на центр Луны с ошибкой $0,2''$. Более точные результаты позволяют получить фотографирование Луны на фоне звезд. Этот метод стал применяться после создания специальных лунных камер, позволяющих получать на одном негативе изображение звезд и более яркого, быстро перемещающегося объекта – Луны.

В 1954 г. такие камеры, принципиально отличающиеся по своей конструкции, были созданы в Пулковской консерватории (А. А. Михайлов) и в Морской обсерватории в Вашингтоне (В. Марковиц). Расчеты показали, что ошибка определения топоцентрических координат Луны, равная $0,1''$, приводит к ошибке 200 м, т. е. и этот метод в настоящее время не пригоден для геодезистов.

В 1945 г. предложен метод определения направления между двумя пунктами, основанный на одновременном *фотографировании* с этих пунктов *световых вспышек на фоне звездного неба*. Вспышка выполняется при помощи взрывных снарядов, выбрасываемых с самолетов или поднимаемых маленькими баллонами. Первые эксперименты были проведены в 1946 г. в г. Турку и показали, что направления определяются с высокой точностью. Данный способ получил название *звездной (баллонной) триангуляции*. С 1969 по 1971 г. методом баллонной триангуляции были определены направления хорд, образующих треугольник со сторонами 158,

229 и 149 км. После уравнивания ошибка направления составила $0,3''$, а невязка в треугольнике $0,7''$. Данные работы доказали, что при сторонах 100–300 км звездная триангуляция позволяет получать результаты *высокой точности*, может быть использована при соединении классической и спутниковой триангуляции. Недостатком данного метода является сложность организации подобных наблюдений из-за постоянного дрейфа баллонов-носителей.

Запуск 4 октября 1957 г. первого ИСЗ сделал возможным широкое использование ранее появившихся принципов и идей для решения задач геодезии.

В мае 1961 г. были проведены первые опыты синхронных фотографических наблюдений ИСЗ. Объект наблюдений – американский спутник «Эхо-1», четыре станции наблюдений – Пулковское, Харьков, Ташкент, Николаев. По результатам обработки координаты станций наблюдений получены с ошибкой 70 м.

В 1966 г. организован совместный сеанс наблюдений с американского спутника типа «Геос», в котором принимали участие СССР, США, Англия, Голландия, Франция, Швеция и ФРГ. В результате этой работы положения всех станций определены в системе Стандартная Земля II с ошибкой не более 20 м.

С 1970 г. ученые из 14 стран выполняли работы по международной программе ISAGEX (международный эксперимент спутниковой геодезии). Наблюдение велось на 52 станциях, расположенных в различных частях земного шара; было получено 14 орбитальных дуг, равномерно покрытых наблюдениями, содержащих, помимо фотографических, 200 000 лазерных измерений.

В 1957 г. группа ученых в ходе приема радиосигналов с первого ИСЗ подтвердила возможность определения параметров движения ИСЗ по результатам измерений доплеровского сдвига частоты сигнала, излучаемого со спутника, в точке приема с известными координатами. Была установлена также возможность решения и обработки задачи, т. е. нахождение координат точки прямо по измеренному доплеровскому сдвигу частоты сигнала, излучаемого с ИСЗ, параметры движения которого известны. Использование ИСЗ в качестве радионавигационной опорной станции позволяло

создать ряд спутниковых радионавигационных систем (СРНС) – отечественные ЦИКАДА и ГЛОНАСС; американские TRANSIT и NAVSTAR.

Причинами широкого развития и применения СРНС являются:

- достижение точности определения абсолютных координат в 1 м, относительных – в сантиметр и даже в миллиметр;
- всепогодность и глобальность применения;
- оперативность определения координат (минуты и даже секунды);
- малые габариты и масса приемника;
- простота эксплуатации.

Наблюдения ИСЗ дают возможность:

- быстрой передачи координат на расстояние несколько тысяч километров;
- создание построений в абсолютной системе координат, отнесенной к центру масс Земли;
- определение параметров гравитационного поля требует сравнительно небольшого числа станций на поверхности Земли;
- характеристики гравитационного поля получаются гораздо надежнее.

Существует три основных метода космической геодезии: геометрический, динамический и орбитальный.

Геометрический метод служит для передачи координат на большие расстояния. Он основан на синхронном наблюдении ИСЗ с нескольких пунктов земной поверхности. Здесь небесное тело используется как высокая визирная цель. Используя синхронные наблюдения, решаются различного рода пространственные засечки для определения координат неизвестных пунктов.

Динамический метод основан на использовании теории движения искусственного спутника Земли по орбите. Для реализации динамического метода необходимо иметь адекватную модель движения ИСЗ.

Динамический метод предполагает совместное определение координат наземных пунктов, элементов орбиты ИСЗ, а также уточнение параметров модели возмущающих сил, действующих на спутник. Реализация динамического метода космической геодезии требует наличия совершенных алгоритмов и гигантских комплексов программ для самых современных

компьютеров, на разработку которых необходимы большие затраты труда целых коллективов квалифицированных математиков и программистов.

Орбитальный метод является частным случаем динамического, в котором параметры модели возмущающих сил, действующих на ИСЗ, построены с необходимой точностью и не уточняются в процессе решения. В орбитальном методе на основе наблюдений, выполненных на наземных пунктах или непосредственно со спутника, совместно определяются координаты пунктов и элементы орбит.

Если элементы орбиты на момент измерений известны, то определяемыми величинами будут только координаты пунктов, которые определяются путем решения обратных пространственных засечек. Эта процедура получила название упрощенного орбитального метода и применяется при решении навигационных задач.

Вопросы для самоконтроля

1. Предмет и задачи космической геодезии.
2. Связь космической геодезии с другими науками.
3. Современное состояние и перспективы развития космической геодезии.
4. Роль космической геодезии в решении научных и прикладных задач геодезии.
5. Методы космической геодезии.

1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ВРЕМЕНИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

1.1. Классификация систем координат, применяемых в космической геодезии

Координатная система – теоретически заданная математическая модель, описываемая с помощью четырех основных признаков:

- форма задания координат;
- положение начала координат;
- ориентировка оси аппликат (Z) или основной координатной плоскости, содержащей ось абсцисс (X) и ординат (Y);
- ориентировка оси абсцисс (X).

В каждой системе положение точки может быть представлено в форме *прямоугольных (декартовых)* или *сферических* координат, а для систем, связанных с эллипсоидами, – также в форме *геодезических (сфероидических, или эллипсоидальных, или криволинейных)* координат.

Система координат, начало которой находится в центре планетарного тела, называется планетоцентрической (например, *гелиоцентрической, луноцентрической, геоцентрической* с началом в центре масс Солнца, Луны, Земли соответственно). Если же центр системы координат совмещен с центром референц-эллипсоида, то такие системы координат называются квазигеоцентрическими, или референчными. Система координат, начало которой совпадает с точкой наблюдения на поверхности Земли, называется *топоцентрической*.

В зависимости от выбранной основной координатной плоскости различают *экваториальную, эклиптическую* (плоскость эклиптики), *горизонтную* (плоскость горизонта) и *орбитальную* (плоскость орбиты небесного объекта) системы координат.

Направления осей системы координат задаются относительно некоторых точек небесной сферы или земной поверхности. По направлению осей координат относительно точек пространства системы координат делятся

на *звездные (небесные)* и *земные* (оси координат ориентированы соответственно относительно звезд или точек на земной поверхности).

Направление координатных осей можно задавать относительно *фундаментальных векторов*. К этим векторам относят вектор кинетического момента Земли, направления мгновенной оси ее вращения, вектор направления силы тяжести, нормаль к орбите Земли (к эклиптике), вектор линии узлов земной орбиты (направление на точку весеннего равноденствия) и др. Координаты, связанные с отвесной линией, называют *астрономическими*.

Из-за прецессии и нутации оси вращения Земли основные плоскости и оси координат с течением времени изменяют положение и направление в пространстве. Поэтому планетарные координаты фиксируют на определенную эпоху. Координаты, связанные с положением оси вращения Земли на момент наблюдения, называются *мгновенными*, или *истинными*.

Вследствие того, что выбранные для ориентировки координатных систем точки могут изменять свое положение, обязательно учитывается *эпоха*.

Определение *эпохи* в астрономии – это определение точного фиксированного момента времени наблюдения, для которого определены астрономические координаты или орбитальные элементы. В настоящее время по решению МАС принята система экваториальных координат FR5 для эпохи равноденствия J2000.0, на которую фиксируется положение небесного экватора и эклиптики.

1.2. Системы времени

В космической геодезии рассматривают два аспекта времени: эпоха и интервал. Эпоха определяет момент события, а интервал – время, протекшее между двумя эпохами.

Обычно эпоха фиксируется днем, месяцем, годом (*григорианский стиль*). Однако вычитание более ранней даты одного события из более поздней даты может создать некоторые неудобства и привести к неувренности в результате. Поэтому задача о числе суток, прошедших между двумя заданными датами, удобнее решается с помощью *юлианского периода*.

Юлианский период – это система счета времени в сутках, предложенная в 1583 г. французским ученым Ж. Скалигером для хронологических расчетов. Удобство юлианского периода заключается в том, что все дни в нем занумерованы по порядку, независимо от принятой календарной системы, номера года, месяца, недели. В хронологии юлианский период дает возможность связывать различные календарные эпохи, выражая их через дни юлианского периода – *юлианские дни*.

Началом каждого юлианского дня считается средний гринвичский полдень. В астрономических ежегодниках или в специальных таблицах даются целые числа юлианских дней, прошедших с начала счета до среднего гринвичского полудня определенной даты. Для перехода к средней гринвичской полночи от полученной даты следует отнять 0,5.

Юлианская дата (обозначим ее как JD), соответствующая рассматриваемому моменту времени, может быть также вычислена по формуле

$$JD = 1\,721\,013,5 + 367g - \text{entier} \left\{ \frac{7}{4} \left[g + \text{entier} \left(\frac{m+9}{12} \right) \right] \right\} + \text{entier} \left(\frac{275}{9}m \right) + d,$$

где *entier* – целая часть значения алгебраического выражения; g – номер года; m – номер месяца в году; d – номер дня в месяце.

При решении задач космической геодезии время выполняет две функции:

- 1) показывает угол поворота земной системы координат относительно небесной;
- 2) выступает в качестве независимой переменной в уравнениях движения небесных тел.

В соответствии с решаемыми задачами космической геодезии применяются два типа систем времени: *астрономические* и *атомные*.

Системы астрономического времени основаны на суточном вращении Земли. Сутки – это единица времени, которая определяется как промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями избранной точки небесной сферы на одном и том же меридиане. Вследствие неравномерности суточного вращения Земли продолжительность звездных или солнечных суток неодинакова. *Истинным звездным*

временем s называется часовой угол истинной точки весеннего равноденствия γ (рис. 1.1).

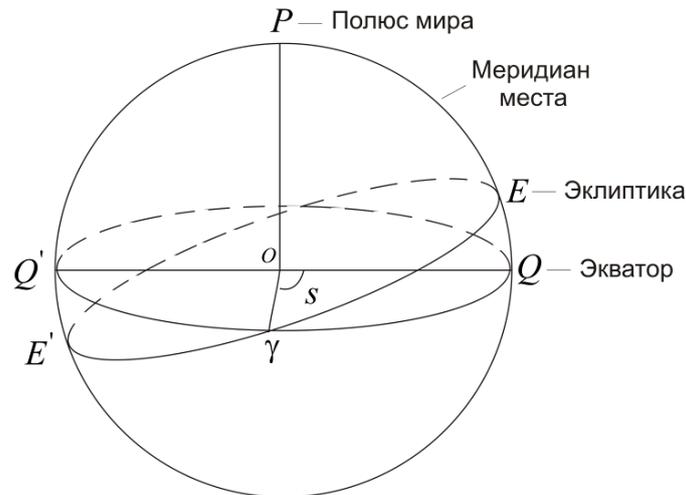


Рис. 1.1. Истинное звездное время

Местное звездное время s приводится к меридиану Гринвича:

$$S = s - \lambda,$$

где S – Гринвичское истинное звездное время; λ – астрономическая долгота наблюдательного пункта.

Среднее звездное время S_0 отличается от истинного звездного времени на величину полной нутации по прямому восхождению N_α :

$$S_0 = S - N_\alpha.$$

Нутация по прямому восхождению N_α является функцией нутации по долготе и нутации по наклону эклиптики, которые в свою очередь зависят от фундаментальных аргументов (переменные Делоне), определяющих среднее положение Луны и Солнца относительно центра Земли.

Гринвичское среднее звездное время \tilde{S}_0 в полночь по Всемирному времени определяется из выражения

$$\tilde{S}_0 = 6^h 41^m 50,548\ 41^s + 8\ 640\ 184,812\ 866^s \Delta T + 0,093\ 104^s \Delta T^2 + 6,2 \cdot 10^{-6} \Delta T^3,$$

где $\Delta T = \frac{JD - 2\,451\,545,0}{36\,525}$ – промежуток времени, измеряемый в юлианских столетиях между фундаментальной эпохой 2000,0 ($JD = 2\,451\,545,0$) и рассматриваемым моментом (JD).

Среднее солнечное время, прошедшее от полуночи до текущего момента, называется *Всемирным временем* и обозначается как $UT0$:

$$UT0 = (S_0 - \tilde{S}_0) - v(S_0 - \tilde{S}_0).$$

Здесь $v = 0,002\,730\,433\,6$ – коэффициент перехода от звездного времени к среднему солнечному. Время $UT0$ определяется из наблюдений на обсерваториях Международной службы вращения Земли (МСВЗ).

После введения в $UT0$ поправки за движения полюса $\Delta\lambda_p$ получается Всемирное время $UT1$:

$$UT1 = UT0 - \Delta\lambda_p.$$

Время $UT1$ можно интерпретировать как угол между начальным меридианом счета долгот и средним экваториальным Солнцем – фиктивной точкой, равномерно движущейся по среднему экватору.

Связь между Гринвичским звездным временем \tilde{S}_0 в среднюю гринвичскую полночь, Гринвичским истинным звездным временем S и Всемирным временем $UT1$ устанавливается формулой

$$S = \tilde{S}_0 + N_\alpha + (1 + v)UT1.$$

Из-за неравномерности вращения Земли и постоянно возрастающих запросов науки и техники была введена шкала атомного времени TAI , не зависящего от вращения и движения Земли. За единицу атомного времени принята секунда, которая равна 9 192 631 770 периодам колебаний излучения, соответствующего периоду между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133. Точность атомных часов порядка 10^{-12} . Стабильность частоты современных квантовых генераторов на атомном водороде достигает $5 \cdot 10^{-14}$. В бюллетенях «Всемирное время и коор-

динаты полюса» (Серия Е) регулярно публикуются значения разностей $UT1 - TAI$.

1.3. Понятие о пространственной прямоугольной системе координат

Положение точки в трехмерном пространстве может быть определено в пространственной системе координат. Если через некоторую точку O пространства (рис. 1.2) провести три взаимно перпендикулярные оси OX , OY , OZ , соответственно, ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат, то относительно этих осей можно определить положение точки в пространстве.

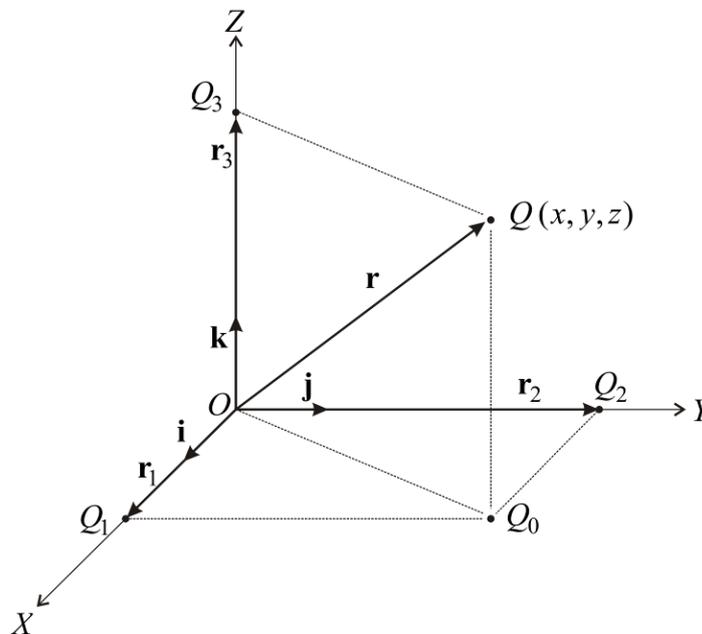


Рис. 1.2. Система пространственных прямоугольных координат

Пусть в принятой системе координат задан вектор \mathbf{r} , начало которого совпадает с началом координатной системы, а конец – с точкой $Q(x, y, z)$, имеющей координаты x, y, z .

Согласно правилу сложения векторов можно написать

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3. \quad (1.1)$$

Это равенство показывает, что всякий вектор можно разложить на составляющие, лежащие на осях координат. Слагаемые векторы \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_3 называются компонентами, или составляющими данного вектора \mathbf{r} относительно системы координат $OXYZ$. Отложив в положительном направлении каждой из осей координат (см. рис 1.2) по вектору \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} , длины которых равны единице, получим

$$\mathbf{r}_1 = x\mathbf{i}; \quad \mathbf{r}_2 = y\mathbf{j}; \quad \mathbf{r}_3 = z\mathbf{k}.$$

Таким образом, рассматривая проекции x , y и z вектора \mathbf{r} на оси координат, на основании (1.1), имеем

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (1.2)$$

или

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Длина (модуль) вектора \mathbf{r} определяется выражением

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Так как выбор начала системы координат и положительных направлений их осей произволен, то можно говорить о многообразии пространственных прямоугольных систем координат. Поэтому на практике нередко возникает необходимость в преобразовании одной системы прямоугольных координат в другую.

1.4. Преобразование пространственных прямоугольных координат

1.4.1. Параллельный перенос осей координат

Пусть x_1, y_1, z_1 – координаты произвольной точки Q относительно пространственной прямоугольной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$, а

x_2, y_2, z_2 – координаты той же точки относительно координатной системы $O_2X_2Y_2Z_2$. Обозначим через $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ координаты начала системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ в системе $O_1X_1Y_1Z_1$.

Если единицы масштаба по осям обозначенных систем координат совпадают и их оси параллельны, то согласно рис. 1.3 можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2 + \Delta \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 - \Delta \mathbf{r} \end{aligned} \right\}, \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}.$$

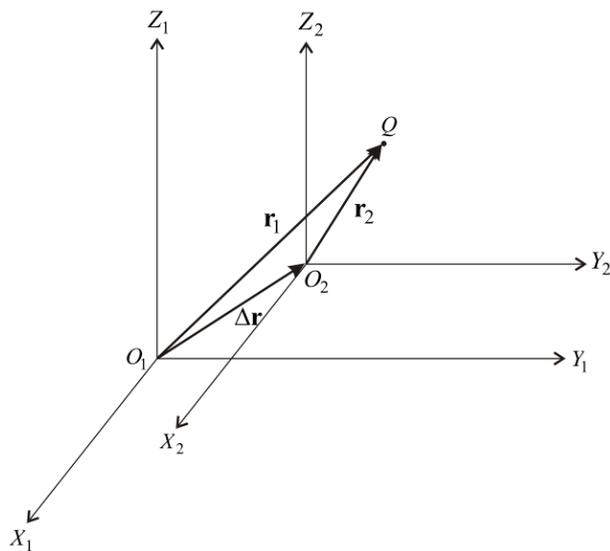


Рис. 1.3. Параллельный перенос осей координат

1.4.2. Поворот осей

Вектор \mathbf{r} (рис. 1.4) может быть выражен в виде функции как первой $O_1X_1Y_1Z_1$, так и второй $O_2X_2Y_2Z_2$ системы координат:

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1 = x_2 \mathbf{i}_2 + y_2 \mathbf{j}_2 + z_2 \mathbf{k}_2. \quad (1.5)$$

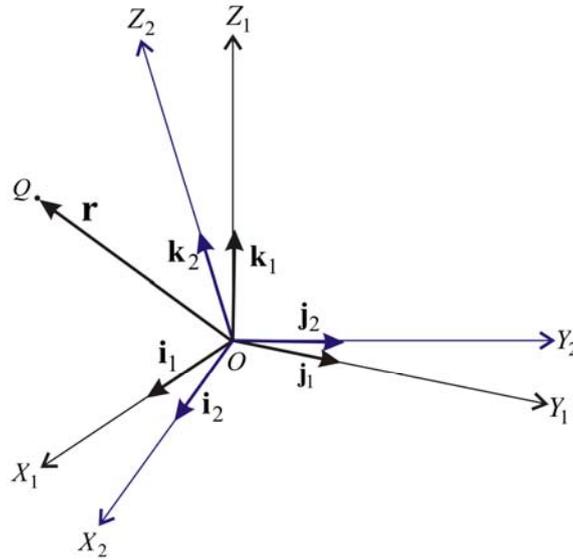


Рис. 1.4. Поворот осей пространственной системы координат

Умножая скалярно левые и правые части выражения (1.5) последовательно на орты $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1$ и \mathbf{k}_1 , имеем

$$\begin{aligned} x_1(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1) + y_1(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_1) + z_1(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_1) &= x_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2); \\ x_1(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_1) + y_1(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_1) + z_1(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_1) &= x_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2); \\ x_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_1) + y_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_1) + z_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_1) &= x_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2). \end{aligned}$$

Известно, что скалярные произведения ортогональных векторов равны нулю, а одноименных векторов – единице, т. е.

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_1) &= (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_1) = (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_1) = 0; \\ (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1) &= (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_1) = (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_1) = 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2); \\ y_1 &= x_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2); \\ z_1 &= x_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2), \end{aligned}$$

или, в матричном виде,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{P}\mathbf{r}_2, \quad (1.6)$$

где

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2) & (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2) & (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \\ (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2) & (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2) & (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \\ (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2) & (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2) & (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \end{bmatrix};$$

\mathbf{P} – матрица преобразований.

Заметим, что скалярное произведение двух единичных векторов равно косинусу угла между этими векторами. Поэтому выражение для матрицы \mathbf{P} можно представить в виде

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) & \cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_2) & \cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{k}_2) \\ \cos(\mathbf{j}_1, \mathbf{i}_2) & \cos(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) & \cos(\mathbf{j}_1, \mathbf{k}_2) \\ \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{i}_2) & \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{j}_2) & \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть в двух системах координат начало и оси абсцисс совпадают, а оси ординат и аппликат лежат в плоскости $O_1Y_1Z_1$ и отстоят друг от друга на угол μ соответственно (рис. 1.5, *a*).

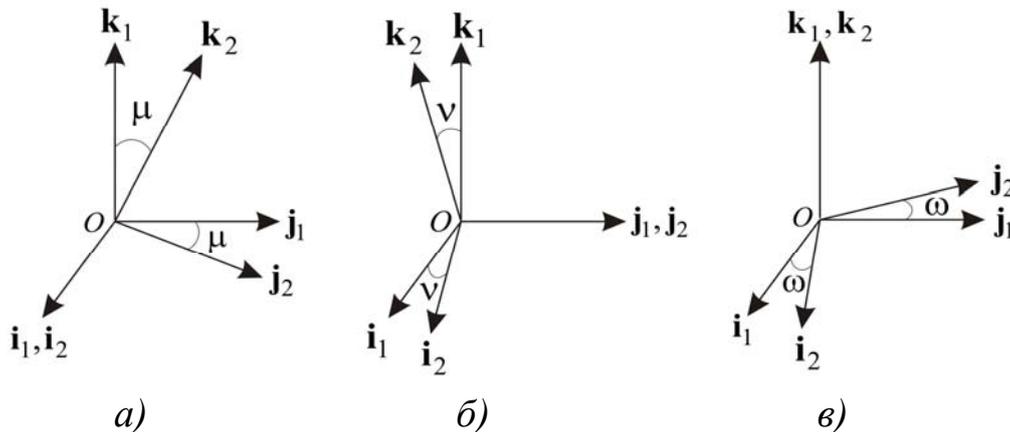


Рис. 1.5. Частные случаи поворотов систем координат

Имеем:

$$\begin{aligned}
 \cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) &= \cos(0^\circ) = 1; \\
 \cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_2) &= \cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{k}_2) = \cos(90^\circ) = 0; \\
 \cos(\mathbf{j}_1, \mathbf{i}_2) &= \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{i}_2) = \cos(90^\circ) = 0; \\
 \cos(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) &= \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \cos(\mu); \\
 \cos(\mathbf{j}_1, \mathbf{k}_2) &= \cos(90^\circ - \mu) = \sin(\mu); \\
 \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{j}_2) &= \cos(90^\circ + \mu) = \sin(-\mu) = -\sin(\mu).
 \end{aligned}$$

Теперь матрица преобразований \mathbf{P} примет вид:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_X(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\mu) & \sin(\mu) \\ 0 & -\sin(\mu) & \cos(\mu) \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

По аналогии, когда оси ординат (рис. 1.5, б) и аппликат (рис. 1.5, в) двух координатных систем совпадают, можно написать:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_Y(\nu) = \begin{bmatrix} \cos(\nu) & 0 & -\sin(\nu) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\nu) & 0 & \cos(\nu) \end{bmatrix}; \quad (1.9)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_Z(\omega) = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) & 0 \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Матрицу $\mathbf{P}_u(\beta)$, где $u = X, Y, Z$, а $\beta = \mu, \nu, \omega$, называют *матрицей поворота*, или *матрицей вращения*. Матрица $\mathbf{P}_u(\beta)$ – ортогональная матрица, определитель которой равен единице. Для нее справедливы соотношения:

$$\mathbf{P}_u^{-1}(\beta) = \mathbf{P}_u^T(\beta) = \mathbf{P}_u(-\beta).$$

Выражения (1.8)–(1.10) соответствуют правой системе координат и положительным углам поворота при вращении против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения (u) по направлению к началу координат.

α, δ – прямое восхождение и склонение объекта наблюдений соответственно.

Прямое восхождение – это угол в экваториальной плоскости, измеренный против часовой стрелки от точки весеннего равноденствия до круга склонений. Склонение объекта – это острый угол, измеряемый от плоскости экватора до светила.

Прямоугольные и сферические координаты точки связаны соотношениями:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right);$$

$$\delta = \arcsin \left(\frac{z}{r} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right); \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Описанная система координат называется *истинной небесной системой*. Истинная небесная система не является строго инерциальной. Ориентировка ее осей изменяется со временем в пространстве из-за лунно-солнечной прецессии и астрономической нутации земной оси. При этом истинный полюс P совершает вековое и колебательное движение вокруг полюса эклиптики P_E .

Причина прецессии и нутации (рис. 1.7) лежит в постоянно изменяющемся гравитационном притяжении Солнцем и Луной (в меньшей степени – планет) элементов масс Земли. Это происходит вследствие орбитального движения Земли и Луны.

Гравитационное притяжение несферической Земли Солнцем и Луной заставляет Землю колебаться в пространстве подобно волчку и при этом испытывать малые наклоны, называемые нутацией.

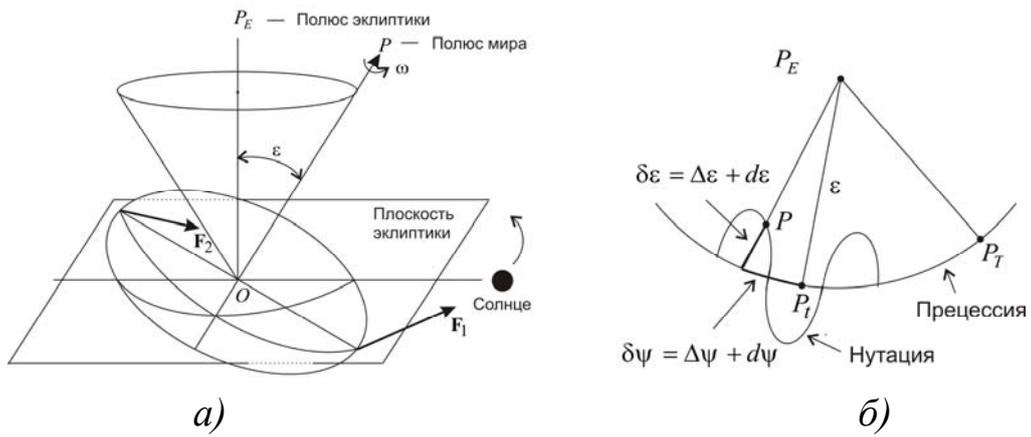


Рис. 1.7. Изменение оси вращения Земли:

а) прецессия; б) нутация

Если в положении истинного полюса P учесть влияние нутации в данную эпоху t , то получится положение среднего полюса P_t на эту эпоху. Ему соответствует плоскость среднего небесного экватора Q_tOA_t и средняя точка весеннего равноденствия γ_t (рис. 1.8).

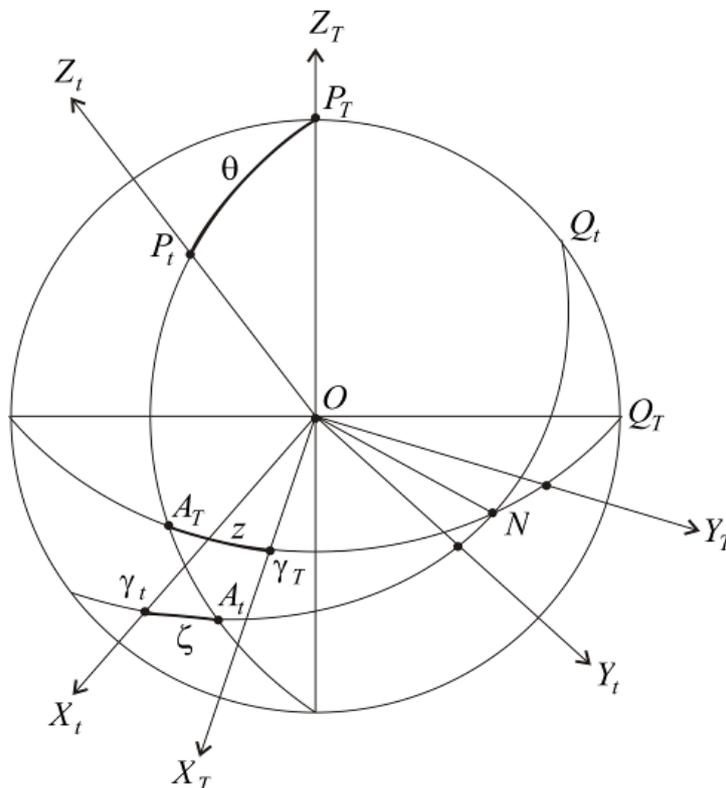


Рис. 1.8. Прецессионные углы

Такая система называется *средней небесной системой* в эпоху t .

Положение основной плоскости $Q_T O A_T$ и направление координатных осей X_T, Y_T, Z_T в пространстве для эпохи T , называемой фундаментальной эпохой, задаваемой обычно на начало юлианского года $J2000.0$, закрепляется в каталогах координатами α_T, δ_T звезд или других небесных объектов.

Связь между средними координатами x_t, y_t, z_t объекта на эпоху наблюдений t и средними координатами x_T, y_T, z_T фундаментальной эпохи T осуществляется с помощью прецессионных параметров ζ, z и θ (см. рис. 1.8) путем трех последовательных вращений: на угол z – в плоскости $O X_T Y_T$, на угол θ – в плоскости $O A_T Z_T$ и на угол ζ – в плоскости $O A_t Q_t$.

В результате имеем

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Z(\zeta) \mathbf{P}_Y(-\theta) \mathbf{P}_Z(z) \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_Z(\zeta) \mathbf{P}_Y(-\theta) \mathbf{P}_Z(z).$$

Углы прецессии ζ, θ и z , выраженные в угловых секундах, вычисляются по формулам Ньюкома – Андуайе. С точностью до членов третьего порядка они представляются так:

$$\zeta = 2\,306,218\,1'' \Delta T + 0,301\,88'' \Delta T^2 + 0,017\,9983'' \Delta T^3;$$

$$\theta = 2\,004,310\,9'' \Delta T + 0,426\,65'' \Delta T^2 + 0,041\,833'' \Delta T^3;$$

$$z = 2\,306,218\,1'' \Delta T + 1,094\,68'' \Delta T^2 + 0,018\,203'' \Delta T^3.$$

Переход от средних координат x_t, y_t, z_t в эпоху t к истинным координатам x, y, z этой же эпохи выполняется через матрицу нутации \mathbf{N} :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}_X(-\varepsilon_t - \delta\varepsilon)\mathbf{P}_Z(-\delta\psi)\mathbf{P}_Z(\varepsilon_t);$$

ε_t – средней наклон эклиптики к экватору;

$\delta\varepsilon = \Delta\varepsilon + d\varepsilon$ – коротко- и долгопериодическая нутация наклона эклиптики;

$\delta\psi = \Delta\psi + d\psi$ – коротко- и долгопериодическая нутация по долготе.

Средний наклон эклиптики к экватору определяется соотношением

$$\varepsilon_t = 23^\circ 26' 21,448'' - 46,8150'' \Delta T - 0,000 59'' \Delta T^2 + 0,001 813'' \Delta T^3.$$

Полный переход от средних координат наблюдаемого объекта фундаментальной эпохи T к истинным координатам, согласно приведенным выше формулам, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix}.$$

Небесная (инерциальная) система координат закрепляется координатами опорных звезд. Согласно решениям Международного астрономического союза (МАС) в качестве опорной небесной системы (ICRS) приняты каталоги экваториальных координат внегалактических радиоисточников.

Практической реализацией ICRS является Международная небесная система отсчета, ICRF (International Celestial Reference Frame). В настоящее время для вычисления эфемерид звезд используются фундаментальные каталоги FK6 и HIPPARCOS, привязанные к системе ICRS (International Celestial Reference System), в которой положения опорных звезд заданы в средней небесной системе координат на стандартную эпоху 2000.0 .

Небесная система координат используется при орбитальных и баллистических расчетах.

1.6. Земные геоцентрические системы координат

В земных геоцентрических системах координат началом является центр масс Земли, а направление осей связано с положением полюса

зывают двугранный угол между плоскостями начального меридиана и меридиана заданной точки.

Связь геодезических координат с прямоугольными координатами осуществляется по формулам

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + H) \cos B \cos L \\ (N + H) \cos B \sin L \\ [N(1 - e^2) + H] \sin B \end{bmatrix},$$

где N – радиус кривизны первого вертикала (отрезок \overline{CD}), определяемый как

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}.$$

Здесь a – большая полуось земного эллипсоида; e^2 – квадрат первого эксцентриситета.

В земной системе координат положение оси вращения Земли, ее полюса и экватора, а также начального меридиана связано с проблемой движения полюса.

По многолетним измерениям геодезических широт в различных пунктах Земли было замечено, что широты пунктов не остаются постоянными, а периодически меняются. Эти колебания широт объясняются тем, что тело Земли смещается относительно оси вращения и в разное время с полюсами вращения совпадают различные точки поверхности Земли. Таким образом, положение полюса Земли является функцией времени.

Для детального изучения явления движения полюса организована *Международная служба вращения Земли (МСВЗ)*. Одна из задач МСВЗ – установление координат x_p и y_p мгновенного полюса Земли относительно осредненного за период с 1900 по 1905 г. *условного земного полюса (УЗП)*. Ось x_p направлена по начальному меридиану, а ось y_p – под углом 90° на запад (рис. 1.10). Средние квадратические погрешности определения x_p и y_p , по данным МСВЗ, составляют $0,0003''$ (~ 1 см).

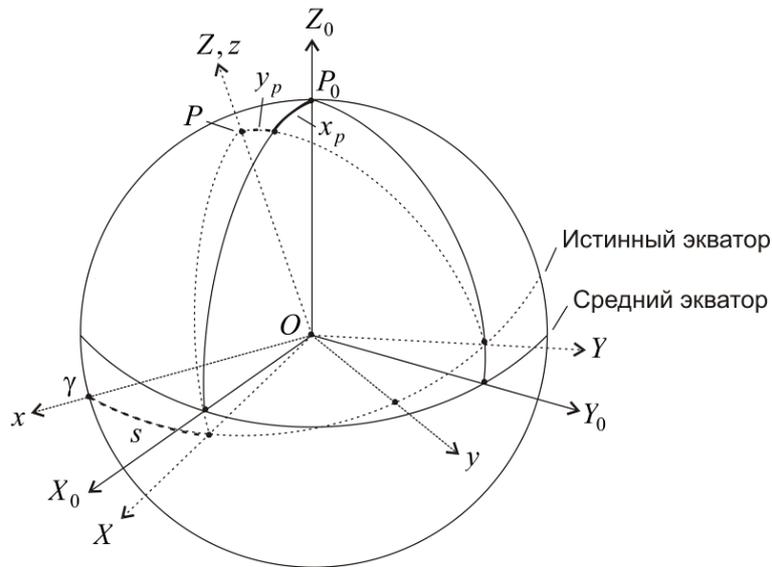


Рис. 1.10. Связь между истинной небесной и общеземной системами координат

Связь земных с небесными координатами возможна только через мгновенные земные (X, Y, Z) и истинные небесные (x, y, z) системы при условии, что плоскость небесного экватора совпадает с плоскостью земного экватора. Согласно рис. 1.10 имеем:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Z(-s) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix},$$

где s – истинное звездное время.

Если координаты точки (X_0, Y_0, Z_0) на земной поверхности заданы относительно условного земного полюса P_0 , то справедливо соотношение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Z(-s) \mathbf{P}_Y(x_p) \mathbf{P}_X(y_p) \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}.$$

В силу ортогональности матриц вращения, обратная связь средней земной и истинной небесной систем координат имеет вид

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_X(-y_p) \mathbf{P}_Y(-x_p) \mathbf{P}_Z(s) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

В соответствии с постановлением Правительства Российской Федерации, геоцентрической системе координат ПЗ-90, входящей в систему «Параметры Земли 1990 года», придан статус государственной при решении навигационных задач и задач геодезического обеспечения орбитальных полетов [6].

Первая модернизация геоцентрической системы координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90) была выполнена в 2002 г. (ПЗ-90.02) с использованием большого объема измерительной информации космического геодезического комплекса ГЕО-ИК и высокоточных измерений на пунктах космической геодезической сети. При этом достигнуто существенное повышение точности установления государственной геоцентрической системы координат по отношению к системе координат ПЗ-90, точности геодезической привязки измерительных средств наземного комплекса управления ГЛОНАСС, расчета эфемерид КА ГЛОНАСС.

Уточненная версия государственной геоцентрической системы координат, входящая в систему «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.02), введена в действие в целях повышения тактико-технических характеристик глобальной навигационной спутниковой системы ГЛОНАСС, улучшения геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач [7].

Уточнение государственной геоцентрической системы координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.02) выполнено в 2011 г. (ПЗ-90.11) с использованием большого объема высокоточных измерений ГЛОНАСС/GPS-пунктов космической геодезической сети и ряда пунктов сети IGS (Международная служба ГНСС). Общеземная геоцентрическая система координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11) установлена в качестве государственной системы координат для использования в целях геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач [8].

Геометрические и физические числовые геодезические параметры в отношении общеземной геоцентрической системы координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11) утверждены приказом министра обороны Российской Федерации от 15 января 2014 г. № 11 [10].

Общеземные системы координат – Всемирная геодезическая система WGS-84 (США) и Международная земная опорная система ITRS (International Terrestrial Reference System), поддерживаемая и регулярно обновляемая Международной службой вращения Земли IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service). Практическим воплощением ITRS является Международная земная опорная сеть ITRF (International Terrestrial Reference Frame) [9].

1.7. Референчные системы координат

Отсчетной поверхностью в геодезических референчных системах координат, так же как и в общеземной системе координат, является эллипсоид вращения. Отличие заключается в том, что положение начала счета координат в этих системах и ориентировка их осей могут не совпадать.

С 1946 г. в России действует референчная система координат 1942 года (СК-42). С 1 июля 2002 г. введена геодезическая референчная система координат 1995 года (СК-95). Референчные системы координат СК-42 и СК-95 закреплены пунктами государственной геодезической сети. Постановлением Правительства Российской Федерации от 28 декабря 2012 г. № 1463 установлена геодезическая система координат ГСК-2011 в качестве государственной для использования при осуществлении геодезических и картографических работ [8].

Система координат 1942 года

За отсчетную поверхность в системе координат 1942 года принят эллипсоид Красовского с большой полуосью $a = 6378\,245$ м и сжатием $\alpha = 1/298,3$. Центр эллипсоида Красовского совпадает с центром референчной системы координат. На эпоху создания СК-42 это обеспечивалось реализацией двух условий: параллельностью оси Z референчной системы координат средней оси вращения Земли и параллельностью плоскостей начальных астрономического и геодезического меридианов.

Из-за погрешностей измерений и ограниченных возможностей по их обработке (уравниванию) эти условия в то время не могли быть надежно проконтролированы, что привело к развороту осей референцной системы координат, который был впервые достоверно оценен в начале 1980-х гг. с использованием спутниковых данных.

Система координат 1995 года

Отсчетной поверхностью в системе координат 1995 года, так же как и в СК-42, является эллипсоид Красовского. Оси системы координат СК-95 установлены под условием параллельности осям общеземной системы координат ПЗ-90.

Геодезическая система координат ГСК-2011

Геодезическая система координат ГСК-2011 является практической реализацией земной пространственной системы координат с началом в центре масс Земли. Ось Z направлена к Условному земному полюсу, как определено рекомендациями Международной службы вращения Земли IERS, ось X – в точку пересечения плоскости экватора и начального меридиана, установленного IERS (Международная служба вращения Земли и опорных систем координат) и ВИН (Bureau International de l'Heure, Международное бюро времени), ось Y дополняет систему до правой. Начало системы координат служит в качестве геометрического центра общеземного эллипсоида с параметрами: $a = 6\,378\,136,5$ м и $\alpha = 1/298,256\,415$. Система координат ГСК-2011 закреплена пунктами фундаментальной астрономо-геодезической сети (ФАГС) (порядка 50 пунктов) на эпоху 2011.0.

1.8. Топоцентрические системы координат

Очень часто при построении геодезических сетей методами космической геодезии применяются топоцентрические системы координат, начало которых расположено в точке наблюдений A на земной поверхности. Если направления осей топоцентрической системы (X', Y', Z') параллельны осям (X, Y, Z) общеземной системы, то такая система называется *топоцентрической земной системой координат* (рис. 1.11).

Связь этих двух систем осуществляется переносом начала координат из точки O в точку A и наоборот (см. подраздел 1.4.1):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix},$$

где X_A, Y_A, Z_A – координаты пункта A на поверхности Земли.

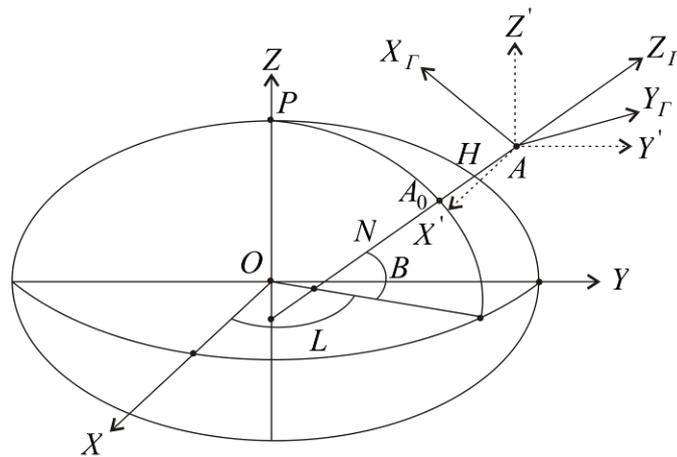


Рис. 1.11. Топоцентрическая система координат

Если основная плоскость топоцентрической системы координат совпадает с плоскостью геодезического горизонта, ось Z_G направлена в геодезический зенит пункта, ось X_G – на север, а ось Y_G – на восток, то такая система называется *топоцентрической горизонтной системой координат*. Связь координат X', Y', Z' с горизонтными X_G, Y_G, Z_G определяется формулой:

$$\begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Y(90 - B) \mathbf{P}_Z(90 + L) \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}.$$

Сферическими координатами наблюдаемого пункта в этой системе являются его геодезический азимут A , зенитное расстояние z и расстоя-

ние ρ до наблюдаемого объекта. Связь сферических координат с прямоугольными координатами выполняется по формулам:

$$\begin{bmatrix} X_{\Gamma} \\ Y_{\Gamma} \\ Z_{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \sin z \cos A \\ \rho \sin z \sin A \\ \rho \cos z \end{bmatrix};$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sqrt{X_{\Gamma}^2 + Y_{\Gamma}^2}}{Z_{\Gamma}}; \quad \operatorname{tg} A = \frac{Y_{\Gamma}}{X_{\Gamma}}; \quad \rho = \sqrt{X_{\Gamma}^2 + Y_{\Gamma}^2 + Z_{\Gamma}^2}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Классификация систем координат.
2. Земные системы координат.
3. Небесные системы координат.
4. Роль методов космической геодезии в решении координатной проблемы.
5. Преобразования систем координат.
6. Системы измерения времени.

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

2.1. Общие положения

Траектория, по которой движется в полете искусственный спутник Земли, называется орбитой. Орбитальное движение спутников происходит в гравитационном поле Земли. Однако помимо сил притяжения Земли на ИСЗ действуют и другие силы, такие как притяжение Солнца и Луны, давление солнечной радиации, торможение в атмосфере, другие геофизические эффекты.

Математически уравнения движения спутника выражаются дифференциальными уравнениями второго порядка, которые решаются во времени. При интегрировании задаются начальные условия движения в виде векторов положения и скорости в начальную эпоху. Рассчитанные на некоторое время вперед, положения спутников можно сравнить с положением, полученным из наблюдений. Расхождения между этими положениями используются для уточнения моделей действующих на спутник сил и координат станций наблюдений.

2.2. Невозмущенное движение спутника

Будем считать, что на движение ИСЗ не влияют никакие другие силы, кроме притяжения Земли. При этом Землю представим шаром с массой M со сферически симметричным распределением плотности. При таких условиях движение спутника называют невозмущенным, подчиняющимся действию трех законов Кеплера:

- 1) спутник движется по эллипсу, в одном из фокусов которого располагается центр масс Земли;
- 2) радиус-вектор спутника за равные промежутки времени описывает равные площади;
- 3) отношение квадрата периода обращения спутника к кубу большой полуоси его орбиты есть величина постоянная.

Вывод дифференциальных уравнений движения ИСЗ основан на законе всемирного тяготения, согласно которому все тела притягиваются друг к другу с силой F , прямо пропорциональной произведению постоянной тяготения f на их массы M и m и обратно пропорциональной квадрату расстояния r^2 между ними, т. е.

$$F = \frac{fMm}{r^2}. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) позволяет определить силу взаимодействия между двумя точечными телами, однородными шарами или шарами с равномерным распределением масс по концентрическим сферам. Гравитационные поля этих тел называют *центральными*. В первом приближении гравитационное поле Земли можно считать центральным. В этом случае на ИСЗ действует сила, направленная к центру масс Земли, а спутник согласно второму закону Ньютона получает ускорение a

$$a = \frac{F}{m}.$$

Тогда, с учетом (2.1), имеем ускорение

$$a = \frac{fM}{r^2}, \quad (2.2)$$

которое не зависит от массы спутника m .

Произведение $fM = \mu$ определено точнее, чем каждый из сомножителей, и получило название *геоцентрической гравитационной постоянной*, которая относится к числу фундаментальных постоянных и равна $398\,600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$.

В инерциальной системе координат $Oxyz$ (истинная небесная система координат) положение спутника задается радиусом-вектором \mathbf{r} , скорость – вектором \mathbf{V} , а ускорение – вектором \mathbf{a} . Поскольку вектор ускорения совпадает с вектором положения спутника, но противоположен по знаку, то

$$\mathbf{a} = -a \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Тогда

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Система дифференциальных уравнений

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (2.4)$$

имеет первые интегралы, определяющие закономерность *невозмущенного* движения.

Интеграл энергии. Умножим дифференциальные уравнения невозмущенного движения (2.4) скалярно на $2\dot{\mathbf{r}}$, получим

$$2\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{2\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (2.5)$$

Левая часть этого уравнения тождественна следующему выражению:

$$\frac{d}{dt}(V^2) = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}})^2 = 2\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (2.6)$$

Вследствие того, что $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$, продифференцировав, имеем тождество $\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = \dot{r}r$. Подставляя эти выражения в (2.5), имеем

$$\frac{d}{dt}(V^2) = -\frac{2\mu}{r^2} \dot{r} = 2\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (2.7)$$

Интегрируя выражение (2.7), окончательно получим

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad (2.8)$$

где h – постоянная интегрирования, которую называют *постоянной энергии*.

Из уравнения (2.8) следует, что полная энергия спутника в течение всего времени его движения остается постоянной. При удалении спутника

от притягивающего центра его скорость уменьшается, при приближении – возрастает.

Интеграл площадей. Умножим векторно уравнение (2.4) на \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}).$$

Это уравнение тождественно следующему:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0,$$

интеграл от которого равен

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}, \tag{2.9}$$

где \mathbf{c} – вектор постоянных интегрирования. При этом

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{bmatrix}.$$

Уравнения (2.9) представляют математическое выражение второго закона Кеплера, определяющего, что площадь, описываемая радиусом-вектором тела, обращаемого относительно притягивающего центра, пропорциональна времени, в течение которого она описана.

В соответствии с интегралом площадей движение спутника происходит в постоянной плоскости, проходящей через центр Земли. Эта плоскость называется плоскостью орбиты. Вектор площадей \mathbf{c} перпендикулярен к этой плоскости.

Интеграл Лапласа. Умножим векторно дифференциальные уравнения невозмущенного движения (2.4) на вектор интеграла площадей \mathbf{c} :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} &= -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) = -\frac{\mu}{r^3}[\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r})] = -\frac{\mu}{r^3}[\dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})] = \\ &= -\frac{\mu}{r^2}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}). \end{aligned}$$

Или

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} + \frac{\mu}{r^2} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = 0.$$

Полученное выражение тождественно следующему:

$$\mu \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mathbf{r}}{r} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} \right) = 0.$$

Интеграл

$$-\mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} = \boldsymbol{\lambda} \quad (2.10)$$

называют интегралом Лапласа. При этом

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{r} x + c_z \dot{y} - c_y \dot{z} \\ -\frac{\mu}{r} y + c_x \dot{z} - c_z \dot{x} \\ -\frac{\mu}{r} z + c_y \dot{x} - c_x \dot{y} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{c} = 0$, что говорит об ортогональности этих двух векторов. Вектор $\boldsymbol{\lambda}$ лежит в плоскости орбиты и направлен к перигею.

Связь всех трех полученных интегралов устанавливается соотношением:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \lambda^2 = \mu^2 + h \cdot c^2,$$

где $c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2$.

2.3. Элементы орбиты спутника и их связь с постоянными интегрирования

Рассмотрим уравнение эллипса в полярной системе координат.

Обратимся к формуле (2.10). Умножим ее левую и правую часть скалярно на вектор \mathbf{r} .

Получим

$$-\mu \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r},$$

или

$$-\mu \frac{r^2}{r} + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{c} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r}.$$

С учетом того, что

$$(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{c}; \quad \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r} = \lambda r \cos(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}),$$

имеем

$$-\mu r + c^2 = \lambda r \cos(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}).$$

Откуда

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} \cos(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r})}.$$

Обозначим

$$p = \frac{c^2}{\mu}; \quad e = \frac{\lambda}{\mu}; \quad \cos(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}) = \cos \nu.$$

Тогда окончательно получим

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) называют *уравнением орбиты*. Здесь (рис. 2.1):

r – расстояние от фокуса эллипса до спутника;

ν – угол, лежащий в плоскости орбиты между векторами λ и \mathbf{r} , носит название *истинной аномалии*;

p – *фокальный параметр*;

e – *эксцентриситет орбиты*.

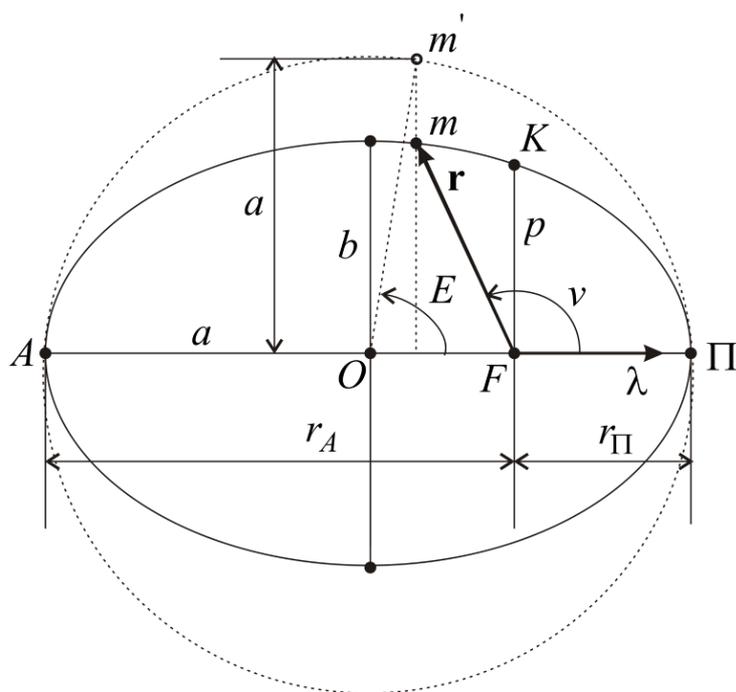


Рис. 2.1. Орбитальный эллипс

В зависимости от величины эксцентриситета, различают орбиты в виде окружности ($e=0$), эллипса ($0 < e < 1$), параболы ($e=1$), гиперболы ($e > 1$) и прямой ($e = \infty$). В дальнейшем мы будем рассматривать только эллиптические орбиты.

Значению $\nu=0$ соответствует наименее удаленное положение спутника от притягивающего центра, а $\nu=180^\circ$ – наиболее удаленное положение. Эти точки называются соответственно *перигеем* и *апогеем* орбиты. Угол ν отсчитывается от перигея орбиты по направлению движения спутника. Линия, соединяющая точку апогея с точкой перигея, называется *линией апсид*.

Расстояние r_{Π} от центра Земли до точки перигея орбиты, согласно с формулой (2.11), определяется из выражения

$$r_{\Pi} = \frac{p}{1+e}. \quad (2.12)$$

Расстояние от центра Земли до точки апогея –

$$r_A = \frac{p}{1-e}. \quad (2.13)$$

Большая a и малая b полуоси орбиты (см. рис. 2.1) равны

$$a = \frac{r_{\Pi} + r_A}{2} = \frac{p}{1-e^2}; \quad b = a\sqrt{1-e^2}. \quad (2.14)$$

Эксцентриситет орбиты

$$e = \frac{r_A - r_{\Pi}}{2a}. \quad (2.15)$$

Фокальный параметр

$$p = a(1 - e^2). \quad (2.16)$$

Форма и размеры эллиптической орбиты полностью определяются любыми двумя параметрами из перечисленных величин (кроме v). Угол v определяет положение спутника на орбите.

Для характеристики положения орбиты в пространстве используются три элемента орбиты: Ω , i и ω .

Плоскость орбиты, в которой происходит движение спутника, пересекается в общем случае с плоскостью экватора Земли. Линия пересечения (рис. 2.2) этих плоскостей называется *линией узлов*. Точка, в которой орбита пересекает плоскость экватора при движении спутника с юга на север, называется *восходящим узлом* орбиты, диаметрально противоположная точка – *нисходящим узлом*. Положение восходящего узла определяется элементом орбиты – углом Ω (*долгота восходящего узла*), отсчитываемым в плоскости экватора от направления из центра Земли на точку весеннего равноденствия до линии узлов. При этом очевидно, что $0 \leq \Omega \leq 360$.

Установим связь долготы восходящего узла с постоянными интегрирования. Из рис. 2.2 видно, что

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{+c_x}{-c_y}.$$

Следовательно

$$\Omega = \operatorname{arctg} \frac{+c_x}{-c_y}. \quad (2.17)$$

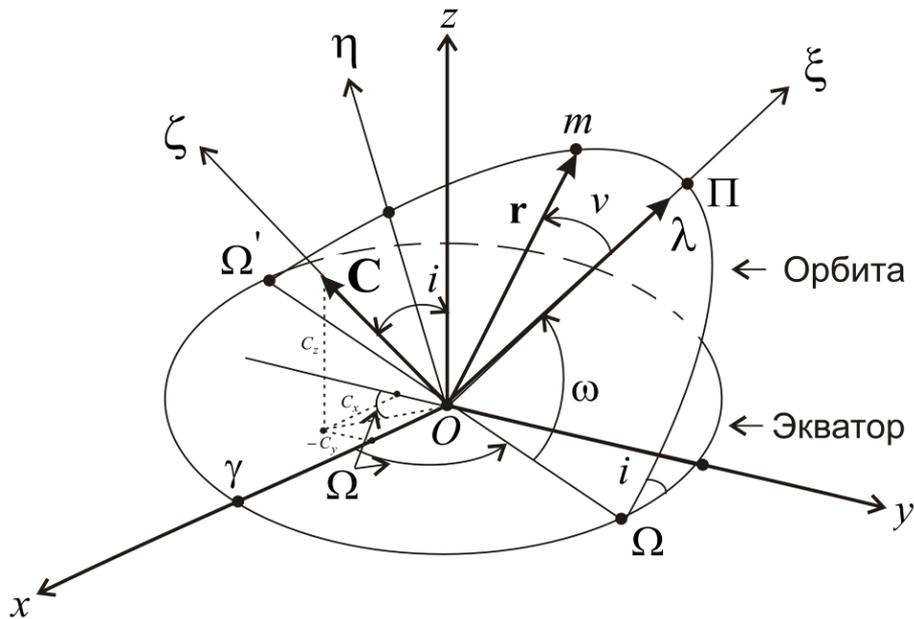


Рис. 2.2. Элементы орбиты ИСЗ

Вторым элементом, определяющим положение орбиты в пространстве, является угол i – наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора. Значение i отсчитывается в восходящем узле орбиты против движения часовой стрелки от восточного относительно узла направления на экваторе. Величина i может меняться в пределах от 0 до 180° .

Орбиты ИСЗ в зависимости от их наклонения делят на экваториальные ($i=0^\circ$ или $i=180^\circ$), полярные ($i=90^\circ$) и наклонные. Орбиты с $0^\circ < i < 90^\circ$ называют орбитами с прямым движением спутника, а с $90^\circ < i < 180^\circ$ – орбитами с обратным движением спутника (по отношению к направлению вращения Земли).

Как видно из рис. 2.2,

$$i = \arccos \frac{c_z}{c}. \quad (2.18)$$

Относительно линии узлов задают два угла в плоскости орбиты. Угол ω – угловое расстояние, отсчитываемое от восходящего узла в плоскости орбиты до перигея орбиты. Этот угол называют аргументом перигея, который может изменять значения от 0 до 360°. Угол u – аргумент широты спутника – угол между восходящим узлом орбиты и направлением на спутник в плоскости орбиты, отсчитываемый в направлении движения спутника.

Очевидно, что

$$u = \omega + v, \quad (2.19)$$

при этом

$$\operatorname{tg} v = \frac{|\mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda}|}{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda}}. \quad (2.20)$$

Установим связь угла ω с постоянными интегрирования. Рассмотрим прямоугольную систему координат (ξ, η, ζ) , в которой ось ξ направлена в перигей орбиты, ось ζ совпадает с направлением вектора \mathbf{C} , а ось η дополняет систему до правой. В этой системе координат вектор $\boldsymbol{\lambda}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\xi, \eta, \zeta} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Связь рассмотренной системы координат с небесной (x, y, z) осуществляется через три матрицы вращения:

$$\boldsymbol{\lambda}_{x, y, z} = \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix} = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega) \mathbf{P}_\xi(-i) \mathbf{P}_\zeta(-\omega) \boldsymbol{\lambda}_{\xi, \eta, \zeta}. \quad (2.21)$$

Раскрывая последнее выражение, имеем:

$$\begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

С учетом того, что

$$\cos i = \frac{C_z}{C}; \quad \cos \Omega = \frac{-C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}; \quad \sin \Omega = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}},$$

первые два уравнения системы (2.22) будут иметь вид:

$$\frac{\lambda_x}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} \left(-C_y \cos \omega - C_x \frac{C_z}{C} \sin \omega \right);$$

$$\frac{\lambda_y}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} \left(C_x \cos \omega - C_y \frac{C_z}{C} \sin \omega \right)$$

или

$$\frac{\lambda_x}{\lambda} = \frac{\cos \omega}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} \left(-C_y - C_x \frac{C_z}{C} \operatorname{tg} \omega \right);$$

$$\frac{\lambda_y}{\lambda} = \frac{\cos \omega}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} \left(C_x - C_y \frac{C_z}{C} \operatorname{tg} \omega \right),$$

откуда, после несложных преобразований, окончательно получим

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{C \lambda_z}{C_x \lambda_y - C_y \lambda_x}. \quad (2.23)$$

Текущее значение радиуса в процессе движения спутника определяется из соотношения (2.11) как функция истинной аномалии ν . Для определения значения радиуса как функции времени необходимо получить зависимость истинной аномалии от времени движения. Получить эту зависимость в явном виде не представляется возможным. Поэтому наряду с истинной аномалией вводится *эксцентрическая аномалия* E .

Установим связь истинной аномалии ν с эксцентрической E . Введем прямоугольную систему координат $x_\pi y_\pi$ в плоскости орбитального эллипса (рис. 2.3).

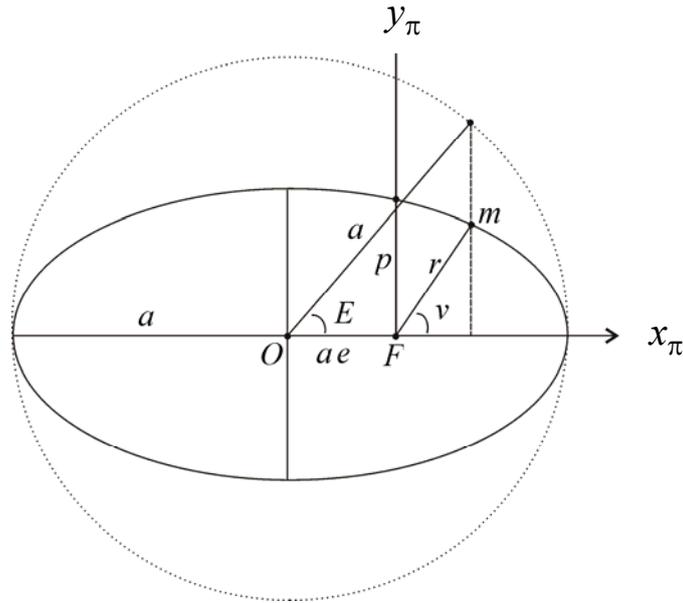


Рис. 2.3. Введение эксцентрической аномалии

В принятой системе координаты x_π и y_π спутника m , выраженные через истинную аномалию ν , определяются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x_\pi &= r \cos \nu \\ y_\pi &= r \sin \nu \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Связь эксцентрической аномалии E с координатой x_π осуществляется выражением (см. рис. 2.3)

$$x_\pi = a \cos E - ae = a(\cos E - e). \quad (2.25)$$

Из выражения (2.24) имеем

$$\cos \nu = \frac{x_\pi}{r}.$$

С учетом этого, уравнение (2.11) запишем в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \frac{x_\pi}{r}} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \frac{x_\pi}{r}}$$

или

$$r \left(1 + e \frac{x_{\pi}}{r} \right) = a(1 - e^2),$$

откуда

$$r = a(1 - e^2) - ex_{\pi}. \quad (2.26)$$

Подставим в формулу (2.26) соотношение (2.25). Имеем

$$r = a(1 - e^2) - e(a \cos E - ae) = a - e^2 a - ea \cos E + e^2 a,$$

или

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.27)$$

Установим теперь связь между y_{π} и E . На основании уравнения

$$r^2 = x_{\pi}^2 + y_{\pi}^2$$

имеем

$$\begin{aligned} y_{\pi}^2 &= r^2 - x_{\pi}^2 = a^2(1 - e \cos E)^2 - a^2(\cos E - e)^2 = \\ &= a^2(1 + e^2 \cos^2 E - 2e \cos E - \cos^2 E - e^2 + 2e \cos E) = \\ &= a^2(1 - \cos^2 E - e^2 + e^2 \cos^2 E) = a^2(\sin^2 E - e^2 \sin^2 E). \end{aligned}$$

Связь эксцентрической аномалии E с координатой y_{π} осуществляется формулой

$$y_{\pi} = a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (2.28)$$

Сопоставляя выражения (2.24), (2.25) и (2.28), получим

$$\begin{aligned} r \cos v &= a(\cos E - e); \\ r \sin v &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}\cos E &= \frac{r}{a} \cos v + e = \frac{a(1-e^2)}{a(1+e \cos v)} \cos v + e = \frac{(1-e^2) \cos v + e(1+e \cos v)}{1+e \cos v} = \\ &= \frac{\cos v - e^2 \cos v + e + e^2 \cos v}{1+e \cos v};\end{aligned}$$

$$\sin E = \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}} \sin v = \frac{a(1-e^2)}{a\sqrt{1-e^2}(1+e \cos v)} \sin v.$$

Таким образом

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v}; \quad \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin v}{1 + e \cos v}; \quad (2.29)$$

$$\operatorname{tg} E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin v}{\cos v + e}; \quad E = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-e^2} \sin v}{\cos v + e} \right). \quad (2.30)$$

Связь истинной аномалии v с эксцентрисической можно представить следующим соотношением (см. рис. 2.1):

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}. \quad (2.31)$$

В свою очередь, эксцентрисическая аномалия связана со временем движения по орбите уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_\pi). \quad (2.32)$$

Здесь t – текущее время, t_π – момент прохождения спутником перигея.

Обозначим

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad M = n(t - t_\pi).$$

Тогда

$$E - e \sin E = M. \quad (2.33)$$

Величины M и n называются *средней аномалией* и *средним движением* соответственно.

Средняя аномалия M представляет собой угол от направления на перигей до направления на некоторое фиктивное положение спутника, движущегося равномерно по орбите.

Среднее движение n интерпретируется как средняя угловая скорость движения спутника.

Обратимся теперь к уравнению Кеплера. Положим, что спутник имеет период обращения P . Периодом обращения спутника P вокруг центрального тела называется промежуток времени между моментами двух последовательных прохождений через произвольную точку орбиты. Тогда, как это следует из (2.33), при полном обороте спутника получим

$$P = \frac{2\pi}{n}. \quad (2.34)$$

Связь элементов орбиты с координатами (x, y, z) в инерциальной (небесной) системе координат осуществляется по формуле

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Z(-\Omega) \mathbf{P}_X(-i) \begin{bmatrix} r \cos u \\ r \sin u \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Вектор скорости спутника \mathbf{V} , направленный по касательной к орбите, раскладывается на две составляющие: вектор радиальной скорости \mathbf{V}_r , направленный вдоль радиуса-вектора спутника, и вектор трансверсальной скорости \mathbf{V}_n , направленный в плоскости орбиты перпендикулярно к радиусу-вектору. Модули этих скоростей находятся по формулам:

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v; \quad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v). \quad (2.36)$$

Тогда вектор скорости определяется как

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Z(-\Omega) \mathbf{P}_X(-i) \begin{bmatrix} V_r \cos u - V_n \sin u \\ V_r \sin u + V_n \cos u \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

2.4. Определение орбиты спутника по двум положениям

В предыдущих подразделах была установлена связь между векторами положения \mathbf{r} и скорости $\dot{\mathbf{r}}$ спутника с его элементами орбиты $a, e, i, \Omega, \omega, M$ в фиксированный момент времени t_0 . Здесь: a – большая полуось орбиты; e – эксцентриситет; i – наклонение плоскости орбиты; Ω – долгота восходящего узла; ω – аргумент перигея; M – средняя аномалия. Однако на практике часто возникает задача определения орбиты по двум положениям спутника, движущегося в ньютоновском поле сил. Предположим, что известны радиусы-векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , заданные в небесной системе координат на моменты времени t_1 и t_2 соответственно. Требуется вычислить элементы орбиты ИСЗ $a, e, i, \Omega, \omega, M$ (определить орбиту) в какой-либо момент времени. Поскольку существует бесконечное число орбит, которые могут проходить через две данные точки, при решении такого рода задач задаются дополнительные условия. Установлено [34], что определение траектории с минимальным временем полета, с минимальным приращением скорости и т. д. приводит к единственной орбите, удовлетворяющей условиям поставленной задачи.

Существует много способов решения поставленной задачи. Рассмотрим метод, предложенный Д. Ласкоди в 1958 г., который получил название *метода итераций по истинной аномалии*.

На основании известного уравнения конического сечения

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (2.38)$$

для двух моментов времени t_1 и t_2 можно написать

$$p = r_1(1 + e \cos v_1) = r_2(1 + e \cos v_2).$$

Или

$$r_1 + r_1 e \cos v_1 = r_2 + r_2 e \cos v_2,$$

откуда

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos v_1 - r_2 \cos v_2}. \quad (2.39)$$

Здесь r_1 и r_2 – расстояние до спутника в моменты t_1 и t_2 ; p – фокальный параметр орбиты.

С учетом того, что параметр p находится по формуле

$$p = a(1 - e^2),$$

величину большой полуоси орбитального эллипса можно вычислить с помощью соотношения

$$a = \frac{r_1(1 + e \cos v_1)}{(1 - e^2)}. \quad (2.40)$$

Далее, с помощью скалярного и векторного произведений векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 определяется угол Δv между ними:

$$\Delta v = \arctg \frac{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}. \quad (2.41)$$

Тогда

$$v_2 = v_1 + \Delta v. \quad (2.42)$$

Известно, что

$$E_j = \arctg \left(\frac{\sqrt{1 - e^2} \sin v_j}{\cos v_j + e} \right); \quad j = 1, 2. \quad (2.43)$$

Следовательно, согласно уравнению Кеплера

$$E_j - e \sin E_j = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t_j - t_\pi) = M_j \quad (2.44)$$

можно написать

$$M_2 - M_1 = E_2 - E_1 + e(\sin E_1 - \sin E_2). \quad (2.45)$$

Вычислим значение функции F :

$$F = (t_2 - t_1) - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(M_2 - M_1). \quad (2.46)$$

Сохраняя значение F и увеличивая v_1 на малую величину Δv , найдем $v_1 + \Delta v$. Повторяя итерационный цикл (2.39)–(2.46), получаем $F(v_1 + \Delta v)$ и вычисляем

$$F'(v_1) = \frac{F(v_1 + \Delta v) - F(v_1)}{\Delta v}. \quad (2.47)$$

Уточняем величину v_1 :

$$(v_1)_{k+1} = (v_1)_k - \frac{F(v_1)_k}{F'(v_1)_k}. \quad (2.48)$$

Если разность $(v_1)_{k+1} - (v_1)_k$ по модулю больше заданной величины ε , т. е.

$$|(v_1)_{k+1} - (v_1)_k| > \varepsilon,$$

то возвращаемся к формуле (2.39) с уточненным значением v_1 , в противном случае, по формуле

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1 \quad (2.49)$$

вычисляем среднюю аномалию на момент времени t_1 .

Таким образом, в результате итераций определяются три элемента орбиты: a , e и M_1 (как функция v_1).

Получим теперь формулы для вычисления трех оставшихся параметров орбиты i , Ω и ω .

Найдем векторное произведение заданных векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 .

Имеем

$$\mathbf{Q} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2, \quad (2.50)$$

при этом

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}; \quad (2.51)$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}. \quad (2.52)$$

Заметим, что направление вектора \mathbf{Q} перпендикулярно плоскости орбиты и совпадает с направлением вектора констант \mathbf{c} интеграла площадей.

Установим связь долготы восходящего узла Ω с компонентами вектора \mathbf{Q} . Из рис. 2.4 видно, что

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{Q_x}{-Q_y}.$$

Следовательно

$$\Omega = \operatorname{arctg} \frac{Q_x}{-Q_y}. \quad (2.53)$$

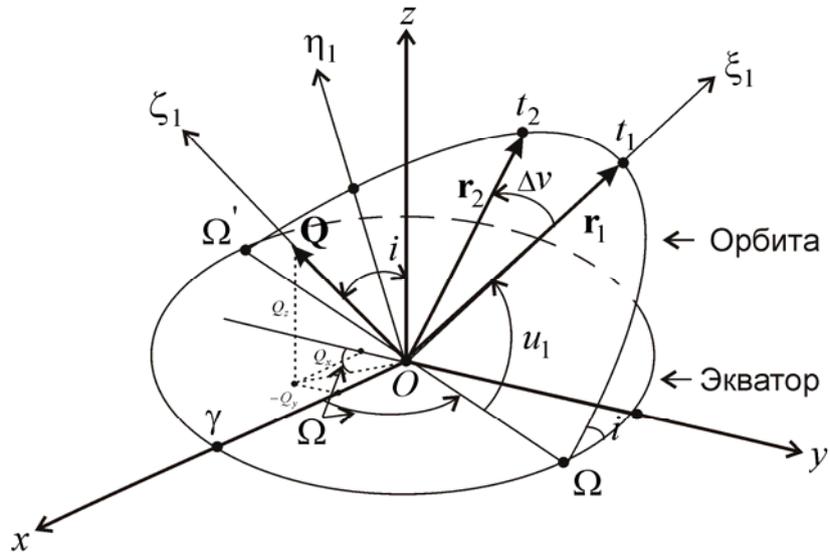


Рис. 2.4. Элементы орбиты спутника, характеризующие ее положение в пространстве

Вторым элементом, определяющим положение орбиты в пространстве, является угол i – наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора. Как видно из рис. 2.4,

$$i = \arccos \frac{Q_z}{Q}. \quad (2.54)$$

В качестве третьего углового элемента примем угол u_1 – аргумент широты спутника – угловое расстояние, отсчитываемое от восходящего узла в плоскости орбиты до положения спутника в момент t_1 .

Очевидно, что

$$u_1 = \omega + v_1. \quad (2.55)$$

Установим связь угла u_1 с элементами вектора \mathbf{Q} .

Рассмотрим орбитальную прямоугольную систему координат (ξ_1, η_1, ζ_1) , в которой ось (ξ_1) направлена в перигей орбиты, ось (ζ_1) совпадает с направлением вектора \mathbf{C} , а ось (η_1) дополняет систему до правой. В этой системе координат вектор $\bar{\mathbf{r}}_1$ имеет вид

$$\bar{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Связь рассмотренной системы координат с небесной (x, y, z) осуществляется через три матрицы вращения

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{P}_\zeta(-u_1)\bar{\mathbf{r}}_1. \quad (2.56)$$

Раскрывая последнее выражение, имеем:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = r_1 \begin{bmatrix} \cos u_1 \cos \Omega - \sin u_1 \sin \Omega \cos i \\ \cos u_1 \sin \Omega + \sin u_1 \cos \Omega \cos i \\ \sin u_1 \sin i \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

С учетом того, что

$$\cos i = \frac{Q_z}{Q}; \quad \cos \Omega = \frac{-Q_y}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}}; \quad \sin \Omega = \frac{Q_x}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}},$$

первые два уравнения системы (2.57) будут иметь вид:

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}} \left(-Q_y \cos u_1 - Q_x \frac{Q_z}{Q} \sin u_1 \right);$$

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}} \left(Q_x \cos u_1 - Q_y \frac{Q_z}{Q} \sin u_1 \right)$$

или

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{\cos u_1}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}} \left(-Q_y - Q_x \frac{Q_z}{Q} \operatorname{tgu}_1 \right);$$

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{\cos u_1}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}} \left(Q_x - Q_y \frac{Q_z}{Q} \operatorname{tgu}_1 \right),$$

откуда, после несложных преобразований, получим

$$\operatorname{tg} u_1 = \frac{Q z_1}{Q_x y_1 - Q_y x_1}; \quad u_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{Q z_1}{Q_x y_1 - Q_y x_1} \right). \quad (2.58)$$

Далее, согласно выражению (2.55), окончательно имеем

$$\omega = u_1 - v_1. \quad (2.59)$$

Таким образом, поставленная задача решена: мы определили все шесть элементов орбиты спутника по двум его положениям.

2.5. Прогнозирование невозмущенного движения искусственного спутника Земли

В предыдущих подразделах мы рассмотрели связь вектора положения \mathbf{r} спутника и его вектора скорости $\dot{\mathbf{r}}$ с элементами орбиты $a, e, i, \Omega, \omega, M$ в фиксированный момент времени t_0 . Однако величины \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$ изменяются с течением времени, т. е. они являются функциями времени

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t), \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Модели (2.60) называются *прогнозируемыми*, если по состоянию векторов \mathbf{r}_0 и $\dot{\mathbf{r}}_0$ в начальный момент времени t_0 можно однозначно определить их состояние для любого другого момента t

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_t &= F(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t - t_0), \\ \dot{\mathbf{r}}_t &= F_1(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t - t_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Таким образом, если нам удастся установить функциональные зависимости (2.61), то задача прогнозирования движения ИСЗ будет решена.

Прогнозирование движения спутника через изменение элементов его орбиты.

Предположим, что в начальный момент времени t_0 нам известны элементы орбиты $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$. Заметим, что из перечисленных элементов только средняя аномалия M зависит от времени t . При этом, если

$$M_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t_0 - t_\pi),$$

то

$$M_t = M_0 + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0).$$

Далее, решая уравнение Кеплера

$$M_t = E_t - e \sin E_t, \quad (2.62)$$

находим значение эксцентрической аномалии E_t на заданный момент времени t .

Эксцентрическая аномалия E_t связана с истинной аномалией v_t соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{v_t}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E_t}{2}, \quad (2.63)$$

откуда

$$v_t = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E_t}{2} \right). \quad (2.64)$$

Используя v_t , рассчитаем радиус спутника r_t

$$r_t = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v_t}. \quad (2.65)$$

Рассмотрим орбитальную прямоугольную систему координат (ξ_1, η_1, ζ_1) , в которой ось ξ_1 направлена в перигей орбиты, ось ζ_1 перпендикулярна плоскости орбиты, а ось η_1 дополняет систему до правой. В этой системе координат вектор $\mathbf{r}_{\xi, \eta, \zeta}$ имеет вид:

$$\mathbf{r}_{\xi, \eta, \zeta} = \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Связь рассмотренной системы координат с небесной (x, y, z) осуществляется через три матрицы вращения

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{P}_\zeta(-u_t)\mathbf{r}_{\xi, \eta, \zeta}, \quad (2.66)$$

где

$$u_t = \omega + v_t.$$

В орбитальной системе координат вектор скорости спутника $\dot{\mathbf{r}}_{\xi, \eta, \zeta}$, направленный по касательной к орбите, раскладывается на две составляющие: вектор радиальной скорости \mathbf{V}_r , направленный вдоль радиуса-вектора спутника, и вектор трансверсальной скорости \mathbf{V}_n , направленный в плоскости орбиты перпендикулярно к радиусу-вектору. Модули этих скоростей находятся по формулам

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} e \sin v_t; \quad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} (1 + e \cos v_t). \quad (2.67)$$

С учетом того, что

$$\dot{\mathbf{r}}_{\xi, \eta, \zeta} = \begin{bmatrix} V_r \\ V_n \\ 0 \end{bmatrix},$$

на основании (19) имеем

$$\dot{\mathbf{r}}_t = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{P}_\zeta(-u_t)\dot{\mathbf{r}}_{\xi,\eta,\zeta}. \quad (2.68)$$

Таким образом, функциональные зависимости (2.61) установлены, следовательно, поставленная задача решена.

Прогнозирование движения спутника с помощью разложения дифференциального уравнения по степеням времени.

Решение основного дифференциального уравнения

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.69)$$

можно также получить путем разложения в ряд в окрестности момента времени t_0 по степеням времени [34].

Предположим, что положение спутника \mathbf{r}_t в момент времени t является функцией положения ИСЗ $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$, заданного на момент t_0 , т. е.

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r}(t_0, t). \quad (2.70)$$

Разложим функцию (2.70) в ряд Тейлора в окрестности точки, определяемой вектором \mathbf{r}_0 . Имеем

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0 \Delta t + \frac{1}{2!} \ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \dddot{\mathbf{r}}_0 \Delta t^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{r}_0^{IV} \Delta t^4 + \frac{1}{5!} \mathbf{r}_0^V \Delta t^5 + \frac{1}{6!} \mathbf{r}_0^{VI} \Delta t^6 + \dots \quad (2.71)$$

С учетом того, что

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\bar{n}_0 \mathbf{r}_0, \quad (2.72)$$

где

$$\bar{n}_0 = \frac{\mu}{r_0^3},$$

получим старшие производные $\ddot{\mathbf{r}}_0, \mathbf{r}_0^{IV}, \mathbf{r}_0^V, \mathbf{r}_0^{VI}$:

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\dot{\bar{n}}_0 \mathbf{r}_0 - \bar{n}_0 \dot{\mathbf{r}}_0;$$

$$\mathbf{r}_0^{IV} = (-\ddot{\bar{n}}_0 + \bar{n}_0^2) \mathbf{r}_0 - 2\dot{\bar{n}}_0 \dot{\mathbf{r}}_0;$$

$$\mathbf{r}_0^V = (-\dddot{\bar{n}}_0 + 4\bar{n}_0 \dot{\bar{n}}_0) \mathbf{r}_0 - (3\ddot{\bar{n}}_0 - \bar{n}_0^2) \dot{\mathbf{r}}_0;$$

$$\mathbf{r}_0^{VI} = (-\bar{n}_0^{IV} + 7\bar{n}_0 \ddot{\bar{n}}_0 - \bar{n}_0^3 + 4\dot{\bar{n}}_0^2) \mathbf{r}_0 - (4\ddot{\bar{n}}_0 - 6\bar{n}_0 \dot{\bar{n}}_0) \dot{\mathbf{r}}_0.$$

Подставляя эти производные в формулу (2.71), получим

$$\mathbf{r}_t = f \mathbf{r}_0 + g \dot{\mathbf{r}}_0, \quad (2.73)$$

где

$$f = 1 - \frac{1}{2} \bar{n}_0 \Delta t^2 - \frac{1}{6} \dot{\bar{n}}_0 \Delta t^3 - \frac{1}{24} (\ddot{\bar{n}}_0 - \bar{n}_0^2) \Delta t^4 - \frac{1}{120} (\dddot{\bar{n}}_0 - 4\bar{n}_0 \dot{\bar{n}}_0) \Delta t^5 - \\ - \frac{1}{720} (\bar{n}_0^{IV} - 7\bar{n}_0 \ddot{\bar{n}}_0 + \bar{n}_0^3 - 4\dot{\bar{n}}_0^2) \Delta t^6 - \dots;$$

$$g = \Delta t - \frac{1}{6} \bar{n}_0 \Delta t^3 - \frac{1}{12} \dot{\bar{n}}_0 \Delta t^4 - \frac{1}{120} (3\ddot{\bar{n}}_0 - \bar{n}_0^2) \Delta t^5 - \\ - \frac{1}{360} (2\ddot{\bar{n}}_0 - 3\bar{n}_0 \dot{\bar{n}}_0) \Delta t^6 - \dots.$$

Производные по времени от параметра \bar{n}_0 имеют довольно громоздкий вид и здесь не приводятся. При необходимости их можно взять в книге [34].

Так как векторы \mathbf{r}_0 и $\dot{\mathbf{r}}_0$ постоянны, то в результате дифференцирования уравнения (2.73) вектор скорости можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{r}}_t = \dot{f} \mathbf{r}_0 + \dot{g} \dot{\mathbf{r}}_0, \quad (2.74)$$

где

$$\dot{f} = \frac{df}{dt}; \quad \dot{g} = \frac{dg}{dt}.$$

Таким образом, мы получили ряды для функций f и g по степеням времени. Однако можно получить и точные выражения для этих функций в конечной форме.

Рассмотрим орбитальную прямоугольную систему координат x_π, y_π, z_π , в которой ось x_π направлена в перигей, ось z_π – ортогональная плоскости орбиты, ось y_π лежит в плоскости орбиты и дополняет систему до правой.

Запишем уравнение (2.73) в орбитальной системе координат x_π, y_π, z_π :

$$\mathbf{r}_\pi = f\mathbf{r}_{\pi 0} + g\dot{\mathbf{r}}_{\pi 0}. \quad (2.75)$$

Здесь

$$\mathbf{r}_\pi = \begin{bmatrix} x_\pi \\ y_\pi \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{\pi 0} = \begin{bmatrix} x_{\pi 0} \\ y_{\pi 0} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{r}}_{\pi 0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_\pi \\ \dot{y}_\pi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Умножим соотношение (2.75) векторно на $\dot{\mathbf{r}}_{\pi 0}$, тогда

$$\mathbf{r}_\pi \times \dot{\mathbf{r}}_{\pi 0} = f\mathbf{r}_{\pi 0} \times \dot{\mathbf{r}}_{\pi 0}. \quad (2.76)$$

Заметим, что векторное произведение $\mathbf{r}_{\pi 0} \times \dot{\mathbf{r}}_{\pi 0}$ представляет собой интеграл площадей \mathbf{c} . Представим уравнение (2.76) в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_\pi \dot{y}_{\pi 0} - y_\pi \dot{x}_{\pi 0} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_z \end{bmatrix},$$

откуда

$$x_\pi \dot{y}_{\pi 0} - y_\pi \dot{x}_{\pi 0} = fc_z.$$

Но

$$c_z = c = \sqrt{\mu p}.$$

Тогда

$$f = \frac{x_{\pi} \dot{y}_{\pi 0} - y_{\pi} \dot{x}_{\pi 0}}{\sqrt{\mu p}}. \quad (2.77)$$

Выражение для g можно найти векторным умножением уравнения (2.75) на $\mathbf{r}_{\pi 0}$. Аналогично предыдущему будем иметь

$$g = \frac{y_{\pi} x_{\pi 0} - x_{\pi} y_{\pi 0}}{\sqrt{\mu p}}. \quad (2.78)$$

Ранее мы получали, что

$$\left. \begin{aligned} x_{\pi} &= a(\cos E - e), \\ y_{\pi} &= a\sqrt{1-e^2} \sin E. \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

Дифференцируя эти уравнения по времени, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{\pi} &= -a\dot{E} \sin E, \\ \dot{y}_{\pi} &= a\dot{E}\sqrt{1-e^2} \cos E. \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

Для вычисления \dot{E} воспользуемся уравнением Кеплера (2.62), производные от которого определяются соотношением

$$\dot{M} = \dot{E} - e\dot{E} \cos E = (1 - e \cos E)\dot{E}.$$

Но

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_{\pi}).$$

Тогда

$$\dot{M} = n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

где n – среднее движение спутника.

Таким образом

$$\dot{E} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{1}{(1 - e \cos E)},$$

или, с учетом того, что

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (2.81)$$

получим

$$\dot{E} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{a}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1}{r}.$$

С учетом последнего выражения, формулы для вычисления величин \dot{x}_π и \dot{y}_π примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_\pi &= -\frac{\sqrt{\mu a}}{r} \sin E, \\ \dot{y}_\pi &= \frac{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}}{r} \cos E = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \cos E. \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

Далее, подставляя значения x_π, y_π и \dot{x}_π, \dot{y}_π в формулу (2.77), получим

$$\begin{aligned} f &= \frac{a(\cos E - e) \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0} \cos E_0 + a \sin E \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0} \sin E_0}{\sqrt{\mu p}} = \\ &= \frac{a\sqrt{\mu p} [(\cos E - e) \cos E_0 + \sin E \sin E_0]}{r_0 \sqrt{\mu p}} = \\ &= \frac{a}{r_0} (-e \cos E_0 + \cos E \cos E_0 + \sin E \sin E_0). \end{aligned}$$

Согласно соотношению (2.81)

$$e \cos E_0 = 1 - \frac{r_0}{a}.$$

Следовательно,

$$f = 1 - \frac{a}{r_0} [1 - \cos(E - E_0)]. \quad (2.83)$$

По аналогии рассмотрим выражение для g . Имеем

$$\begin{aligned} g &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2} \sin E (\cos E_0 - e) - a^2 (\cos E - e) \sqrt{1-e^2} \sin E_0}{\sqrt{\mu p}} = \\ &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2} [\sin E (\cos E_0 - e) - (\cos E - e) \sin E_0]}{\sqrt{\mu p}} = \\ &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu p}} [\sin E \cos E_0 - \cos E \sin E_0 + e(\sin E_0 - \sin E)], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} g &= \frac{\sqrt{a^3 p}}{\sqrt{\mu p}} [\sin(E - E_0) + e \sin E_0 - e \sin E] = \\ &= \frac{1}{n} [\sin(E - E_0) + e \sin E_0 - e \sin E]. \end{aligned}$$

Из уравнения Кеплера имеем

$$\begin{aligned} e \sin E &= M - E = M_0 + n(t - t_0) - E; \\ e \sin E_0 &= M_0 - E_0. \end{aligned}$$

Тогда

$$g = (t - t_0) - \frac{1}{n} [(E - E_0) - \sin(E - E_0)]. \quad (2.84)$$

Производные от выражений (2.83) и (2.84) по времени имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{f} &= -\frac{\sqrt{\mu a}}{r_0 r} \sin \Delta E, \\ \dot{g} &= \frac{a}{r} [\cos \Delta E - e(\cos E_0 \cos \Delta E + \sin E_0 \sin \Delta E)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

Формулы (2.73) и (2.74) с замкнутыми выражениями (2.83), (2.84) и (2.85) находят широкое применение при предварительном определении орбит.

2.6. Возмущенное движение искусственного спутника Земли

Движение ИСЗ вокруг Земли только в первом приближении происходит в соответствии с законами Кеплера. На спутник, кроме центральной, действуют другие силы разной физической природы, поэтому движение ИСЗ отличается от невозмущенного (кеплерова) движения. Реальное движение спутника называется *возмущенным*, а его орбита – *возмущенной орбитой*. Разности между элементами возмущенной и невозмущенной орбиты в один и тот же момент времени называются *возмущениями*.

Возмущения в дифференциальных уравнениях возмущенного движения, выраженные в виде возмущающих ускорений, имеют вид

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}. \quad (2.86)$$

Решение этих уравнений в квадратурах для реальных условий возможно лишь для некоторых частных случаев. При этом используются различные модели движения, позволяющие добиться решения с достаточной точностью. Замена реальных сил на модельные силы, позволяющие интегрировать, приводит к понятию промежуточной орбиты. При изучении возмущенного движения используется принцип Лагранжа, согласно которому возмущенное движение спутника происходит по орбите, элементы которой изменяются со временем. Это означает, что в каждый момент времени возмущающая орбита совпадает с некоторой орбитой, имеющей с ней общий радиус-вектор \mathbf{r} и вектор скорости $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}$. Такие орбиты называют *оскулирующими (соприкасающимися) орбитами*, а элементы орбит – *оскулирующими элементами*.

Предположим, что уравнения (2.86) проинтегрированы каким-либо методом. Это означает, что получены выражения, позволяющие вычислить возмущенные значения составляющих скорости спутника

$\dot{\mathbf{r}}_G = (\dot{x}_G, \dot{y}_G, \dot{z}_G)^T$ и возмущенные значения его геоцентрических координат $\mathbf{r}_G = (x_G, y_G, z_G)^T$. Тогда для текущего момента времени можно написать:

$$\dot{\mathbf{r}}_G = \dot{\mathbf{r}} + \delta\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x} + \delta\dot{x} \\ \dot{y} + \delta\dot{y} \\ \dot{z} + \delta\dot{z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_G = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x + \delta x \\ y + \delta y \\ z + \delta z \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

Здесь $\dot{\mathbf{r}}$ и \mathbf{r} – векторы скорости и положения спутника, движущего по невозмущенной орбите; $\delta\dot{\mathbf{r}}$ и $\delta\mathbf{r}$ – возмущения векторов скорости и положения спутника на орбите соответственно.

В отличие от невозмущенного движения, элементы кеплеровой орбиты постоянными интегрирования здесь являться не могут, так как под действием возмущающих сил они сами непрерывно меняются с течением времени. Обозначив через \mathcal{E} любой из элементов орбиты, по аналогии с (2.87) можно записать:

$$\mathcal{E}_W = \mathcal{E}_0 + \delta\mathcal{E}. \quad (2.88)$$

Здесь \mathcal{E}_0 – невозмущенное (начальное) значение элемента орбиты в принятый начальный момент времени t_0 ; \mathcal{E}_W – возмущенное значение элемента в текущий момент t ; $\delta\mathcal{E}$ – величина возмущения элемента за промежуток времени $t - t_0$.

Возмущения элементов орбиты $\delta\mathcal{E}$ – функции, меняющиеся с течением времени гораздо медленнее, нежели возмущенные координаты и составляющие скорости. Поэтому в ряде случаев удобнее пользоваться возмущенными элементами орбиты. Для этого дифференциальные уравнения (2.86) методом вариаций произвольных постоянных преобразуются к шести дифференциальным уравнениям, определяющим изменения элементов орбиты под действием возмущающих сил:

$$\dot{\mathcal{E}} = F(t, \mathcal{E}), \quad (2.89)$$

где $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_6)^T$.

Таким образом, основной задачей теории возмущенного движения ИСЗ является по возможности более точное определение величин возмущений $\delta\dot{\mathbf{r}}, \delta\mathbf{r}$ или $\delta\mathcal{E}$ из интегрирования дифференциальных уравнений движения (2.31) или (2.34).

Наибольшие возмущения вызывают следующие факторы:

- отклонение реального гравитационного поля Земли от создаваемого телом, имеющим форму шара с радиальным распределением плотностей;
- притяжение Луны и Солнца;
- сопротивление атмосферой;
- световое давление;
- лунно-солнечные приливы;
- действие прецессии и нутации на земную ось;
- релятивистские эффекты и др.

Учет этих факторов необходим при существенном повышении точности теории и измерительной аппаратуры.

Возмущения орбит спутников разделяют соответственно их периодам на три группы: *вековые, долгопериодические и короткопериодические*.

Вековые возмущения в элементах орбиты увеличиваются линейно со временем, поэтому в течение нескольких недель они могут достичь значительной величины – это самые большие возмущения.

Долгопериодические возмущения имеют период от 100 до 200 суток.

Короткопериодические возмущения имеют периоды $P, \frac{1}{2}P, \frac{1}{3}P, \frac{1}{4}P, \dots$

Амплитуда короткопериодических возмущений редко превышает 70–100 м. Они значительно меньше, чем вековые и долгопериодические.

2.7. Уравнения возмущенного движения спутника в оскулирующих элементах орбиты

Как уже отмечалось, при движении по орбите на спутник действуют возмущающие силы. Дифференциальные уравнения возмущенного движения спутника имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{G}, \quad (2.90)$$

где $\mathbf{G} = [G_x, G_y, G_z]^T$ – вектор возмущающих ускорений, заданный в небесной системе координат. Силы, добавляемые к правым частям дифференциальных уравнений, определенным образом изменяют орбиту. Для расчета таких изменений целесообразно применять известный в небесной механике метод оскулирующих элементов. Элементы возмущенного движения являются функциями времени, поэтому можно составить систему дифференциальных уравнений шестого порядка для элементов

$$\frac{dE_i}{dt} = \dot{E}_i = F(\mathbf{E}, t), \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (2.91)$$

где в правых частях стоят выражения, зависящие от правых частей уравнений (2.90), а величины $\{E_i\}$ суть кеплеровы элементы движения, т. е. $\{p, e, \Omega, i, \omega, t_\pi\}$ или какая-либо другая система элементов, например $\{p, e, \Omega, i, \omega, v\}$. Получаемые при решении системы дифференциальных уравнений величины $E_i(t)$ являются функциями времени, определяющими некоторую фиктивную орбиту (оскулирующий эллипс).

Приступим к выводу дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов. Известно, что вектор \mathbf{C} кинетического момента (интеграл площадей) связан с наклоном орбиты i и долготой восходящего узла Ω следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \sin \Omega \sin i \\ -C \cos \Omega \sin i \\ C \cos i \end{bmatrix}, \quad (2.92)$$

где C_x, C_y, C_z – проекции вектора кинетического момента \mathbf{C} на координатные оси небесной системы координат.

Из механики известно, что производная кинетического момента по времени равна моменту равнодействующих всех сил, т. е.

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{r} \times \mathbf{G}. \quad (2.93)$$

Применив эту формулу к проекциям кинетического момента C_x, C_y, C_z , получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_x &= \dot{C} \sin \Omega \sin i + (C \cos \Omega \sin i) \dot{\Omega} + (C \sin \Omega \cos i) \dot{i}, \\ \dot{C}_y &= -\dot{C} \cos \Omega \sin i + (C \sin \Omega \sin i) \dot{\Omega} + (C \cos \Omega \cos i) \dot{i}, \\ \dot{C}_z &= \dot{C} \cos i - (C \sin i) \dot{i}, \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_x \\ \dot{C}_y \\ \dot{C}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \Omega \sin i & C \cos \Omega \sin i & C \sin \Omega \cos i \\ -\cos \Omega \sin i & C \sin \Omega \sin i & C \cos \Omega \cos i \\ \cos i & 0 & -C \sin i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{C} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix}. \quad (2.95)$$

Обозначим

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sin \Omega \sin i & C \cos \Omega \sin i & C \sin \Omega \cos i \\ -\cos \Omega \sin i & C \sin \Omega \sin i & C \cos \Omega \cos i \\ \cos i & 0 & -C \sin i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dot{C} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix},$$

тогда

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.96)$$

Рассмотрим положение \mathbf{r}_s спутника и возмущающие ускорения $\{S, T, W\}$ в подвижной орбитальной системе координат $\{\xi_1, \eta_1, \zeta_1\}$ (рис. 2.5), в которой ось ξ_1 направлена на спутник, ось ζ_1 перпендикулярна плоскости орбиты, ось η_1 лежит в плоскости орбиты и дополняет систему координат до правой. Здесь возмущающее ускорение S направлено по радиусу-вектору спутника; T лежит в плоскости орбиты перпендикулярно радиусу-вектору; W – перпендикулярно плоскости орбиты.

В принятой системе координат положение спутника на орбите \mathbf{r}_1 и вектор возмущающего ускорения \mathbf{G}_1 будут иметь вид

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} S \\ T \\ W \end{bmatrix},$$

а их векторное произведение определится вектором \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -rW \\ rT \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

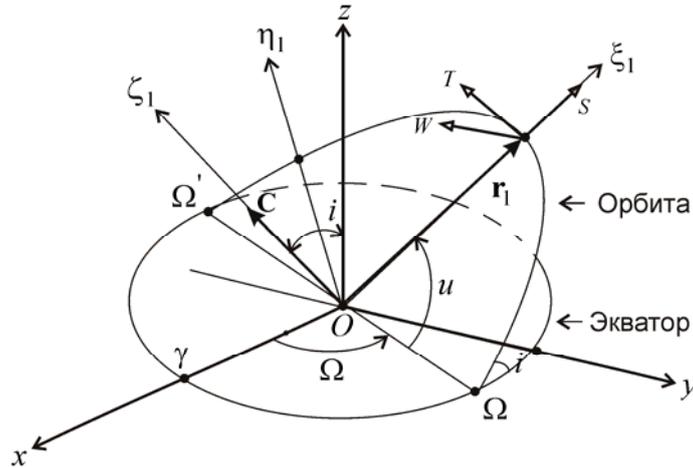


Рис. 2.5. Орбитальная подвижная система координат

Известно, что переход от подвижной орбитальной системы координат $\{\xi_1, \eta_1, \zeta_1\}$ к небесной $\{x, y, z\}$ осуществляется тремя матрицами вращения $\mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{P}_\zeta(-u_t)$. Имеем

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{P}_\zeta(-u_t)\mathbf{D}. \quad (2.98)$$

Или

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{D}_1,$$

где

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} rW \sin u \\ -rW \cos u \\ rT \end{bmatrix}. \quad (2.99)$$

Обозначим через \mathbf{P} произведение двух матриц $\mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)$, т. е.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega & \cos \Omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.101)$$

Умножим полученное выражение на матрицу \mathbf{P}^T . Получим

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}_1 = \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B},$$

где

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^T \mathbf{Q}. \quad (2.102)$$

В силу ортогональности матриц вращения произведение $\mathbf{P}^T \mathbf{P}$ равно единичной матрице \mathbf{E} . Поэтому

$$\mathbf{D}_1 = \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B}. \quad (2.103)$$

Произведение матриц $\mathbf{P}^T \mathbf{Q}$ дает:

$$\bar{p}_{11} = \cos \Omega \sin \Omega \sin i - \cos \Omega \sin \Omega \sin i = 0;$$

$$\bar{p}_{12} = C \cos^2 \Omega \sin i + C \sin^2 \Omega \sin i = C \sin i;$$

$$\bar{p}_{13} = C \cos \Omega \sin \Omega \cos i - C \cos \Omega \sin \Omega \cos i = 0;$$

$$\bar{p}_{21} = -\sin^2 \Omega \sin i \cos i - \cos^2 \Omega \sin i \cos i + \sin i \cos i = 0;$$

$$\bar{p}_{22} = -C \cos \Omega \sin \Omega \cos i \sin i + C \cos \Omega \sin \Omega \cos i \sin i = 0;$$

$$\bar{p}_{23} = -C \sin^2 \Omega \cos^2 i - C \cos^2 \Omega \cos^2 i - C \sin^2 i = -C;$$

$$\bar{p}_{31} = \sin^2 \Omega \sin^2 i + \cos^2 \Omega \sin^2 i + \cos^2 i = 1;$$

$$\bar{p}_{32} = C \cos \Omega \sin \Omega \sin^2 i - C \cos \Omega \sin \Omega \sin^2 i = 0;$$

$$\bar{p}_{33} = C \sin^2 \Omega \cos i \sin i + C \cos^2 \Omega \cos i \sin i - C \sin i \cos i = 0.$$

Таким образом

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & C \sin i & 0 \\ 0 & 0 & -C \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Раскроем выражение (2.102). Имеем

$$\begin{bmatrix} rW \sin u \\ -rW \cos u \\ rT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \sin i & 0 \\ 0 & 0 & -C \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{C} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \dot{C} &= rT, \\ \dot{\Omega} &= \frac{rW \sin u}{C \sin i}, \\ \dot{i} &= \frac{rW}{C} \cos u. \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

Известно, что $C = \sqrt{\mu p}$ как для невозмущенного, так и возмущенного движения, поэтому

$$\dot{C} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \dot{p} = rT. \quad (2.106)$$

Таким образом, уравнения (2.105) с учетом соотношения (2.106) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} rT, \\ \dot{\Omega} &= \frac{rW \sin u}{\sqrt{\mu p} \sin i}, \\ \dot{i} &= \frac{rW}{\sqrt{\mu p}} \cos u. \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

Для вычисления значений \dot{e} и $\dot{\nu}$ (скорости изменения эксцентриситета и истинной аномалии) воспользуемся формулами:

$$V_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu; \quad (2.108)$$

$$r(1 + e \cos \nu) = p. \quad (2.109)$$

Производные по времени от этих выражений имеют вид

$$\dot{r} = \dot{e} \sin \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} + e \cos \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} \dot{\nu} - \frac{e}{2} \sin \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\dot{p}}{p}; \quad (2.110)$$

$$\dot{r} \frac{p}{r} + \dot{e} r \cos \nu - \dot{\nu} r e \sin \nu = \dot{p},$$

или

$$e \sin \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{p}{r} + r \cos \nu \dot{e} - r e \sin \nu \dot{\nu} = \dot{p}. \quad (2.111)$$

Приравнивая тангенциальную составляющую V_n в возмущающем движении к величине $r\dot{\sigma}$, где $\dot{\sigma}$ – угловая скорость радиуса r , получаем

$$V_n = r\dot{\sigma} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \nu) = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{p}{r} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r}. \quad (2.112)$$

Откуда

$$\dot{\sigma} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}. \quad (2.113)$$

Учитывая, что уравнение движения спутника (2.90) в проекции на радиус-вектор имеет вид [35]

$$\ddot{r} - r\dot{\sigma}^2 = S - \frac{\mu}{r^2}, \quad (2.114)$$

после подстановки его в выражение (2.110) получим

$$\dot{e} \sin \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} + e \cos \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} \dot{\nu} - e \sin \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\dot{p}}{2p} - \frac{\mu p}{r^3} = S - \frac{\mu}{r^2}. \quad (2.115)$$

Используя соотношения (2.111), с учетом первого уравнения (2.107), можно написать

$$r e \sin \nu \dot{\nu} = e \sin \nu \frac{\sqrt{\mu p}}{r} + r \cos \nu \dot{e} - 2rT \sqrt{\frac{p}{\mu}},$$

откуда

$$\dot{\nu} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{\cos \nu}{e \sin \nu} \dot{e} - \frac{2T}{e \sin \nu} \sqrt{\frac{p}{\mu}}. \quad (2.116)$$

Подставим (2.116) в (2.115), получим

$$\dot{e} \sin \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} + e \cos \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{\cos \nu}{e \sin \nu} \dot{e} - \frac{2T}{e \sin \nu} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \right) - e \sin \nu \frac{rT}{p} - \frac{\mu p}{r^3} = S - \frac{\mu}{r^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{e} \sqrt{\frac{\mu}{p}} &= \sin \nu S - \sin \nu \frac{\mu}{r^2} + \sin \nu \frac{\mu p}{r^3} - e \sin \nu \cos \nu \frac{\mu}{r^2} + \cos \nu 2T + e \sin^2 \nu \frac{r}{p} T = \\ &= S \sin \nu + 2T \cos \nu - \frac{\mu}{r^2} \sin \nu + \frac{\mu p}{r^3} \sin \nu - e \frac{\mu}{r^2} \sin \nu \cos \nu + e \frac{r}{p} T (1 - \cos^2 \nu). \end{aligned}$$

Прибавим и отнимем к правой части полученного выражения величину $\frac{r}{p} T \cos \nu$. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{e} \sqrt{\frac{\mu}{p}} &= S \sin \nu + T \cos \nu + \frac{r}{p} T \cos \nu + e \frac{r}{p} T + \\ &+ \left(T \cos \nu - \frac{\mu}{r^2} \sin \nu + \frac{\mu p}{r^3} \sin \nu - e \frac{\mu}{r^2} \sin \nu \cos \nu - e \frac{r}{p} T \cos^2 \nu - \frac{r}{p} T \cos \nu \right). \end{aligned}$$

Покажем, что выражение, стоящее в круглых скобках, обращается в нуль

$$\begin{aligned}
 & T \cos v - \frac{\mu}{r^2} \sin v + \frac{\mu p}{r^3} \sin v - e \frac{\mu}{r^2} \sin v \cos v - e \frac{r}{p} T \cos^2 v - \frac{r}{p} T \cos v = \\
 & = T \cos v - \frac{r}{p} T \cos v (1 + e \cos v) + \frac{\mu p}{r^3} \sin v - \frac{\mu}{r^2} \sin v (1 + e \cos v) = \\
 & = T \cos v - \frac{r}{p} T \cos v \frac{p}{r} + \frac{\mu p}{r^3} \sin v - \frac{\mu}{r^2} \sin v \frac{p}{r} = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом

$$\dot{e} \sqrt{\frac{\mu}{p}} = S \sin v + T \cos v + \frac{r}{p} T \cos v + e \frac{r}{p} T.$$

Окончательное выражение для \dot{e} примет вид

$$\dot{e} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[S \sin v + \left(1 + \frac{r}{p} \right) T \cos v + e \frac{r}{p} T \right]. \quad (2.117)$$

Для вычисления величины \dot{v} подставим выражение (2.117) в формулу (2.116):

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{\cos v}{e \sin v} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[S \sin v + \left(1 + \frac{r}{p} \right) T \cos v + e \frac{r}{p} T \right] - \frac{2T}{e \sin v} \sqrt{\frac{p}{\mu}} = \\
 &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} S \frac{\cos v}{e} + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sqrt{\frac{p}{\mu}} T \frac{1 - \sin^2 v}{e \sin v} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r}{p} T \frac{\cos v}{\sin v} - \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2T}{e \sin v},
 \end{aligned}$$

откуда

$$\dot{v} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{S \cos v}{e} - \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{T \sin v}{e} + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{T}{e \sin v} + \frac{r}{p} T \frac{\cos v}{\sin v} - \frac{2T}{e \sin v} \right].$$

Заметим, что последние три слагаемых в сумме равны нулю:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{T}{e \sin v} + \frac{r}{p} T \frac{\cos v}{\sin v} - \frac{2T}{e \sin v} = \frac{T}{e \sin v} + \frac{r}{p} \frac{T}{e \sin v} + \frac{r}{p} T \frac{e \cos v}{e \sin v} - \frac{2T}{e \sin v} = \\ & = \frac{r}{p} \frac{T}{e \sin v} (1 + e \cos v) - \frac{T}{e \sin v} = \frac{r}{p} \frac{T}{e \sin v} \frac{p}{r} - \frac{T}{e \sin v} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\dot{v} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{S \cos v}{e} - \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin v}{e} T \right]. \quad (2.118)$$

Получим теперь формулу для расчета $\dot{\omega}$. В работе [35] показано, что угловая скорость $\dot{\sigma}$ радиуса-вектора \mathbf{r} в возмущающем движении состоит из двух слагаемых \dot{i} и $\dot{\Omega} \cos i$. Составляющая \dot{i} угловой скорости появляется вследствие движения спутника в плоскости орбиты (оскулирующего эллипса) без учета вращения самой плоскости. Вторая составляющая $\dot{\Omega} \cos i$ возникает из-за поворота самой плоскости орбиты вокруг оси вращения Земли.

Таким образом,

$$\dot{\sigma} = \dot{i} + \dot{\Omega} \cos i = \dot{\omega} + \dot{v} + \dot{\Omega} \cos i = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}, \quad (2.119)$$

поскольку $u = \omega + v$.

Из уравнения (2.119) следует, что

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{v} - \dot{\Omega} \cos i. \quad (2.120)$$

Используя (2.107) и (2.118), получаем

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{S \cos v}{e} - \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin v}{e} T \right] - \frac{rW}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} \cos i,$$

или окончательно

$$\dot{\omega} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{S \cos v}{e} + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin v}{e} T - W \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right]. \quad (2.121)$$

Для удобства использования выпишем все шесть уравнений в оскулирующих элементах вместе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} = \dot{p} &= 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} rT; \\ \frac{de}{dt} = \dot{e} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[S \sin v + \left(1 + \frac{r}{p}\right) T \cos v + e \frac{r}{p} T \right]; \\ \frac{d\Omega}{dt} = \dot{\Omega} &= \frac{rW}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i}; \\ \frac{di}{dt} = \dot{i} &= \frac{rW}{\sqrt{\mu p}} \cos u; \\ \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{S \cos v}{e} + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin v}{e} T - W \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right]; \\ \frac{dv}{dt} = \dot{v} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{S \cos v}{e} - \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin v}{e} T \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.122)$$

В заключение заметим, что координаты и скорости спутника в прямоугольной системе координат рассчитываются по тем же формулам, что и для невозмущенного движения, но значения элементов $\{p, e, \Omega, i, \omega, v\}$, входящих в эти формулы, должны соответствовать данному моменту времени.

2.8. Возмущения, вызываемые сжатием Земли

Обозначим через S, T, W проекции вектора возмущающего ускорения на оси вращающейся вместе со спутником системы координат, в которой ось S направлена по радиусу-вектору, ось T – по трансверсали,

а ось W – по нормали к плоскости орбиты. Ускорения S , T , W связаны с вектором возмущающих ускорений \mathbf{G} следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} S \\ T \\ W \end{bmatrix} = \mathbf{P}_z(u)\mathbf{P}_x(i)\mathbf{P}_z(\Omega) \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix}. \quad (2.123)$$

Возмущающие ускорения S , T , W , вызываемые сжатием Земли, представляются выражениями

$$S = -\frac{3\mu C_{20}a_e^2}{2r^4}(3\sin^2 u \sin^2 i - 1);$$

$$T = \frac{3\mu C_{20}a_e^2}{2r^4} \sin u \cos u \sin^2 i;$$

$$W = \frac{3\mu C_{20}a_e^2}{2r^4} \sin 2u \sin^2 i.$$

Здесь a_e – большая полуось земного эллипсоида; C_{20} – коэффициент второй зональной гармоники разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям; r – модуль радиуса-вектора спутника; u , i – аргумент широты и наклонение орбиты.

Отметим, что коэффициент C_{20} связан со сжатием Земли α_e , угловой скоростью вращения Земли ω_e и значением нормальной силы тяжести на экваторе γ_e следующим соотношением:

$$C_{20} = -\frac{2}{3}\alpha_e + \frac{\omega_e^2 a_e}{3\gamma_e}. \quad (2.124)$$

После интегрирования уравнения (2.86), с учетом соотношения (2.123) и исключения короткопериодических возмущений, имеем

$$\delta\Omega = \frac{3u}{2} C_{20} \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \cos i; \quad (2.125)$$

$$\delta\omega = -\frac{3u}{2} C_{20} \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right); \quad (2.126)$$

$$\delta M = -\frac{3u}{4} C_{20} \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \frac{3 \cos^2 i - 1}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad (2.127)$$

где p , e – невозмущенные значения фокального параметра и эксцентриситета орбиты.

Таким образом, сжатие Земли вызывает вековые возмущения в долготе Ω восходящего узла, аргументе перигея ω и начальном значении средней аномалии M .

2.9. Возмущения, вызываемые притяжением Луны и Солнца

Из-за притяжения спутника Луной и Солнцем в элементах орбиты ИСЗ возникают вековые, долгопериодические и короткопериодические возмущения. При этом возмущения, вызываемые Луной, примерно в 2,2 раза больше возмущений от притяжения Солнца. При высоте спутника в 2 000 км возмущения ускорения от Луны в 140 раз меньше, чем от аномалий силы тяжести, однако при высоте в 20 000 км эти возмущения уже в два раза больше.

При определении силы притяжения спутника Луной и Солнцем следует учитывать взаимные притяжения Земли, Луны и Солнца. Как уже отмечалось, согласно закону всемирного тяготения, вектор силы притяжения \mathbf{F} двумя материальными телами определяется из соотношения

$$\mathbf{F} = \frac{fMm}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2.128)$$

где f – гравитационная постоянная; M , m – массы притягивающего и притягиваемого тел; \mathbf{r} – вектор положения притягиваемой массы относительно притягивающей; r – расстояния между массами.

Рассмотрим притяжение ИСЗ Луной. Примем, что \mathbf{r} и \mathbf{r}_m есть векторы положения спутника и Луны соответственно в геоцентрической системе

координат. Тогда вектор возмущающего ускорения \mathbf{G}_m , вызываемого притяжением спутника Луной, определится выражением

$$\mathbf{G}_m = fM_m \left(\frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_m|^3} \right). \quad (2.129)$$

По аналогии, подобное выражение можно записать и для возмущающего ускорения \mathbf{G}_s , вызываемого притяжением Солнца:

$$\mathbf{G}_s = fM_s \left(\frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}_s|^3} \right). \quad (2.130)$$

Оценка влияния притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ показывает, что оно намного меньше, чем влияние сжатия Земли. Так, для спутников с высотой менее 2 000 км ускорение, вызываемое притяжением Луны и Солнца, не превышает: от Солнца $0,66 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$, от Луны $1,4 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$.

Кроме прямого гравитационного действия на спутник Луна и Солнце оказывают вторичные возмущения из-за приливных явлений, деформирующих уровенную поверхность геопотенциала.

2.10. Давление солнечной радиации

Давление прямой солнечной радиации оказывает возмущающее действие на ускорение спутника. При этом чем больше площадь поверхности ИСЗ и меньше его масса, тем больше возмущение в движении спутника. Ускорение \mathbf{G}_d , испытываемое спутником под влиянием давления прямой солнечной радиации, выражается формулой

$$\mathbf{G}_d = \frac{AS_0(1+k)}{mc} \frac{|\mathbf{r}_s|}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} \cos^2 \alpha, \quad (2.131)$$

где A – площадь поперечного сечения спутника; S_0 – среднее значение солнечной постоянной; k – коэффициент отражения поверхности спутника;

c – скорость света; α – угол падения солнечных лучей на поверхность спутника.

Процесс моделирования возмущений от солнечной радиации весьма трудоемкий, поскольку она изменяется непредсказуемо в течение времени, а коэффициент отражения не одинаков для различных участков поверхности спутника. Хотя масса спутника обычно хорошо известна, его неправильная форма не позволяет определять отношение массы и площади. Другая проблема – это моделирование полутени Земли и назначение теневой функции в зоне перехода от освещенности к тени.

2.11. Сопротивление атмосферы

Считается, что атмосфера вращается вместе с Землей и ее плотность уменьшается с высотой приближенно по экспоненциальному закону, однако вычисление ее для определения возмущающего ускорения является сложным вопросом. Приходится учитывать поправки за эллиптичность атмосферных слоев, временные вариации плотности (годовые, полугодовые), изменение солнечной активности, влияние магнитных бурь и др.

Для геодезических спутников используется следующая формула для учета возмущающего ускорения \mathbf{G}_A от сопротивления атмосферы:

$$\mathbf{G}_A = \frac{C_d}{2m} A \rho \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.132)$$

где C_d – безразмерный аэродинамический коэффициент лобового сопротивления, зависящий от формы и размеров спутника, который в среднем равен 2,2; A – площадь поперечного сечения спутника; ρ – плотность атмосферы.

Учет влияния сопротивления атмосферы особенно важен для спутников с орбитами на малой высоте. Фактор торможения атмосферы существенно сказывается на времени жизни низкого ИСЗ. Из-за сопротивления атмосферы ИСЗ теряет энергию, снижается, на высоте 110–120 км входит в плотные слои атмосферы и прекращает свое существование.

Вследствие трудностей учета влияния сопротивления атмосферы спутники для решения геодезических задач запускают на высоту более 1 000 км, где возмущение от сопротивления атмосферы уменьшается.

Вопросы для самоконтроля

1. Законы Кеплера.
2. Элементы орбиты ИСЗ.
3. Типы орбит.
4. Понятие невозмущенного движения ИСЗ.
5. Алгоритм определения координат и составляющих скорости ИСЗ через элементы орбиты.
6. Понятие возмущенного движения ИСЗ.
7. Алгоритм вычисления элементов невозмущенной (кеплеровой) орбиты.
8. Оскулирующая орбита.
9. Возмущения в движении ИСЗ.
10. Понятия о методах интегрирования уравнений возмущенного движения.

3. МЕТОДЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

3.1. Решение геодезических задач по наблюдениям искусственного спутника Земли

Существуют два основных метода использования ИСЗ в геодезии: *геометрический* и *динамический*.

В *геометрическом* методе осуществляется построение пространственных геодезических сетей с помощью синхронных (одновременных) наблюдений ИСЗ с исходных и определяемых пунктов земной поверхности, при которых точное знание законов движения спутника не обязательно, то есть ИСЗ используется как высокая визирная цель. Пусть векторы \mathbf{R}_A и \mathbf{R}_B определяют положение соответственно исходного (A) и определяемого (B) пунктов наблюдений в общеземной системе координат (X, Y, Z) , а векторы ρ_A и ρ_B в этой же системе координат – измеренные положения спутника (m) на орбите относительно точек наблюдений (рис. 3.1).

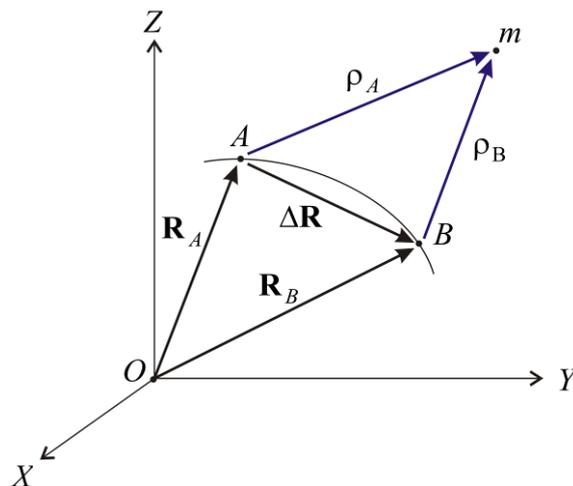


Рис. 3.1. Геометрический метод космической геодезии

Тогда уравнение, определяющее связь измеренных и определяемых величин, имеет вид

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A = \boldsymbol{\rho}_A - \boldsymbol{\rho}_B. \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что если известны координаты одного пункта, то по результатам измерений векторов $\boldsymbol{\rho}_A$ и $\boldsymbol{\rho}_B$ можно вычислить координаты второго в системе исходного пункта, при этом не нужно знать теории движения ИСЗ.

Динамический метод космической геодезии дает возможность определить координаты пунктов в абсолютной системе, отнесенной к центру масс, параметры гравитационного поля Земли, а также уточнить элементы орбиты спутника. Частным случаем динамического метода является *орбитальный* метод, когда совместно определяются только элементы орбиты и координаты пунктов наблюдений, при этом требуется знание адекватной модели движения ИСЗ.

В общем виде геоцентрический радиус-вектор \mathbf{r} ИСЗ представляет собой сложную функцию элементов орбиты \mathbf{E} , параметров гравитационного поля Земли \mathbf{G} и времени t :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{E}, \mathbf{G}, t). \quad (3.2)$$

Если измеренными величинами в общем случае можно считать топоцентрический радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$, то его связь с геоцентрическим положением спутника \mathbf{r} определится известным выражением

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}(\mathbf{E}, \mathbf{G}, t) - \mathbf{R} = \mathbf{r}(\mathbf{E}_0 + \Delta \mathbf{E}, \mathbf{G}_0 + \Delta \mathbf{G}, t) - (\mathbf{R}_0 + \Delta \mathbf{R}). \quad (3.3)$$

Здесь \mathbf{R} – геоцентрический радиус-вектор пункта измерений на поверхности Земли; $\mathbf{E}_0, \mathbf{G}_0, \mathbf{R}_0$ – приближенные значения соответствующих величин.

После линеаризации (3.3), полагая безошибочными моменты регистрации времени t , имеем систему уравнений поправок измерений

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{E}} \Delta \mathbf{E} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{G}} \Delta \mathbf{G} - \frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\mathbf{R}} \Delta \mathbf{R} + (\boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{V}, \quad (3.4)$$

где ΔE , ΔG , ΔR – поправки к приближенным элементам орбиты, параметрам гравитационного поля и координатам пунктов наблюдений соответственно;

ρ_0, ρ_i – векторы приближенных и измеренных величин;

V – вектор поправок к результатам измерений.

Из решения системы уравнений (3.4) по способу наименьших квадратов находятся искомые поправки ΔE , ΔG , ΔR .

3.2. Методы наблюдений искусственного спутника Земли

Методы наблюдений искусственных спутников Земли можно разделить на две группы: *оптические* и *радиоэлектронные*.

К *оптическим* наблюдениям относятся визуальные, фотографические, фотоэлектрические и лазерные наблюдения. Точность визуальных наблюдений недостаточна для использования их в геодезических целях. Фотографические наблюдения ИСЗ имели широкое распространение в 1960-70 гг. При этом наблюдения спутника привязывались к шкале времени, а его положение на снимке – к опорным звездам в системе некоторого фундаментального каталога. Однако турбулентные процессы, происходящие в атмосфере, не позволяли получить из фотографических наблюдений направления с точностью, превышающей 0,4–0,5", поэтому в оптическом диапазоне стали выполняться только лазерные измерения дальности.

Интерференционные, доплеровские и радиодальномерные измерения относят ко второй группе – *радиоэлектронной*.

Наибольшее распространение в геодезической практике из различного рода интерференционных систем получила длиннобазисная радиоинтерферометрия. Здесь в качестве радиоисточника используются удаленные от Земли на сотни световых лет космические радиоисточники – квазары.

В доплеровском методе измеряют разность частоты, принимаемой на станции, и стандарта частоты. Так, если передатчик на борту ИСЗ излучает сигнал с частотой колебания f , то наземный приемник регистрирует излучение с частотой f_E , смещенной на величину

$$\Delta f_D = f_E - f = -\frac{f V_r}{c}, \quad (3.5)$$

где c – скорость распространения радиоволн; V_r – радиальная скорость спутника. При выполнении доплеровских измерений производится подсчет числа n периодов доплеровской частоты за промежуток времени между излучением t_1 и приемом t_2 сигнала. Тогда

$$\Delta f_D = -\frac{n}{t_2 - t_1},$$

и на основании (3.7) имеем

$$V_r = \frac{cn}{f(t_2 - t_1)}. \quad (3.6)$$

Доплеровские системы позволяют получать радиальную составляющую топоцентрической скорости ИСЗ с погрешностью не большей, чем 0,01 м/с.

При выполнении радиодальномерных измерений импульсный передатчик спутника принимает посылаемый наземной станцией сигнал, модулированный по фазе, и ретранслирует его как фазовую модуляцию с измененной несущей частотой. На наземной станции фазометром измеряют фазовый сдвиг модуляции и по нему вычисляют расстояние.

К классу радиодальномерных измерений относится спутниковое нивелирование. Спутниковое нивелирование (спутниковая альтиметрия) используется с целью определения высот геоида, получения информации о топографии Мирового океана, определения (уточнения) положения центра масс Земли и в других случаях. Метод спутникового нивелирования состоит в определении расстояний от спутника до подстилающей поверхности (вода, суша) по измеренным разностям времени между моментами послышки и возврата вертикально направленного радиоимпульса.

3.3. Современные методы космической геодезии

К современным методам космической геодезии относятся (рис. 3.2):
– лазерные наблюдения спутников и Луны;

- спутниковая альтиметрия;
- радиоинтерферометрия со сверхдлинными базами (РСДБ);
- доплеровские наблюдения (система DORIS);
- спутниковая градиентометрия и системы «спутник – спутник»;
- глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС – ГЛОНАСС, GPS).

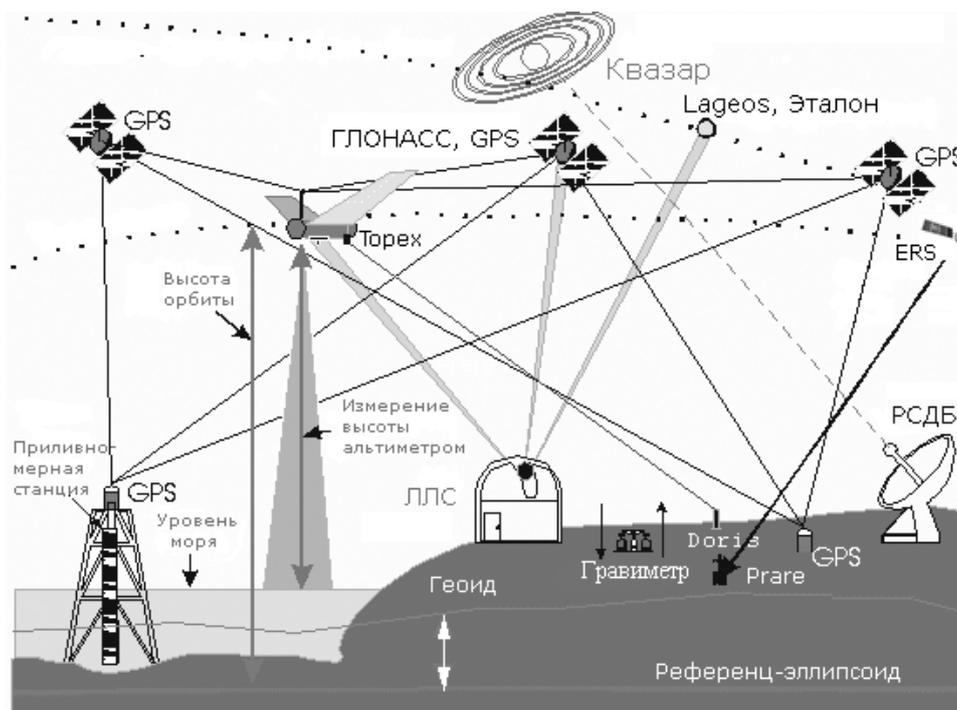


Рис. 3.2. Современные методы космической геодезии

Лазерная локация искусственных спутников Земли. Лазерная локация искусственных спутников Земли – это измерение точных расстояний между лазерным телескопом (дальномером), расположенным на поверхности Земли, и отражателями на поверхности пролетающего спутника. С наземного пункта посылаются ультракороткие импульсы в направлении на ИСЗ. Зондирующий импульс запускает счетчик интервалов времени. Затем на этом же пункте регистрируется отраженный от спутника сигнал. Отраженный импульс регистрируется высокочувствительным детектором (отраженный импульс очень слабый, иногда даже может содержать всего один фотон). Вернувшийся сигнал останавливает счетчик, и записывается

время прохождения сигнала τ «туда» и «обратно», по которому можно вычислить двойные дальности (так называемые *two-way ranges*). Технические аспекты работы спутниковых лазерных дальномеров подробно рассмотрены в работе [11].

Поскольку скорость распространения света известна, то можно вычислить пройденное светом расстояние. В силу влияния тропосферы, релятивистских и других эффектов необходимо внести соответствующие поправки в измеренные дальности. В общем виде уравнение наблюдений лазерной локации имеет вид

$$\rho = c \cdot \tau / 2 + \Delta\rho_{tropo} + \Delta\rho_{centr} + \Delta\rho_{kalibr} + \Delta\rho_{rel} + \Delta\rho_{br}, \quad (3.7)$$

где τ – время прохождения лазерного импульса прямо и обратно;

$\Delta\rho_{centr}$ – поправка за несовпадение центра масс спутника, к которому относятся получаемые из интегрирования координаты, и отражателей (данная величина зависит от наблюдаемого спутника);

$\Delta\rho_{kalibr}$ – поправка за калибровку дальномера;

$c = 299\,792\,458$ м/с – скорость света [12];

$\Delta\rho_{tropo}$ – поправка за влияние тропосферы;

$\Delta\rho_{rel}$ – поправка за релятивистские эффекты (задержка Шапиро);

$\Delta\rho_{rb}$ – поправка за систематическую погрешность лазерного дальномера (так называемая *range bias*), которая является уникальной для каждой комбинации «пункт – спутник».

Скорость света не является постоянной при прохождении луча через атмосферу, и это вносит наибольшую ошибку в измерения. Тем не менее, эта погрешность для волн оптического диапазона значительно меньше, чем для волн радиодиапазона.

Первые лазерные наблюдения ИСЗ выполнены в 1965 г. (ИСЗ BEACON-B), их точность составила несколько метров [13]. Наиболее активное развитие лазерная локация ИСЗ получила в 1970-90-х гг. В 1975–1976 гг. осуществлен запуск геодезических спутников правильной сферической формы (Starlette и LAGEOS-1 (Laser GEODynamics Satellite)), специально разработанных для лазерной локации, что позволило определять орбиты

этих спутников сначала с дециметровой, а затем и с сантиметровой точностью. К концу 1980-х гг. по лазерным наблюдениям ИСЗ получены значительные результаты, превосходящие по точности другие измерительные средства. К середине 1990-х гг. точность измерения дальностей достигает субсантиметровой точности [13]. На орбиту выводятся новые спутники, предназначенные для лазерной локации: AJISAI (1986 г.), Эталон-1 и Эталон-2 (1989 г.), LAGEOS-2 (1992 г.), Stella (1993 г.).

Для координации работ международной сети станций лазерной локации спутников с целью выполнения геофизических исследований и установления высокоточной земной системы отсчета Международной Ассоциацией Геодезии (International Association of Geodesy – IAG) в 1998 г. образована Международная Служба Лазерной Локации (International Laser Ranging Service – ILRS) [14]. Международная Служба Лазерной Локации насчитывает 52 станции, из них 8 расположены на территории Российской Федерации (рис. 3.3) [15].

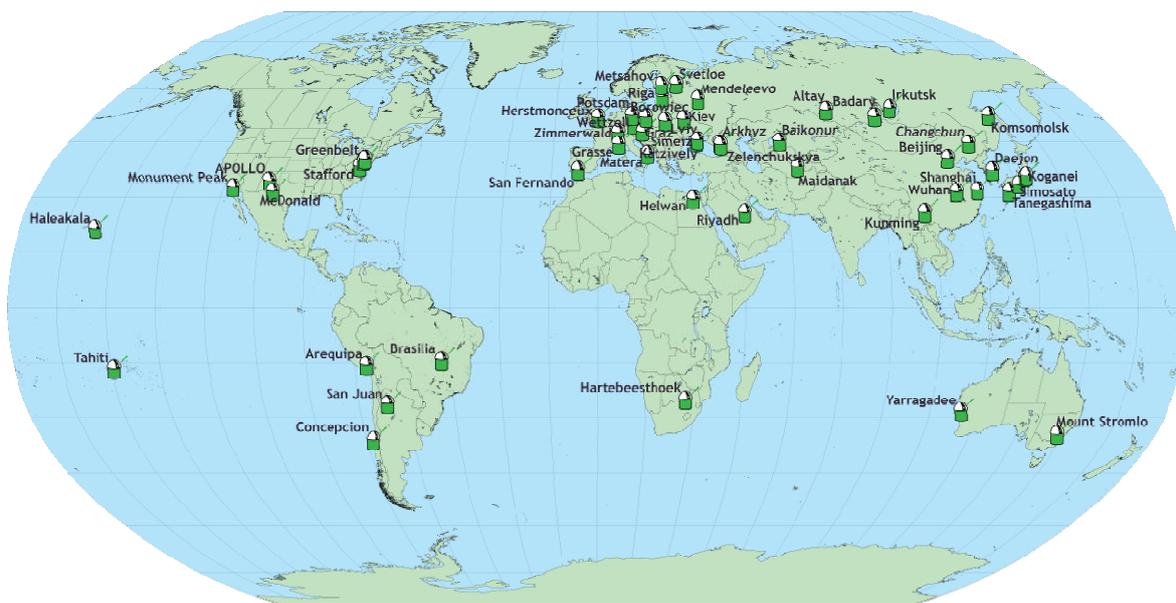


Рис. 3.3. Станции Международной Службы Лазерной Локации [15]

В настоящее время станциями ILRS наблюдается около 30 спутников, оборудованных лазерными отражателями. Среди них не только спутники, непосредственно предназначенные для решения задач геодезии, геофизи-

ки и геодинамики, но и научно-исследовательские спутники, для которых нужны определения точных элементов орбит. Средствами Службы производятся мониторинг и контроль орбит космических градиентометрических комплексов и систем «спутник – спутник» (GOCE, GRACE, CHAMP), выводимых на орбиту спутников навигационных систем ГЛОНАСС, Galileo, QZSS, Compass, а также различных спутников дистанционного зондирования Земли. В настоящий момент орбитальная группировка «лазерных геодезических» ИСЗ (т. е. спутников сферической формы, специально разработанных для использования в лазерных наблюдениях) насчитывает 9 спутников (Starlette, LAGEOS-1, LAGEOS-2, AJISAI, Эталон-1, Эталон-2, Stella, Larets, LARES, БЛИЦ) с различными высотами и углами наклона орбит.

Отечественные спутники Эталон-1 и Эталон-2 выведены на орбиту в 1989 г. и имеют самую большую высоту орбиты (почти 20 000 км). Одна из основных целей запуска этих спутников – изучение негравитационных эффектов, воздействующих на спутники системы ГЛОНАСС [16]. В то же время эти спутники используются, благодаря стабильности их орбиты, для определения вариаций продолжительности суток.

Искусственный спутник БЛИЦ, запущенный в 2009 г., был разработан в ОАО «Научно-производственная корпорация "Системы прецизионного приборостроения"» для исследования возможностей применения линзы Люнеберга в качестве отражателя для лазерной локации ИСЗ с субмиллиметровой точностью измерения дальностей [17]. Спутник состоял из внутреннего стеклянного шара (радиусом 53,52 мм) и внешней стеклянной оболочки (радиусом 85,11 мм), включающей две равные полусферы, одна из которых прозрачна, а другая имела алюминиевое отражающее покрытие. Обычно в качестве отражающих элементов применяются уголковые отражатели, расположенные равномерно по всему спутнику (например, Эталон-1) или собранные в панели (ГЛОНАСС и GPS). Все спутники, в конструкции которых использованы уголковые отражатели, имеют ошибку цели, то есть смещение центра отражения лазерного импульса относительно центра масс спутника в зависимости от угла прихода лазерного излучения на отражатель, и ненулевую сигнатуру (удлинение отраженного импульса и искажение его формы). Эти факторы препятствуют достижению

субмиллиметровой точности измерения дальностей. ИСЗ БЛИЦ имел практически нулевую ошибку цели и нулевую сигнатуру. Поэтому прецизионная привязка центра оптического отражения к центру масс спутника осуществлялась с погрешностью менее 100 мкм во всех условиях космического полета при произвольных рабочих углах прихода излучения на отражатель. ИСЗ БЛИЦ прекратил свое существование 22 января 2013 г. после столкновения с фрагментом космического мусора [18].

Первая в России наземная оптико-лазерная система, где установлено два телескопа траекторных измерений, расположена на Алтае. Дальность действия лазерного луча – от 500 до 40 000 км. Точность координат обнаруженного космического объекта – до 1 см. И целью их будут спутники, расположенные на более высоких орбитах. Единственным ближайшим аналогом алтайскому центру слежения будет американский центр спутникового слежения на острове Мауи (Гавайи), где стоит несколько телескопов, самый большой из которых имеет диаметр 3,5 м.

Наиболее существенным недостатком метода лазерной локации спутников является его зависимость от погоды, поскольку для оптического диапазона электромагнитного излучения облачный покров является непреодолимым препятствием.

Радарные системы не зависят от погоды; используемые длины волн – сантиметрового и дециметрового диапазона. Время распространения значительно зависит от влияния рефракции радиоволн в атмосфере. Различают однонаправленный и двунаправленный способы измерений расстояний. Лучшие современные стационарные лазерные дальномерные системы обеспечивают среднюю квадратическую погрешность одного выстрела около 10 мм, а для нормального места – 2-3 мм. Эти характеристики относятся к спутникам, удаленным примерно на 6 000 км (Lageos, Эталон). Этот уровень точности невозможно выдерживать для более далеких спутников из-за слабого сигнала, а для более близких спутников – из-за локальных гравитационных воздействий.

Спутниковая альтиметрия. Спутниковая альтиметрия – это метод измерения расстояния между спутником и поверхностью океана с помощью альтиметра. При этом пучок света или монохроматический луч отражается от поверхности Земли и по времени его прохождения вычисля-

ется расстояние. Спутниковая альтиметрия – первый способ измерений «спутник – земля». Для этого используется бортовой радиовысотомер – радарный альтиметр [19]. Базовых станций на Земле не требуется.

Радиовысотомер осуществляет радиолокационное зондирование земной поверхности по нормали. Отраженный сигнал принимается на борту спутника. Высота спутника над морской поверхностью определяется на основе соотношения:

$$h = 1/2 c \Delta t, \quad (3.8)$$

где c – скорость света;

Δt – задержка времени приема отраженного сигнала.

Если высота орбиты спутника над эллипсоидом h известна, то появляется принципиальная возможность получения высот геоида над отсчетным эллипсоидом:

$$\zeta = H - h - \delta h_g - (\delta h_T + \delta h_A + \delta h_B + \delta h_H), \quad (3.9)$$

где ζ – высота геоида над отсчетным эллипсоидом;

H – геодезическая высота спутника над отсчетным эллипсоидом;

h – измеренная альтиметром высота ИСЗ над морем определяется по формуле (3.8);

δh_g – отклонение морской топографической поверхности от геоида;

δh_T – приливная поправка;

δh_A – влияние атмосферной рефракции;

δh_B – изменение морской топографической поверхности, обусловленное атмосферным давлением;

δh_H – влияние инструментальной погрешности.

К настоящему времени реализовано более 10 национальных и международных проектов в области спутниковой альтиметрии, в том числе отечественный проект ГЕО-ИК.

Метод спутниковой альтиметрии требует точного знания орбитального положения ИСЗ, в первую очередь – его радиальной составляющей.

Спутники GEOS-3 (1975 г.) и SEASAT-1 (1978 г.) – первые спутники, которые несли радарные альтиметры и интенсивно использовались для

геодезических целей. В настоящее время используются системы спутниковой альтиметрии TOPEX-POSEIDON, GFO, JASON-1, JASON-2, ENVISAT, ГЕО-ИК-2, обеспечившие значительный вклад в геодезию, геофизику и океанографию. Первый лазерный альтиметр запущен на спутники ICESAT. В стадии подготовки спутниковая альтиметрия с лазерной системой (ICESat-2 планируется запустить в 2018 г.) [20].

Радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой. Исследование радиоизлучения от «фиксированных» источников, настолько удаленных, что их собственное движение не может наблюдаться с Земли, позволяет получить базисные линии (расстояния между станциями) очень большой длины и не требует при этом измерений элементов их орбиты. Метод радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой позволяет измерить базисную линию длиной в тысячи километров с точностью до нескольких сантиметров.

Принцип метода основан на том, что сигналы от квазаров σ на антенны радиотелескопов, находящихся друг от друга на большом расстоянии, поступают не одновременно, а с некоторым запаздыванием τ , обусловленным разностью расстояний от базисных пунктов до квазара (рис. 3.4).

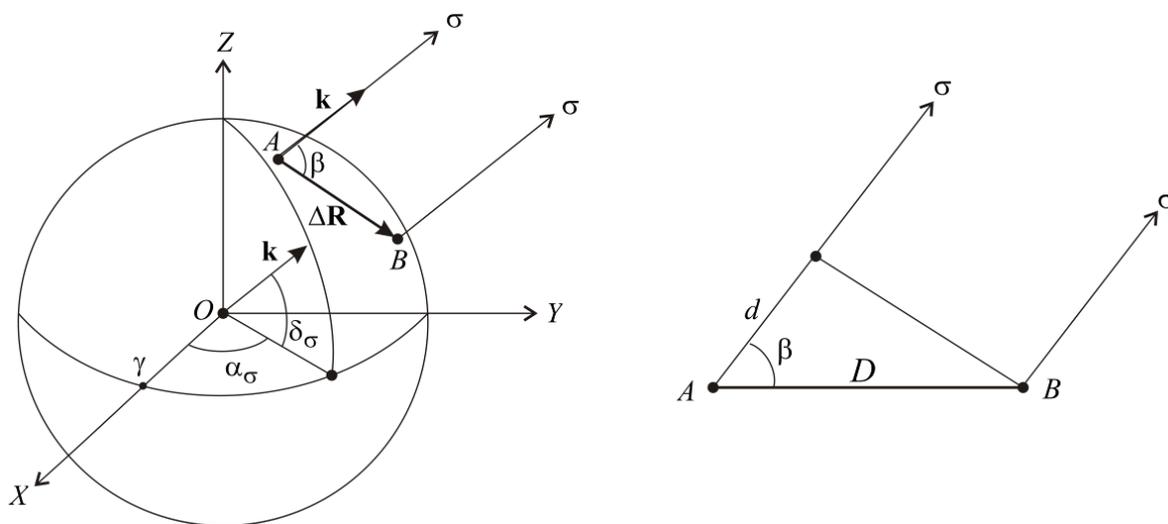


Рис. 3.4. Геометрия длиннобазисной радиоинтерферометрии

Положим $d = \tau c$ – разность расстояний от базовых пунктов A и B до квазара σ ; c – скорость распространения электромагнитных волн; D – ба-

зисная линия; β – угол между базисной линией и направлением на квазар. Тогда, согласно рис. 3.4 имеем

$$c\tau = D \cos\beta. \quad (3.10)$$

Направление на квазар определяется единичным вектором \mathbf{k} , компоненты которого в общеземной системе координат имеют значения

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \cos\delta_\sigma \cos(\alpha_\sigma - S_0) \\ \cos\delta_\sigma \sin(\alpha_\sigma - S_0) \\ \sin\delta_\sigma \end{bmatrix},$$

где $\alpha_\sigma, \delta_\sigma$ – прямое восхождение и склонение квазара; S_0 – истинное звездное время на меридиане Гринвича.

Скалярное произведение вектора положения $\Delta\mathbf{R}$ станции A относительно станции B и вектора \mathbf{k} дает

$$\Delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{k} = |\Delta\mathbf{R}| \cos\beta = D \cos\beta,$$

или, с учетом выражения (2.16):

$$\begin{aligned} c\tau = \Delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{k} = \\ = \Delta X \cos\delta_\sigma \cos(\alpha_\sigma - S_0) + \Delta Y \cos\delta_\sigma \sin(\alpha_\sigma - S_0) + \Delta Z \sin\delta_\sigma. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) является уравнением связи измеряемой величины τ , координат $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$ пункта B относительно пункта A , прямым восхождением α_σ и склонением δ_σ квазара. Следует заметить, что для радиоточников (квазаров) погрешности в прямых восхождениях составляют $\pm 0,000\ 35''$, а в склонениях – $\pm 0,000\ 40''$.

РСДБ позволяет очень жестко определить ориентировку опорной геодезической сети по отношению к небесной сфере. Однако необходимо учитывать погрешности, источниками которых являются движение полюсов, дрейф материков и изменения параметров вращения Земли.

Система «КВАЗАР». Технология радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами широко используется в международных и национальных

проектах. Постоянно действующий радиоинтерферометрический комплекс «КВАЗАР» является в настоящее время базовой системой фундаментального координатно-временного обеспечения России. Созданы три радиоастрономические обсерватории комплекса: в поселке Светлое Ленинградской области, вблизи станицы Зеленчукская Карачаево-Черкесской Республики, в урочище Бадары Республики Бурятия. В результате этого сформировалась РСДБ-сеть с базами $2\ 015 \times 4\ 282 \times 4\ 405$ км. Первичная обработка и анализ данных ведется Центром корреляционной обработки РАН в г. Санкт-Петербурге. Все обсерватории комплекса спроектированы одинаковым образом и в качестве основного элемента включают в себя полноповоротный прецизионный радиотелескоп нового поколения с диаметром зеркала 32 м, оснащенный высокочувствительными криорациометрами в диапазоне волн от 1,35 до 21 см. Существенными элементами каждой обсерватории являются: система частотно-временной синхронизации, состоящая из водородных стандартов времени и частоты с нестабильностью 3×10^{-15} при времени осреднения 1 000 с, хранящих размеры единицы времени (1 с) с частотой (1 Гц); аппаратура привязки шкал времени по сигналам спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС и GPS с точностью не хуже 50 нс; аппаратура контроля и измерения параметров высокостабильных сигналов. Все обсерватории комплекса «КВАЗАР» оснащены ГЛОНАСС/GPS-приемниками, в обсерватории «Бадары» установлена и успешно функционирует система DORIS, а обсерватория «Зеленчукская» недавно оснащена квантово-оптической системой «Сажень-ТМ». Современная аппаратура комплекса обеспечивает получение высокоточных результатов, что подтверждается стабильной повторяемостью и сравнением их с помощью различных средств (РСДБ, GPS/ГЛОНАСС и SLR). По своим параметрам комплекс «КВАЗАР» входит в число первоклассных РСДБ-станций, которых сейчас в мире не более десяти. Всего в международных программах участвуют более 30 станций, расположенных на всех континентах.

Основное назначение комплекса обсерваторий – получение информации о параметрах вращения Земли, координатах пунктов наблюдения, координатах небесного полюса и координатах квазаров. Радиоинтерферометрическая сеть «КВАЗАР» позволяет обеспечить независимость Рос-

сийской Федерации от данных Международных служб (IERS, IVS, IGS, ILRS, IAU) при определении параметров вращения Земли, а также обеспечить этими данными гражданских и военных потребителей. Только РСДБ-метод позволяет определить абсолютную привязку шкалы Всемирного времени UT1, что необходимо для координатно-временного обеспечения космической навигационной системы ГЛОНАСС.

DORIS. DORIS (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite) – система спутникового определения параметров орбиты и точного позиционирования по доплеровским спутниковым измерениям – разработана Национальным центром космических исследований в сотрудничестве с Национальным географическим институтом (Франция). DORIS является одним из четырех космических геодезических методов, участвующих в работе глобальной геодезической системы наблюдений (GGOS Global Geodetic Observing System) [21]. В 2003 г. создана Международная Служба International Doris Service (IDS) [22].

Основной целью IDS является предоставление услуг для поддержки геодезической и геофизической научно-исследовательской деятельности через DORIS наблюдательных данных, полученных с достаточной точностью, чтобы удовлетворить целям широкого спектра применений и экспериментов. Из этих данных следующие продукты являются производными:

- координаты и скорости станций слежения;
- геоцентр и масштаб наземных координат;
- высокая точность эфемерид спутников DORIS;
- параметры вращения Земли.

Принцип позиционирования, используемый в DORIS, основан на эффекте Доплера.

Система DORIS включает бортовое оборудование, сеть маяков, оборудованных автономными источниками питания, и Центр контроля и обработки данных в Тулузе (Франция). В системе DORIS измеряется скорость изменения расстояний до спутника по сигналам от плотной сети наземных радиомаяков.

Глобальная наземная сеть состоит из 58 радиомаяков, размещенных в нескольких десятках стран (рис. 3.5), более 20 из них используются в других точных навигационных системах, что позволяет проводить взаимную

Система DORIS устанавливалась на спутниках SPOT 2, SPOT 3, TOPEX/POSEIDON, ENVISAT, SPOT 4, SPOT 5. Измерения, записанные на борту и переданные на наземный сегмент, служат для привязки данных ДЗЗ, совершенствования модели внешних сил, действующих на КА, и определения плотности электронов в ионосфере. За время эксплуатации системы накоплен архив данных, позволяющих определять фактическое положение наземных радиомаяков и учитывать динамику смещения их координат.

Полученные данные обрабатываются на Земле, обеспечивая сантиметровую точность определения орбит. Точность определения положения КА вдоль орбиты составляет 1 см, по радиусу-вектору – 5 см [24].

Спутниковая градиентометрия и системы «спутник – спутник».

Технологические достижения в области космических исследований позволили разработать концепции определения гравитационного поля Земли с высоким разрешением [25]:

- наблюдения «спутник – спутник» (измерения расстояний и скорости изменения расстояний между спутниками);
- спутниковая градиентометрия (измерение разности ускорений силы тяжести внутри спутника).

Система «спутник – спутник» (SST – satellite to-satellite). Технология «спутник – спутник» состоит в измерении расстояний и скорости изменения расстояний между спутниками. При этом предусматривается два варианта взаимного расположения спутников: высокий спутник и низкий спутник и два спутника, расположенных на близких орбитах на расстоянии 50–300 км друг от друга (рис. 3.6).

В системе «спутник – спутник» в режиме «высокий – низкий» околоземная орбита низколетящего спутника (НОО) непрерывно отслеживается спутниками, снабженными глобальными системами местоопределения типа GPS/ГЛОНАСС или Galileo. На спутнике НОО устанавливают акселерометр. Негравитационные силы, действующие на низкий спутник, измеряются акселерометрами. Спутник ЛЕО является зондом в гравитационном поле Земли, который можно точно и непрерывно наблюдать. Наблюдаемые 3D ускорения соответствуют гравитационным ускорениям. Тем самым измеряются трехмерные возмущающие ускорения, вызванные

гравитационным полем Земли. Эти ускорения соответствуют первым производным гравитационного потенциала W . Поле силы тяжести выводится путем обращения полученной информации относительно орбиты низкого спутника.

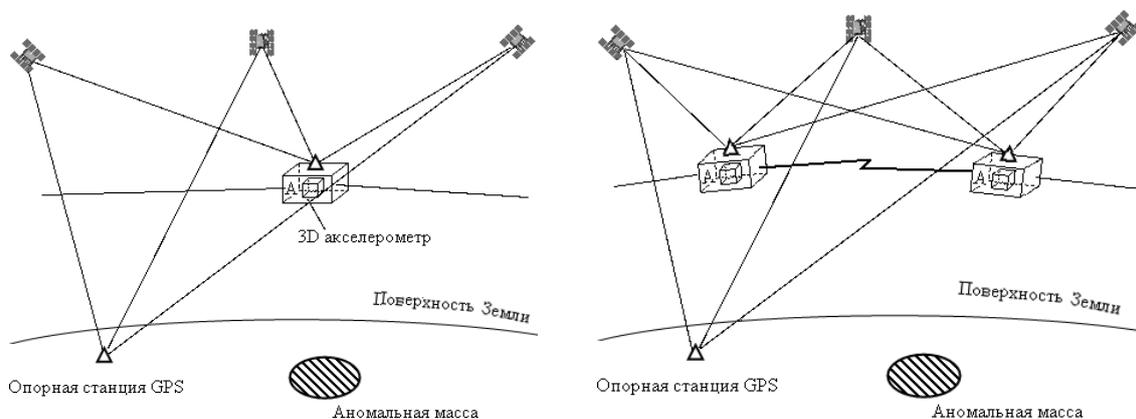


Рис. 3.6. Разные концепции, посвященные гравитационным полевым миссиям: SST-HL, SST-LL, SGG [25]

Система «спутник – спутник» в режиме «высокий – низкий» впервые была применена в программе полета на Луну «Аполлон» для контроля с Земли лунного модуля. Последующий анализ этих данных обнаружил сильные аномалии в гравитационном поле Луны (масконы).

Система «спутник – спутник» SST-HL, из которых один высокий, другой низкий, реализована в проекте CHAMP (Challenging Mini-Satellite Payload for Geophysical and Application). Реализация данного проекта осуществлена Научно-исследовательским центром Потсдама (Geo Forschung Zentrum Potsdam) (Германия).

Спутник CHAMP запущен 15 июля 2000 г. с космодрома Плесецк (Россия). Масса спутника – 522 кг, длина – 8,33 м, период обращения – 93,61 мин. Наклонение $87,3^\circ$, высота в начале – 450 км, в конце – 300 км.

Оборудование: 16-канальный GPS-приемник с многоантенной системой, трехосный акселерометр, лазерные отражатели для локации с Земли, магнетометр, цифровой счетчик дрейфа ионов.

Предусматривает следующие цели:

– изучение глобального поля силы тяжести или конкретнее – уточнение длинноволновой части статического поля и ее временных вариаций (вызванных, например, перераспределениями атмосферных масс, океанической циркуляцией, изменением уровня моря за счет таяния полярного льда);

– изучение глобального магнитного поля или конкретнее – уточнение основного магнитного поля и магнитного поля земной коры и их пространственно-временных вариаций;

– профилирование ионосферы и тропосферы или более определенно – уточнение атмосферы с точки зрения ее температуры, содержания водяных паров и электронной структуры по данным о преломлении сигналов GPS.

Первоначально ожидалось, что CHAMP проработает от четырех до пяти лет, но благодаря своей устойчивой конструкции даже при низкой траектории полета миссия просуществовала в два раза дольше. Проект был использован для измерения гравиметрического поля Земли, магнитного поля Земли и для оптического зондирования атмосферы.

Для обеих концепций КА на низких орбитах являются сенсорами гравитационного поля Земли. Для измерения относительных скоростей могут использоваться однонаправленные и двунаправленные межспутниковые системы. Нерегулярные изменения этой скорости содержат гравитационную информацию. Чем ниже орбита спутника, тем более отчетливой и детальной становится информация.

В системе «спутник – спутник» в режиме «низкий – низкий» два спутника двигаются по одной и той же орбите друг за другом, но отделены несколькими сотнями километров (около 220 км). Расстояния между ними и скорости изменения этих расстояний измеряются с предельно возможной точностью (до 10 микрон!). Орбита каждого спутника подвержена индивидуальному влиянию возмущающих ускорений, которые соответствуют первым производным гравитационного потенциала. Информация от обоих спутников дает разности ускорений. Кроме того, положения спутников НОО определяются другими спутниками с GPS на борту. Так что режим «высокий – низкий» также, по существу, имеет место. Эффект

действия на спутник негравитационных сил, например, за счет аэродинамического сопротивления, должен быть компенсирован или измерен акселерометром. Спутники собирают информацию, выполняя тщательно выверенные маневры на орбите. В то время как один спутник покачивается и медленно перемещается в неровном гравитационном поле Земли, второй, следующий на расстоянии 220 км, измеряет колебания в разделяющем их расстоянии вплоть до микрона. Именно изменения расстояния и описывают природу и масштабы гравитационных аномалий, над которыми пролетают спутники.

Система «спутник – спутник» SST-LL, в которой оба спутника низкие, реализована в проекте GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment). GRACE – совместный проект Американского национального управления по авиации и космонавтике (NASA) и Немецкого центра авиационных и космических полетов (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, DLR).

Основными целями проекта являются:

- определение глобального гравитационного поля Земли с высокой разрешающей способностью;
- изучение вариации силы тяжести во времени;
- изучение с помощью GPS-измерений явлений преломления в ионосфере и тропосфере путем детального определения электронного содержания.

Спутники запущены 17 марта 2002 г. с космодрома Плесецк (Россия). Деятельность миссии GRACE основана на работе двух абсолютно идентичных спутников, находящихся на расстоянии 220 км друг от друга, на полярной орбите высотой около 500 км над Землей. При пролете над гравитационными аномалиями это расстояние изменяется, поскольку спутники сильнее или слабее притягиваются Землей. Например, если летящий впереди спутник находится над районом с более высокой гравитацией, то его «притянет» к Земле немного сильнее, чем другой аппарат. И вот это расстояние, которое отражает изменение в силе притяжения над данным участком земной поверхности, может быть измерено. На спутниках установлены микроволновые дальнометры с точностью измерений вплоть до одного микрометра. Именно высокая точность измерения расстояния ме-

жду спутниками позволяет улавливать малейшие изменения в силе притяжения [26].

Оборудование: высокостабильный генератор частоты, обслуживающий дальномерную систему KBR, GPS-приемник, цифровая звездная камера, уголковые отражатели для лазерной локации с Земли.

Спутниковая градиентометрия (SGG). Для реализации принципа спутниковой градиентометрии были разработаны градиентометры различного типа: комбинации акселерометров, криогенные градиентометры, градиентометры ротационного типа.

Спутниковая градиентометрическая аппаратура не связана с Землей, и поэтому измеряет одну или несколько компонент тензора вторых производных потенциала силы притяжения $V(x, y, z)$ в осях (x, y, z) , связанных со спутником:

$$\begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Если полный тензор измерен на орбите, то гравитационное ускорение \vec{F} в точке P получается путем интегрирования по пути PP_0 :

$$\text{grad}V = \vec{F} = \vec{F}_0 + \int_{t_0}^t V \dot{r} dt, \quad (3.13)$$

где \vec{F}_0 – ускорение в начальной точке P_0 в момент t_0 . Для вычисления $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ необходимо знать путь $r = r(t)$. Высокие требования к точности градиентометрических измерений распространяются и на точность определения координат спутника.

17 марта 2009 г. с российского космодрома Плесецк стартовала ракета-носитель «Рокот» с европейским спутником GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer – «Исследователь гравитационного поля и установившихся океанских течений») на борту. Аппарат GOCE – совместный проект многолетней работы исследователей и инженеров из

45 европейских компаний (Европейское космическое агентство) – предназначен для исследования гравитационного поля Земли. Для этого на спутнике установлен градиометр, который будет измерять гравитационное поле с высочайшей точностью. Точность измерений обеспечивают шесть необычайно чувствительных акселерометров, способных почувствовать отклонение в силе притяжения в одну десятитриллионную от нормального уровня. Помимо градиометра, GOCE оснащен навигационным прибором, принимающим сигналы GPS для точного позиционирования аппарата над поверхностью Земли, а лазерный отражатель позволит с высокой точностью отслеживать движение спутника при помощи наземных лазеров (рис. 3.7). Управление GOCE осуществляется из Центра управления в немецком городе Дармштадте.

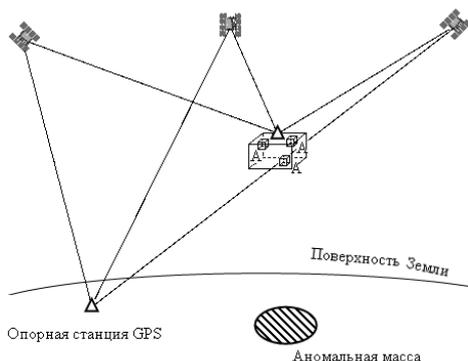


Рис. 3.7. Спутниковая градиентометрия с трехосным градиентометром

Цель проекта GOCE – исследование гравитационного поля и стационарной циркуляции Мирового океана:

- измерить аномалии гравитационного поля с точностью порядка 1 мГал;

- измерить форму земного геоида с точностью 1-2 см.

Масса спутника – 1 052 кг (с учетом массы ксенона (40 кг), используемого в качестве топлива). Орбита – низкая квазикруговая околоземная гелиосинхронная орбита на границе света и тени. Наклонение – $96,7^\circ$, высота орбиты – 255–285,4 км. Эксплуатационный ресурс – 20 месяцев.

Изготовитель ракеты-носителя – Государственный космический научно-производственный центр имени М. В. Хруничева (г. Москва, РФ).

По сравнению с режимом «низкий – низкий» системы «спутник – спутник» с большим базисом между двумя спутниками НОО в случае спутниковой градиентометрии базисное расстояние между двумя акселерометрами стремится к нулю. Это достигается размещением обоих акселерометров на одном и том же спутнике. Таким образом, спутниковая градиентометрия представляет собой измерение разностей ускорения в трех пространственных взаимно ортогональных направлениях шестью акселерометрами (по два на каждой из трех осей), установленными на одном и том же спутнике. Измеренный сигнал есть разность гравитационного ускорения спутника, где гравитационный сигнал является результатом притяжения.

Стрелообразная форма спутника, а также его «плавники» помогают спутнику сохранять ориентацию и уменьшают торможение в верхней атмосфере, которое довольно значительно на высоте его орбиты – около 255 км. Низкая орбита спутника и высокая точность акселерометров в 10^{-12} м/с^2 позволила улучшить точность определения геоида до 1-2 см при пространственном разрешении полуволны ондуляции геоида порядка 100 км ($1 \times 1^\circ$). Для компенсации атмосферного торможения и других негравитационных воздействий на спутнике установлен непрерывно работающий ионный двигатель, использующий для создания импульса ионизированные атомы ксенона [27].

В ближайшие годы планируется реализация градиентометрического проекта на низких орбитах (160–180 км) с использованием градиентометров с чувствительностью 10^{-4} Э (при времени осреднения 1–1 000 с). Этот проект позволит решить широкий круг важнейших задач: выбор наиболее реального механизма горообразования, понимание динамики ядра Земли, определение механических свойств земной коры и ее динамики, построение региональных геологических моделей для оценки минеральных ресурсов, изучение океанических циркуляций, улучшение гравитационных моделей для повышения точности траекторных и ГНСС-измерений. Данные градиентометрии, дополняя и контролируя результаты морских и наземных гравиметрических измерений, а также данные спутниковой

альтиметрии, позволят устранить систематические погрешности, присущие каждому отдельному методу.

Задачи, решаемые современными методами космической геодезии.

Использование современных методов космической геодезии позволило значительно повысить точность реализаций земной и небесной систем координат и оценок параметров вращения Земли, получить наблюдательный материал для проверки изменений геодинамических параметров, осуществлять изучение и мониторинг процессов, происходящих в тропосфере и ионосфере Земли, изучать движение литосферных плит и т. п.

Каждый из методов решает определенный круг задач.

РСДБ является единственным инструментом для установления небесной системы координат (ICRF) и параметров перехода к земной системе (ITRF), позволяет непосредственно определять параметры нутации и поправки ко Всемирному времени. Радиointерферометрия со сверхдлинными базами позволяет с одновременными наблюдениями небольшого количества глобально расположенных станций оценить все параметры вращения Земли и получить реализацию небесной системы координат, однако этот метод не позволяет получить положения геоцентра. Особенности этого метода измерений является то, что он всепогоден. К существенным недостаткам стоит отнести высокую стоимость телескопов и значительные инструментальные ошибки ввиду массивности конструкций. Кроме того, координаты станций определяются не относительно геоцентра, а относительно некоторого выбранного начала.

Спутниковые методы (ГНСС, DORIS и SLR) имеют похожий круг решаемых задач в силу того, что все они основываются на орбитах ИСЗ, однако наблюдения выполняются в разных диапазонах – радио- и оптическом.

Метод ГНСС получил наиболее широкое распространение благодаря своим очевидным достоинствам: сравнительно низкая стоимость наземной аппаратуры, всепогодность, высокая частота наблюдений. Причем получение результатов возможно в реальном времени. Все спутники системы ГЛОНАСС оборудованы лазерными отражателями.

Основное применение DORIS – высокоточное определение орбит спутников, оснащенных альтиметрической аппаратурой для изучения по-

верхности океанов. При наличии нескольких таких спутников на околоземных орбитах появилась возможность использовать эту систему для определения координат станций-маяков, положения геоцентра и вариаций продолжительности суток. Данный метод также является всепогодным. Кроме того, для реализации метода не требуются специальные конструкции космического аппарата.

Круг задач, решаемых с использованием лазерной локации спутников, чрезвычайно широк – он охватывает все задачи космической геодезии. Кроме того, это единственный метод измерений, позволяющий непосредственно определять координаты геоцентра (исходное начало общеземной системы координат) [28].

К достоинствам данного метода относятся [28]:

- система оптическая, поэтому не зависит от ошибок измерения запаздывания сигнала при прохождении атмосферы. При этом поправки за рефракцию могут быть учтены с точностью до долей сантиметра;

- широкий набор наблюдаемых ИСЗ;

- высокая точность измерений расстояний (0,5–2,0 см);

- получение результатов измерений дальности до спутника практически в реальном времени;

- наличие результатов измерений в банках данных, начиная с 1975 г., что позволяет изучать некоторые параметры на продолжительном временном интервале;

- определение координат геоцентра и геоцентрических координат станций;

- контроль точности определения орбит ИСЗ с использованием радиотехнических методов в силу различной физической природы.

К достоинствам спутниковой градиентометрии и системы «спутник – спутник» следует отнести их высокую чувствительность к малым изменениям в гравитационном поле Земли, что позволяет определять его тонкую структуру. Малые изменения уровня Мирового океана, объема ледниковых масс и глобального водного цикла отражаются на структуре гравитационного поля планеты и его изменениях со временем. Преимущества этих методов очевидны:

- непрерывность измерений, независимость от погодных условий;

– высокоточное определение орбит в реальном времени по наблюдениям ГНСС;

– чувствительность к высокочастотным составляющим геопотенциала.

К недостаткам данных методов следует отнести погрешности определения низкочастотной составляющей гравитационного поля, затруднения в определении коэффициента при второй зональной гармонике. Указанные космические измерительные средства не могут дать такой продолжительный ряд наблюдений, как SLR, что делает невозможным изучение долгопериодических изменений в коэффициентах гравитационного поля.

Каждый из рассматриваемых методов имеет свои систематические погрешности, обусловленные методикой проведения наблюдений, инструментальными погрешностями, а также программным обеспечением первичной и вторичной обработки наблюдений.

Систематические погрешности можно частично устранить с помощью сочетания наблюдений различных методов в единую систему и получения общего решения. Для проведения наблюдений методами космической геодезии с помощью двух и более высокоточных измерительных систем создаются пункты коллокации. Пункты коллокации предназначаются для повышения точности реализации общеземной геоцентрической системы координат, распространяемой с использованием ГНСС [29].

Преимущества современных методов космической геодезии раскрываются в полной мере при условии получения совместных решений по результатам одновременных наблюдений нескольких методов [30].

3.4. Глобальные системы спутникового позиционирования

Бурное развитие космическая геодезия получила с совершенствованием глобальных систем позиционирования, позволяющих эффективно решать традиционные и новые задачи геодезии [31, 32]. В начале 1980-х гг. появились спутниковые радионавигационные системы (СРНС) – американская GPS и советская ГЛОНАСС. Каждая из этих СРНС при полном развертывании состоит из 24 спутников, движущихся на почти круговых орбитах с высотой около 20 000 км. Спутники GPS распределены в шести, а спутники ГЛОНАСС – в трех орбитальных плоскостях, развернутых че-

рез 60° и через 120° по долготе восходящего узла и с наклоном орбиты 55 и 65° соответственно. Период обращения спутников составляет примерно 12 часов. Орбиты расположены таким образом, что в любое время над любой точкой земной поверхности видно «созвездие» не менее чем из четырех космических аппаратов. На борту каждого спутника имеются атомные эталоны частоты и времени; аппаратура для передачи и приема радиосигналов; бортовые вычислительные средства, предназначенные для хранения и обработки данных, полученных от наземных центров управления, и разнообразное вспомогательное оборудование. Спутники непрерывно передают сигналы, содержащие информацию об их положении и точном времени, а также дальномерные коды, позволяющие измерять расстояние.

Определение координат пользователя СРНС производится с помощью специальных спутниковых приемников. Каждый приемник может производить измерения либо независимо от других приемников, либо синхронно с другими приемниками. В первом случае, называемом *абсолютным методом*, достигается точность однократного определения координат порядка 1–15 м. Более высокую точность можно получить при одновременных наблюдениях спутников несколькими приемниками. При таком методе измерений один из приемников обычно располагается в пункте с известными координатами. Тогда положение остальных приемников можно определить относительно первого приемника с точностью несколько миллиметров. Этот метод получил название *относительного метода*.

Методы ГЛОНАСС/GPS измерений можно разделить на *статические* и *кинематические*. При статических измерениях все приемники находятся на пунктах в неподвижном состоянии. Продолжительность наблюдений составляет от пяти минут до нескольких часов и даже суток, в зависимости от требуемой точности и расстояний между пунктами. При кинематических измерениях один из приемников находится постоянно на опорном пункте, а второй приемник (мобильный) находится в движении. Точность кинематических наблюдений немного ниже, чем в статике (обычно 2-3 см на линию до 10 км).

В основе определения координат спутникового приемника лежит четырехлучевая линейная засечка. Роль опорных пунктов выполняют

космические аппараты (не менее четырех), координаты которых известны в любой момент времени. При помощи земной и спутниковой аппаратуры измеряются расстояния $S_{i,A}$ до ИСЗ. Аналитическое решение заключается в решении системы уравнений

$$S_{i,A}^2 = (x_i - X_A)^2 + (y_i - Y_A)^2 + (z_i - Z_A)^2, \quad (3.14)$$

где X_A, Y_A, Z_A – искомые координаты приемника; x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3, 4, \dots$) – известные координаты спутников, отнесенные к определенному моменту времени.

3.5. Роль спутниковых методов в геодезии

Первые искусственные спутники Земли применялись в геодезии только как высоко поднятые визирные цели. Развитие динамического метода космической геодезии, когда спутник стал носителем координат, позволило решать геодезические задачи комплексно – определять координаты станций наблюдений, параметры гравитационного поля Земли и многое другое. В настоящее время с высокой точностью определены фундаментальные геодезические постоянные, определяющие геодезическую отсчетную систему. Основные задачи координатно-временного обеспечения решаются при использовании современных быстро развивающихся космических технологий: радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой, лазерной локации ИСЗ, глобальных систем позиционирования, доплеровских систем. Эти технологии используются для решения таких задач, как установление небесной и земной опорных систем координат; определение параметров ориентации этих систем – постоянный мониторинг вращательного движения Земли. К параметрам ориентации Земли (ПОЗ) относят координаты полюса, Всемирное время, прецессию и нутацию. Международная служба вращения Земли публикует данные о ПОЗ в отчетах, месячных и еженедельных бюллетенях.

Особая роль отводится космической геодезии в развитии государственной геодезической сети [33]. Дальнейшее развитие государственной геодезической сети с использованием глобальных систем позиционирования

начато в 1999 г. Сеть, как и прежде, строится от общего к частному. Она включает в себя геодезические построения различных классов точности:

- фундаментальную астрономо-геодезическую сеть (ФАГС);
- высокоточную геодезическую сеть (ВГС);
- спутниковую геодезическую сеть 1-го класса (СГС-1);
- астрономо-геодезическую сеть 1-го и 2-го классов;
- геодезические сети сгущения 3-го и 4-го классов.

Сеть ФАГС создается с целью долгосрочного поддержания высокоточной трехмерной геоцентрической системы координат и включает в себя постоянно действующие пункты и обсерватории для наблюдения за ИСЗ и другими космическими объектами; периодически определяемые пункты, наблюдения на которых планируется повторять через интервал не более 10 лет. Пункты ФАГС равномерно располагаются на территории страны с расстоянием между смежными точками 650–1 000 км. На пунктах ФАГС измеряется абсолютное значение силы тяжести. Пространственное положение пунктов здесь определяется методами космической геодезии в геоцентрической системе координат. Средняя квадратическая погрешность определения положения центра масс Земли составляет 10–15 см, а средняя квадратическая погрешность взаимного положения пунктов ФАГС должна быть не более 2 см по плановому положению и 3 см по высоте с учетом скорости их изменения во времени.

Пункты ВГС опираются на пункты ФАГС и удалены один от другого на 150–300 км. Основные функции ВГС состоят в дальнейшем распространении на всю территорию России геоцентрической системы координат и уточнении параметров взаимного ориентирования геоцентрической и референцной систем координат. Средняя квадратическая погрешность определения планового положения пунктов ВГС не должна превышать $3 \text{ мм} + 5 \cdot 10^{-8} D$ (D – расстояние между пунктами в мм) и $5 \text{ мм} + 7 \cdot 10^{-8} D$ по геодезической высоте.

Основная функция СГС-1 состоит в обеспечении оптимальных условий для реализации точностных и оперативных возможностей спутниковой аппаратуры при переводе геодезического обеспечения территории России на спутниковые методы определения координат. Пункты СГС-1 проектируются в наиболее удобных для использования местах с хорошими

условиями наблюдений, со средними расстояниями между смежными пунктами около 25–35 км. При этом предусматривается максимально возможное совмещение пунктов сети с существующими грунтовыми реперами для исключения дорогостоящих работ по закладыванию центров. Средняя квадратическая погрешность определения положения пунктов СГС-1 относительно ближайших пунктов ФАГС и ВГС не должна превышать 1-2 см в районах с сейсмической активностью 7 и более баллов и 2-3 см в остальных районах страны.

3.6. Геодинамические исследования методами космической геодезии

С развитием новых средств изучения фигуры Земли и ее гравитационного поля все большее значение приобретает кинематический аспект геодезии – определение изменений положений точек земной поверхности и параметров гравитационного поля Земли во времени. Появился новый раздел в науке о Земле, лежащий на стыке геодезии, геофизики и астрономии, занимающийся проблемами изучения изменений пространственного положения точек и гравитационного поля Земли во времени и их интерпретаций и получивший название *геодинамики*.

Динамика Земли проявляется в движениях полюса и неравномерности ее вращения. Новые возможности в изучении движения полюсов открывают доплеровские и лазерные наблюдения ИСЗ, лазерная локация Луны, длиннобазисная радиоинтерферометрия.

Для объективной интерпретации изменений точек земной поверхности привлекаются различные современные теории: тектоники плит, упругих деформаций, приливов и вращения Земли и др.

В последние десятилетия благодаря значительному повышению точности измерительной техники, используемой для определения параметров движения, ИСЗ, методы космической геодезии стали широко применяться для изучения глобальных и региональных геодинамических процессов и движения Земли как планеты. Важнейшим вкладом космической геодезии в глобальную тектонику стало подтверждение достоверности движений литосферных плит. Движение крупных плит достаточно стабильно на по-

верхности сфероида и происходит со средней скоростью 50 мм/год. Локальные тектонические движения вблизи границ плит характеризуются большим вертикальным сдвигом.

Принципиальное отличие результатов, полученных по наблюдениям ИСЗ, от данных наземных гравиметрических и астрономических наблюдений состоит в том, что они не связаны с отвесной линией и не подвергаются влиянию особенностей внутреннего строения Земли. Поэтому совместный анализ спутниковых наблюдений, гравиметрических и астрономических данных дает возможность получать новые научные результаты и количественно оценить механические деформации Земли.

Вопросы для самоконтроля

1. Спутники, используемые для решения геодезических задач.
2. Классификация методов наблюдений ИСЗ.
3. Радиотехнические методы: доплеровские наблюдения, измерения дальностей, использование интерферометров.
4. Геометрический метод космической геодезии.
5. Фундаментальное уравнение космической геодезии.
6. Динамический метод космической геодезии.
7. Построение Мировой геодезической сети.
8. Уточнение фундаментальных геодезических постоянных.
9. Орбитальный метод космической геодезии.
10. Современные методы космической геодезии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие «Космическая геодезия» включает в себя основные разделы рабочей программы дисциплины и соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования программы бакалавриата по направлению подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование.

Изучение космической геодезии позволит сформировать у обучающихся компетенции, необходимые для профессиональной деятельности по получению измерительной пространственной информации о поверхности и физических полях и объектах Земли, околоземного и космического пространства.

Методы космической геодезии позволят осуществить координатно-временную привязку объектов, явлений и процессов на поверхности Земли и в окружающем космическом пространстве и организовать и осуществить работы по сбору, хранению и распространению геопространственных данных как на территории Российской Федерации в целом, так и на территории отдельных ее регионов с целью развития их инфраструктуры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антонович К. М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии : в 2 т. Т. 1 : монография. – М. : Картгеоцентр; Новосибирск : Наука, 2005. – 334 с.
2. Курошев Г. Д. Космическая геодезия и глобальные системы позиционирования : учеб. пособие. – СПб. : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2011. – 182 с.
3. Крылов В. И., Буй Йен Тинь. Международные системы отсчета: Современное состояние // Труды международной науч.-техн. конф., посвященной 225-летию МИИГАиК. Геодезия. – М. : МИИГАиК, 2004. – С. 187–195.
4. Телеганов Н. А., Тетерин Г. Н. Метод и системы координат в геодезии : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2008. – 143 с.
5. Космическая геодезия : учебник для вузов / В. Н. Баранов, Е. Г. Бойко, И. И. Краснорылов и др. – М. : Недра, 1986. – 407 с.
6. Об установлении единых государственных систем координат [Электронный ресурс] : постановление Правительства Российской Федерации от 28 июля 2000 года № 586. – Режим доступа : <http://docs.cntd.ru/document/901765804>.
7. Об использовании уточненной версии государственной геоцентрической системы координат «Параметры Земли 1990 года» [Электронный ресурс] : распоряжение Правительства Российской Федерации от 20 июня 2007 года № 797-р. – Режим доступа : http://www.glonassgsm.ru/zakon_13.html.
8. О единых государственных системах координат [Электронный ресурс] : постановление Правительства Российской Федерации № 1463 от 28 декабря 2012 года. – Режим доступа : <http://www.gosman.ru/electron?news=28306.9>.
9. Параметры Земли 1990 года. Справочный документ. Военно-топографическое управление генерального штаба вооруженных сил Российской Федерации. – М., 2014. – 52 с.

10. Об утверждении общеземной геоцентрической системы координат «Параметры Земли 1990» : приказ министра обороны Российской Федерации от 15 января 2014 г. № 11.

11. Degnan J. Millimeter Accuracy Satellite Laser Ranging: A review / Smith D. E., Turcotte D. L. (eds.) // Contributions of Space Geodesy to Geodynamics. – 1993. – Vol. 25. – P. 133–162.

12. IERS Conventions 2010 [Электронный ресурс] / Petit G., Luzum B. (eds.). – Режим доступа : <http://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn36.html>.

13. Seeber G. Satellite Geodesy. – 2-nd edition. – Berlin, New York : Walter de Gruyter, 2003. – 589 p.

14. Degnan J. J., Bosworth J. M., Pearlman M. R. The International Laser Ranging Service // Advances in Space Research. – 2002. – Vol. 30, No. 2. – P. 135–143.

15. Международная служба лазерной локации [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://ilrs.gsfc.nasa.gov/network/stations/active/index.html>.

16. Mironov N. A. ETALON-1, -2 Center of Mass Correction and Array Reflectivity [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/e/etalon-1-2>.

17. Vasiliev V., Shargorodsky V., Parkhomenko N. BLITS: The first autonomous zero-signature satellite in orbit // The 17th ILRS Workshop proceedings, 2011. – P. 188–190.

18. Назаренко А. И. Моделирование космического мусора. – М. : ИКИ РАН, 2013. – 216 с.

19. Лебедев С. А., Костяной А. Г. Спутниковая альтиметрия Каспийского моря. – М. : Море. – 366 с.

20. NASA [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://icesat.gsfc.nasa.gov/>.

21. Willis P. The International DORIS Service, Toward maturity, in DORIS // Advances in Space Research, 2010. – Vol. 45, No. 12. – P. 1408–1420.

22. Международная служба DORIS [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://ids.cls.fr/html/site_map.html.

23. DORIS [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://ids-doris.org/images/documents/report/AWG201403/IDSAWG1403-Saunier-Network>Status.pdf>.

24. Гансвинд И. Н. Измерение времени. Глобальные навигационные спутниковые системы [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/gansvind_izmerenie.pdf.

25. Галазин В. Ф., Македонский Е. Л., Зуева А. Н. Опыт создания планетарных моделей гравитационного поля Земли с помощью ГЕО-ИК // Геодезия и картография. – 1993. – № 11. – С. 24–27.

26. Бровар В. М. Гравитационное поле в задачах инженерной геодезии. – М. : Недра, 1983. – 112 с.

27. Торге В. Гравиметрия. – М. : Мир, 1999. – 429 с.

28. Эбауэр К. В. Высокоточное определение динамических параметров Земли с использованием данных лазерной локации околоземных спутников [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.sai.msu.ru/dissovet/%D0%AD%D0%B1%D0%B0%D1%83%D1%8D%D1%80_%D0%90%D0%B2%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B5%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82.pdf.

29. ГОСТ Р 56411-2015. Глобальная навигационная спутниковая система. Методы и технологии выполнения геодезических работ. Общие требования к пунктам колокации измерительных систем. – М. : Стандартинформ, 2015. – 11 с.

30. Литвин Н. А. Алгоритм получения комбинированного решения по результатам наблюдений различных методов космической геодезии // Новейшие достижения геодезии, геоинформатики и землеустройства – европейский опыт. – 2006. – № 2. – С. 54–58.

31. Генике А. А., Побединский Г. Г. Глобальная спутниковая система определения местоположения GPS и ее применение в геодезии. – М. : Картоцентр; Геодезиздат, 1999. – 272 с.

32. Серапинас Б. Б. Введение в ГЛОНАСС и GPS измерения : учеб. пособие. – Ижевск : Удм. гос. ун-т, 1999. – 93 с.

33. Основные положения о государственной геодезической сети Российской Федерации. – М., 2004. – 28 с.

34. Эскобал П. Методы определения орбит. – М. : Мир, 1970. – 472 с.

35. Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли / М. К. Тихонравов, И. К. Бажинов, О. В. Гурко и др. – М. : Машиностроение, 1974. – 332 с.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{P}_X(\mu)$, $\mathbf{P}_Y(\nu)$, $\mathbf{P}_Z(\omega)$ – матрицы вращения системы координат вокруг осей X , Y , Z на углы μ, ν, ω соответственно;

JD – юлианская дата, соответствующая рассматриваемому моменту времени, выраженная в сутках;

S – Гринвичское истинное звездное время;

x, y, z – прямоугольные координаты объекта в небесной системе координат;

$\mathbf{r} = \{x, y, z\}^T$ – вектор положения объекта в небесной системе координат;

x_T, y_T, z_T – средние координаты объекта на фундаментальную эпоху T ;

x_t, y_t, z_t – средние координаты объекта на эпоху наблюдений t ;

X, Y, Z – прямоугольные координаты объекта в мгновенной земной системе;

B, L, H – геодезические (эллипсоидальные) координаты: широта, долгота и высота соответственно;

X_0, Y_0, Z_0 – средние земные прямоугольные координаты объекта;

X', Y', Z' – топоцентрические земные координаты объекта;

X_G, Y_G, Z_G – топоцентрические горизонтные координаты;

f – постоянная тяготения;

μ – геоцентрическая гравитационная постоянная;

$\dot{\mathbf{r}} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}^T$ – вектор скорости спутника;

$\ddot{\mathbf{r}} = \{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\}^T$ – вектор ускорения ИСЗ;

$\mathbf{c} = \{c_x, c_y, c_z\}^T$ – вектор площадей;

$\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z\}^T$ – вектор Лапласа;

V_r – радиальная скорость спутника;

V_n – трансверсальная скорость спутника.

Элементы орбиты спутника:

- p – фокальный параметр;
- e – эксцентриситет орбиты;
- r_{Π} – радиус перигея;
- r_A – радиус апогея;
- a – большая полуось орбиты;
- b – малая полуось орбиты;
- Ω – долгота восходящего узла;
- i – наклонение орбиты;
- ω – аргумент перигея;
- ν – истинная аномалия;
- u – аргумент широты;
- E – эксцентрическая аномалия;
- n – среднее движение;
- M – средняя аномалия.

Учебное издание

Дементьев Юрий Викторович
Ганагина Ирина Геннадьевна

КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Редактор *Е. К. Деханова*
Компьютерная верстка *К. В. Ионко*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.
Подписано в печать 01.11.2017. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 6,98. Тираж 80 экз. Заказ 217.
Гигиеническое заключение
№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.
Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.
Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.