

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	10
1.1. Силы, их классификация и свойства	10
1.2. Аксиомы статики	12
1.3. Момент силы относительно точки и относительно оси	13
1.4. Свойства моментов	13
1.5. Перенос силы в другую точку	14
1.6. Связи и их реакции	14
1.7. Упорядочение системы сил, действующих на тело. Глав- ный вектор и главный момент	17
1.8. Уравнения равновесия в векторной и алгебраической формах.....	18
1.9. Расчет реакций связей. Тела (системы) статически опреде- лимые и статически неопределимые	19
1.10. Учет сил трения*	20
1.10.1. Трение скольжения	20
1.10.2. Трение качения.....	22
2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ	24
2.1. Предмет и задачи курса сопротивления материалов	24
2.2. Алгоритм расчета на прочность	25
2.3. Расчет на прочность и жесткость бруса при растяжении- сжатии	33
2.3.1. Вывод расчетных формул для напряжений и дефор- маций	34
2.3.2. Условие прочности	37
2.3.3. Три типа задач при расчетах на прочность	37
2.3.4. Статически неопределимые задачи при растяжении- сжатии.....	38

2.4. Механические характеристики материалов.....	43
2.4.1. Испытание на растяжение образцов из малоуглеродистой стали.....	43
2.4.2. Испытание на сжатие образцов из малоуглеродистой стали.....	48
2.4.3. Испытание на растяжение и сжатие образцов из серого чугуна.....	49
2.4.4. Таблица основных механических характеристик малоуглеродистых сталей и серых чугунов.....	49
2.4.5. Хрупкость и пластичность	50
2.5. Теория напряженно-деформированного состояния.....	50
2.5.1. Напряженное состояние точки	50
2.5.2. Деформированное состояние в точке. Объемная деформация. Обобщенный закон Гука.	56
2.6. Теории предельных состояний (теории прочности)	62
2.6.1. Назначение теорий прочности. Эквивалентное напряжение.....	62
2.6.2. Теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности).....	63
2.6.3. Энергетическая теория прочности (четвертая теория прочности).....	63
2.6.4. Обобщенная теория прочности Мора (пятая теория прочности).....	65
2.7. Кручение брусков круглого поперечного сечения.....	67
2.7.1. Вывод расчетных формул для напряжений и перемещений	67
2.7.2. Рациональные формы поперечных сечений при кручении.....	74
2.8. Плоский (прямой) изгиб прямых брусков.....	74
2.8.1. Классификация изгибов.....	74
2.8.2. Дифференциальные зависимости Журавского при плоском поперечном изгибе.....	76
2.8.3. Вывод формулы для расчета напряжений при чистом плоском изгибе	77

2.8.4. Условие прочности	83
2.8.5. Поперечный плоский изгиб	84
2.8.6. Расчет на жесткость при плоском изгибе	89
2.9. Сложное нагружение	92
2.9.1. Основные понятия.....	92
2.9.2. Алгоритм расчета на прочность.	92
2.9.3. Совместное действие изгиба и кручения.....	93
2.10. Энергетические методы определения перемещений*	95
2.10.1. Принцип возможных перемещений для деформируемых систем	95
2.10.2. Вывод интеграла Мора.....	95
2.10.3. Алгоритм определения перемещений по интегралу Мора	97
2.10.4. Вычисление интеграла Мора по способу Верещагина	98
2.10.5. Вычисление интеграла Мора по формуле Симпсона.....	100
2.11. Устойчивость равновесия сжатых стержней (продольный изгиб).....	101
2.11.1. Понятие об устойчивости.....	101
2.11.2. Определение критической силы по Эйлеру	102
2.11.3. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня.....	103
2.11.4. Пределы применимости формулы Эйлера	104
2.11.5. Определение критических напряжений для стержней малой гибкости, когда $\lambda < \lambda_{пред}$	106
2.12. Расчет на прочность при движении с ускорением	106
3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК*	108
3.1. Расчет тонкостенных осесимметричных оболочек по безмоментной теории.....	108
3.1.1. Основные понятия.....	108
3.1.2. Вывод расчетных формул	108
3.2. Изгиб цилиндрической оболочки при симметричном нагружении	112

3.3. Изгиб круглых симметрично нагруженных пластин	118
4. ДЕТАЛИ МАШИН.....	125
4.1. Упрощенный расчет резьбовых соединений	125
4.2. Расчет шпоночных соединений.....	129
4.3. Расчет заклепочных соединений.....	130
4.4. Расчет сварных соединений.....	131
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	133

ВВЕДЕНИЕ

В основе учебного пособия лежат материалы лекций для студентов, изучающих техническую механику по укороченным односеместровым программам.

Поэтому, оставаясь в рамках этих программ, авторы опускают некоторые традиционные вопросы курса, акцентируя внимание на основном материале, но, в то же время для расширения научного кругозора студентов даются разделы, помеченные звездочкой «*», которые можно при необходимости опустить без ущерба для понимания остального текста.

Перед тем, как приступить к изучению новой дисциплины, необходимо понять, какое место она занимает в науке. Механика – наука, изучающая законы взаимодействия материальных тел. Этой науке около 5 000 лет, столько же, сколько и современной цивилизации. За это время механика разделилась на отдельные направления, поскольку в одной науке было трудно сконцентрировать весь объем накопленных знаний. Единой классификации этих направлений механики не существует, но ее можно попытаться изобразить в виде схемы, представленной на рис. В1.

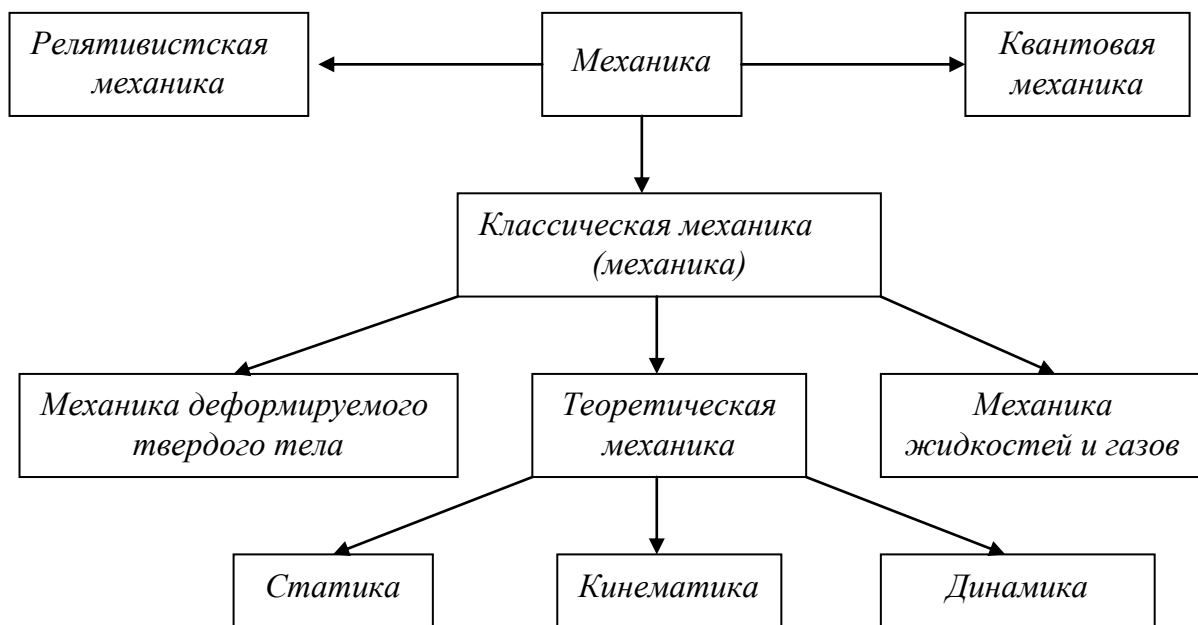


Рис. В1. Классификация механики

В основе *релятивистской механики* лежит теория относительности, и она используется при скоростях движения тел, близких к скорости света $c = 300\,000$ км/с. В релятивистской механике сформулированы законы, годные для всей механики.

Квантовая механика – это механика элементарных частиц, масса которых стремится к нулю, движущихся со скоростями, близкими к скорости света. В основе квантовой механики лежит соотношение неопределенности Гейзенберга.

И релятивистской и квантовой механиками занимаются физики.

Классическая механика (или просто механика) – частный случай релятивистской механики, когда скорости тел относительно невелики, а массы относительно велики. Это инженерная наука, которую условно называют *механикой*.

Разберемся в отраслях этой механики.

Все науки призваны изучать реальные природные явления и реальные объекты. Но учитывать все свойства реальных объектов практически невозможно, поэтому все науки занимаются моделями (или расчетными схемами) изучаемых явлений и объектов, в которых какие-то свойства не учитываются или смягчаются. Как правило, свойства изучаемого объекта описываются соответствующими уравнениями и получается его математическая модель, с которой дальше и работают.

Так в *теоретической механике* не учитывается деформируемость тел, и поэтому из ее рамок выпадают вопросы прочности.

Теоретическая механика разделяется на статику (рассматривает тела и системы тел, находящихся в равновесии), кинематику (изучает законы движения тел без учета действующих на них сил) и динамику (рассматривает поведение тел под действием приложенных сил).

Механика деформируемого твердого тела, опираясь на законы теоретической механики и учитывая дополнительно деформируемость тела, позволяет решать вопросы прочности. Эта обширная наука о прочности за 300 с лишним лет своего существования также разделилась на несколько направлений: теория упругости, теория пластичности, механика разрушения, сопротивление материалов и т. д.

Ну и какое же место занимает *техническая механика*, которой, как мы видим, не оказалось места в приведенной классификации? А дело в том, что техническая механика не является самостоятельной ветвью механики. Курс «Техническая механика» относится к конкретной инженерной специальности, в которой используются те разделы теоретической механики, сопротивления материалов и деталей машин, которые наиболее актуальны для данной специальности.

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Из курса «Теоретическая механика» в данном учебном пособии мы рассмотрим только раздел «Статика» и только те его ключевые вопросы, с которыми приходится сталкиваться инженеру любой специальности.

1.1. Силы, их классификация и свойства

Сила – количественная мера механического взаимодействия тел. Ее изображают в виде вектора, имеющего точку приложения, величину (модуль) и направление.

Силы, действующие на твердое тело, можно разделить на *внешние* и *внутренние*. *Внешние силы* действуют на данное тело со стороны других тел. *Внутренние силы* – это силы взаимодействия частиц внутри тела при его деформировании внешними силами. Поскольку в теоретической механике не учитывается деформируемость тел, то соответственно не рассчитываются и внутренние силы.

Внешние силы, приложенные к какой-нибудь одной точке тела, называются *сосредоточенными силами* (рис. 1, а), а если они действуют по какой-то части поверхности тела, то называются *распределенными силами*. Причем они могут быть распределены по линии (рис. 1, б) или по поверхности (рис. 1, в).

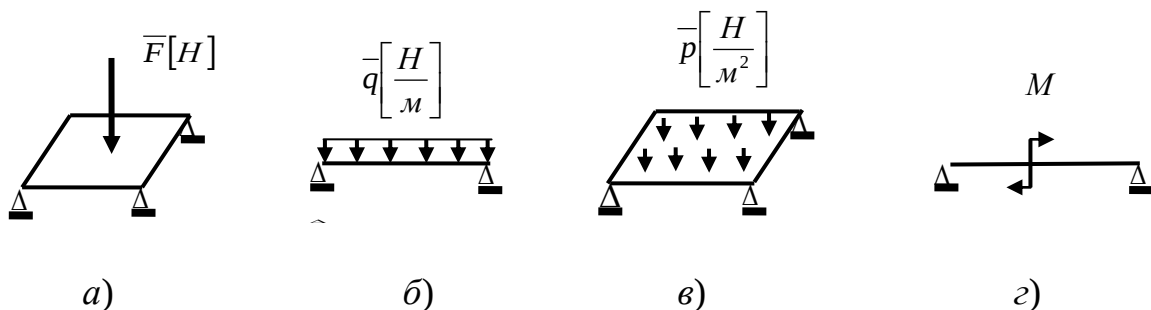


Рис. 1

Следует заметить, что понятие сосредоточенной силы является условным, так как приложить силу в точке нельзя, но если площадь поверхности приложения силы существенно меньше площади поверхности тела, то такая схематизация силы допустима. Это замечание относится и к распределенной по линии силе.

Введем понятие *пары сил* – это две параллельные, равные по величине и противоположно направленные сосредоточенные силы (рис. 2, а).

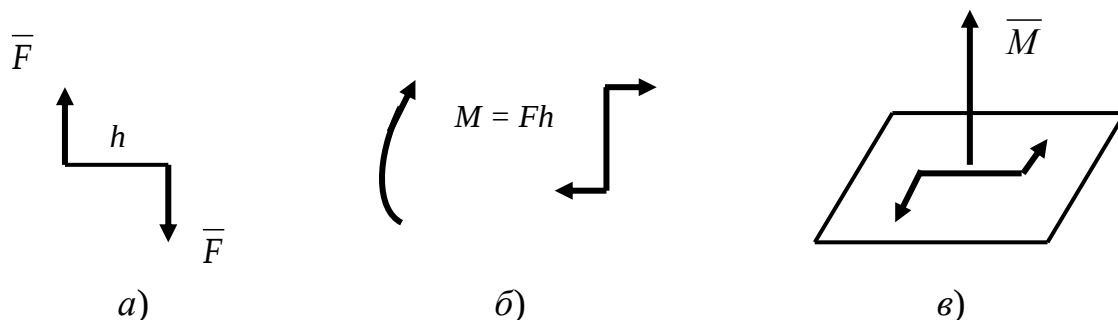


Рис. 2

Пара сил образует *момент пары сил* $M = Fh$ (в дальнейшем будем говорить просто *момент*), оказывающий вращательное действие на тело (рис. 2, б). На расчетных схемах пару сил всегда изображают в виде *момента* (рис. 1, г). В обобщенном смысле момент M также является силой. Момент можно изображать в виде вектора (рис. 2, в), перпендикулярного плоскости, в которой действует M , и он направлен так, что глядя с конца вектора, момент M должен вращать тело против хода часовой стрелки.

Совокупность сил, действующих на тело, образует *систему сил*.

Распределенные силы можно рассматривать как систему сил.

На расчетных схемах в теоретической механике распределенные силы заменяют *равнодействующей силой* Q (рис. 3) – это сила, заменяющая действие системы сил и оказывающая на тело такое же влияние, как и система сил.

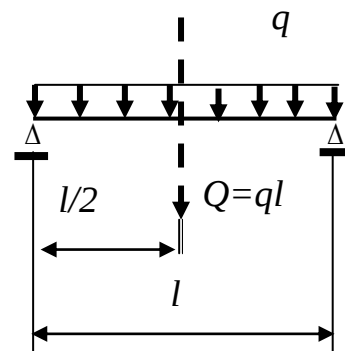


Рис. 3

1.2. Аксиомы статики

Аксиома 1. Тело находится в равновесии под действием двух сил только тогда, когда они равны по величине ($|F_1| = |F_2|$) и действуют по одной прямой в противоположные стороны (рис. 4).

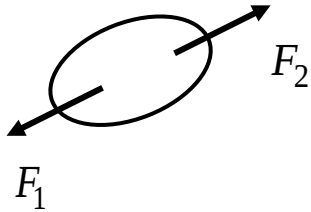


Рис. 4

Силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ образуют систему *уравновешенных сил*. Обобщим это понятие. *Уравновешенная система сил* (их может быть сколько угодно) – такая система сил, которая не нарушает состояние покоя или равномерного прямолинейного движения тела.

Аксиома 2. Состояние тела не изменится, если к нему добавить уравновешенную систему сил.

Аксиома 3. Силы, приложенные в одной точке, можно складывать векторно (или по диагонали параллелограмма – рис. 5, а, или по правилу веровочного многоугольника – рис. 5, б). На рис. 5: $\overline{R}$ – равнодействующая системы сил (обобщение понятия равнодействующей).

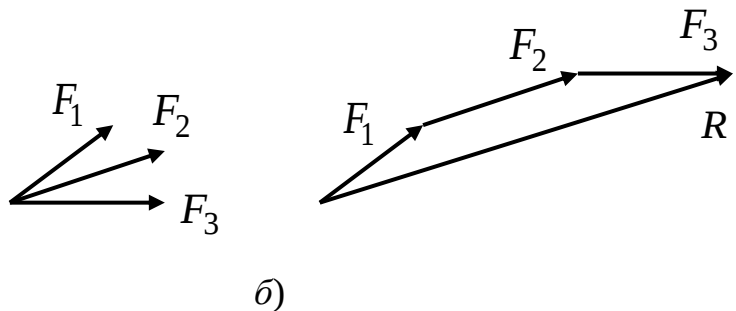
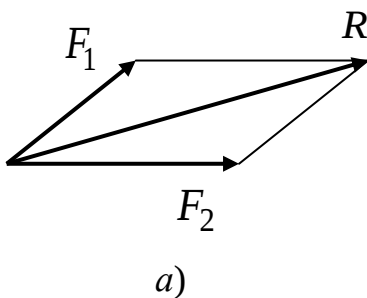


Рис. 5

Аксиома 4 (принцип отвердевания). Равновесие деформируемого тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).

Этот принцип широко используется в инженерных расчетах, так как он позволяет при составлении уравнений равновесия для любого тела не учитывать его деформацию.

1.3. Момент силы относительно точки и относительно оси

На рис. 6 изображен момент силы $\vec{F}$ относительно произвольной точки A : $m_A(\vec{F}) = Fh$, где h – длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на вектор силы.

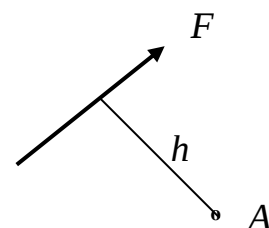


Рис. 6

Чтобы определить момент силы $\vec{F}$ относительно произвольной оси $o-o$ (рис. 7), надо спроецировать силу $\vec{F}$ на любую плоскость, перпендикулярную оси (пусть эта плоскость пересекает ось в точке A) и момент $\vec{F}$ относительно оси:

$$m_{o-o}(\vec{F}) = \text{Пр}.F \cdot h.$$

Моменты сил относительно точек и относительно осей на расчетных схемах не показываются, но при решении многих задач их приходится рассчитывать.

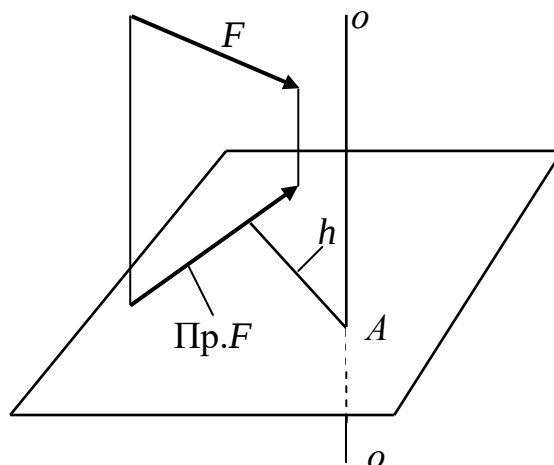


Рис. 7

1.4. Свойства моментов

Оказывается, что действие момента на тело не изменится (без учета деформации тела), если его перенести параллельно самому себе в любую точку тела. Это значит, что если моменты изобразить векторно, то все эти векторы можно перенести в одну точку тела параллельно самим себе (рис. 8, а), векторно сложить их и получить один момент, эквивалентный всей совокупности исходных моментов (рис. 8, б):

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i. \quad (1)$$

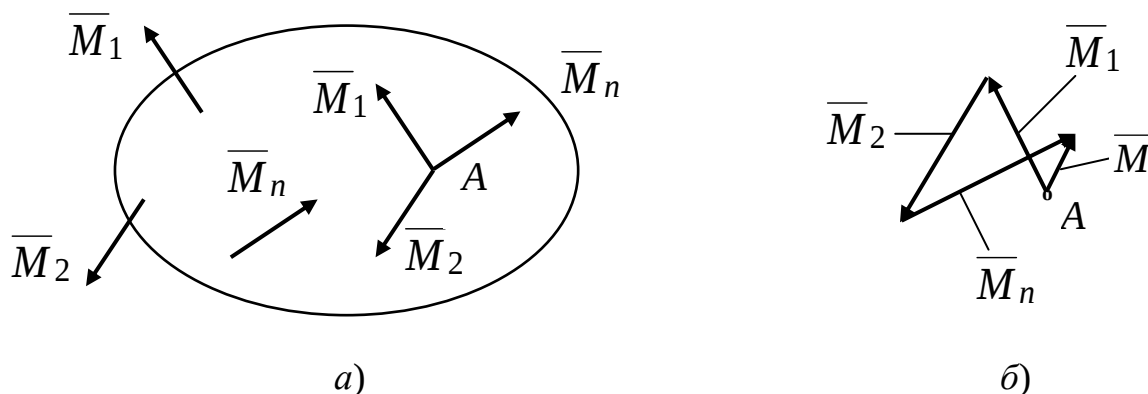


Рис. 8

1.5. Перенос силы в другую точку

Сосредоточенную силу также можно перенести параллельно самой себе в другую точку тела (из точки A в точку B – рис. 9, а). Но при этом добавляется момент $M = Fh$ (рис. 9, б).

Следствие: силу можно переносить вдоль линии ее действия без добавления момента (рис. 10).

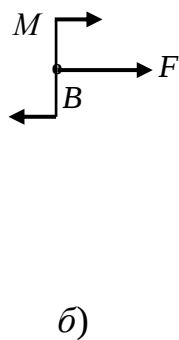
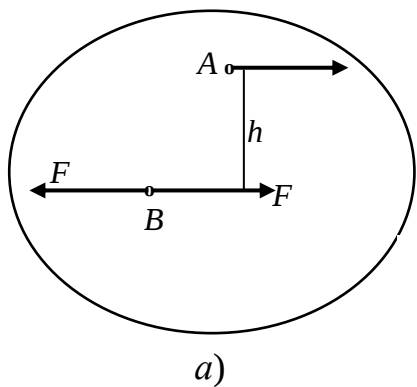


Рис. 9

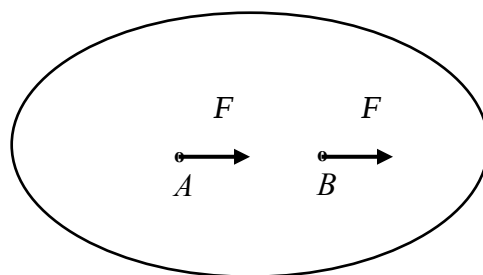


Рис. 10

1.6. Связи и их реакции

Свободное тело не связано с другими телами и может совершать любое перемещение в пространстве.

В трехмерной системе координат свободное пространственное тело имеет 6 степеней свободы: 3 линейных и 3 угловых (рис. 11, а), а свободное плоское тело – 3 степени свободы (рис. 11, б).

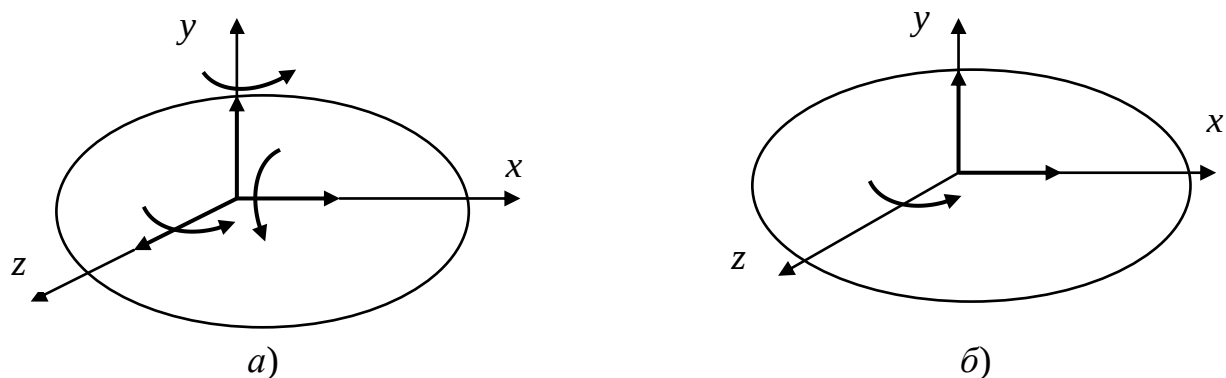


Рис. 11

Тело, перемещение которого ограничивается какими-либо другими телами, называется *несвободным*. Все факторы, ограничивающие перемещение тела, называются *связями*. Каждая связь ограничивает одну степень свободы тела в точке ее приложения и изображается на расчетной схеме в виде силы (*реакции связи*). В дальнейшем силы, не являющиеся реакциями связей, будем называть *активными силами*. Таким образом, действующие на тело силы делятся на *активные* и *реакции связей*.

На рис. 12, а показаны реакции связей тела, опирающегося на идеальную (силы трения отсутствуют) гладкую поверхность, а на рис. 12, б – реакция связи в виде гибкой нерастяжимой нити.

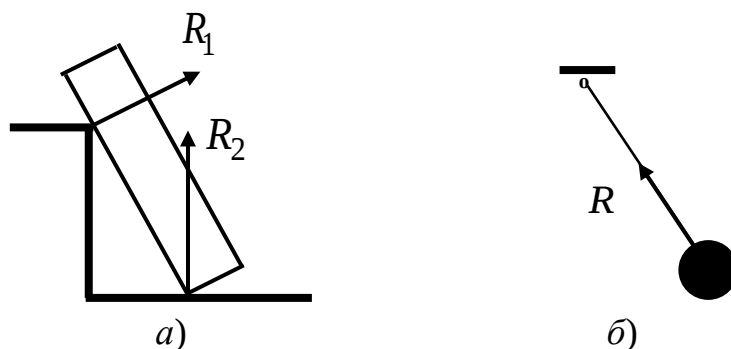


Рис. 12

Но в большинстве случаев связи накладываются на тело в его опорах – это специальные устройства, связывающие тело с фундаментом или другими телами. Конструкции опор могут быть какими угодно, но на расчетных схемах нужно изображать только стандартные опоры.

В табл. 1 показаны стандартные опоры и их реакции в пространственном и плоском случаях.

Таблица 1

Название опоры	Схематическое изображение	Реакции в пространственном случае	Реакции в плоском случае
Защемление (заделка)		X, Y, Z, M_X, M_Y, M_Z	X, Y, M_Z
Шарнир неподвижный		X, Y, Z	X, Y
Шарнир подвижный (каток)		Y	Y
Скользкая заделка		Y, Z, M_Z	Y, M_Z

Очевидно, что для полного закрепления пространственного тела на него необходимо наложить минимум 6 связей, а плоского тела – минимум 3 связи. Это необходимое, но недостаточное условие закрепления тела. Как показано на рис. 13, на плоское тело в форме бруса наложено 3 связи, но эти связи – однотипные и они не ограничивают возможности горизонтального перемещения тела.

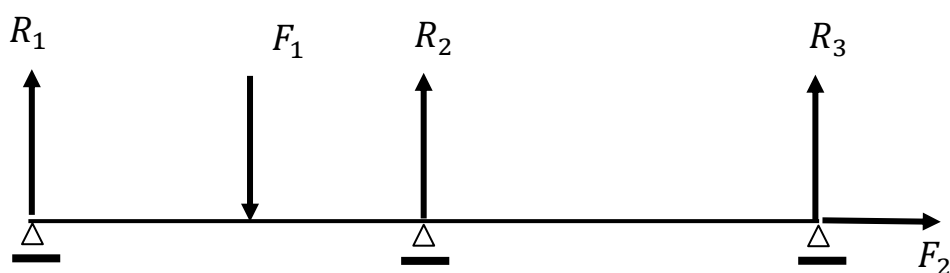


Рис. 13

1.7. Упорядочение системы сил, действующих на тело.

Главный вектор и главный момент

Если на тело действует несколько сил и моментов, то все эти силовые факторы можно перенести в одну точку (точку приведения). При переносе силы добавляется момент этой силы относительно точки приведения. Все эти приведенные силы и моменты можно векторно сложить, так доказыва-ется *общая теорема статики абсолютно твердого тела*: произвольную совокупность сил, действующую на тело, можно заменить одной силой (*главным вектором $\bar{V}$*), приложенным в произвольно выбранной точке, и одним моментом (*главным моментом $\bar{M}$*).

Эта теорема иллюстрируется рис. 14.

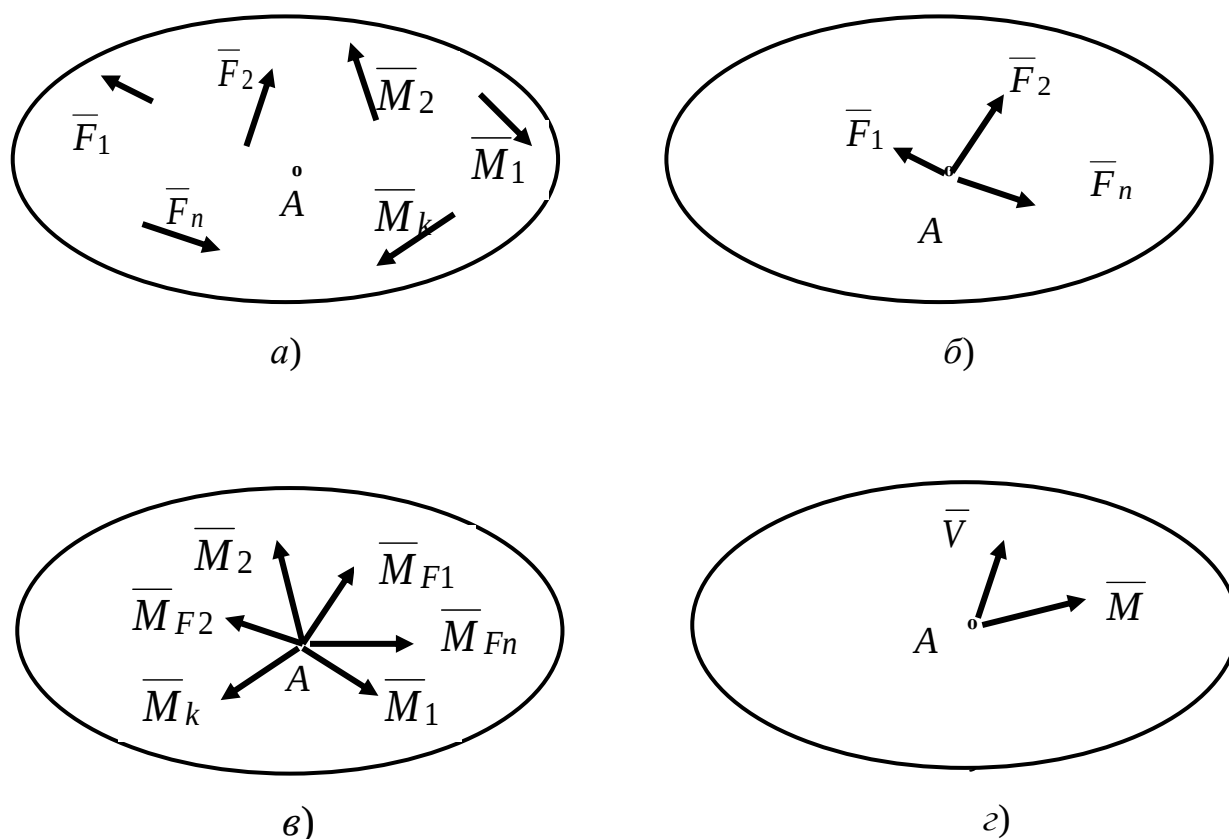


Рис. 14

Пусть на тело действует n сил и k моментов, точка A – точка приведения (рис. 14, а). На рис. 14, б показаны все силы, приведенные к точке A .

На рис 14, в показаны все моменты и моменты всех сил, приведенных к точке А. На рис. 14, г все эти силы и моменты векторно сложены:

$$\begin{aligned}\bar{V} &= \sum_{i=1}^n F_i - \text{главный вектор,} \\ \bar{M} &= \sum_{k=1}^k \bar{M}_k + \sum_{i=1}^n \bar{M}_{Fi} - \text{главный момент.}\end{aligned}\tag{2}$$

1.8. Уравнения равновесия в векторной и алгебраической формах

Если тело находится в равновесии, т. е. наложенные на него связи ограничивают все степени свободы, то уравнения равновесия в векторной форме очевидны и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}\bar{V} &= 0, \\ \bar{M} &= 0.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Следует заметить, что и в главный вектор $\bar{V}$, и в главный момент $\bar{M}$ входят все активные силы и все реакции связей. Если расписать $\bar{V}$ и $\bar{M}$ в соответствии с (2) и спроецировать их на оси координат, то получим уравнения равновесия в алгебраической форме:

$$\left. \begin{aligned}V_x &= \sum F_{ix} + \sum R_{ix} = 0; \\ V_y &= \sum F_{iy} + \sum R_{iy} = 0; \\ V_z &= \sum F_{iz} + \sum R_{iz} = 0; \\ M_x &= \sum m_x(F_i) + \sum m_x(R_i) + \sum M_{ix} = 0; \\ M_y &= \sum m_y(F_i) + \sum m_y(R_i) + \sum M_{iy} = 0; \\ M_z &= \sum m_z(F_i) + \sum m_z(R_i) + \sum M_{iz} = 0.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Уравнения (4) относятся к пространственному телу. Если же тело плоское (в этом случае предполагается, что и все силы, действующие на

тело, находясь в его плоскости – пусть это будет плоскость xu), то очевидно, что остается три уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \sum F_{ix} + \sum R_{ix} = 0; \\ V_y &= \sum F_{iy} + \sum R_{iy} = 0; \\ M_z &= \sum m_z(F_i) + \sum m_z(R_i) + \sum M_{iz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Заметим, что уравнения равновесия можно использовать как для отдельного тела, так и для системы связанных между собой тел (механической системы), в которой положение каждого тела зависит от положения остальных тел.

1.9. Расчет реакций связей. Тела (системы) статически определимые и статически неопределимые

Опорные реакции рассчитываются из уравнений равновесия. Если тело закреплено минимально необходимым числом связей (пространственное – шестью, а плоское – тремя), то уравнений равновесия хватает для расчета реакций связей. Такие тела (системы) являются *статически определенными*. Если же тело перезакреплено, т. е. число его связей превышает минимально необходимое, то из одних уравнений равновесия опорные реакции рассчитать невозможно. Такие тела являются *статически неопределимыми*. В этом случае для расчета опорных реакций необходимы дополнительные уравнения, которые можно получить методами механики деформируемого твердого тела.

Пример

Тело закреплено и статически определимо (рис. 15).

Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= X_B = 0; \\ \sum m_A &= -F \frac{2l}{3} + Y_B l = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{2F}{3}; \\ \sum Y &= Y_A - F + Y_B = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{F}{3}. \end{aligned}$$

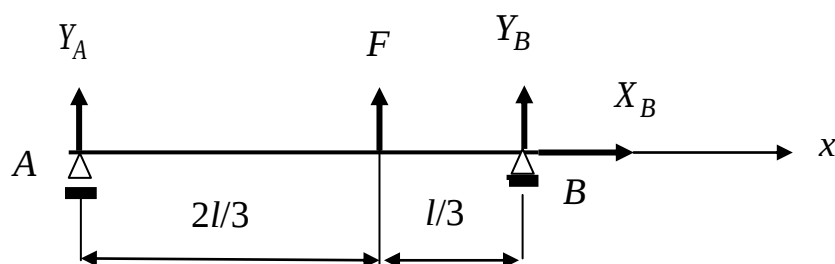


Рис. 15

1.10. Учет сил трения*

1.10.1. Трение скольжения

Трение скольжения возникает при стремлении двигать одно тело по поверхности другого. Эта сила ($F_{\text{тр}}$) препятствует относительному скольжению и действует по поверхности скольжения.

Три закона трения скольжения.

1-й закон:

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр max}}. \quad (6)$$

Сила трения $F_{\text{тр}}$ всегда направлена в сторону, противоположную возможному относительному движению.

2-й закон:

$$F_{\text{тр max}} = f N, \quad (7)$$

где N – сила нормального давления между взаимодействующими телами;
 f – коэффициент трения скольжения.

3-й закон:

$$f = \text{const}. \quad (8)$$

Экспериментально установлено, что f не зависит от силы N , от величины поверхности скольжения, а зависит от материала и шероховатости (чистоты обработки) соприкасающихся поверхностей.

Пример 1 (рис. 16).

$$N = G.$$

$F_{\text{тр}} = 0$, так как нет сдвигающей силы.

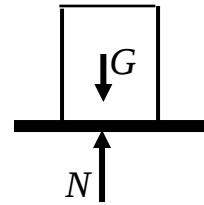


Рис. 16

Пример 2

Имеется сдвигающая сила T (рис. 17, а).

$$N = G; \quad F_{\text{тр max}} = f N = f G.$$

Уравнение равновесия: $\sum X = T - F_{\text{тр}} = 0$.

Если сдвигающая сила $T < F_{\text{тр max}}$, то $F_{\text{тр}} = T$ и тело неподвижно.

Если $T = F_{\text{тр max}}$, то тело трогается с места и может двигаться равномерно и прямолинейно. Если $T > F_{\text{тр max}}$, тело движется в направлении силы T с ускорением.

Зависимость $F_{\text{тр}}$ от T показана на графике рис. 17, б.

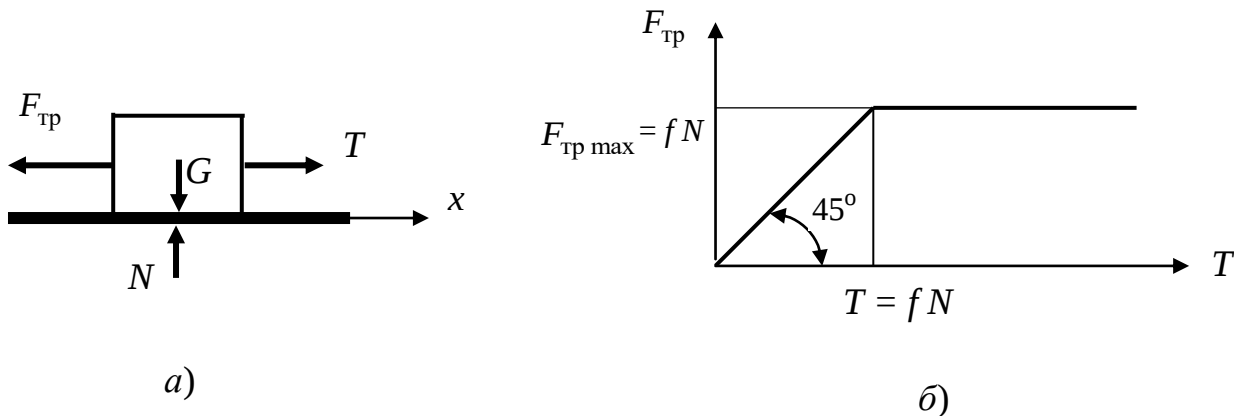


Рис. 17

Пример 3

Известно: f , G , α (см. рис. 18).

Найти T , чтобы сдвинуть тело.

Решение

Уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= T \cos \alpha - F_{\text{тр max}} = 0, \\ \sum Y &= N - G + T \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

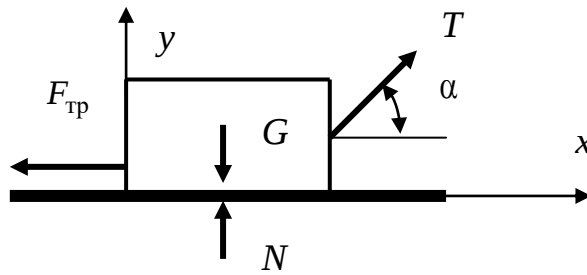


Рис. 18

Из 2-го уравнения (9): $N = G - T \sin \alpha$.

Подставляем это выражение в (7): $F_{\text{тр max}} = fN = f(G - T \sin \alpha) \Rightarrow$

в 1-е уравнение (9): $T \cos \alpha - f(G - T \sin \alpha) = 0$, откуда

$$T = \frac{f G}{\cos \alpha + f \sin \alpha}.$$

1.10.2. Трение качения

При качении колеса по поверхности какого-нибудь тела контакт колеса с этим телом происходит не в точке (линии), а вследствие деформации соприкасающихся объектов – по пятну, в результате чего реакция N оказывается смещенной на величину k (рис. 19) в сторону движения колеса.

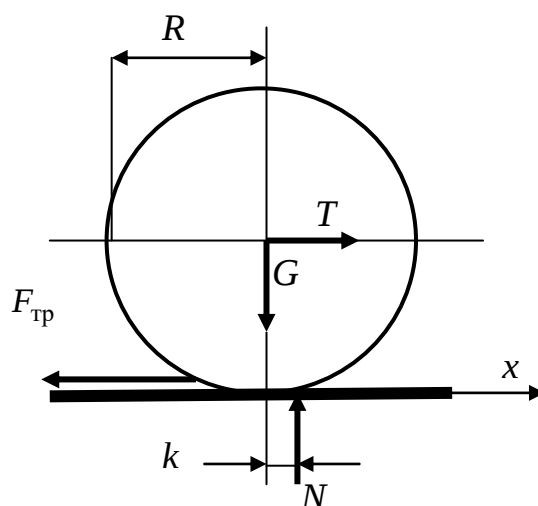


Рис. 19

На рис. 19: T – сила, стремящаяся катить колесо. Она создает вращающий момент $M_{\text{вр}} = TR$.

При качении без скольжения возникает сила трения $F_{\text{тр}}$, которая определяется из уравнения равновесия

$$\Sigma X = T - F_{\text{тр}} = 0 \Rightarrow F_{\text{тр}} = T.$$

Реакция N создает момент сопротивления качению M_k на смещении k .

Три закона трения качения.

При качении колеса возникает момент сопротивления качению:

$$0 \leq M_k \leq M_{k \max}. \quad (10)$$

$$M_{k \max} = kN. \quad (11)$$

$$k = \text{const}, \quad (12)$$

где k – коэффициент трения качения, величина постоянная для данных поверхностей, не зависящая от радиуса катка.

Колесо начинает катиться, когда $M_{\text{вр}} = TR = M_{k \max} = kN$, откуда движущая сила

$$T = T_{\text{движ}} = \frac{k}{R} N. \quad (13)$$

Коэффициент трения качения k имеет размерность длины. Обычно это достаточно малая величина. Например, при качении стального колеса по стальному рельсу $k = 0,0005$ м.

Отношение $\frac{k}{R}$ для большинства материалов значительно меньше коэффициента трения скольжения $f \left(\frac{k}{R} \ll f \right)$, поэтому в технике, когда это возможно, стремятся трение скольжения заменить трением качения (колеса, подшипники и т. д.)

2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

2.1. Предмет и задачи курса сопротивления материалов

Как было сказано во введении, вопросами прочности в инженерном деле занимается *механика деформируемого твердого тела*, которая разделилась на несколько направлений. Чтобы понять, какое место в этой науке занимает *сопротивление материалов*, сопоставим его с *теорией упругости*.

Отметим еще раз, что все науки, призванные изучать реальные объекты, на самом деле занимаются их расчетными схемами, в которых накладываются ограничения на рассматриваемую задачу, касаемые формы тела, нагрузки, внешних условий и т. д.

Теория упругости – наиболее общая наука о прочности, в которой учитываются практически все свойства объекта, влияющие на прочность, и накладывается только одно ограничение – деформации тела должны быть упругими, т. е. после снятия нагрузки его размеры и форма должны полностью восстанавливаться. Но в результате математическая модель в теории упругости получается очень сложной, не имеющей, как правило,

аналитического решения, и даже численными методами ее зачастую трудно решить с достаточной точностью. Теория упругости позволяет достаточно точно описать математически задачу, но для ее практического решения нужно что-то упростить, наложить какие-то ограничения. Без этого теория упругости будет чисто описательной наукой.

Поэтому на противоположном полюсе механики деформируемого твердого тела и находится инженерная наука о прочности – сопротивление материалов.

Сопротивление материалов – наука о прочности, а точнее – это раздел механики деформируемого твердого тела, рассматривающий методы расчета на прочность и жесткость типовых элементов конструкций при условии их долговечности и экономичности.

Задачей курса «*Сопротивление материалов*» является разработка достаточно простых инженерных приемов расчета типовых деталей. При этом на решаемую задачу накладывается максимально возможное количество ограничений и допущений на форму тела, свойства материала, нагрузку и т. д. В результате расчетные формулы получаются достаточно простыми и удобными для практических инженерных расчетов.

2.2. Алгоритм расчета на прочность

Оказывается, что все задачи сопротивления материалов можно решить по одному алгоритму, схема которого изображена на рис. 20.

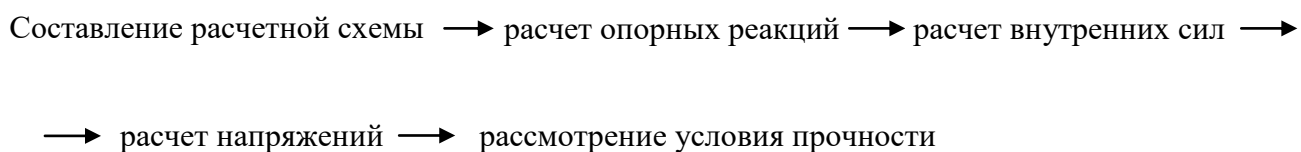


Рис. 20

Рассмотрим ступени этого алгоритма.

1. Составление расчетной схемы.

При составлении расчетной схемы производится схематизация детали, схематизация опор и схематизация нагрузки.

Схематизация детали. При всем разнообразии конструктивных элементов их можно свести к сравнительно небольшому числу основных форм, а именно – к четырем:

1. Форма бруса (рис. 21).

Брус – это тело, у которого длина существенно (в 10 и более раз) превышает характерный размер поперечного сечения. Ось бруса может иметь любую форму. Брус может быть плоским или пространственным. Брус – основное тело, рассматриваемое в сопротивлении материалов.



Рис. 21

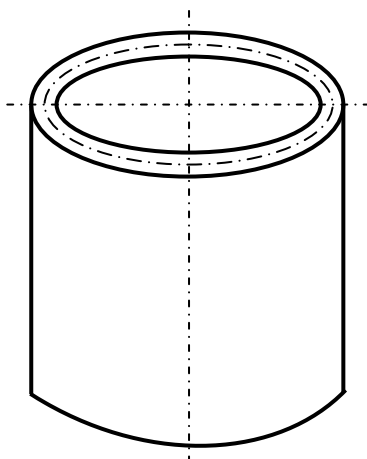


Рис. 22

2. Форма оболочки (рис. 22).

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя поверхностями, расстояние между которыми существенно меньше других размеров оболочки. Поверхность, равноудаленная от внешней и внутренней поверхностей, называется срединной поверхностью. Линия пересечения срединной поверхности с верхним торцом показана на рис. 22 штрих-пунктиром. Форма оболочки может быть любая. На рис. 22 показана цилиндрическая оболочка. В сопротивлении материалов рассматриваются оболочки простейшей формы.

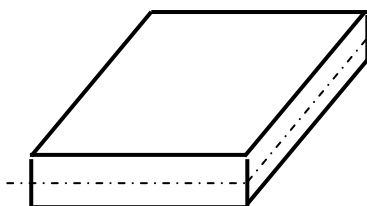


Рис. 23

3. Форма пластины (рис. 23).

Пластина – оболочка с плоской срединной поверхностью. Пластина может быть прямоугольной, круглой, треугольной и т. д. В сопротивлении материалов рассматриваются пластины простейшей формы.

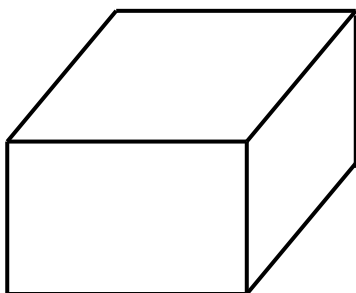


Рис. 24

4. Массивное тело – элемент конструкции, размеры которого во всех направлениях мало отличаются друг от друга (рис. 24). В сопротивлении

материалов массивные тела не рассматриваются, их рассчитывают в теории упругости.

Какую бы деталь ни придумал конструктор, он на расчетной схеме должен ее изобразить в виде одной из приведенных форм либо в виде какой-то совокупности этих форм.

Схематизация опор и нагрузки. Опоры и нагрузка схематизируются так же, как и в теоретической механике.

2. Расчет опорных реакций.

Опорные реакции рассчитываются так же, как и в теоретической механике, из уравнений равновесия, составленных без учета деформации тела (далее будет сказано подробно, почему в этом случае пренебрегают деформациями).

3. Понятие о внутренних силах. Их расчет.

В теоретической механике внутренние силы не рассматриваются. Там все силы являются внешними. В сопротивлении материалов, где учитывается деформация тела, вводится понятие внутренних сил, без определения которых вопросы прочности тела решить не удастся.

Внутренние силы – это силы упругого взаимодействия между частицами материала внутри тела при его деформировании внешними силами. Исчезают внешние силы, отсутствуют и внутренние силы.

Расчет внутренних сил.

Рассмотрим некоторое тело, находящееся в равновесии под действием внешних сил P_1, P_2, P_3, P_4 (рис. 25, а). От внешних сил тело деформируется, следовательно, внутри него возникают внутренние силы. Пусть частичка (1) на рис. 25, а внутри тела давит на соседнюю частичку с какой-то силой. По третьему закону Ньютона эта соседняя частичка давит на исходную с такой же по величине, но противоположно направленной силой (рис. 25, а). Поэтому эти две внутренние силы взаимно уравновешены и в сумме дают ноль. То же можно сказать и про любую другую пару частиц, например (2). Таким образом, все внутренние силы взаимно уравновешены и на равновесие всего тела влияния не оказывают.

Для расчета внутренних сил применяется *метод сечений*. Он заключается в том, что в интересующем нас месте мысленно проводится сечение, разделяющее тело на две части A и B (как правило, это поперечное сечение, перпендикулярное продольной оси бруса), рис. 25, б. Затем какая-то часть тела мысленно отбрасывается, а к оставшейся части со стороны отброшенной прикладываются внутренние силы (рис. 25, в), которые теперь для рассматриваемой части становятся внешними силами. Этих сил – бесчисленное количество. Методами теоретической механики данную систему сил приводим к центру тяжести поперечного сечения и получаем главный вектор $\bar{V}$ и главный момент $\bar{M}$ внутренних сил в этом сечении (рис. 25, г), которые проецируем на координатные оси (рис. 25, д, е).

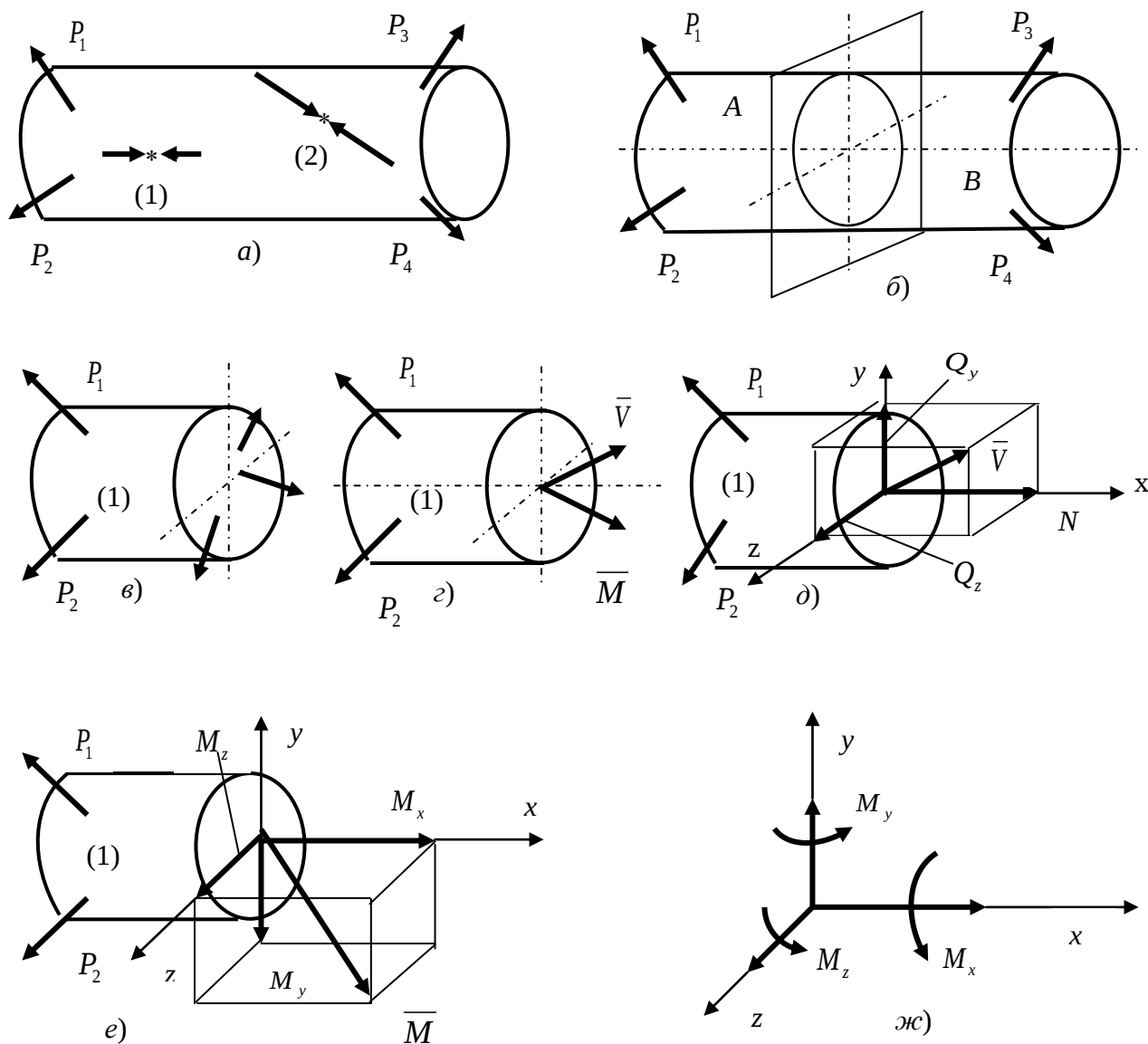


Рис. 25

В результате получаем три составляющих главного вектора и три составляющих главного момента, которые имеют свои названия:

N – нормальная внутренняя сила;

Q_y, Q_z – поперечные внутренние силы;

M_x – крутящий внутренний момент;

M_y, M_z – изгибающие внутренние моменты.

На рис. 25, жс внутренние моменты показаны и в векторной форме, и в виде наглядных криволинейных стрелок.

Для расчета шести внутренних сил мы имеем 6 уравнений равновесия для рассматриваемой отсеченной части тела, из которых и рассчитываются составляющие внутренних сил:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= \Sigma P_{ix} + N = 0; \\ \Sigma Y &= \Sigma P_{iy} + Q_y = 0; \\ \Sigma Z &= \Sigma P_{iz} + Q_z = 0; \\ \Sigma m_x &= \Sigma m_x(P_i) + M_x = 0; \\ \Sigma m_y &= \Sigma m_y(P_i) + M_y = 0; \\ \Sigma m_z &= \Sigma m_z(P_i) + M_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В этих уравнениях P_i – внешние силы, приложенные к рассматриваемой части тела.

4. Напряжения и деформации. Связь между ними (закон Гука).

Знание внутренних сил является необходимым, но недостаточным условием для суждения о прочности тела, поскольку при их расчете не учитываются размеры поперечных сечений.

Поэтому вводится понятие напряжения и связанных с ним деформаций.

Напряжение – это интенсивность внутренней силы, т. е. это внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения.

На рис. 26 показано произвольное сечение бруса площадью A , по которому распределены внутренние силы. Выделим достаточно малый элемент площади сечения ΔA , в котором действует внутренняя сила ΔF .

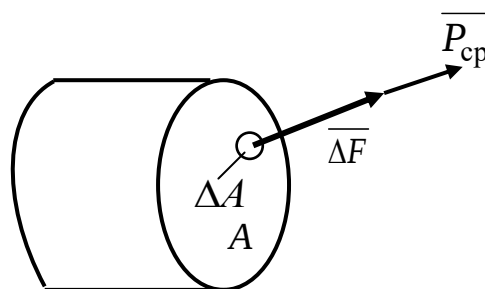


Рис. 26

Среднее напряжение по площади ΔA :

$$\overline{P_{cp}} = \frac{\Delta \overline{F}}{\Delta A} \left[\frac{H}{M^2} = Pa \right]. \quad (15)$$

В расчетах напряжение всегда связывают с точкой. Это будет полное напряжение:

$$\bar{P} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta A} \text{ [Па]}. \quad (16)$$

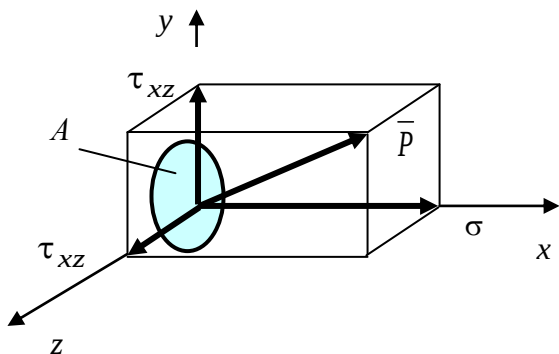


Рис. 27

Полное напряжение всегда связано с точкой и сечением через данную точку. В каждом новом сечении, проведенном через точку, будет новое полное напряжение.

Полное напряжение раскладывается на координатные оси (рис. 27):

σ – нормальное напряжение;

τ_{xy}, τ_{xz} – касательные напряжения.

Напряжение – это параметр, по которому можно судить о прочности тела.

Деформации в общезначимом смысле – это изменение формы и размеров тела под нагрузкой. В сопротивлении материалов деформации имеют количественное содержание и разделяются на *линейные* и *угловые*.

Линейные деформации – это относительные изменения длины бесконечно малых отрезков в результате деформирования тела.

Угловые деформации – изменение первоначально прямых углов в результате деформирования тела между двумя бесконечно малыми отрезками в данной точке в рассматриваемой плоскости.

Рассмотрим для простоты плоское тело (рис. 28).

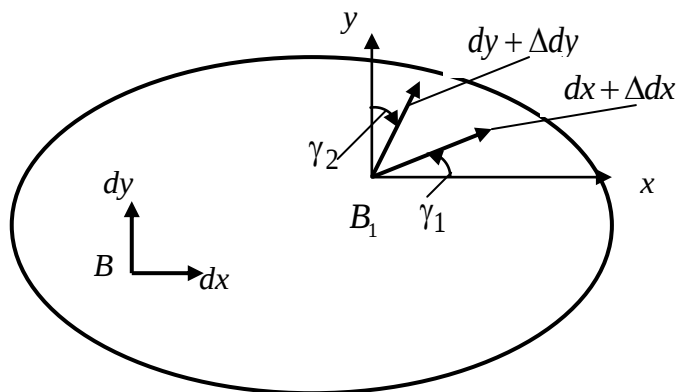


Рис. 28

В произвольной точке B проведем два бесконечно малых взаимно перпендикулярных отрезка dx и dy . После приложения нагрузки точка B заняла положение B_1 , а отрезки dx и dy удлинились на Δdx и Δdy и повернулись на углы γ_1 и γ_2 .

Линейная деформация в точке B в направлении x :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}. \quad (17)$$

Аналогично деформация в точке B в направлении y :

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}.$$

Угловая деформация в точке B в плоскости xy :

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2. \quad (18)$$

Таким образом линейные деформации связаны с точкой и направлением. В каждом новом направлении в данной точке будет другая линейная деформация.

Угловые деформации связаны с точкой, плоскостью и положением прямого угла в плоскости. В каждой новой плоскости, проведенной через точку, будет новая угловая деформация.

Связь между напряжениями и деформациями (закон Гука).

Между напряжениями и деформациями существует объективная связь. Впервые ее подсмотрел у природы в XVII в. великий английский ученый и изобретатель Роберт Гук. Правда, эту связь он установил для частного случая – работу бруса на растяжение-сжатие:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \quad (19)$$

Этот закон чаще пишут в упрощенном виде: $\sigma = E\varepsilon$.

Как видим, закон Гука устанавливает простейшую линейную связь для этого случая между нормальными напряжениями и линейными деформациями в направлении напряжений. В этой формуле E – *модуль упругости* первого рода (модуль Юнга). Это важнейшая механическая харак-

теристика материала, характеризующая жесткость материала и связывающая напряжения и деформации при упругом деформировании.

Для общего случая нагружения на основе фундаментального закона Гука (19) и закона Пуассона мы в дальнейшем выведем так называемый обобщенный закон Гука.

5. Условие прочности.

Условие прочности в сопротивлении материалов носит чисто логический характер: максимальное напряжение $\sigma_{\max}$ в рассчитываемой детали не должно превышать так называемое допускаемое напряжение $[\sigma]$:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}. \quad (20)$$

где $\sigma_{\text{пред}}$ – предельное напряжение, недопустимое для данного материала;

$[n]$ – нормативный, или допускаемый коэффициент запаса прочности, создающий необходимый запас прочности.

В формуле (20) максимальным напряжением может быть не только нормальное напряжение, но и касательное или эквивалентное (об этом речь будет идти далее).

6. Основные допущения и ограничения, накладываемые на все задачи в сопротивлении материалов (основные гипотезы и принципы).

Эти ограничения относятся к материалу детали и нагрузке.

1. Гипотеза о *сплошности материала* детали: предполагается, что материал детали сплошным непрерывным образом заполняет весь ее объем, при этом не учитываются возможные усадочные раковины, пузырьки воздуха, оставшиеся в материале и т. д.

2. Гипотеза об *однородности и изотропности материала*: свойства материала во всем объеме детали одинаковые и не зависят от направления.

3. Гипотеза об *идеальной упругости материала*. Эта гипотеза используется и в теории упругости и является ограничением на свойства материала и нагрузку.

4. Гипотеза о *малости деформаций* детали. Деформация считается малой, если ею можно пренебречь при расчете опорных реакций. Поэтому инженер в каждом конкретном случае сам решает, какую деформацию считать малой в зависимости от необходимой точности расчета. Это ограничение на нагрузку, материал детали и ее форму.

5. *Принцип независимости действия сил*: если на тело действует несколько сил, то его расчет на прочность и жесткость можно проводить от каждой силы в отдельности, а затем результаты сложить. Этот принцип иллюстрируется рис. 29.

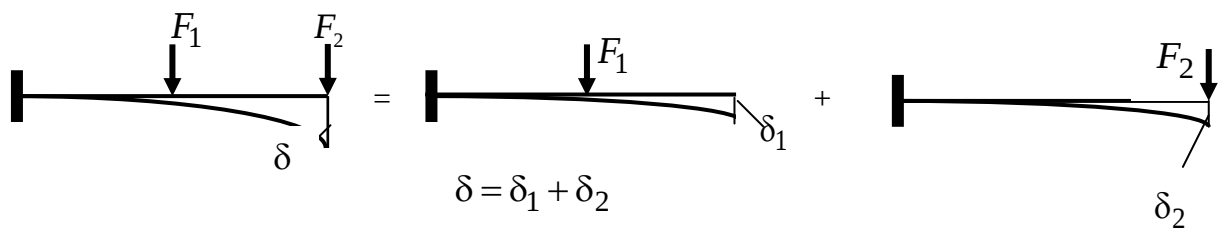


Рис. 29

2.3. Расчет на прочность и жесткость бруса при растяжении-сжатии

При этом виде нагружения все внешние силы действуют вдоль продольной оси бруса, а из внутренних сил возникает только нормальная сила (рис. 30).

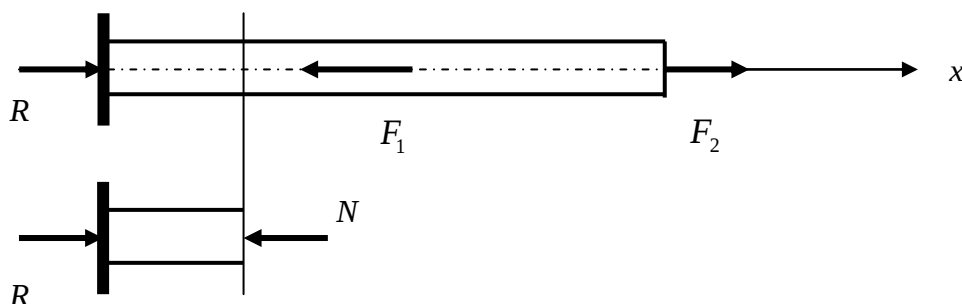


Рис. 30

2.3.1. Вывод расчетных формул для напряжений и деформаций

В сопротивлении материалов формулы для напряжений и деформаций при всех видах нагружения выводятся в одной последовательности.

1. Мысленный эксперимент.

Нанесем мысленно на плоскую боковую поверхность бруса ортогональную сетку (систему параллельных и взаимно перпендикулярных горизонтальных и вертикальных линий), рис. 31. Затем нагрузим брус растягивающим (или сжимающим) усилием. При этом и горизонтальные, и вертикальные линии сместятся параллельно самим себе, как это показано на рис. 31, и, что важно, они не искривятся. Вертикальные линии имитируют следы поперечных сечений на боковой поверхности бруса.

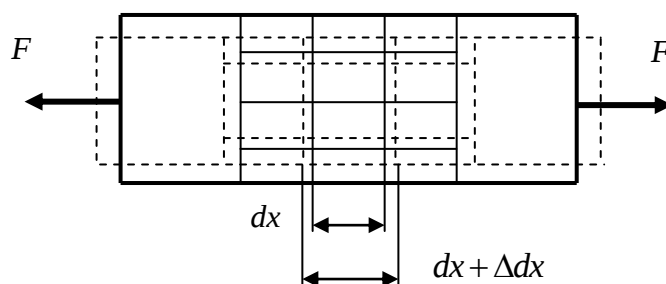


Рис. 31

На основании этого эксперимента можно выдвинуть *гипотезу плоских поперечных сечений*: поперечные сечения, плоские и перпендикулярные оси бруса до приложения нагрузки, после приложения нагрузки остаются плоскими и перпендикулярными оси бруса.

Далее мы будем опираться на эту гипотезу.

2. Статическое обследование задачи.

Цель этого обследования – установить на основе элементарного здравого смысла, какие возникают напряжения в поперечных сечениях, и связать их с внутренними силами самой общей интегральной зависимостью.

На рис. 32 показано произвольное поперечное сечение бруса. Во всех точках сечения возникают только нормальные напряжения, потому что

продольные волокна удлиняются (или укорачиваются при сжимающей нагрузке). Как распределяются эти напряжения по сечению, пока неизвестно, но формула (21) очевидна. Эта формула – результат статического обследования.

$$N = \int_A \sigma_x dA. \quad (21)$$

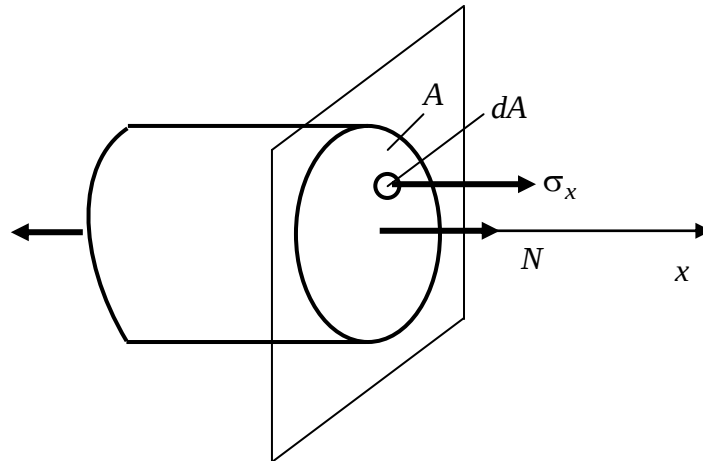


Рис. 32

3. Геометрическое обследование.

Пусть расстояние между двумя вертикальными линиями до приложения нагрузки будет dx (см. рис. 31). После приложения нагрузки это расстояние станет $dx + \Delta dx$. Вследствие гипотезы плоских сечений линейная деформация во всех точках любой из этих вертикальных линий будет постоянной:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \text{const.} \quad (22)$$

Формула (22) по сути является математической записью закона плоских поперечных сечений и результат геометрического обследования.

Теперь сформулируем закон поперечных деформаций (закон Пуассона). При растяжении бруса его продольные размеры увеличиваются, а поперечные – уменьшаются. Пусть поперечное сечение бруса – прямоуголь-

ное с первоначальными размерами: a_1 в направлении оси z и b_1 в направлении оси y , а после приложения нагрузки соответствующие размеры сечения стали: a и b . Поперечные деформации $\varepsilon_y = \frac{b - b_1}{b}$, $\varepsilon_z = \frac{a - a_1}{a}$.

Пуассон «подсмотрел» у природы связь между поперечными и продольными деформациями:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{\text{поп}} = -\mu \varepsilon_{\text{прод}}. \quad (23)$$

Оказалось, что поперечные деформации не зависят от направления и являются постоянной долей продольной деформации. μ – коэффициент Пуассона (механическая характеристика материала), определяющий эту долю.

4. *Физическое обследование* дает связь между напряжениями и деформациями. В данном случае она очевидна – это закон Гука:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x. \quad (24)$$

5. *Синтез.*

Решим совместно уравнения (22), (23) и (24).

С учетом (23) из (24): $\sigma_x = \text{const}$. В результате из (21) получаем формулу для напряжений:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (25)$$

Выведем теперь формулу для расчета удлинений участка бруса длиной l . Из (22) с учетом (24): $\Delta dx = \varepsilon_x dx = \frac{\sigma_x dx}{E} = \frac{N dx}{EA}$.

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dx}{EA}. \quad (26)$$

Если на рассматриваемом участке $N = \text{const}$, $A = \text{const}$, формула (26) упрощается:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (26a)$$

Заметим, что в формуле (26a) $c_{p-c} = \frac{EA}{l}$ – жесткость бруса при растяжении-сжатии (здесь учтены все параметры, влияющие на жесткость бруса). Поэтому формула (26a) легко сводится к общефизической формуле, связывающей силу, деформацию и жесткость: $\Delta l = \frac{N}{c}$.

2.3.2. Условие прочности

Условие прочности определяется формулой

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma]. \quad (27)$$

Если площадь сечения A по длине бруса не изменяется, то условие прочности упрощается:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]. \quad (28)$$

2.3.3. Три типа задач при расчетах на прочность

1. *Проверочный расчет*, при котором просто проверяется прочность по формуле (27) или (28).

2. *Расчет нагрузки*.

Из (28): $N_{\max} \leq [\sigma]A$.

3. *Конструкторский расчет* (расчет размеров сечения).

Из (28): $A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$.

Пример

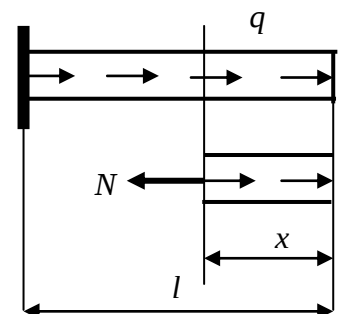


Рис. 33

Проверить брус (рис. 33) на прочность и найти его удлинение при:

$$q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, \quad l = 1 \text{ м}, \quad A = 1 \text{ см}^2, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\text{пред}} = 500 \text{ МПа}, \quad [n] = 2.$$

Решение

$$N(x) = qx; \quad N_{\text{max}} = ql; \quad \sigma_{\text{max}} = \frac{N_{\text{max}}}{A} = \frac{10^4 \cdot 1}{10^{-4}} = 100 \text{ МПа};$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]} = \frac{500}{2} = 250 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\text{max}} < [\sigma] - \text{брус прочный};$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA} = \int_0^l \frac{qxdx}{EA} = \frac{ql^2}{2EA} = \frac{10^4 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}} = 0,25 \text{ мм}.$$

2.3.4. Статически неопределимые задачи при растяжении-сжатии

Как было сказано ранее (см. подраздел 1.9), в статически неопределимых системах рассчитать опорные реакции с помощью одних уравнений равновесия невозможно. Покажем на примере фермы, как это можно сделать методами сопротивления материалов. Но сначала несколько слов о фермах – уникальных конструкциях, придуманных инженерами.

Ферма – конструкция, состоящая из стержней, связанных между собой с помощью шарниров, привязанная к фундаменту также только шарнирами, вся нагрузка должна быть приложена только в узлах (в шарнирах). Особенностью фермы является то обстоятельство, что все ее стержни работают только на растяжение или сжатие. Это видно из расчета простой статически определимой фермы на рис. 34.

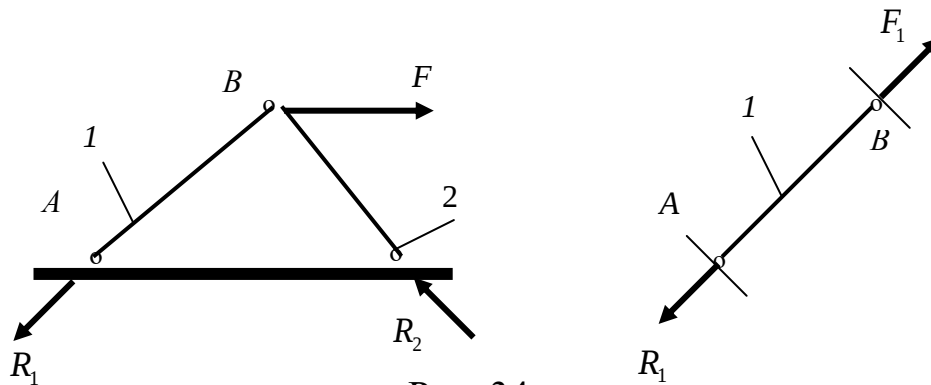


Рис. 34

Вырежем мысленно стержень 1 по шарнирам. В шарнирах на стержень действуют только силы F_1, R_1 , направление которых мы не знаем. Уравнение равновесия $\Sigma m_B = 0$ возможно только в том случае, если сила R_1 направлена вдоль стержня. Аналогично из уравнения равновесия $\Sigma m_A = 0$ получим, что и сила F_1 действует вдоль стержня. Обе реакции в этой ферме легко находятся из уравнений равновесия.

В конце изучения курса «Сопротивление материалов» станет ясно, что, при работе конструктивных элементов на растяжение-сжатие они будут наиболее экономичными.

Ну а теперь рассмотрим статически неопределимую ферму (рис. 35, а).

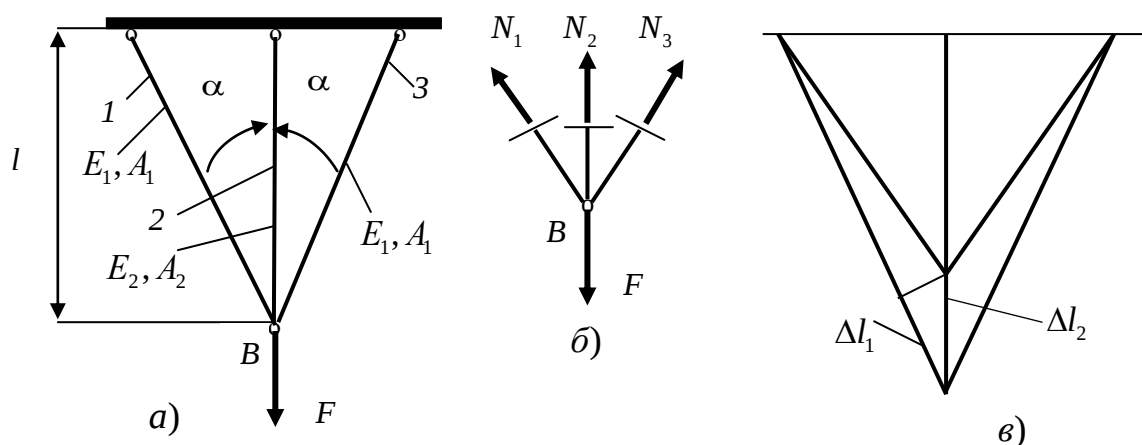


Рис. 35

Ферма для простоты взята симметричной, стержни 1 и 3 – одинаковые. Имеем 3 опорные реакции, следовательно, ферма один раз статически неопределима, поскольку имеем систему сходящихся сил (все внешние силы сходятся в точке B), для которой можно использовать только два уравнения равновесия.

Статическая неопределимость раскрывается в следующей последовательности.

1. Статика.

Записываются возможные уравнения равновесия. В данной задаче их удобно записать через внутренние силы в стержнях, поскольку очевидно, что они равняются соответствующим опорным реакциям. Для этого мысленно вырезаем узел B (рис. 35, б) и уравнения равновесия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= -N_1 \sin \alpha_3 + N_3 \cos \alpha = 0, \text{ откуда } N_1 = N_3; \\ \Sigma Y &= N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha = F. \end{aligned} \right\}$$

Из второго уравнения системы с учетом первого получим одно уравнение статики с двумя неизвестными:

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 = F. \quad (29)$$

2. Геометрия.

Теперь надо получить уравнение деформаций, дающее связь между деформациями входящих в систему элементов. В данном примере – это соотношение между удлинениями стержней (рис. 35, в). На этом рисунке величина Δl_2 очевидна, а величина Δl_1 получается как разность между новой длиной стержня 1 и спроецированной на него первоначальной длиной этого стержня.

Из полученного прямоугольного треугольника получаем уравнение деформаций (при этом учитывается принцип малости деформаций – изменением угла α пренебрегаем):

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha. \quad (30)$$

3. Физика.

Физические уравнения связывают силовое (29) и геометрическое (30) уравнения. Они составляются на основе уравнения (26):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}.$$

Учитывая, что $l_2 = l$, $l_1 = \frac{l}{\cos \alpha}$, получим (рис. 35, а):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E_1 A_1 \cos \alpha}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E_2 A_2}. \quad (31)$$

4. Синтез.

Решая совместно уравнения (29)–(31), получим:

$$N_1 = \frac{F E_1 A_1 \cos^2 \alpha}{E_2 A_2 + 2 E_1 A_1 \cos^3 \alpha}; \quad N_2 = \frac{F E_2 A_2}{E_2 A_2 + 2 E_1 A_1 \cos^3 \alpha}. \quad (32)$$

Проанализируем формулы (32).

Допустим стержень 1 начинает утоньшаться все более и более ($E_1 A_1 \Rightarrow 0$). Казалось бы, он должен разрушиться. Но оказывается, что скорее разрушится стержень 2, что следует из формул (32), поскольку $N_1 \Rightarrow 0$, а N_2 увеличивается, иными словами стержень 1 передает свою нагрузку на стержень 2.

Аналогичная ситуация возникнет при утоньшении стержня 2 – он будет передавать свою нагрузку на стержень 1.

Теперь рассмотрим другую задачу: ферма та же, что и на рис. 35, а, но нагрузка F отсутствует, а вся ферма нагрелась от увеличения температуры на Δt .

В этом случае в ферме возникнут температурные напряжения и деформации. Они рассчитываются по такому же алгоритму.

Очевидно, что уравнение статики примет вид: $2 N_1 \cos \alpha + N_2 = 0$.

Уравнение деформаций не изменится, а в физических уравнениях на основе принципа независимости действия сил появятся дополнительные температурные слагаемые:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E_1 A_1 \cos \alpha} + \beta_1 \Delta t \frac{l}{\cos \alpha}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E_2 A_2} + \beta_2 \Delta t \cdot l.$$

В этих уравнениях β_1 и β_2 – коэффициенты линейного расширения соответствующих стержней. А далее также совместно решаются полученные уравнения.

И наконец, рассмотрим еще одну задачу. Та же ферма, без нагрузки, но изготовлена с дефектом: стержень 2 короче на небольшую величину δ (рис. 36, а). Но ферму собрали, приложив определенные усилия, и в ней возникли так называемые монтажные напряжения и внутренние силы. Они рассчитываются по аналогичному алгоритму.

Уравнение статики будет такое же, как и в предыдущей задаче:

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 = 0.$$

Получим деформационное уравнение (рис. 36, б).

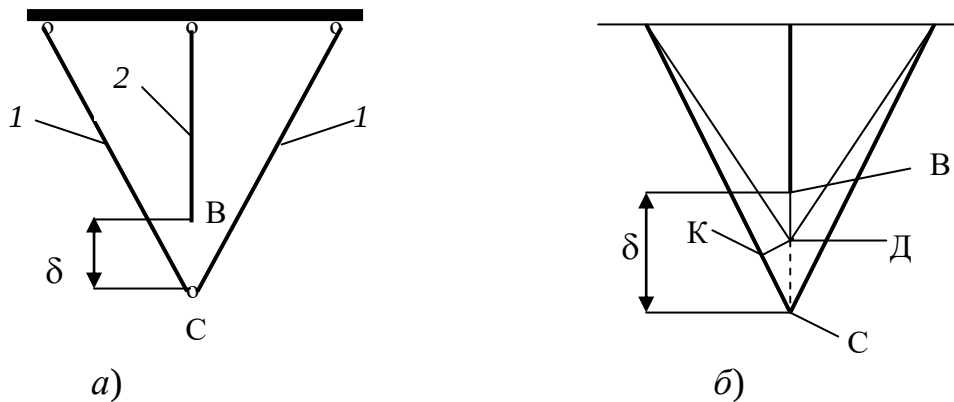


Рис. 36

При сборке стержень 2 растянули, и точка В совместилась с точкой С (рис. 36, б). Стержень 2 как пружина растянулся и теперь стремится сжаться, но при этом он сжимает и стержни 1. Точка С занимает окончательное положение в точке Д. В итоге получилось:

$$\Delta l_2 = ВД; \quad ДС = \delta - \Delta l_2; \quad \Delta l_1 = КС.$$

Из треугольника КСД получаем деформационное уравнение:

$$\Delta l_1 = (\delta - \Delta l_2) \cos \alpha.$$

Физические уравнения получают вид:

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l}{E_1 A_1 \cos \alpha}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E_2 A_2}.$$

Теперь подведем итоги и отметим особенности статически неопределимых задач.

1. В статически неопределимых системах распределение внутренних сил зависит не только от внешней нагрузки, но и от жесткостей входящих в нее элементов. Чем жестче элемент, тем большую нагрузку он воспринимает и наоборот (задача 1).

2. В таких системах возникают температурные напряжения и внутренние силы от изменения температуры (задача 2).

3. В статически неопределимых системах возникают монтажные напряжения и внутренние силы от неточности изготовления входящих в нее элементов (задача 3).

4. Расчет таких систем является довольно затруднительным, поэтому, как правило, он выполняется с использованием компьютеров.

2.4. Механические характеристики материалов

Механические характеристики материалов определяются при испытаниях специальных образцов, изготовленных из данных материалов. Существует великое множество испытаний. Мы рассмотрим самое распространенное и информативное испытание на растяжение и сжатие образцов из малоуглеродистой стали и серых чугунов – наиболее широко используемых в машиностроении материалов.

2.4.1. Испытание на растяжение образцов из малоуглеродистой стали

На рис. 37 изображен стандартный образец для испытания на растяжение ($d_0 = 8$ мм, $l_0 = 80$ мм – размеры рабочей части образца). На концах образца находятся технологические утолщения для закрепления в захватах испытательной машины.

При испытаниях образец растягивается медленно возрастающими силами F (рис. 38, *а*). При этом строится машинная диаграмма растяжения: зависимость удлинения рабочей части образца Δl от F .

Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали имеет характерный вид (рис. 38, *б*). Рассмотрим эту диаграмму по участкам и выясним, какие механические характеристики определяются.

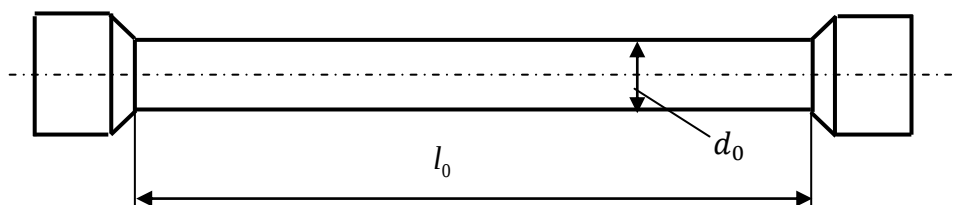


Рис. 37

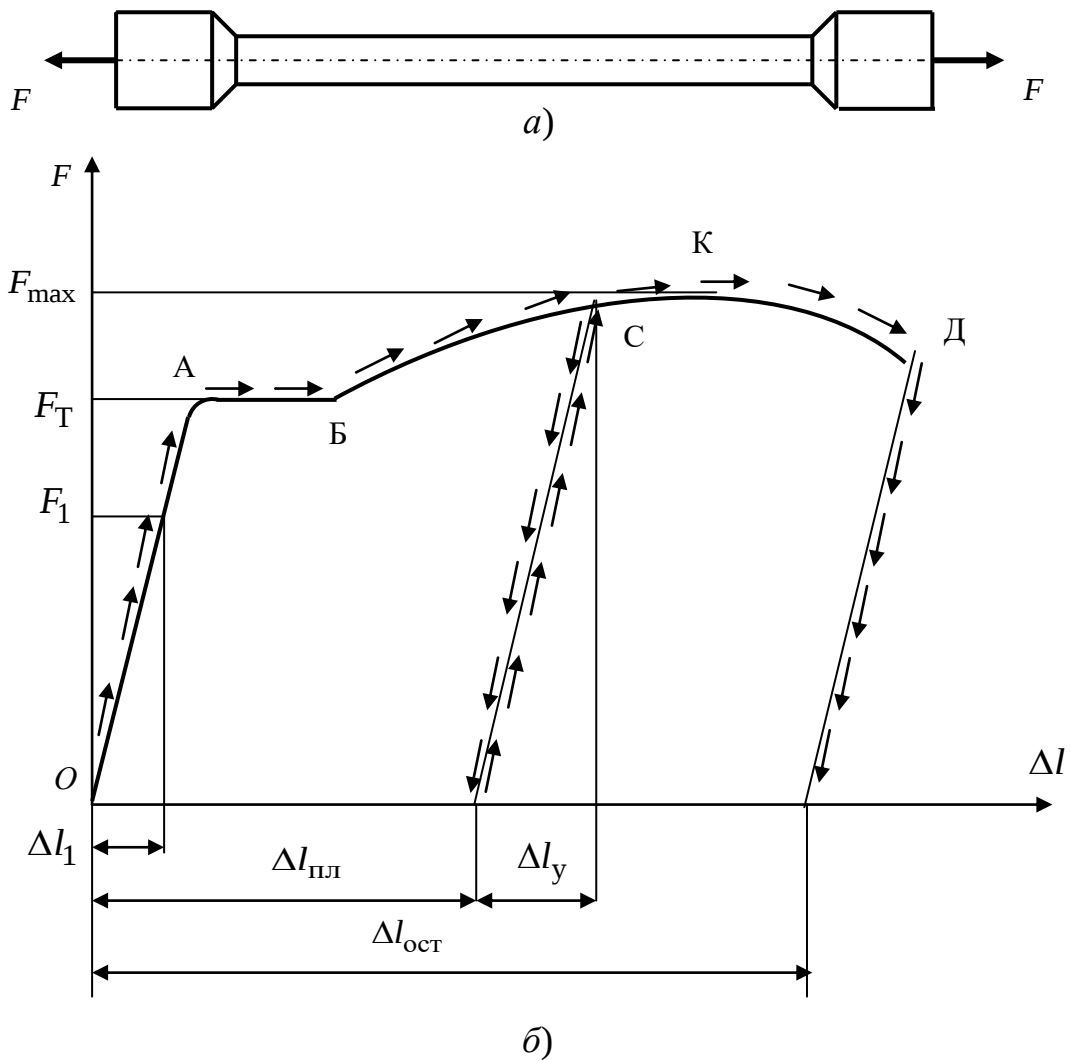


Рис. 38

Участок OA . Это участок упругого деформирования материала, на котором соблюдается закон Гука и линии нагрузки и разгрузки совпадают. На данном участке определяется модуль упругости первого рода E . Для этого в любой точке участка фиксируется растягивающая сила F_1 и соответствующее Δl_1 . Из формулы (26а): $E = \frac{N \cdot l}{A \cdot \Delta l}$. С учетом того, что у нас

$N = F_1$, $l = l_0$, $A = A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$, $\Delta l = \Delta l_1$, получим формулу для определения модуля упругости:

$$E = \frac{4F_1 l_0}{\pi d_0^2 \Delta l_1}.$$

Участок АБ. Это площадка текучести. На данном участке образец вытягивается без роста нагрузки. Явление текучести материала наблюдается только у малоуглеродистых сталей. Как известно, стали состоят из кристаллов феррита (чистое железо) и углеродистых (перлитовых) прослоек. Перлитовые прослойки плохо сопротивляются касательным напряжениям. Когда максимальные касательные напряжения в растягиваемом образце (как будет показано далее они имеют место в сечениях, расположенных под углом $\pm 45^\circ$ к оси образца) достигают критического значения, перлитовые прослойки, которые оказались ориентированными в этих направлениях, внезапно в массовом порядке разрушаются, в результате чего образец и вытягивается. Это так называемое микроразрушение материала, при котором его несущая способность сохраняется. На этом участке определяется важнейшая прочностная характеристика материала – предел текучести (соответствующее этой площадке напряжение):

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}.$$

Участок БК. Это участок упрочнения материала. Нагрузка растет медленнее, микроразрушение перлитовых прослоек продолжается. В произвольной точке *С* участка образец разгружается. При этом линия разгрузки идет параллельно участку *ОА*. Если теперь образец нагрузить вновь, то у него будет отсутствовать площадка текучести, а его область упругого деформирования возрастает, как это видно из диаграммы. Поэтому этот участок и называется участком упрочнения.

Явление упрочнения материала широко используется в технике и называется *наклепом* или *нагартовкой*. Частные виды наклепа: дробеструйная, пескоструйная или водоструйная обработка поверхности детали, в результате которых упрочняется поверхностный слой детали.

Из рис. 38 видно, что

$$\Delta l = \Delta l_y + \Delta l_{пл},$$

где Δl_y – упругая часть деформации, а $\Delta l_{пл}$ – пластическая (остаточная) часть деформации, вызванная необратимым процессом микроразрушения перлитовых прослоек.

Участок КД – участок разрушения. В точке *К* начинается процесс макроразрушения, который с точки зрения прочности детали уже недопустим: в самом слабом месте рабочей части образца образуется *шейка* – местное сужение (рис. 39), которое быстро развивается.

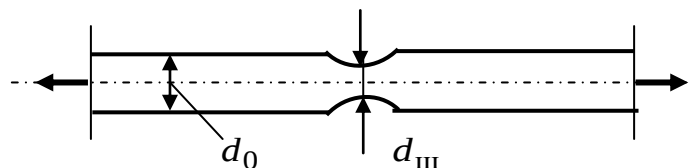


Рис. 39

В точке *К* определяется вторая важнейшая прочностная характеристика материала – предел прочности при растяжении:

$$\sigma_{пч.р} = \frac{F_{\max}}{A_0}.$$

Точка Д. В этой точке образец разрывается на две части. Линия снятия нагрузки параллельна линии *ОА*.

По этой точке определяются две характеристики пластических свойств материала:

– относительное остаточное удлинение при разрушении

$$\delta = \frac{\Delta l_{\text{ост}}}{l_0} 100 \%;$$

– относительное остаточное сужение сечения при разрушении

$$\psi = \frac{A_0 - A_{\min}}{A_0} 100 \%,$$

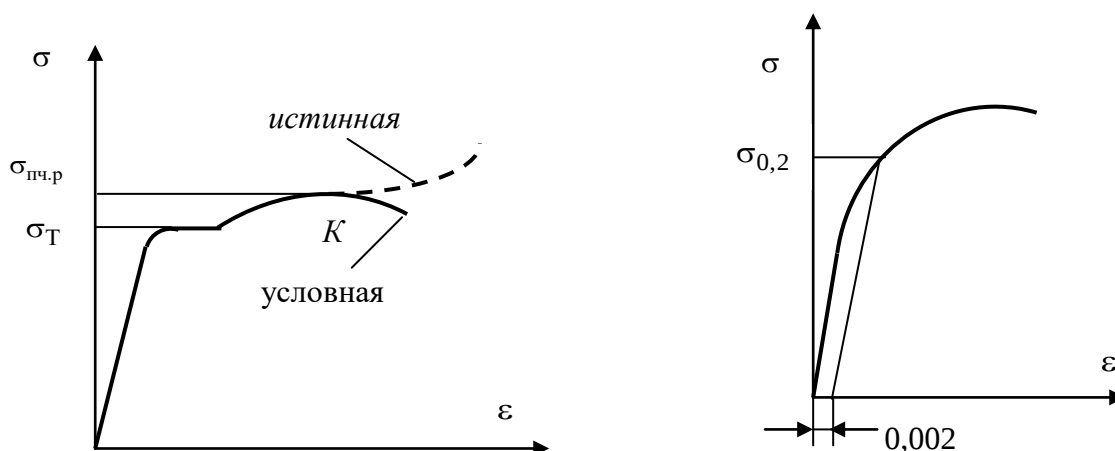
где $A_{\min} = \frac{\pi d_{\text{ш}}^2}{4}$ – площадь сечения в месте разрыва.

Таким образом, при испытаниях на растяжение образцов из малоуглеродистой стали *определяются 5 важных механических характеристик*: E , σ_T , $\sigma_{\text{пч.р}}$, δ , ψ .

Заметим, что машинная диаграмма $F - \Delta l$ отражает не только свойства материала, но и зависит от размеров образца: при испытаниях более тонкого образца она вытянется вдоль оси абсцисс, а более толстого образца – вдоль оси ординат. Желательно, конечно, иметь диаграмму, отражающую только свойства материала. Для этого нужно машинную диаграмму перестроить в условную диаграмму растяжения $\sigma - \varepsilon$, где условное напряжение $\sigma = \frac{F}{A_0}$, линейная деформация $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$, рис. 40. Эта диаграмма

называется условной, потому что она не учитывает изменение площади поперечного сечения при подсчете условного напряжения, но зато она отражает только свойства материала. Кстати, до точки K , по которой определяется $\sigma_{\text{пч.р}}$, условные напряжения практически совпадают с истинными напряжениями $\sigma_{\text{ист}} = \frac{F}{A_{\text{ист}}}$. Здесь $A_{\text{ист}}$ – истинная площадь сечения.

Ну и, наконец, заметим, что для материалов, у которых нет площадки текучести, иногда вводят понятие условного предела текучести $\sigma_{0,2}$ – это такое напряжение, при котором после разгрузки образца деформация $\varepsilon = 0,002$ (рис. 41).



2.4.2. Испытание на сжатие образцов из малоуглеродистой стали

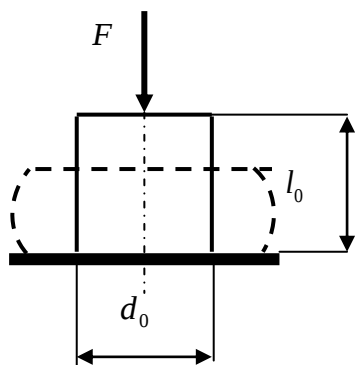


Рис. 42

Схема испытания на сжатие показана на рис. 42. Образцы – сравнительно короткие, чтобы при сжатии не теряли устойчивость.

Малоуглеродистая сталь – пластичный материал (далее об этом будет сказано подробнее). Пластичные материалы при сжатии не разрушаются, потому образец сплющивается, пока хватает усилия пресса. Предел прочности при сжатии $\sigma_{пч.с}$ отсутствует, но можно сказать, что $\sigma_{пч.с} \Rightarrow \infty$.

На рис. 43 совмещены диаграммы растяжения и сжатия, из которых видно, что модули упругости E при растяжении и сжатии одинаковы, пределы текучести также по модулю равны: $\sigma_{Т.р} = |\sigma_{Т.с}| = \sigma_T$, поэтому у предела текучести индексы растяжения или сжатия не ставят.

Из этого следует, что для малоуглеродистых сталей из испытаний на сжатие новой информации не получают, и поэтому их проводят только для новых материалов.

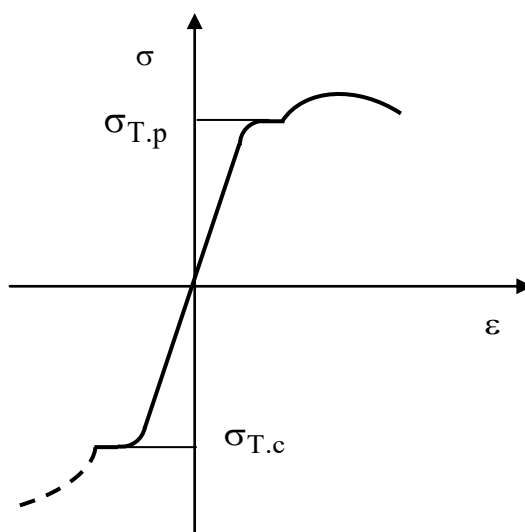


Рис. 43

2.4.3. Испытание на растяжение и сжатие образцов из серого чугуна

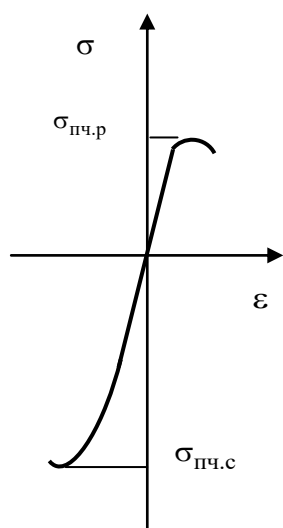


Рис. 44

Испытания проводятся на таких же образцах и определяются те же механические характеристики. Серые чугуны – хрупкие материалы, и они разрушаются при сжатии. Поэтому у серых чугунов определяется также предел прочности при сжатии $\sigma_{пч.с}$. Особенностью всех хрупких материалов является то обстоятельство, что они лучше воспринимают сжимающие нагрузки, чем растягивающие. Это хорошо видно из рис. 44, на котором совмещены диаграммы растяжения и сжатия: $|\sigma_{пч.с}| > \sigma_{пч.р}$. Модули упругости при растяжении и сжатии одинаковы.

2.4.4. Таблица основных механических характеристик малоуглеродистых сталей и серых чугунов

В табл. 2 даны усредненные данные. Характеристики пластичности δ , ψ у малоуглеродистых сталей существенно выше, чем у чугунов. Малоуглеродистые стали – типичные представители пластичных материалов, а серые чугуны – хрупких материалов.

Таблица 2

Материал	E , МПа	σ_T , МПа	$\sigma_{пч.р}$, МПа	$\sigma_{пч.с}$, МПа	δ , %	ψ , %
Малоуглеродистая сталь	$1 \cdot 10^5$	300	450	–	25	65
Серые чугуны	$1 \cdot 10^5$	–	100	500	2	2

Все эти характеристики зависят от температуры. Приведенные данные соответствуют температуре $t = 20^\circ \text{C}$.

2.4.5. Хрупкость и пластичность

В природе не существует ни хрупких, ни пластичных материалов, а существует хрупкое или пластичное состояние материала в зависимости от температуры, скорости нагружения и поля напряжений в детали.

Чем выше температура, меньше скорость нагружения и равномернее поле напряжений, тем материал более склонен к пластичному состоянию. А чем меньше температура, выше скорость нагружения и неравномерней поле напряжений, тем материал более склонен к хрупкому состоянию.

Материалы условно делят на хрупкие и пластичные, в зависимости от их поведения в нормальных условиях: $t = 20^{\circ}\text{C}$, статическая нагрузка и равномерное поле напряжений. Единого критерия не существует, но есть весьма приближенный: если $\delta < 5\%$, материал считается хрупким. По этому критерию видно, что серые чугуны – хрупкий материал, а малоуглеродистые стали – пластичный.

2.5. Теория напряженно-деформированного состояния

2.5.1. Напряженное состояние точки

Как мы уже знаем, напряжение связано с точкой и с сечением, проведенным через точку. Поэтому в каждой точке действует бесчисленное количество напряжений.

Напряженное состояние точки – это совокупность всех напряжений по всем возможным сечениям, которые можно провести через данную точку.

Для изучения напряженного состояния точки вокруг нее мысленно вырезают кубик с бесконечно короткими ребрами и показывают составляющие полных напряжений, действующих по граням этого кубика (рис. 45).

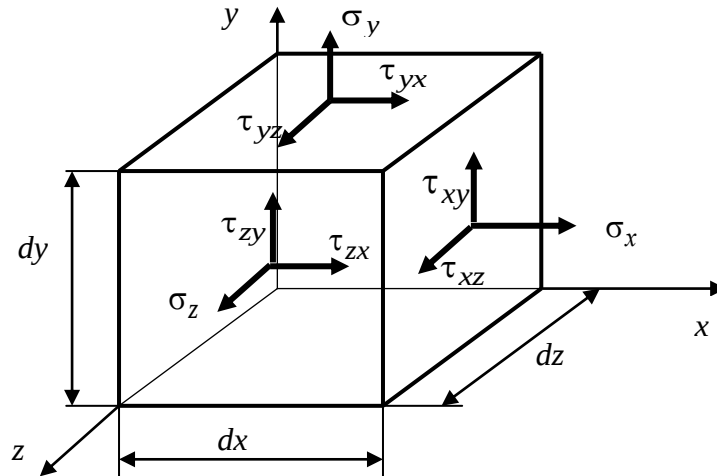


Рис. 45

Эти составляющие напряжений записывают в виде матрицы (33), которую называли *тензором напряжений* T_H .

$$T_H = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Далее будет показано, что, зная тензор напряжений, можно определить напряжение по любому сечению, проведенному через данную точку. Заметим, что на рис. 45 не показаны напряжения, действующие по невидимым граням кубика, поскольку они равны и противоположно направлены соответствующим напряжениям на противоположной видимой площадке.

Закон парности касательных напряжений: касательные напряжения, действующие во взаимно перпендикулярных площадках и направленные либо к общему ребру, либо от него, равны по величине.

Докажем этот закон.

Запишем уравнение равновесия (с учетом напряжений по невидимым граням кубика):

$$\begin{aligned}\Sigma m_x = & \tau_{xz} dydz \frac{dy}{2} - \tau_{xz} dydz \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dydz \frac{dz}{2} + \tau_{xy} dydz \frac{dz}{2} - \sigma_y dx dz \frac{dz}{2} + \\ & + \sigma_y dx dz \frac{dz}{2} + \tau_{yz} dx dz dy - \tau_{zy} dx dy dz + \sigma_z dx dy \frac{dy}{2} - \sigma_z dx dy \frac{dy}{2} = 0,\end{aligned}$$

откуда получим: $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Аналогично из уравнений равновесия $\Sigma m_y = 0$ и $\Sigma m_z = 0$ получим равенство двух других пар касательных напряжений.

Итак, закон парности касательных напряжений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx}, \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}.\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Мы получили, что тензор напряжений (33) описывается не девятью, а шестью напряжениями в рассматриваемой точке.

Вращая кубик вокруг его центра масс, положения его граней и напряжения на них изменяются. С помощью тензорного анализа доказано, что кубик может занять при этом только одно положение, когда на его гранях исчезнут касательные напряжения. Такие грани называются *главными гранями*, или *площадками*, действующие по ним нормальные напряжения – *главными напряжениями*, а оси координат, перпендикулярные главным площадкам, – *главными осями*.

Главные напряжения обозначаются: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При этом соблюдается иерархия – с учетом знака напряжения: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

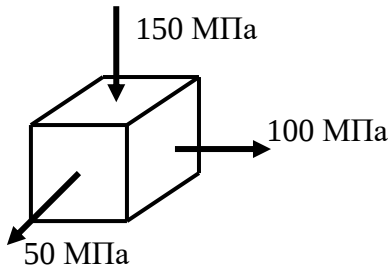


Рис. 46

Пример

Кубик ориентирован главными площадкам (рис. 46). Требуется расставить индексы у главных напряжений.

Решение

$\sigma_1 = 100$ МПа, $\sigma_2 = 50$ МПа, $\sigma_3 = -150$ МПа.

Виды напряженных состояний классифици-

руются

В

соответствии

с главными напряжениями (рис. 47).

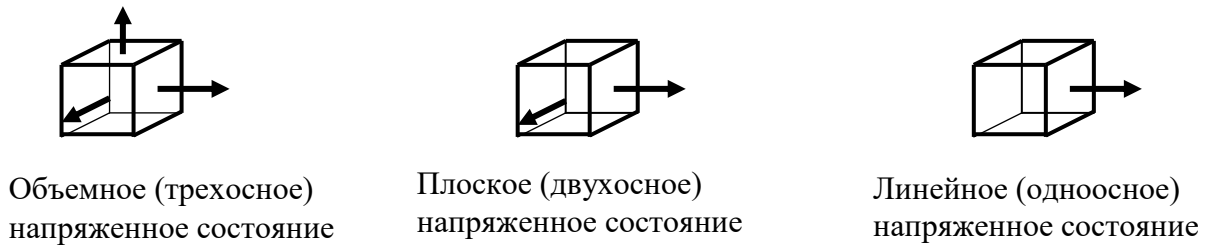


Рис. 47

Заметим, что первые два напряженных состояния называются также *сложными*, а последнее одноосное – *простым* напряженным состоянием.

Докажем теперь, что, зная напряжения по трем взаимно перпендикулярным площадкам, можно найти напряжения в любой произвольной площадке в данной точке.

Пусть через данную точку (кубик на рис. 48, а) проведено произвольное сечение с нормалью ν . Отсеченная от кубика призма $OBCD$ показана на рис. 48, б. Напряжения по граням кубика известны (рис. 48, б), направляющие косинусы нормали ν также известны: l, m, n . Требуется найти составляющие полного напряжения X, Y, Z по проведенному сечению.

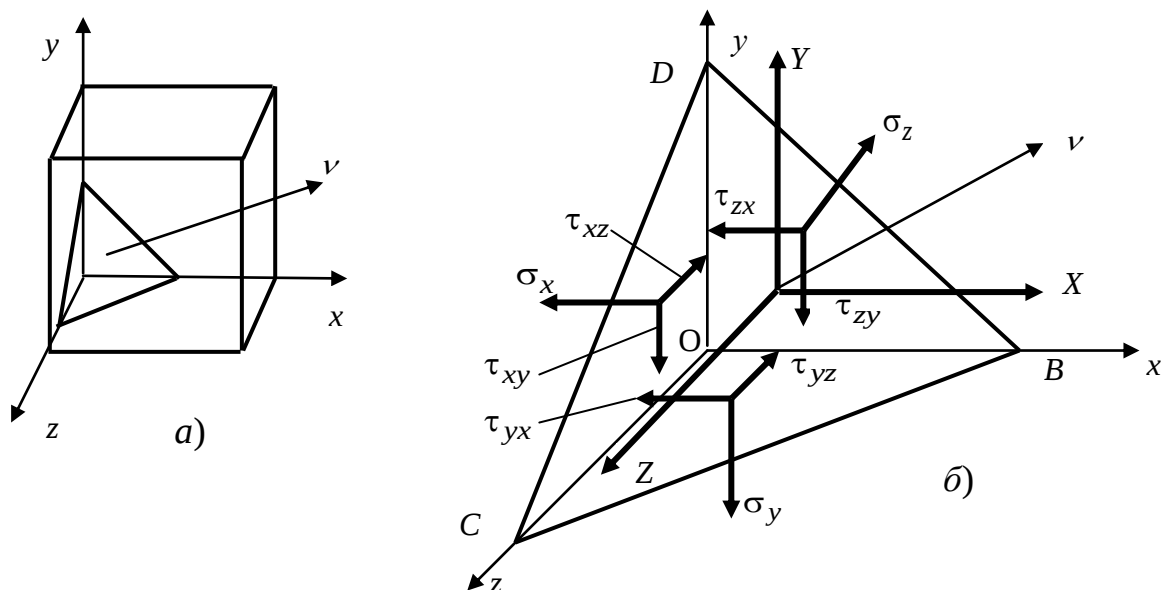


Рис. 48

Обозначим через A площадь треугольника BCD , тогда:

$A_x = A \cdot l$ – площадь треугольника OCD ;

$A_y = A \cdot m$ – площадь треугольника OBC ;

$A_z = A \cdot n$ – площадь треугольника OBD .

Составим уравнения равновесия для призмы:

$$\Sigma F_x = XA - \sigma_x A_x - \tau_{yx} A_y - \tau_{zx} A_z = 0;$$

$$\Sigma F_y = YA - \sigma_y A_y - \tau_{xy} A_x - \tau_{zy} A_z = 0;$$

$$\Sigma F_z = ZA - \sigma_z A_z - \tau_{yz} A_y - \tau_{xz} A_x = 0,$$

из которых и выражаем искомые напряжения:

$$\left. \begin{aligned} X &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ Y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ Z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Рассмотрим две практические задачи теории напряженного состояния точки.

Задача 1.

Точка находится в плоском напряженном состоянии и ориентирована главными площадками (рис. 49). Требуется найти нормальное и касательное напряжения в площадке, проведенной под произвольным углом α к площадке с одним из главных напряжений.

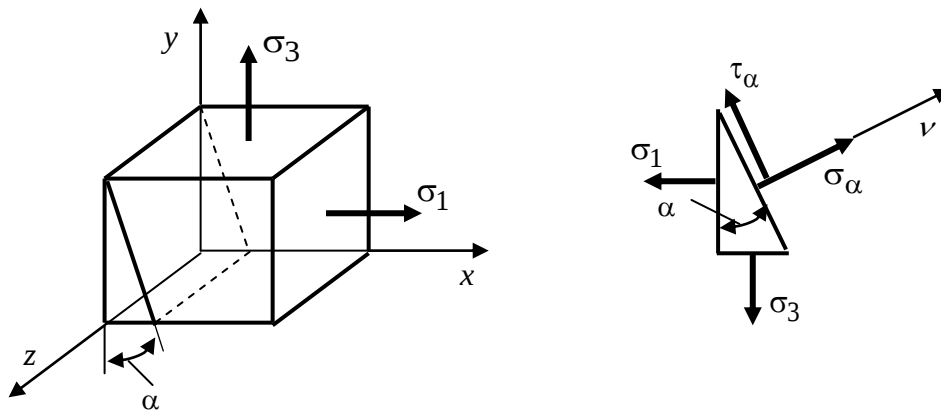


Рис. 49

Решение.

Направляющие косинусы нормали v : $l = \cos \alpha$, $m = \sin \alpha$, $n = 0$.

Напряжения: $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_3$, $\sigma_z = 0$, касательные напряжения равны нулю.

По формулам (35): $X = \sigma_1 \cos \alpha$, $Y = \sigma_3 \sin \alpha$, $Z = 0$.

Проецируя X и Y на направления σ_α и τ_α , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \alpha, \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Из второй формулы (36) следует, что $\tau_{\max} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|$ действуют в диагональных сечениях при $\alpha = \pm 45^\circ$.

Задача 2.

Точка находится в плоском напряженном состоянии (рис. 50). Требуется найти главные напряжения и положение главных площадок.

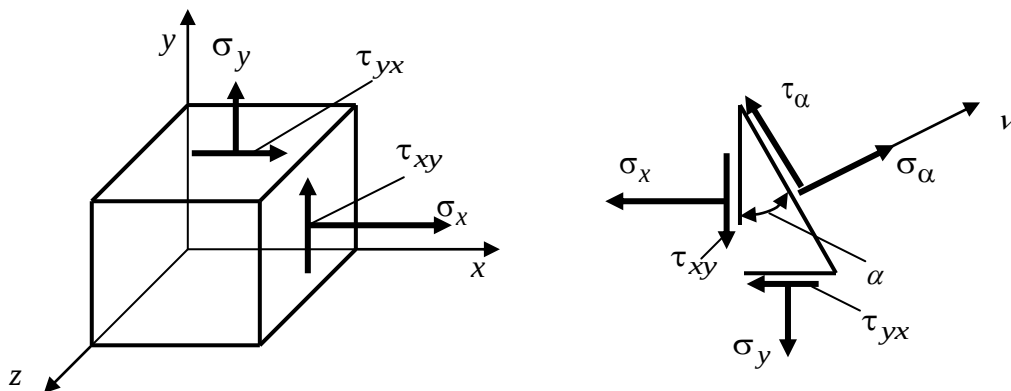


Рис. 50

Одно главное напряжение уже известно: $\sigma_z = 0$. Для нахождения двух других главных напряжений вырезаем из кубика призму (рис. 50), наклон-

ная плоскость которой повернута вокруг оси z на угол α . Направляющие косинусы нормали ν этой плоскости: $l = \cos \alpha$, $m = \sin \alpha$, $n = 0$. Затем, как и в задаче 1, с помощью формул (35) определяем σ_α и τ_α :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Чтобы наклонная плоскость стала главной площадкой, надо найти такой ее угол поворота α_0 , при котором исчезнет касательное напряжение (α_0 – угол поворота кубика вокруг оси z , при котором все его грани становятся главными):

$$\tau_{\alpha_0} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (38)$$

Формула (38) соответствует двум углам α_0 и $\alpha_0 + 90^\circ$. Для определения двух других главных напряжений надо угол α_0 подставить в первую формулу (37):

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (39)$$

2.5.2. Деформированное состояние в точке. Объемная деформация. Обобщенный закон Гука

По аналогии с понятием напряженного состояния точки вводится понятие *деформированного состояния в точке* – это совокупность всех линейных и угловых деформаций по всем возможным направлениям и плоскостям, которые можно провести через данную точку.

Деформированное состояние точки также характеризуется тензором деформаций:

$$T_d = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (40)$$

Главные деформации – это линейные деформации в направлении главных напряжений. Они обозначаются, как и главные напряжения, ε_1 , ε_2 , ε_3 при соблюдении иерархии $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$. Главные деформации обозначены на рис. 51 через изменение длины ребер кубика в результате его деформирования.

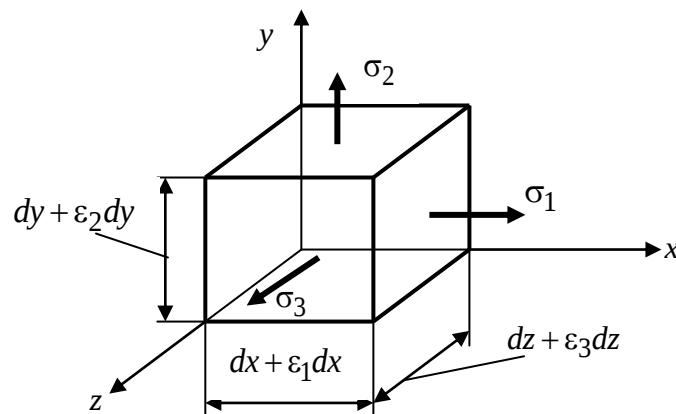


Рис. 51

Подсчитаем относительное изменение объема e кубика при его деформировании: $e = \frac{V_1 - V}{V}$, где $V = dxdydz$ – объем кубика до его деформирования; $V_1 = dx(1 + \varepsilon_1)dy(1 + \varepsilon_2)dz(1 + \varepsilon_3)$ – объем кубика после его деформирования. Подставляя V и V_1 в формулу для e с точностью до величин высшего порядка малости, получаем:

$$e \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Поскольку изменение объема вызывают только линейные деформации, эту формулу можно обобщить на произвольное напряженное состояние:

$$e \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (41)$$

Выведем теперь *обобщенный закон Гука* на основе частного закона Гука (19) и закона Пуассона (23). Обратимся к рис. 51, на котором изображена точка, ориентированная в главных площадках, по которым действуют главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 . Воспользуемся принципом независимости действия сил. Допустим, что действует одно напряжение σ_1 . Соответствующие ему линейные деформации по законам Гука и Пуассона показаны в табл. 3 (строка σ_1). Точно так же поступаем с напряжениями σ_2 и σ_3 и заполняем табл. 3.

Таблица 3

	ε_1	ε_2	ε_3
σ_1	$\frac{\sigma_1}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_1}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_1}{E}$
σ_2	$-\mu \frac{\sigma_2}{E}$	$\frac{\sigma_2}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_2}{E}$
σ_3	$-\mu \frac{\sigma_3}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_3}{E}$	$\frac{\sigma_3}{E}$

Теперь складываем по столбцам табл. 3 линейные деформации и получаем обобщенный закон Гука (42) для точки, ориентированной в главных площадках:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Легко понять, что если точка ориентирована произвольным образом, то линейные деформации вызывают только нормальные напряжения, а угловые деформации вызывают касательные напряжения, причем каждая пара касательных напряжений вызывает угловую деформацию в плоскости своего действия (рис. 52).

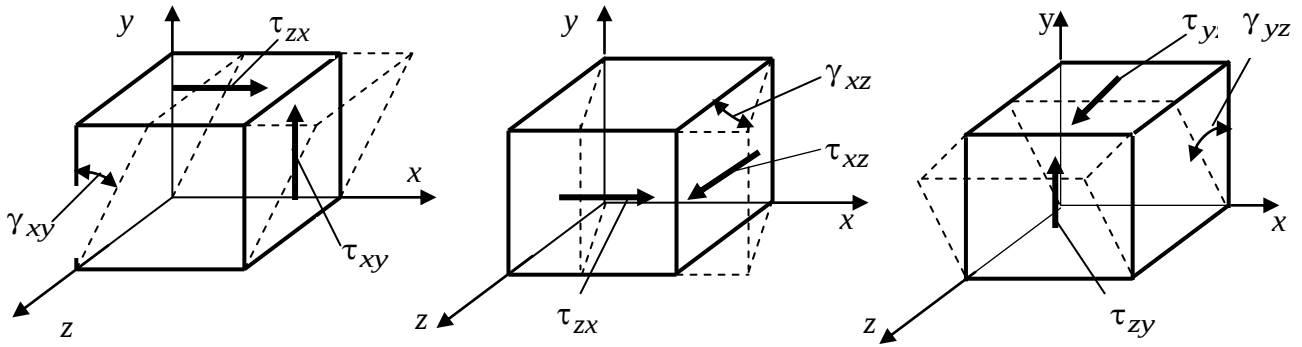


Рис. 52

Обобщенный закон Гука для произвольно ориентированной точки описывается формулами:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z) \right]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

где G – модуль упругости второго рода.

С учетом обобщенного закона Гука формула (41) для объемной деформации примет вид:

$$e = \frac{1-\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (44)$$

Определим теперь *удельную потенциальную энергию при объемном напряженном состоянии*. Возьмем кубик, ориентированный в главных площадках (см. рис. 51). $F_x = \sigma_1 dydz$ – сила, связанная с напряжением σ_1 , совершает при деформировании кубика работу на перемещении $\varepsilon_1 dx$:
 $W_x = \frac{F_x}{2} \varepsilon_1 dx = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1 dx dy dz}{2}$ (берется среднее значение силы, поскольку она возрастает от нуля до конечного значения).

Соответственно $W_y = \frac{\sigma_2 \varepsilon_2 dx dy dz}{2}$; $W_z = \frac{\sigma_3 \varepsilon_3 dx dy dz}{2}$. Вся работа деформирования переходит в потенциальную энергию кубика U :

$$U = W_x + W_y + W_z = \frac{(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) dx dy dz}{2}.$$

Разделим это выражение на объем кубика $V = dx dy dz$ и получим *удельную потенциальную энергию деформирования*:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \quad (45)$$

Подставляя в (45) формулы (42), получаем:

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \right]. \quad (46)$$

Разделим теперь u на *удельную энергию изменения объема* $u_{об}$ и *удельную энергию изменения формы* $u_{ф}$ на кубике, ориентированном в главных площадках: $u = u_{об} + u_{ф}$ (рис. 53).

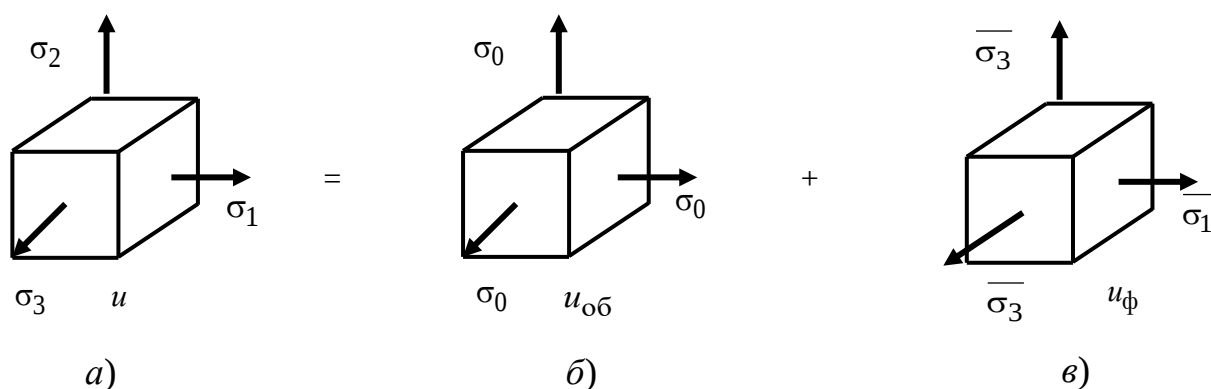


Рис. 53

Чтобы выделить из u (рис. 53, а) объемную энергию $u_{об}$ (рис. 53, б), надо из главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ выделить одинаковые напряжения σ_0 (см. рис. 53, б). Для нахождения σ_0 надо приравнять относительное изменение объема e (формула (44)) в точках (см. рис. 53, а, б):

$$e = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = e = \frac{1-2\mu}{E}3\sigma_0^2,$$

откуда

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (47)$$

Далее по формуле (46) находим:

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (48)$$

Теперь очевидно, что главные напряжения в кубике (рис. 53, в), в котором изменяется только форма: $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 - \sigma_0$; $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2 - \sigma_0$; $\bar{\sigma}_3 = \sigma_3 - \sigma_0$. Подставляя эти напряжения в (46), получаем:

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3). \quad (49)$$

2.6. Теории предельных состояний (теории прочности)

2.6.1. Назначение теорий прочности.

Эквивалентное напряжение

Теории прочности нужны для расчета на прочность точек, находящихся в сложном напряженном состоянии.

Введем некоторые понятия.

Понятие *эквивалентных напряженных состояний*: точки находятся в эквивалентных напряженных состояниях, если при увеличении действующих на них напряжений в одно и то же число раз, они одновременно достигают предельных напряженных состояний.

Понятие *предельного напряженного состояния* – это такое напряженное состояние, при котором в материале точки начинают происходить качественные изменения: материал или разрушается, или начинает течь.

Идея всех теорий прочности заключается в том, что точку, находящуюся в сложном напряженном состоянии, сводят к точке, находящейся в условиях эквивалентного одноосного растяжения с напряжением $\sigma_{\text{экв}}$ (рис. 54). И непосредственной задачей теорий прочности является выразить эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}$ через главные напряжения исходной точки.

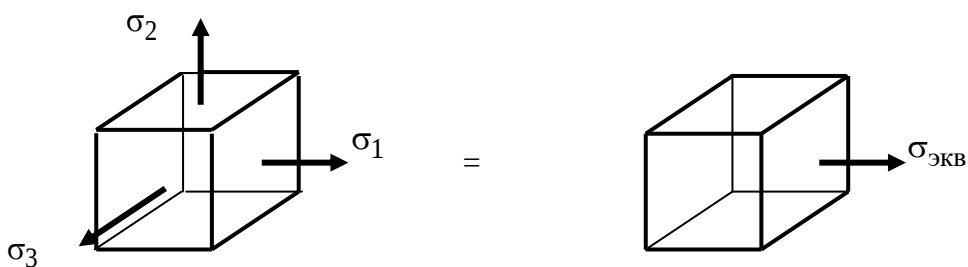


Рис. 54

Опуская устаревшие 1-ю и 2-ю теории прочности, мы рассмотрим три последующих теории прочности, наиболее широко используемые в инженерной практике.

2.6.2. Теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности)

Эта теория основана на четкой физической идее: точки являются эквивалентными в смысле прочности, если у них одинаковы максимальные касательные напряжения $\tau_{\max}$, поскольку пластичные материалы начинают течь в направлении $\tau_{\max}$, а хрупкие – разрушаться.

Находим $\tau_{\max}$ в исходной точке (формула для $\tau_{\max}$ была получена в задаче 1 (см. подраздел 2.5.1, с. 55)): $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

В эквивалентной точке: $\sigma_1 = \sigma_{\text{экв}}$, $\sigma_3 = 0$ и $\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\text{экв}}}{2}$.

Приравниваем эти $\tau_{\max}$ и получаем:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (50)$$

2.6.3. Энергетическая теория прочности (четвертая теория прочности)

Эксперименты, проведенные в разных странах, показали, что на прочность точки практически влияет только энергия формоизменения u_{ϕ} . Поэтому согласно четвертой теории прочности точки являются эквивалентными в смысле прочности, если у них одинаковы u_{ϕ} .

Для исходной точки по формуле (49)

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3).$$

В эквивалентной точке $u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{\text{экв}}^2$.

Приравнивая эти u_{ϕ} и проводя несложные преобразования, получаем:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (51)$$

Рассмотрим два примера.

Пример 1

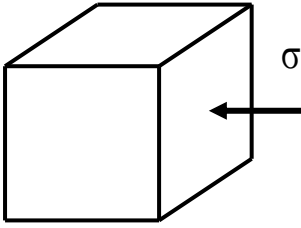


Рис. 55

Точка находится в условиях одноосного сжатия (рис. 55). Найти $\sigma_{\text{экв}}$ по 3-й и 4-й теориям прочности.

Решение

Вообще говоря, поскольку точка находится в одноосном напряженном состоянии, то для расчета ее на прочность нет необходимости пользоваться какими-либо теориями прочности. Но поступим формально и выполним условие задачи.

Главные напряжения в точке: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma$.

По обеим теориям прочности получаем $\sigma_{\text{экв}} = \sigma$.

Это значит, что и 3-я, и 4-я теории прочности не видят разницы между одноосным растяжением и одноосным сжатием. Поэтому данные теории прочности можно применять только для пластичных материалов, у которых в качестве предельного напряжения берется предел текучести σ_T , который, как мы знаем, одинаков при растяжении и сжатии.

Пример 2

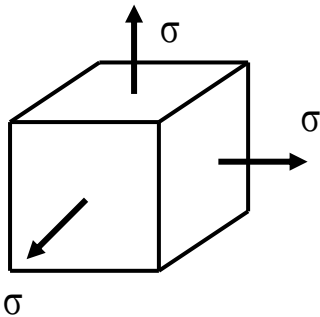


Рис. 56

Точка находится в условиях трехмерного равномерного растяжения (рис. 56). Найти $\sigma_{\text{экв}}$ по 3-й и 4-й теориям прочности.

Решение

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma.$$

По обеим теориям прочности $\sigma_{\text{экв}} = 0$.

Это значит, что трехмерное равномерное растяжение эквивалентно ненагруженной точке.

Такой результат, конечно же, некорректен, и он накладывает дополнительное ограничение на использование этих теорий прочности: их нельзя использовать, когда разница между σ_1 и σ_3 невелика. Чем эта разница больше, тем корректней получаемый результат.

Подводя итог под 3-й и 4-й теориями прочности, отметим, что данные теории в оговоренных рамках широко используются в инженерной практике. 4-ая энергетическая теория дает более точный результат за счет учета σ_2 . Но эти теории нельзя использовать для хрупких материалов.

2.6.4. Обобщенная теория прочности Мора (пятая теория прочности)

Немецкий инженер и ученый К. О. Мор исповедовал научную концепцию Ньютона: «Я гипотез не изобретаю». В конце XIX – начале XX вв., в течение двух десятилетий он проводил эксперименты по изучению влияния главных напряжений на прочность различных материалов для разработки своей теории прочности. Все выводы он делал исходя из результатов своих экспериментов. Первый вывод – главное напряжение σ_2 очень незначительно влияет на прочность, и его можно не учитывать. Это, по сути, экспериментальное подтверждение 3-й теории прочности. Поэтому при дальнейшей разработке теории он проводил эксперименты с образцами, находящимися в двухосном напряженном состоянии. Он брал определенное соотношение между σ_1 и σ_3 и, пропорционально увеличивая напряжения, доводил образец до предельного напряженного состояния. Соответствующие значения σ_1 и σ_3 К. О. Мор наносил на график (рис. 57).

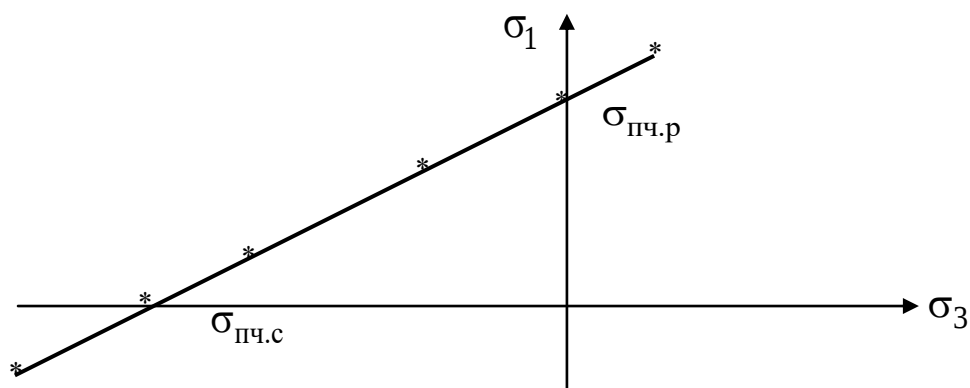


Рис. 57

К своему удивлению, он заметил, что все эти точки с высокой точностью легли на одну прямую. Далее было написано уравнение полученной экспериментальной прямой в отрезках:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{пч.р}}} + \frac{\sigma_3}{-\sigma_{\text{пч.с}}} = 1,$$

откуда получаем

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{пч.р}}}{\sigma_{\text{пч.с}}} \sigma_3 = \sigma_{\text{пч.р}}. \quad (52)$$

Обратимся теперь к точке, находящейся под действием $\sigma_{\text{экв}}$ (рис. 54), и доведем ее до предельного напряженного состояния:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\text{пч.р}}. \quad (53)$$

Правые части формул (52) и (53) одинаковы. Приравнивая в них левые части, получаем знаменитую формулу Мора:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3, \quad (54)$$

где $k = \frac{\sigma_{\text{пч.р}}}{\sigma_{\text{пч.с}}}$, если материал хрупкий, и $k = \frac{\sigma_{\text{Т.р}}}{\sigma_{\text{Т.с}}} = 1$, если материал пластичный.

Вот почему теория К. О. Мора называется обобщенной теорией прочности: для пластичных материалов она переходит в 3-ю теорию прочности (теорию наибольших касательных напряжений), а для хрупких материалов – в 1-ю теорию прочности (мы эту устаревшую теорию не рассматривали, но, согласно ей $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1$. Если взять предельно хрупкий материал, то $\sigma_{\text{пч.р}} \ll \sigma_{\text{пч.с}}$ и $k \Rightarrow 0$, следовательно, $\sigma_{\text{экв}} \approx \sigma_1$).

Поэтому теорию прочности Мора можно применять и для хрупких, и для пластичных материалов в рамках оговоренных выше ограничений.

Заметим, что теории прочности, годной для всех случаев, не существует.

2.7. Кручение брусев круглого поперечного сечения

При кручении вся внешняя нагрузка (и активная, и реактивная) сводится к крутящим относительно продольной оси x моментам (рис. 58).

Внутренние силы также сводятся только к крутящим моментам M_x (см. рис. 58).

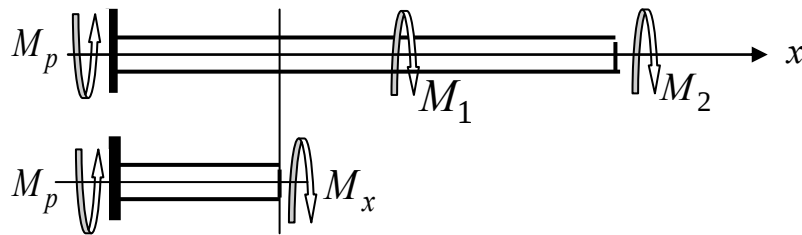


Рис. 58

2.7.1. Вывод расчетных формул для напряжений и перемещений

1. Мысленный эксперимент.

На цилиндрической боковой поверхности бруса мысленно нанесем на поверхность вала ортогональную сетку: несколько вертикальных окружностей и несколько горизонтальных образующих (рис. 59).

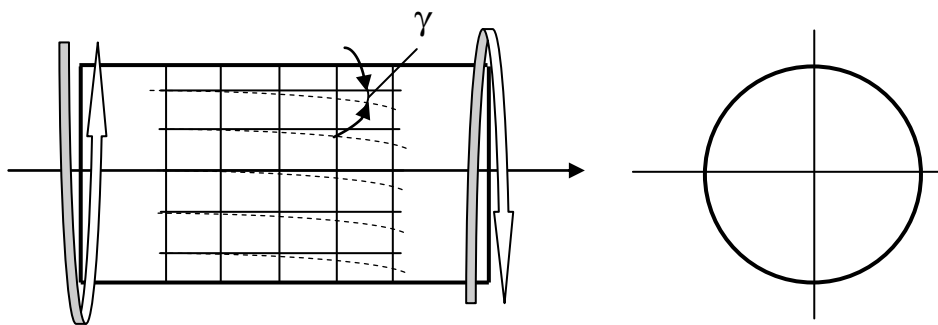


Рис. 59

Затем нагрузим брус внешними крутящими моментами. При этом окружности, которые являются как бы следами поперечных сечений на поверхности бруса, не искривятся, а повернутся в своей плоскости на не-

который угол, расстояние между ними не изменится. Горизонтальные образующие превратятся в винтовые линии, наклоненные к своему первоначальному положению на некоторый угол γ .

На основании этих наблюдений можно выдвинуть следующие две гипотезы.

1. Гипотеза плоских поперечных сечений, поскольку они не искривились.

2. Отсутствие в поперечных сечениях нормальных напряжений, поскольку расстояния между ними не изменились.

Далее, с учетом этих гипотез, будем строить теорию кручения.

2. Статическое обследование задачи.

Надо установить, какие возникают напряжения в поперечных сечениях, и связать их с внутренними силами. На основании второй гипотезы очевидно, что в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения.

Докажем, что во всех точках поперечного сечения касательные напряжения τ перпендикулярны радиусу ρ (рис. 60).

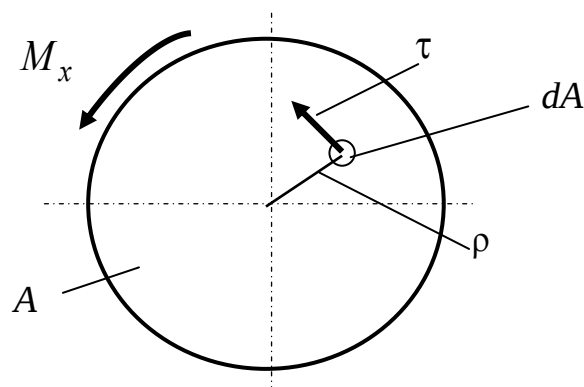


Рис. 60

Возьмем сначала точку K на контуре сечения и мысленно вырежем вокруг нее элементарный объем (рис. 61).

На рис. 61, б этот кубик показан в увеличенном масштабе. По грани кубика, совпадающей с плоскостью поперечного сечения, действует кас-

тельное напряжение, направление которого мы не знаем. Разложим его на составляющую τ_1 , перпендикулярную радиусу, и составляющую τ_2 , направленную вдоль радиуса. По закону парности касательных напряжений в перпендикулярных гранях возникают парные и равные им напряжения (см. рис. 61, б). Парное напряжение τ_2 действует по наружной цилиндрической поверхности и равно нулю, поскольку на этой поверхности отсутствует нагрузка. Поэтому на контуре сечения $\tau = \tau_1$ и τ перпендикулярно ρ . Если теперь двигаться вдоль радиуса к центру сечения, то нетрудно убедиться, что во всех точках τ будет перпендикулярно ρ .

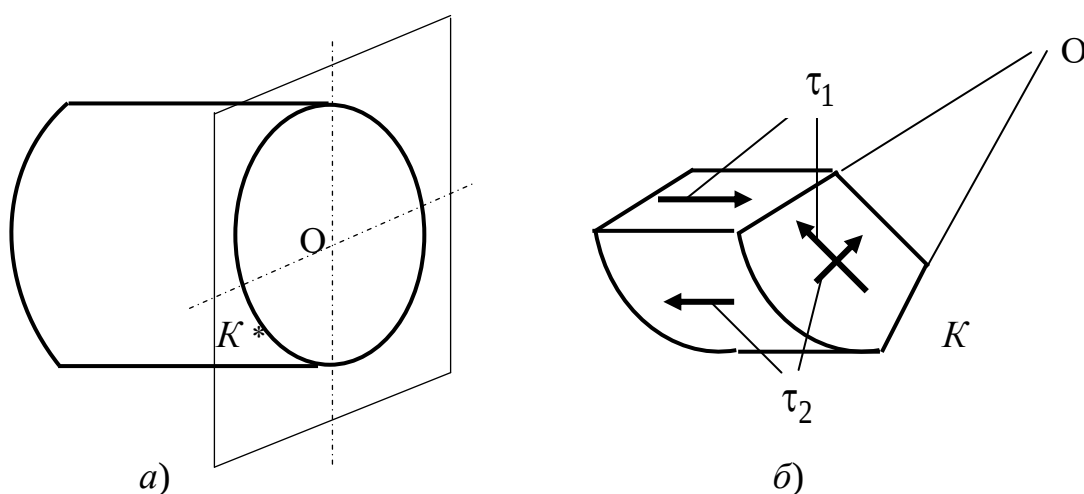


Рис. 61

Связь между M_x и τ очевидна (рис. 60):

$$M_x = \int_A \tau dA \rho. \quad (55)$$

3. Геометрическое исследование задачи.

Выделим в произвольном месте элемент бруса длиной dx на текущем радиусе ρ и покажем его деформацию в соответствии с принятыми гипотезами (рис. 62).

Правое сечение по отношению к левому повернулось на угол $d\varphi$, поперечное сечение не искривилось, горизонтальная образующая превратилась в винтовую линию, наклоненную к первоначальному положению на угол γ .

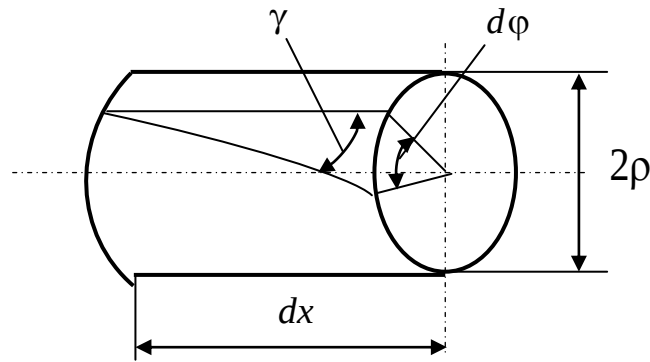


Рис. 62

С точностью до величин высшего порядка малости длина дуги на поперечном сечении, ограниченной углами γ и $d\phi$, будет $l_{\text{дуги}} = \gamma dx = \rho d\phi$. Отсюда получаем соотношение, описывающее геометрическую сторону задачи:

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}. \quad (56)$$

4. Физическая сторона задачи.

γ – это угловая деформация, вызванная касательными напряжениями τ . Они связаны обобщенным законом Гука (это и есть физическое уравнение):

$$\tau = G\gamma. \quad (57)$$

5. Синтез.

Подставляем (56) в (57):

$$\tau = G\rho \frac{d\phi}{dx}. \quad (58)$$

Подставляем (58) в (59), и после несложных преобразований получаем:

$$d\phi = \frac{M_x dx}{GI_p}, \quad (59)$$

где $I_p = \int_A \rho^2 dA$ – полярный момент инерции поперечного сечения (своеобразная геометрическая характеристика сечения; для простых форм сечений они приводятся в справочниках).

Из формулы (59) получаем выражение для расчета углов поворота на длине l участка бруса (это расчет на жесткость при кручении):

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_x dx}{GI_p}. \quad (60)$$

Если на участке бруса l $M_x = \text{const}$ и $I_p = \text{const}$, то формула (60) упрощается:

$$\varphi = \frac{M_x l}{GI_p}. \quad (61)$$

Чтобы получить теперь формулу для расчета напряжений, подставим (59) в (58):

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \rho. \quad (62)$$

Как видим, напряжения в сечении линейно зависят от радиуса (рис. 63).

Максимальные напряжения возникают на контуре сечения $\tau_{\max} = \frac{M_x \rho_{\max}}{I_p}$.

Эту формулу обычно упрощают. Вводят обозначение: полярный момент сопротивления сечения

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \quad (63)$$

С учетом (63)

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p}. \quad (64)$$

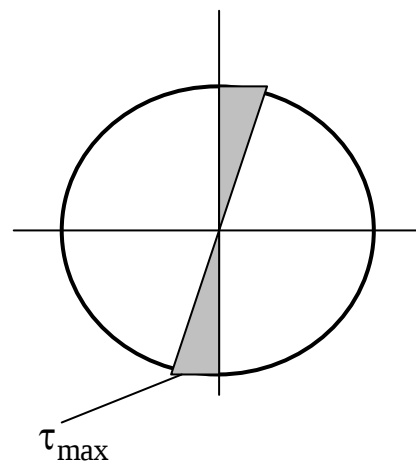


Рис. 63

Пример

Рассчитать полярный момент инерции I_p и полярный момент сопротивления W_p для круглого сечения (рис. 64).

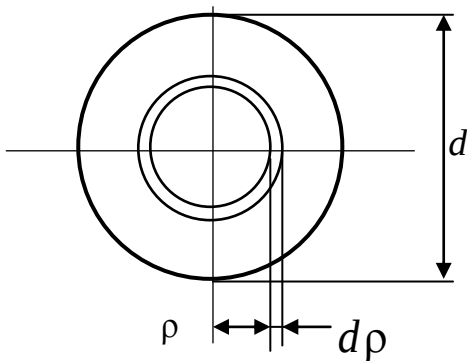


Рис. 64

Решение

$$I_p = \int_A \rho^2 dA; \quad W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}.$$

Выделим dA в виде бесконечно тонкого кольца радиуса ρ толщиной $d\rho$.

Тогда $dA = 2\pi\rho d\rho$;

$$I_p = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi d^4}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Проанализируем *напряженное состояние* в различных точках поперечного сечения (см. рис. 63). Вырежем элементарный кубик вокруг произвольной точки сечения (рис. 65).

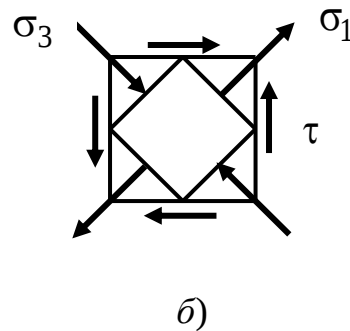
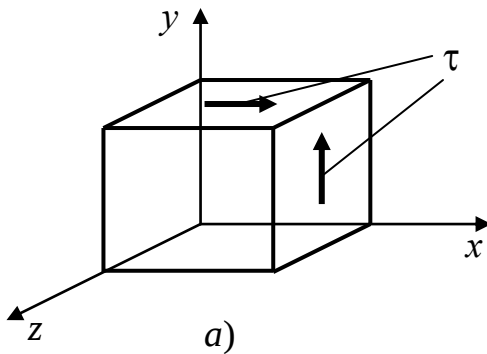


Рис. 65

В поперечном сечении (грань кубика с нормалью x) действует касательное напряжение τ . В грани с нормалью y действует такое же τ по закону парности касательных напряжений. В грани с нормалью z отсутствуют всякие напряжения. Такое напряженное состояние называется напряженным состоянием *чистого сдвига*. Найдём положение главных площадок и все главные напряжения.

Одна главная площадка (с нормалью z) и главное напряжение $\sigma_z = 0$ уже известны. Исходные данные для расчета положения двух других главных площадок и действующим по ним главным напряжениям:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau.$$

По формулам (38) и (39) находим: $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \infty$, откуда $\alpha_0 = 45^\circ$.

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \tau \Rightarrow \sigma_1 = \tau, \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Положение главных площадок и главные напряжения показаны на рис. 65, б.

6. Условие прочности.

$$\tau_{\max} = \left(\frac{M_x}{W_p} \right)_{\max} \leq [\tau]. \quad (65)$$

Спрашивается, откуда взять $[\tau]$? Для этого надо проводить испытания образцов на кручение и находить предельные касательные напряжения. Но, оказывается, можно обойтись без этих дополнительных испытаний, если подойти к напряженному состоянию при кручении как к сложному (плоскому) напряженному состоянию и найти эквивалентное напряжение опасной точки по какой-то теории прочности. Например, по третьей теории прочности для опасной точки, в которой действует максимальное касательное напряжение $\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{\max}$. Условие прочности для этой точки: $\sigma_{\text{экр}} = 2\tau_{\max} \leq [\sigma]$, откуда

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{2}. \quad (66)$$

Левые части в (65) и (66) одинаковы, поэтому, приравнявая правые части, получаем: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$. В этом случае нет необходимости проводить испытания образцов на кручение.

2.7.2. Рациональные формы поперечных сечений при кручении

Сравним сплошное круглое сечение и кольцевое (трубчатое) сечение (рис. 66). Как видно из эпюры напряжений, в сплошном сечении поле напряжений неравномерное, и средняя часть сечения недогружена. В кольцевом сечении поле напряжений является более равномерным и откровенно недогруженных точек нет. Поэтому кольцевое сечение с точки зрения экономичности является более рациональным. Трубчатый вал всегда будет легче при той же нагрузке.

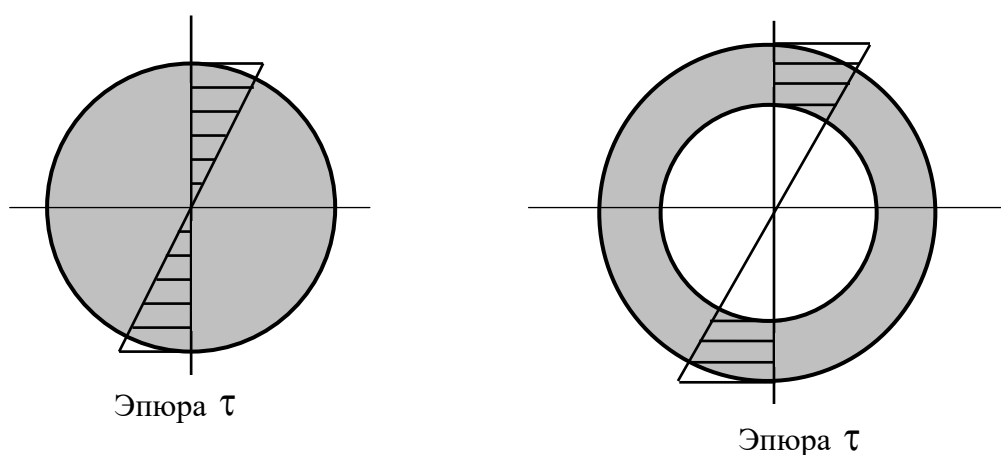


Рис. 66

Заметим, что мы рассмотрели только круглые формы поперечных сечений валов, другие формы сечений являются менее экономичными, поскольку у них менее равномерные поля напряжений.

2.8. Плоский (прямой) изгиб прямых брусьев

2.8.1. Классификация изгибов

При плоском (прямом) изгибе вся внешняя нагрузка должна находиться в одной так называемой силовой плоскости, и силовая плоскость должна проходить через какие-то главные центральные оси инерции поперечных сечений (рис. 67). Заметим, что в нашем кратком курсе при-

кладной механики опущена тема «Геометрические характеристики плоских сечений», в которой дается понятие главных центральных осей инерции плоских фигур, поэтому примем как справочную информацию, что все оси симметрии поперечных сечений являются их главными центральными осями. На рис. 67 плоскость xu является силовой плоскостью.

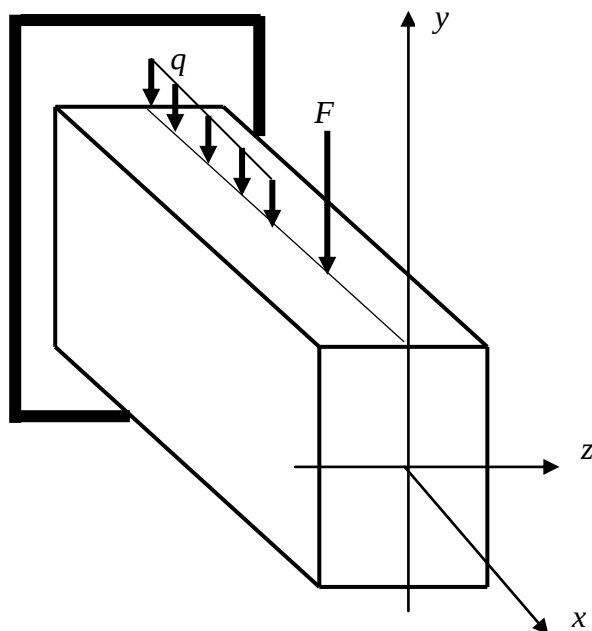


Рис. 67

При плоском изгибе могут возникнуть *две внутренние силы*: Q_y и M_z (рис. 68, *а*). По внутренним силам плоские изгибы разделяются на *чистые*, когда возникает только одна внутренняя сила M_z (рис. 68, *б*) и *поперечные*, когда возникают обе внутренние силы (рис. 68, *а*).



Рис. 68

Введем правило знаков для Q_y и M_z . На рис. 69 показаны положительные направления для этих внутренних сил для правого и левого сечений.

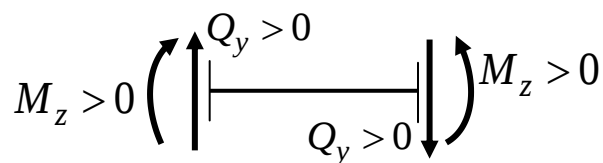


Рис. 69

2.8.2. Дифференциальные зависимости Журавского при плоском поперечном изгибе

Выдающийся русский инженер и ученый Д. И. Журавский установил дифференциальные зависимости между внутренними силами при плоском поперечном изгибе и между внутренними силами и распределенной внешней нагрузкой q .

Пусть балка находится в равновесии при произвольной распределенной нагрузке $q(x)$. Вырежем элемент балки длиной dx и покажем условно положительные направления для Q_y и M_z . Будем считать распределенную нагрузку на бесконечно малой длине dx постоянной (рис. 70). Заметим, что при переходе от левого сечения к правому на элементе dx аргумент x получает приращение, следовательно, и функции Q_y и M_z также получают соответствующие приращения.

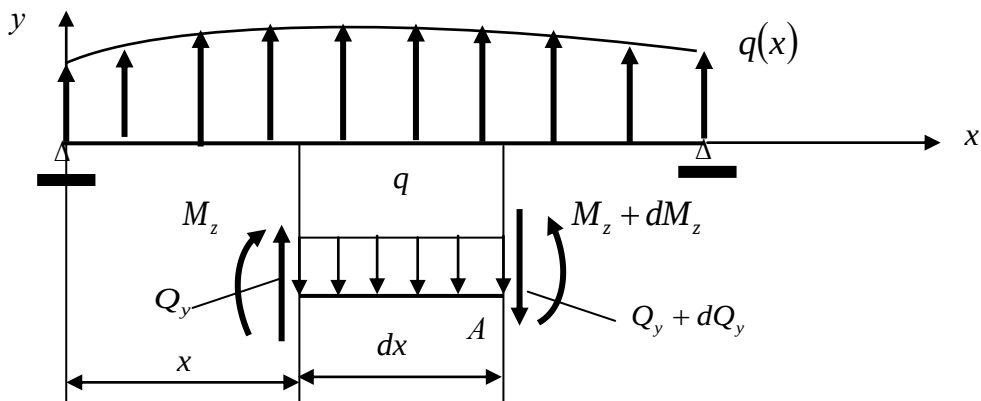


Рис. 70

Составим два уравнения равновесия для вырезанного элемента dx :

$\Sigma Y = Q_y - qdx - Q_y - dQ_y = 0$, откуда получаем первое дифференциальное уравнение,

$$q = \frac{dQ_y}{dx}, \quad (67)$$

дающее информацию о поведении эпюры Q_y : на участке, где $q < 0$, эпюра Q_y убывает; на участке, где $q > 0$, эпюра Q_y возрастает; на участке, где $q = 0$, эпюра Q_y остается постоянной;

$\Sigma m_A = -M_z - Q_y dx + qdx \frac{dx}{2} + M_z + dM_z = 0$, откуда с точностью до величины высшего порядка малости получаем второе дифференциальное уравнение

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx}, \quad (68)$$

дающее аналогичную информацию о поведении эпюры M_z в зависимости от знака эпюры Q_y .

Подставляя теперь (2.45) в (2.44), получаем третье дифференциальное уравнение Журавского

$$q = \frac{d^2 M_z}{dx^2}, \quad (69)$$

которое дает информацию о кривизне эпюры M_z в зависимости от знака q .

Дифференциальные зависимости Д. И. Журавского дают возможность не только проверять построение эпюр Q_y и M_z , но и быстрее их строить.

2.8.3. Вывод формулы для расчета напряжений при чистом плоском изгибе

1. Мысленный эксперимент.

На плоскую боковую поверхность бруса мысленно нанесем ортогональную сетку: ряд вертикальных и ряд горизонтальных линий (рис. 71, а).

Затем загрузим брус изгибающими моментами (рис. 71, б) и зафиксируем изменение ортогональной сетки: вертикальные линии, которые имитируют следы поперечных сечений на боковой поверхности, не искривятся, повернутся на некоторый угол и останутся перпендикулярными изогнутой оси бруса; горизонтальные линии превратятся в дуги окружностей, расстояния между ними не изменятся. Ортогональность сетки сохранится.

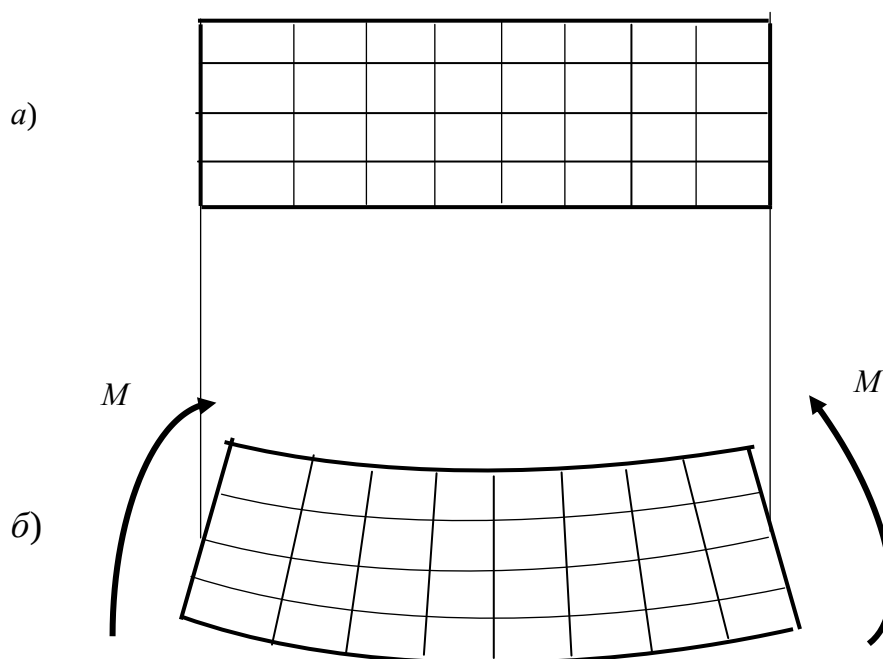


Рис. 71

На основании этих наблюдений можно выдвинуть следующие гипотезы.

1. *Гипотеза плоских поперечных сечений.*
2. *Гипотеза о ненадавливании продольных волокон*, поскольку расстояния между горизонтальными линиями не изменились.

3. *Гипотеза о существовании нейтрального слоя.* Поскольку часть горизонтальных линий удлинилась, а часть укоротилась (рис. 71, б), то из этого следует, что между ними существует линия, длина которой не изменилась. Эти линии и образуют так называемый нейтральный слой. На основании этих гипотез будем строить теорию чистого плоского изгиба.

2. Статическое обследование задачи.

Рассмотрим произвольное поперечное сечение бруса (рис. 72). Из гипотезы о ненадавливании продольных волокон следует, что в сечении отсутствуют касательные напряжения. Поскольку длина продольных волокон изменяется, то в сечении действуют нормальные напряжения, причем разного знака.

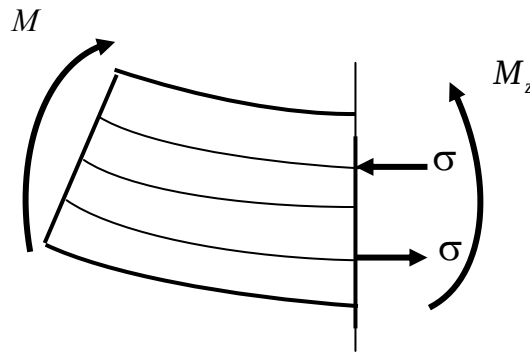


Рис. 72

На рис. 73 показан в изометрии элемент бруса длиной dx , в сечении которого показаны нормальные напряжения, образующие нормальные силы разного знака и в сумме равные нулю (первая формула (70)), и изгибающий момент M_z (вторая формула (70)).

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA = 0, \\ M_z &= - \int_A y \sigma dA. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Знак «-» в формуле для M_z согласуется с принятым правилом знаков: $M_z > 0$ при положительной кривизне изогнутой оси бруса (как у нас). Из рис. 73 видно, что в верхней части сечения $y > 0$, а $\sigma < 0$, а в нижней $y < 0$, а $\sigma > 0$, поэтому знак «-» необходим, чтобы выполнялось условие $M_z > 0$.

На данном этапе сделаем предположение о положении нейтрального слоя (н.с.). Допустим, н.с. находится в плоскости xz (см. рис. 73). Линия пересечения н.с. с поперечным сечением называется нейтральной

линией (н.л.). При сделанном предположении н.л. совпадает с осью z . Заметим, что координаты y на рис. 73 отложены от н.л. Чуть позже мы докажем, что сделанное предположение о положении н.с. и соответственно н.л. является верным.

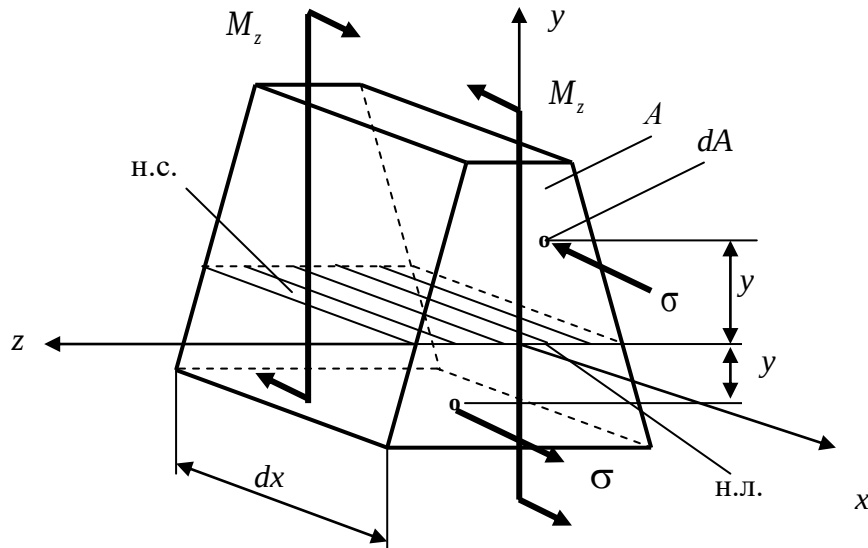


Рис. 73

3. Геометрическое обследование.

Определим линейную деформацию произвольного отрезка AB , взятого на координате y . Отрезок OO_1 лежит на оси x , поэтому он находится в н.с. Как видно из рис. 74, а, $AB = OO_1 = dx$. После деформации длина отрезка OO_1 не изменилась, отрезок укоротился (рис. 74, б). Вычислим длины отрезка AB до и после деформации через ρ – радиус кривизны н.с. и $d\varphi$ – угол поворота правого сечения относительно левого: $AB = \rho d\varphi$, $A_1B_1 = (\rho - y)d\varphi$.

Геометрическое уравнение (71) – линейная деформация произвольно-го бесконечно малого отрезка AB :

$$\varepsilon = \frac{A_1B_1 - AB}{AB} = -\frac{y}{\rho}. \quad (71)$$

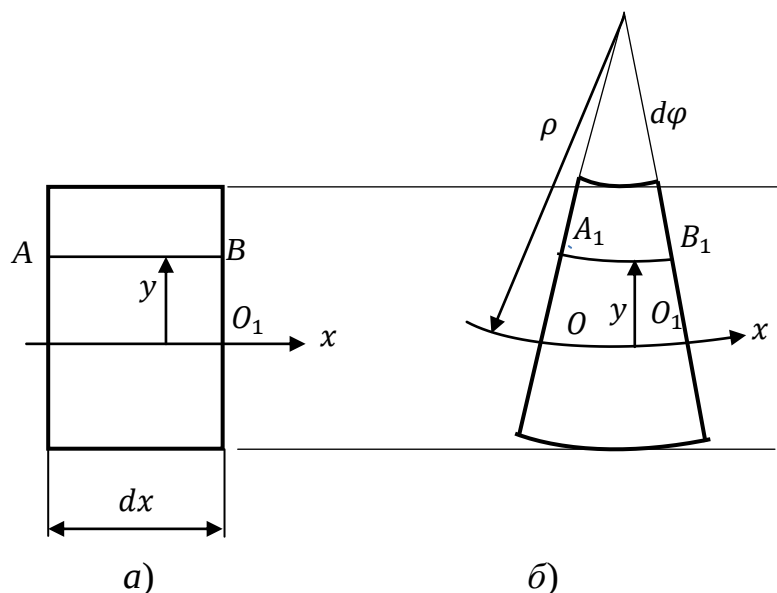


Рис. 74

4. Физика.

Закон Гука дает нам связь между напряжениями и деформациями:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (72)$$

5. Синтез.

Подставляем (71) в (72):

$$\sigma = -E \frac{y}{\rho}. \quad (73)$$

Подставляем (73) в первое уравнение (70): $N = -\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$, откуда

$\int_A y dA = 0$. Как известно из геометрии, этот интеграл является статическим

моментом сечения. А статический момент любой плоской фигуры равен нулю относительно ее центральных осей. Вот мы и доказали предположение о расположении н.с., сделанное ранее.

Теперь подставим (73) во второе уравнение (70): $M_z = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$.

В этом выражении $I_z = \int_A y^2 dA$ – момент инерции сечения относительно

центральной оси z (геометрическая характеристика сечения при изгибе). С учетом этого $M_z = \frac{EI_z}{\rho}$, откуда получим формулу для кривизны изогнутой оси бруса:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (74)$$

Подставляем теперь (74) в (73) и получаем формулу для расчета напряжений в любой точке сечения (знак «-» в этой формуле по умолчанию опущен, поскольку по направлению M_z всегда можно узнать знак напряжения):

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z}. \quad (75)$$

Пример 1

Построить эпюру напряжений по прямоугольному поперечному сечению (рис. 75).

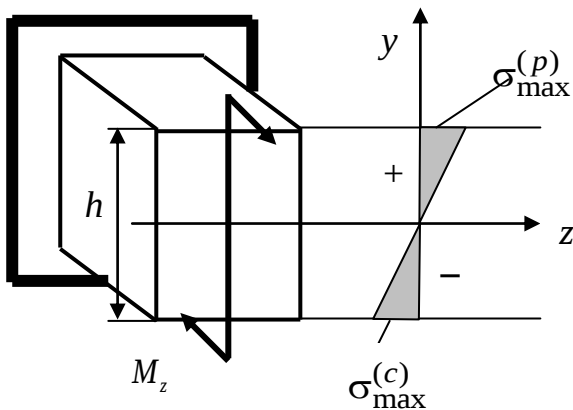


Рис. 75

Решение

По формуле (75) σ линейно зависит от y . При таком направлении M_z видно, что верхняя часть сечения растягивается, а нижняя сжимается. Поскольку ось z является осью симметрии, то максимальные растягивающие $\sigma_{\max}^{(p)}$ и максимальные сжимающие $\sigma_{\max}^{(c)}$ напряжения равны по модулю:

$$\sigma_{\max}^{(p)} = |\sigma_{\max}^{(c)}| = \sigma_{\max} = \frac{M_z h/2}{I_z}. \quad (76)$$

Для упрощения формулы для максимальных напряжений ввели понятие момента сопротивления сечения $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$.

Теперь формула для максимальных напряжений приобретает простой вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}. \quad (77)$$

Пример 2

Рассчитать I_z и W_z для прямоугольного сечения.

Решение

$$I_z = \int y^2 dA.$$

Выделим элемент площади, как показано на рис. 76: $dA = bdy$, тогда

$$I_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}; \quad W_z = \frac{I_z}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}.$$

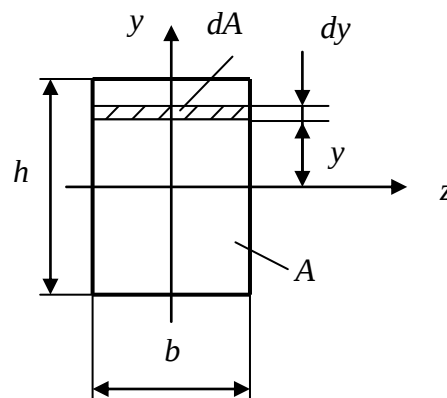


Рис. 76

2.8.4. Условие прочности

1. Хрупкий материал: $[\sigma_c] > [\sigma_p]$.

Первый случай: ось z не является осью симметрии.

На рис. 77 показано сечение в виде тавра, у которого ось z не является осью симметрии.

В этом случае следует рассмотреть два условия прочности:

$$\sigma_{\max}^{(c)} = \frac{M_z h_1}{I_z} \leq [\sigma_c];$$

$$\sigma_{\max}^{(p)} = \frac{M_z h_2}{I_z} \leq [\sigma_p].$$

(78)

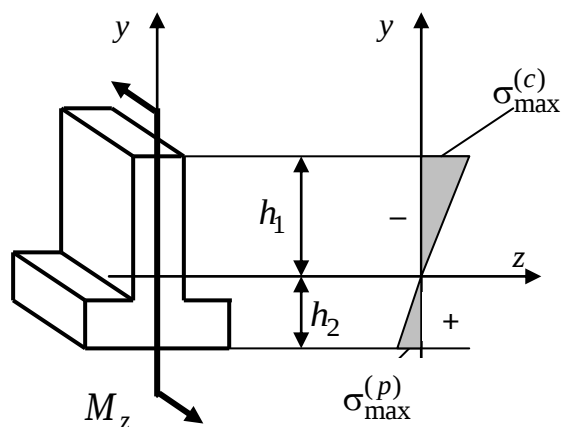


Рис. 77

Если разделить первое условие прочности на второе, то получим формулу для рационального положения центра тяжести таких сечений:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_p]}. \quad (79)$$

Как видим, в нашем случае сечение ориентировано рационально относительно нагрузки.

Второй случай: ось z является осью симметрии.

В этом случае максимальные растягивающие и сжимающие напряжения по модулю равны и рассматривается одно условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma_p]. \quad (80)$$

2. *Пластичный материал:* $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$, если в качестве предельного напряжения берется предел текучести.

Для пластичных материалов рассматривается в этом случае одно условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (81)$$

2.8.5. Поперечный плоский изгиб

1. Основные положения.

В этом случае в поперечных сечениях бруса к изгибающим моментам M_z добавляются поперечные силы Q_y , что приводит к несоблюдению гипотезы плоских сечений. Но в рамках гипотезы малости деформаций искривлением поперечных сечений можно пренебречь, поэтому формула для нормальных напряжений, полученная ранее, сохраняется. А к нормальным напряжениям σ добавляются касательные напряжения τ , лежащие, как и сила Q_y , в плоскости сечения (рис. 78).

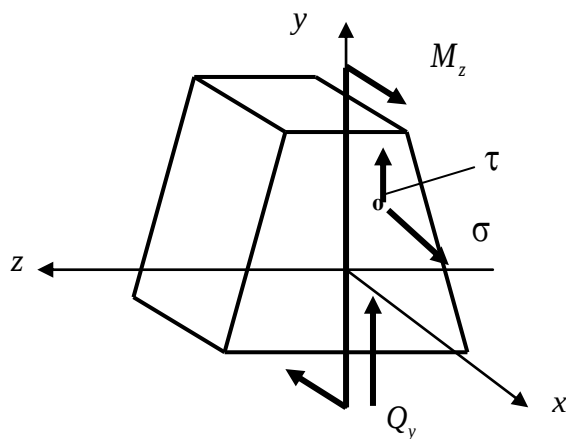


Рис. 78

2. Вывод расчетной формулы для касательных напряжений.

Вырежем из бруса, работающего на плоский поперечный изгиб, элемент длиной dx (рис. 79, а). В его поперечных сечениях действуют внутренние поперечные силы и изгибающие моменты, от которых возникают нормальные и касательные напряжения. Эпюры нормальных напряжений показаны на рис. 79, б.

Наша задача — получить формулу для касательных напряжений. Определим касательные напряжения τ на произвольном уровне y . Для этого мысленно отсечем из рассматриваемого элемента его верхнюю часть, расположенную выше уровня y . По его боковым поверхностям действуют касательные напряжения, закон распределения которых мы пока не знаем, а по нижней грани по закону парности касательных напряжений действуют интересующие нас τ на уровне y (рис. 79, б).

На рис. 79, в дан вид на левую боковую поверхность элемента dx , на котором показаны напряжения τ . Площадь поперечного сечения отсеченной верхней части обозначена A^* . На уровне y_1 выделен элемент площади dA^* , по которому действует нормальное напряжение $\sigma = \frac{M_z y_1}{I_z}$. На всю

площадь A^* действует нормальная сила $N^* = \int_{A^*} \sigma dA^* = \frac{M_z}{I_z} \int_{A^*} y_1 dA^*$. Заме-

тим, что интеграл в этом выражении представляет собой статический момент площади сечения A^* относительно центральной оси z : $S^* = \int_{A^*} y_1 dA^*$.

Окончательное выражение для нормальной силы: $N^* = \frac{M_z}{I_z} S_z^*$.

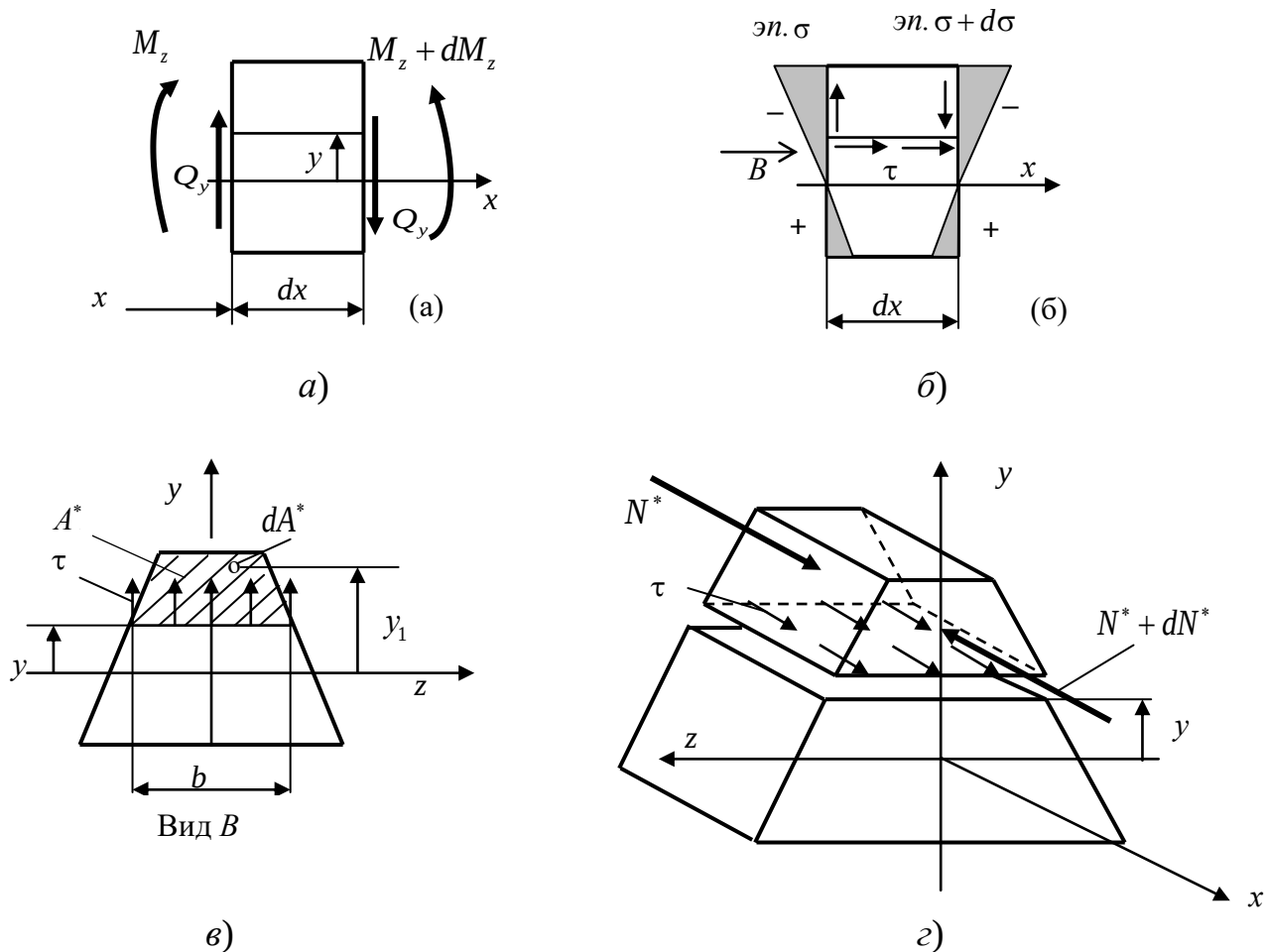


Рис. 79

На рис. 79, г показана в изометрии отсеченная верхняя часть элемента dx . Действующая по его правому сечению нормальная сила получит приращение $dN^* = \frac{dM_z S_z^*}{I_z}$.

Спроецируем все силы, действующие на верхнюю часть элемента, на ось x :

$$\Sigma X = \tau b dx + N^* - N^* - dN^* = 0,$$

откуда после подстановки dN^* и выражения (68) $Q_y = \frac{dM_z}{dx}$, получаем формулу Журавского для расчета касательных напряжений при поперечном плоском изгибе:

$$\tau = \frac{Q_y S_z^*}{I_z b}. \quad (82)$$

Пример

Построить эпюру касательных напряжений от Q_y для прямоугольного сечения (рис. 80).

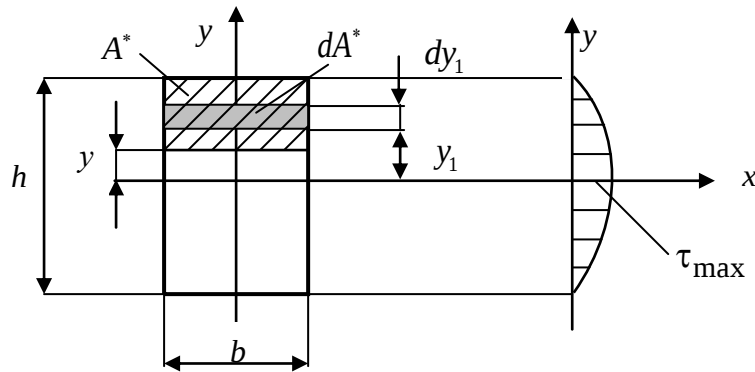


Рис. 80

Выделим элемент площади dA^* на площади сечения A^* :

$$I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad dA^* = b dy_1; \quad S_z^* = \int_{A^*} y_1 dA^* = \int_y^{h/2} y_1 b dy_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right);$$

$$\tau = \frac{Q_y S_z^*}{I_z b} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Получили уравнение параболы. Строим ее.

При $y = \pm \frac{h}{2}$: $\tau = 0$; при $y = 0$: $\tau = \tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_y}{bh}$.

3. Исследование напряженного состояния при поперечном плоском изгибе.

На рис. 81 показаны эпюры σ и τ в прямоугольном поперечном сечении бруса. Рассмотрим напряженные состояния характерных точек в сечении, обозначенных на рисунке. Для этого вырежем мысленно элементарные кубики в районе каждой точки.

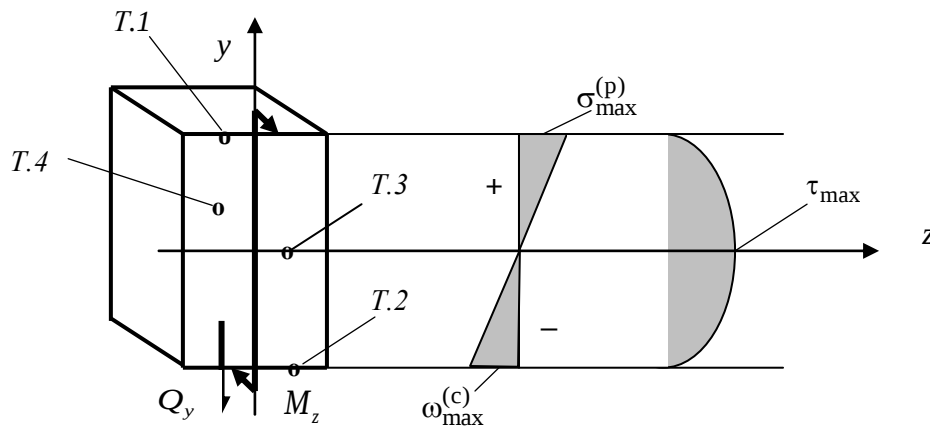
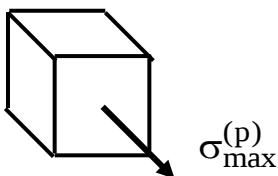


Рис. 81

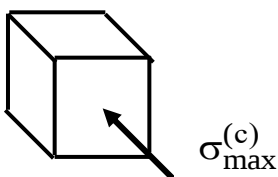
Точка 1



Точка находится в условиях одноосного растяжения.

Условие прочности точки: $\sigma_{\max}^{(p)} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma_p]$.

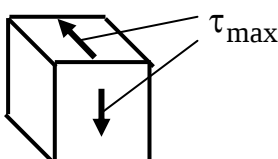
Точка 2



Точка находится в условиях одноосного сжатия.

Условие прочности точки: $\sigma_{\max}^{(c)} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma_c]$.

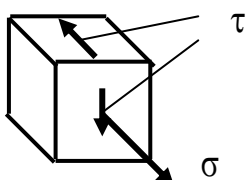
Точка 3



Точка находится в условиях чистого сдвига.

Условие прочности: $\tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_y}{bh} \leq [\tau]$.

Точка 4



Точка находится в сложном напряженном состоянии: $\sigma = \frac{M_z y}{I_z}$, $\tau = \frac{Q_y S_z^*}{I_z b}$.

Условие прочности: $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_p]$.

4. Сравнение максимальных нормальных и касательных напряжений.

Сравнение проведем на примере консольного бруса прямоугольного сечения (рис. 82).

Построим эпюры Q_y и M_z :

$$Q_{y\text{max}} = F, \quad M_{z\text{max}} = Fl.$$

Определяем максимальные напряжения.

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{z\text{max}}}{W_z} = \frac{6Fl}{bh^2};$$

$$\tau_{\text{max}} = 1,5 \frac{Q_{y\text{max}}}{bh} = \frac{1,5F}{bh}.$$

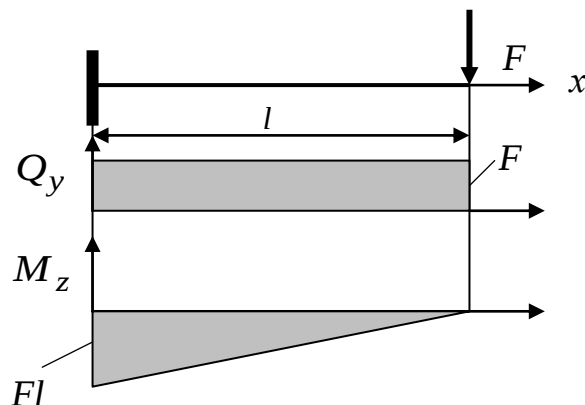


Рис. 82

Сравним σ_{max} и τ_{max} : $\frac{\sigma_{\text{max}}}{\tau_{\text{max}}} = \frac{4l}{h}$.

Учитывая, что у бруса $l \gg h$, получаем:

$$\sigma_{\text{max}} \gg \tau_{\text{max}}.$$

Вывод. Практический расчет брусьев, работающих на изгиб, проводится по одним нормальным напряжениям. Исключение составляют только короткие брусья при больших поперечных нагрузках.

2.8.6. Расчет на жесткость при плоском изгибе

1. Перемещения при изгибе, связь между ними.

Разберемся, какие перемещения имеют поперечные сечения бруса при изгибе. Из рис. 83 видно, что произвольное сечение на координате x (на расчетной схеме это точка) в результате деформации бруса имеет линейное перемещение (прогиб) y и угловое (поворот) θ .

Между y и θ с точностью до величин высшего порядка малости (см. рис. 83) существует дифференциальная связь: $\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = y'$.

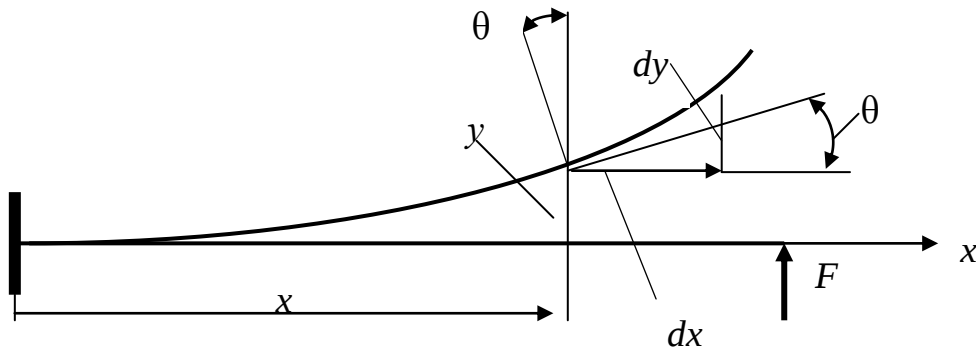


Рис. 83

Учитывая гипотезу малости деформаций, $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$. Окончательная формула:

$$\theta = y' = \frac{dy}{dx}. \quad (83)$$

2. Расчет на жесткость методом непосредственного интегрирования.

В подразделе 2.8.3 была получена формула кривизны изогнутой оси балки при изгибе:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (84)$$

С другой стороны, известна формула кривизны из аналитической геометрии:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (85)$$

В рамках гипотезы о малости деформаций, которая, как мы знаем, принята в курсе сопротивления материалов, $\theta = \frac{dy}{dx} \ll 1$.

Поэтому формула (85) упрощается:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (86)$$

Приравнивая теперь правые части (84) и (86), получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (87)$$

Интегрируя это уравнение, можно рассчитать прогибы и углы поворотов поперечных сечений балки при изгибе.

Покажем такой расчет на примере.

Пример

Известно: F, l, E, I_z .

Найти прогиб y_B и угол поворота θ_B свободного конца балки B .

Решение

На произвольной координате x (рис. 84) изгибающий момент $M_z(x) = -F(l - x)$. Знак «-» указывает на отрицательную кривизну изогнутой оси балки.

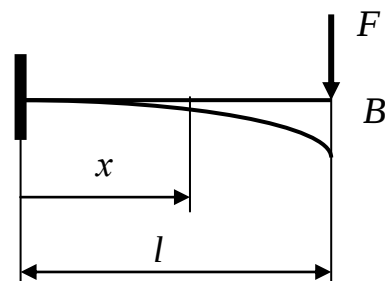


Рис. 84

Дифференциальное уравнение (87) принимает вид:

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -F(l - x).$$

Интегрируем это уравнение:

$$EI_z \frac{dy}{dx} = -Flx + \frac{Fx^2}{2} + C. \quad (88)$$

Интегрируем уравнение (88):

$$EI_z y = -\frac{Flx^2}{2} + \frac{Fx^3}{6} + Cx + D. \quad (89)$$

Граничные условия: при $x = 0$: $\frac{dy}{dx} = 0$ и $y = 0$.

Подставляя первое граничное условие в (88), получим $C = 0$.

Подставляя второе граничное условие в (89), получим $D = 0$.

Уравнения (88) и (89) принимают окончательный вид:

$$\left. \begin{aligned} EI_z \theta &= -Flx + \frac{Fx^2}{2}, \\ EI_z y &= -\frac{Flx^2}{2} + \frac{Fx^3}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

При $x = l$ из первого уравнения (90) находим $\theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI_z}$, а из второго – $y_B = -\frac{Fl^3}{3EI_z}$.

2.9. Сложное нагружение

2.9.1. Основные понятия

Сложное нагружение – это сочетание простых видов нагружения (растяжение-сжатие, кручение и плоский изгиб) в различных формах.

Задачи на сложное нагружение решаются с использованием принципа независимости действия сил, позволяющего разделить сложное нагружение на простые виды.

2.9.2. Алгоритм расчета на прочность

1. Нагрузка разделяется на простые виды.
2. Строятся необходимые эпюры внутренних сил при простых видах нагружения.

3. По этим эпюрам находится одно или несколько опасных сечений. Опасное сечение будет одно, если в нем сходятся максимальные значения всех внутренних сил. Если же такого сечения нет, то в качестве опасных рассматривается несколько сечений, в каждом из которых какие-то внутренние силы являются максимальными.

4. Строятся эпюры напряжений в опасном (опасных) сечении (сечениях).

5. По этим эпюрам по тем же критериям, по которым находится опасное сечение, определяется (определяются) одна или несколько опасных точек.

6. Анализируются напряженные состояния опасных точек и рассматриваются их условия прочности.

2.9.3. Совместное действие изгиба и кручения

Существует несколько частных случаев сложного нагружения: косой изгиб, внецентренное растяжение-сжатие, совместное действие изгиба и кручения и др.

Мы рассмотрим на простом примере только наиболее часто встречающийся случай – совместное действие изгиба и кручения.

Пример

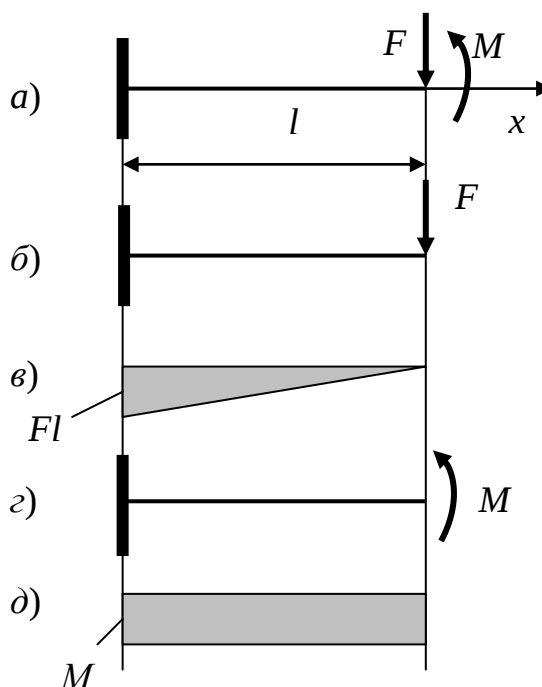
На рис. 85, а показан брус, работающий на совместное действие изгиба и кручения. Пусть сечение бруса – круг диаметром d . Требуется рассчитать брус на прочность.

Решение

Рассмотрим только изгиб бруса – рис. 85, б.

На рис. 85, в построена эпюра изгибающих моментов: $M_{z\max} = Fl$.

На рис. 85, г выделено только кручение бруса.



На рис. 85, д построена эпюра крутящих моментов $M_x = M = \text{const.}$

Опасным оказалось левое сечение бруса, в котором оба внутренних момента имеют максимальное значение:

$$M_{z\max} = Fl, \quad M_{x\max} = M.$$

Строим эпюры нормальных (от $M_{z\max}$) и касательных (от $M_{x\max}$) напряжений в опасном сечении – рис. 86.

Максимальные касательные напряжения $\tau_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_p}$ действуют по

конттуру сечения, а максимальные нормальные напряжения $\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z}$

действуют в точках 1 и 2. Эти точки и будут опасными. Поскольку они равноопасные, исследуем напряженное состояние только одной – Т.1 (рис. 87).

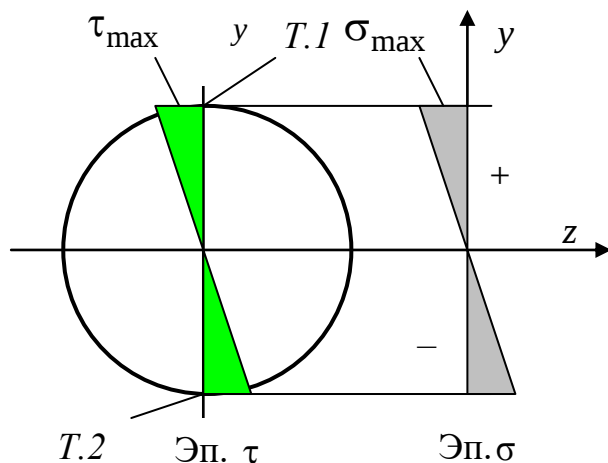


Рис. 86

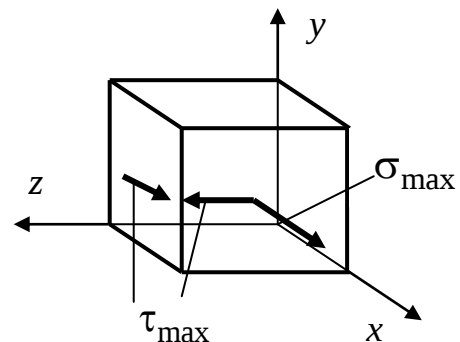


Рис. 87

Площадка с нормалью y – главная; $\sigma_y = 0$ – одно из главных напряжений. Найдем два других главных напряжения. По двум неглавным площадкам действуют напряжения: $\sigma_x = \sigma_{\max}$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = \tau_{\max}$. По формуле (39) находим два других главных напряжения:

$$\sigma'_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}.$$

Теперь известны все главные напряжения:

$$\sigma_1 = \sigma'_{\max}, \sigma_3 = \sigma'_{\min}, \sigma_2 = \sigma_y = 0.$$

По третьей теории прочности найдем эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Подставляем сюда найденные значения главных напряжений:

$$\sigma_{\text{экв}} = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{z\max}}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{x\max}}{W_p}\right)^2}.$$

Условие прочности: $\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma]$.

2.10. Энергетические методы определения перемещений*

2.10.1. Принцип возможных перемещений для деформируемых систем

Если деформируемой системе, находящейся в равновесии под действием некоторой системы внешних сил, придается малая возможная деформация, то возможная работа, совершаемая внешними силами на соответствующих перемещениях, будет равна работе, совершаемой внутренними силами на соответствующих деформациях.

С помощью этого принципа можно получить интеграл Мора, позволяющий определить перемещение любой точки рассчитываемого объекта в любом направлении.

2.10.2. Вывод интеграла Мора

Рассмотрим произвольное тело в виде криволинейного бруса, находящегося в равновесии под произвольной нагрузкой – состояние «F»

(рис. 88, а). Требуется найти перемещение δ_{1F} произвольной точки бруса в произвольном направлении 1-1. Вырежем мысленно в любом месте бруса бесконечно малый элемент длиной dx .

По торцам этого элемента в общем случае нагружения бруса действуют внутренние силы: N_F , M_{xF} , M_{yF} , M_{zF} (поперечными силами пренебрегаем, поскольку их вклад в напряженное состояние незначителен).

Эти силы вызывают деформации:

$$\Delta dx = \frac{N_F dx}{EA}; \quad d\varphi = \frac{M_{xF} dx}{GI_p}; \quad d\theta^{(M_z)} = \frac{M_{zF} dx}{EI_z}; \quad d\theta^{(M_y)} = \frac{M_{yF} dx}{EI_y}.$$

Заметим, что углы поворота сечений от изгибающих моментов в формулах для деформаций в состоянии «1» выводятся из дифференциальных уравнений изогнутой оси балки:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_z}{EI_z} \Rightarrow d\theta = \frac{M_z dx}{EI_z}.$$

Построим вспомогательное состояние «1» (рис. 88, б). Для этого сбрасываем с бруса всю нагрузку, а затем в рассматриваемой точке в направлении 1-1 прикладываем единичную силу.

От этой силы по торцам элемента dx будут действовать внутренние силы:

$$\bar{N}_1, \quad \bar{M}_{x1}, \quad \bar{M}_{y1}, \quad \bar{M}_{z1}.$$

Теперь системе в состоянии «1» дадим малое возможное перемещение, обусловленное состоянием «F», и получим состояние «1+F» (рис. 88, в).

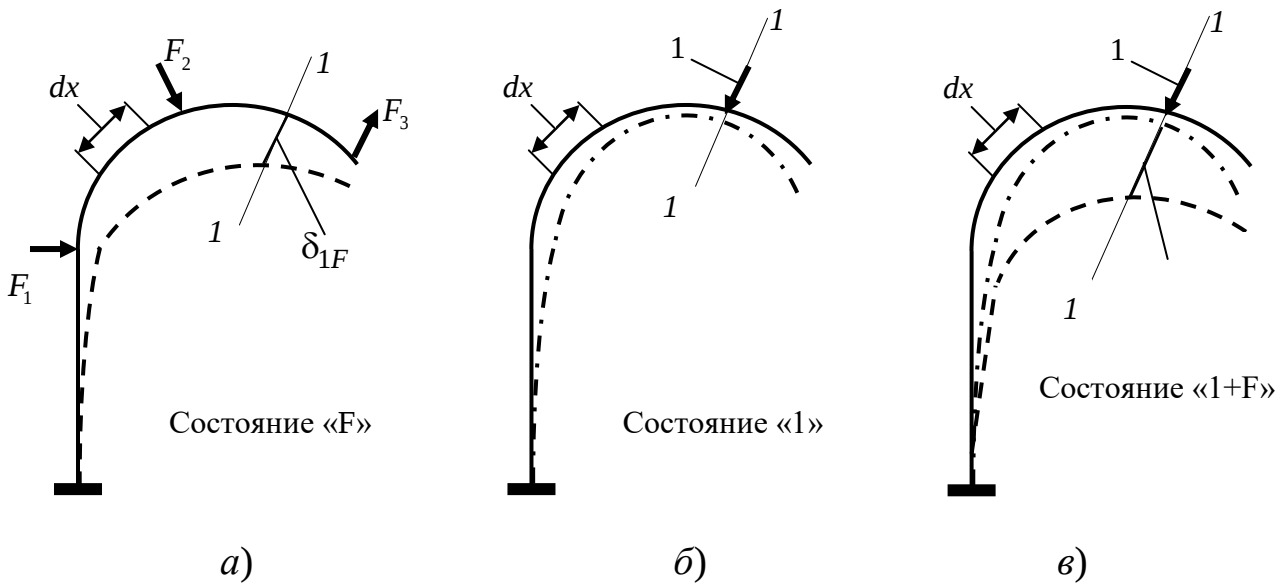


Рис. 88

Применим к системе в состоянии «1» принцип возможных перемещений для деформируемых систем.

Единственная активная единичная сила совершит работу на перемещении δ_{1F} . Эту работу приравняем к работе внутренних сил на торцах элемента dx – в состоянии «1» на перемещениях торцов этого элемента – в состоянии «F» и суммируем эту работу по всему брусу. Опустив единицу в качестве сомножителя, в итоге получим интеграл Мора, позволяющий определить δ_{1F} :

$$\delta_{1F} = \sum \int_l \frac{N_F \bar{N}_1 dx}{EA} + \sum \int_l \frac{M_{xF} \bar{M}_{x1} dx}{GI_p} + \sum \int_l \frac{M_{yF} \bar{M}_{y1} dx}{EI_y} + \sum \int_l \frac{M_{zF} \bar{M}_{z1} dx}{EI_z}. \quad (91)$$

Интеграл Мора часто записывают в упрощенном виде. При сложном нагружении, когда имеют место внутренние моменты и нормальные силы, вкладом нормальных сил в напряженно-деформированное состояние можно пренебречь, а все моментные слагаемые условно объединяют. В итоге получается упрощенная форма интеграла Мора:

$$\delta = \sum \int_l \frac{M_F M_1 dx}{EI}. \quad (92)$$

Заметим, что с помощью интеграла Мора вычисляются линейные и угловые перемещения.

2.10.3. Алгоритм определения перемещений по интегралу Мора

1. Составляются аналитические выражения для внутренних сил на всех силовых участках бруса.

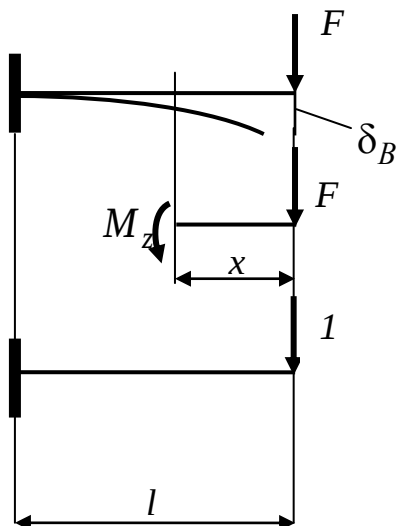
2. Строится вспомогательное единичное состояние. Для этого снимается вся силовая нагрузка на брус, а затем в расчетной точке в интересующем направлении прикладывается единичный силовой фактор: если определяется линейное перемещение, то это единичная сила, а если – угловое, то это единичный момент.

3. Составляются аналитические выражения для внутренних сил на всех силовых участках бруса для единичного состояния.

4. Составляется интеграл Мора, по которому вычисляется искомое перемещение. Если получается положительное значение интеграла, то направление перемещения совпадает с направлением единичной силы, а если – отрицательное, то перемещение направлено против единичной силы.

Пример

Определить δ_B – вертикальное перемещение свободного конца консольного бруса (рис. 89).



Решение

Брус имеет один силовой участок:

$$M_{zF} = -Fx.$$

Строим единичное состояние:

$$M_{z1} = -1 \cdot x.$$

Составляем и вычисляем интеграл Мора:

$$\delta_B = \int_0^l \frac{M_{zF} M_{z1} dx}{EI_z} = \int_0^l \frac{Fx \cdot x}{EI_z} = \frac{Fl^3}{3EI_z}.$$

Интеграл получился положительным, поэтому перемещение направлено вниз (по единичной силе).

2.10.4. Вычисление интеграла Мора по способу Верещагина

В 1920-е гг. русский студент Александр Верещагин разработал графо-аналитический способ взятия интеграла Мора, позволяющий исключить операцию интегрирования. Но на способ Верещагина накладываются два ограничения: рассматриваемые участки должны быть прямолинейными и постоянной жесткости.

Выведем формулу Верещагина.

На рис. 90 на рассматриваемом участке длиной l построена эпюра $M_F(x)$, которая может иметь произвольную форму, и эпюра $M_1(x)$, которая в рамках принятых ограничений будет линейной.

Нам надо взять интеграл Мора $\delta = \int_l M_F(x)M_1(x)dx$, из которого вынесе-

на за знак интеграла постоянная жесткость сечения EI . Представим функцию

$M_1(x)$ в виде: $M_1(x) = a + bx$. Подставляем ее в интеграл Мора:

$$\int_l M_F(x)M_1(x)dx = a \int_l M_F(x)dx + b \int_l xM_F(x)dx.$$

Первый интеграл в правой части этого выражения представляет площадь силовой эпюры Ω , а второй интеграл – статический момент площади Ω относительно оси $M_F(x)$, который, как известно из геометрии, равен произведению площади фигуры Ω на координату ее центра тяжести x_c . В результате получаем: $\int_l M_F(x)M_1(x)dx = a\Omega + b\Omega x_c = \Omega(a + bx_c)$.

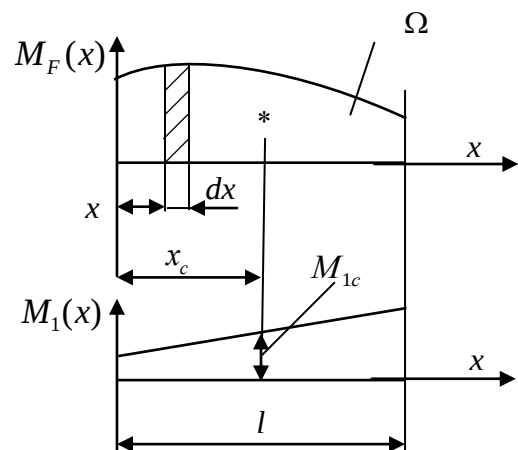


Рис. 90

Выражение в скобке в правой части – это значение момента $M_{1c} = M_1(x_c)$ на единичной эпюре $M_1(x)$, взятое на координате центра тяжести x_c площади Ω .

В результате получаем формулу Верещагина:

$$\int_0^l M_F(x) M_1(x) dx = \Omega \cdot M_{1c}. \quad (93)$$

Пример

Определить прогиб свободного конца консольной балки (тот же пример).

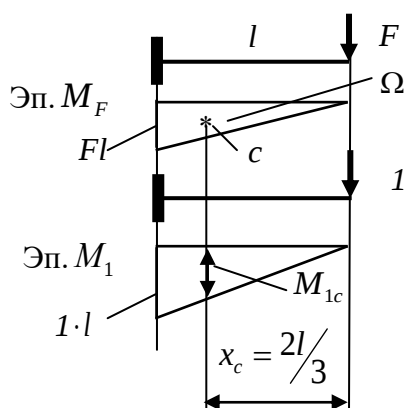


Рис. 91

На рис. 91 построена силовая эпюра M_F . Ее площадь $\Omega = Fl^2/2$. Координата центра тяжести $x_c = 2l/3$. Построено единичное состояние и эпюра изгибающих моментов M_1 , $M_{1c} = 2l/3$. Прогиб свободного конца по формуле Верещагина: $\delta = \frac{1}{EI_z} \Omega M_{1c} = \frac{Fl^3}{3EI_z}$.

2.10.5. Вычисление интеграла Мора по формуле Симпсона

Чтобы воспользоваться графо-аналитической формулой Симпсона, надо также на каждом силовом участке бруса построить силовые эпюры M_F , затем построить единичное состояние и эпюры M_1 для него. На ис-

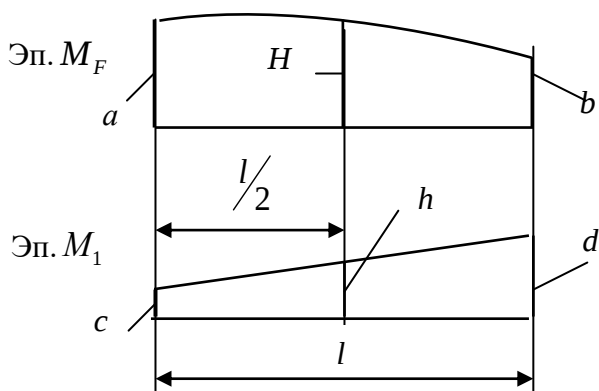


Рис. 92

пользование формулы Симпсона накладываются те же два ограничения, что и на формулу Верещагина, и добавляется еще одно ограничение:

силовые эпюры должны описываться функциями порядка не выше второго.

Формулу Симпсона для участка бруса мы дадим без вывода. Ее смысл понятен из рис. 92.

Формула Симпсона:

$$\int_l M_F M_1 dx = \frac{l}{6} (ac + 4Hh + bd). \quad (94)$$

Пример

Рассмотрим ту же консольную балку и определим по формуле Симпсона прогиб свободного конца (рис. 93).

Решение

$$a = Fl; \quad H = \frac{Fl}{2}; \quad b = 0;$$

$$c = 1 \cdot l; \quad h = \frac{1 \cdot l}{2}; \quad d = 0.$$

По формуле Симпсона:

$$\delta = \frac{l}{6EI_z} (ac + 4Hh + bd) = \frac{Fl^3 + Fl^3}{6EI_z} = \frac{Fl^3}{3EI_z},$$

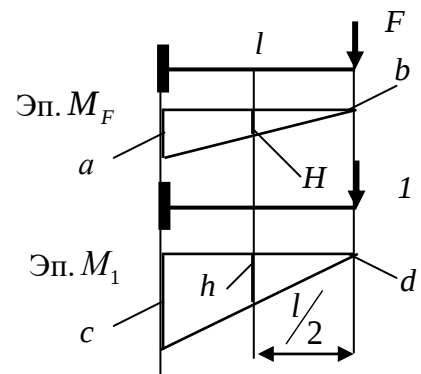


Рис. 93

что совпадает с предыдущими результатами.

По описанию энергетических методов определения перемещений, отметим, что предпочтение отдается графоаналитическим методам Верещагина и Симпсона из-за их простоты. Но их можно применять только в рамках, оговоренных выше ограничений.

2.11. Устойчивость равновесия сжатых стержней (продольный изгиб)

2.11.1. Понятие об устойчивости

В сопротивлении материалов рассматриваются деформируемые системы.

Устойчивость деформируемой системы – это ее способность сохранять первоначальную (исходную) форму равновесия. Как правило, вопросы устойчивости относятся к сжатым конструктивным элементам, в основном к сжатым стержням.

Пусть стержень сжимается силой F . Чтобы выяснить, устойчивое или неустойчивое состояние равновесия у стержня, надо дать ему малое возмущение (рис. 94), а затем убрать его. Если стержень вернется в первоначальное состояние, то его состояние равновесия – устойчивое. Для данного конкретного стержня это зависит от величины сжимающей силы.



Рис. 94

Критической силой $F_{кр}$ называется минимальное значение сжимающей силы, при которой происходит потеря устойчивости. *Критическое напряжение* $\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}$. Допускаемая си-

ла $[F]_y = \frac{F_{кр}}{[n]_y}$, допускаемое напряжение $[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{[n]_y}$. В этих формулах $[n]_y$

– нормативный коэффициент запаса устойчивости.

Условие устойчивой, надежной работы стержня можно записать в виде

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_y. \quad (95)$$

2.11.2. Определение критической силы по Эйлеру

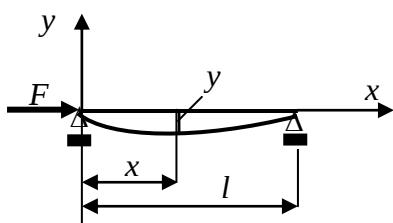


Рис. 95

В XVII в. Леонард Эйлер определил критическую силу для схемы, показанной на рис. 95. Он исходил из дифференциального уравнения изогнутой оси балки:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_u}{EI_{\min}}. \quad (96)$$

Естественно, он считал, что потеря устойчивости происходит в плоскости минимальной изгибной жесткости.

Изгибающий момент возникает за счет прогиба балки от потери устойчивости: $M_u = -Fy$. Если подставить M_u в (96) и ввести обозначение

$$k^2 = \frac{F}{EI_{\min}}, \quad (97)$$

дифференциальное уравнение изогнутой оси балки примет вид:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0. \quad (98)$$

Решение этого уравнения ищем в виде:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \quad (99)$$

Граничные условия: при $x = 0$, $y = 0$; при $x = l$, $y = 0$.

Подставляя первое граничное условие в (99), получаем $C_2 = 0$.

Подставляя второе граничное условие в (99), получаем: $C_1 \sin kl = 0$. В этом равенстве $C_1 \neq 0$, поскольку тогда мы приходим к тривиальному решению $y = 0$, что соответствует неискривленной оси бруса. Поэтому остается принять $\sin kl = 0$. Это возможно при условии:

$$k = \frac{n\pi}{l}, \quad (100)$$

где $n = 0, 1, 2, 3$ и т. д. Подставляя (100) в (97), получаем значение сжимающей силы F , при которой искривляется ось бруса:

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI_{\min}}{l^2}.$$

Это и будет выражение для расчета критической силы. Но следует отбросить $n = 0$, что опять бы привело к тривиальному решению – отсутствию F , и принять $n = 1$, что соответствует первой форме искривленной

оси бруса и минимальному значению критической силы. Итак, формула Эйлера имеет вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (101)$$

2.11.3. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня

Формула Эйлера получена при условиях закрепления стержня, показанных на рис. 95. При других условиях закрепления следует пользоваться обобщенной формулой Эйлера

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{пр}^2}, \quad (102)$$

где приведенная длина $l_{пр} = \mu l$ (здесь μ – коэффициент приведения длины стержня, который вычисляется и приводится в справочниках).

На рис. 96 даны значения μ для некоторых случаев.

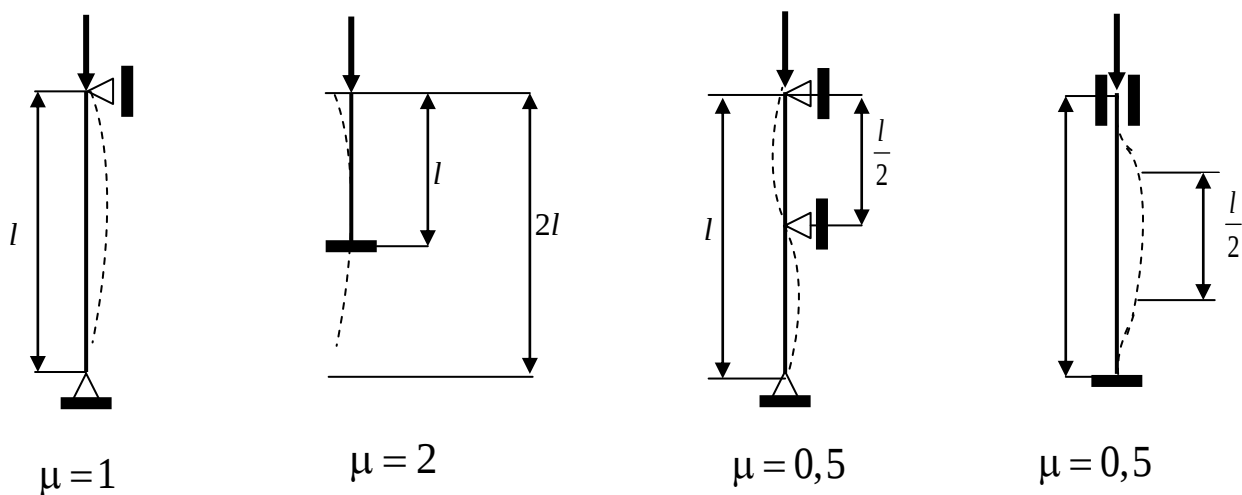


Рис. 96

По рис. 96 виден геометрический смысл коэффициента μ – он показывает, на какой части длины l укладывается одна полуволна синусоиды изогнутой оси стержня при потере его устойчивости.

2.11.4. Пределы применимости формулы Эйлера

Преобразуем формулу Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A}. \quad (103)$$

Введем понятие минимального радиуса инерции сечения $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$.

Формула (103) принимает вид:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2}. \quad (104)$$

Введем понятие гибкости стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$.

Формула Эйлера принимает вид:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (105)$$

Формула Эйлера выведена из дифференциального уравнения изогнутой оси балки, полученного в рамках ограничений, накладываемых на все задачи в курсе сопротивления материалов. Одним из этих ограничений является работа в области упругих деформаций. Строго говоря, максимальным напряжением, при котором деформации будут упругими, является предел пропорциональности материала $\sigma_{\text{пц}}$. Поэтому формулу Эйлера можно применять, если

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}}.$$

Выразим отсюда λ :

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{шц}}}}.$$

Назовем правую часть этого выражения предельной гибкостью стержня $\lambda_{\text{пред}}$:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{шц}}}}. \quad (106)$$

Таким образом, мы получили окончательное условие применимости формулы Эйлера:

$$\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}. \quad (107)$$

2.11.5. Определение критических напряжений для стержней малой гибкости, когда $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$

На рис. 97 изображена диаграмма $\sigma_{\text{кр}} - \lambda$, из которой видно, что для стержней большой гибкости (зона I: $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$) критическое напряжение следует вычислять по формуле Эйлера. Для стержней средней гибкости (зона II: $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{пред}}$) критические напряжения вычисляются по эмпирической формуле Ясинского. Для стали эта формула имеет вид: $\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda$, где a и b – экспериментально определяемые коэффициенты (для стали 3: $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа). Для стержней малой гибкости (зона III: $\lambda \leq \lambda_0$), которые не могут потерять устойчивость и работают только на сжатие, предельное напряжение равняется пределу текучести σ_{T} . Для любого материала значение граничных между зонами точек λ_0 и $\lambda_{\text{пред}}$ можно легко рассчитать. Для сталей $\lambda_0 \approx 50$, $\lambda_{\text{пред}} \approx 100$.

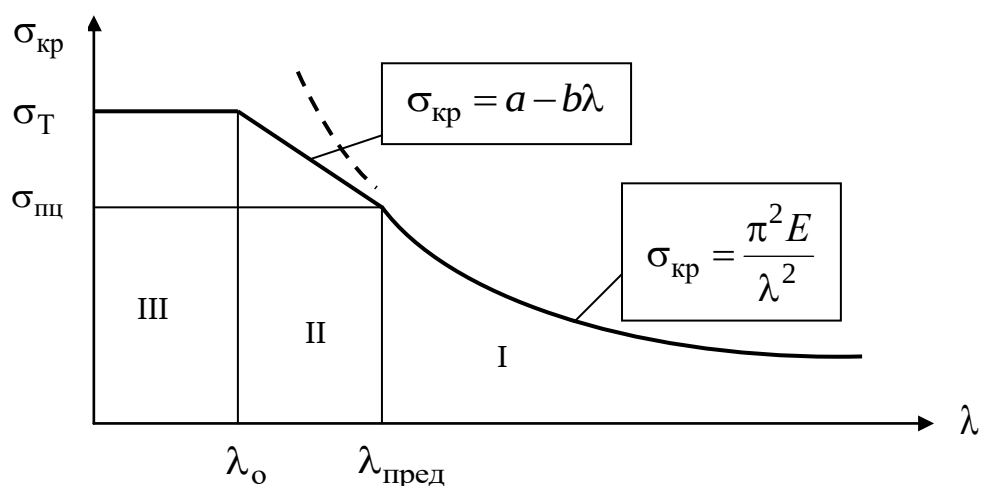


Рис. 97

2.12. Расчет на прочность при движении с ускорением

В силу краткости нашего курса мы рассмотрим этот единственный вид динамических задач. Динамические задачи отличаются от статических тем, что в динамике или вся механическая система, или ее отдельные части движутся с ускорением. Многие такие системы удобно рассчитывать на прочность с помощью принципа Даламбера, который можно рассматривать как искусственный прием, позволяющий эти динамические задачи свести к задачам статическим.

Принцип Даламбера для механической системы: если к каждой точке системы, движущейся с ускорением, добавить силы инерции, то совокупность действующих на систему исходных сил и сил инерции образует систему сил, находящуюся в равновесии, и к ней можно будет применять все уравнения статики.

Покажем на примере применение принципа Даламбера (рис. 98).

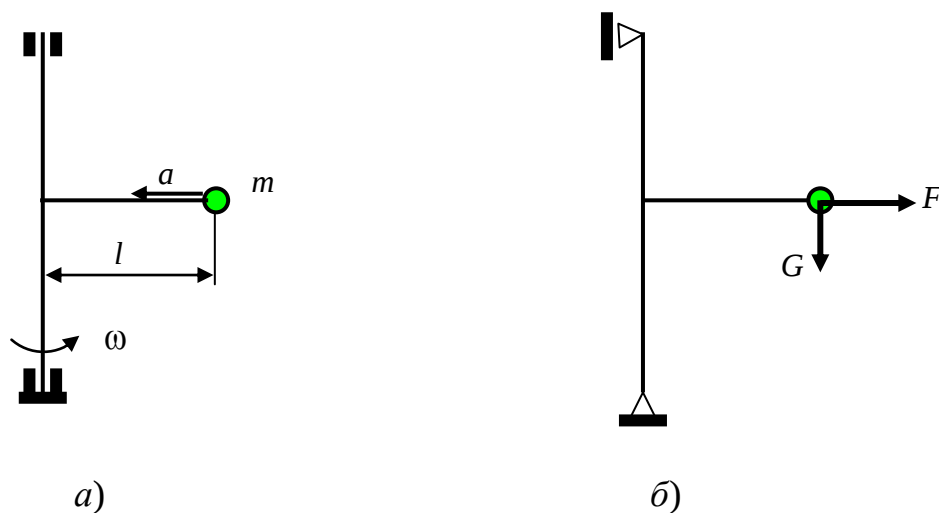


Рис. 98

Пример

Рама с закрепленной на ней массой m вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси BC . Масса m находится на расстоянии l от оси вращения. Пренебрегая массой рамы по отношению к массе m , изобразить адекватную статическую расчетную схему задачи.

Решение

На рис. 98, *а* показана исходная динамическая задача. На массу m действует нормальное (центростремительное) ускорение $a = \omega^2 l$. Добавив в соответствии с принципом Даламбера к приложенной к массе m гравитационной силе $G = mg$ (единственной активной силе) силу инерции $F = |F_{\text{ин}}| = ma$, получим адекватную статическую расчетную схему задачи (рис. 98, *б*).

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК*

Расчет на прочность пластин и оболочек в рамках довольно существенных ограничений, накладываемых на их форму, нагрузку, условия закрепления, рассматривается в курсе «Сопротивление материалов». Более сложные пластины и оболочки рассчитываются в курсе «Теория упру-

гости». В данном учебном пособии ограничимся рассмотрением простейших задач теории пластин и оболочек.

3.1. Расчет тонкостенных осесимметричных оболочек по безмоментной теории

3.1.1. Основные понятия

У осесимметричных оболочек срединная поверхность является поверхностью вращения. Учитывая тонкостенность оболочки, можно принять, что возникающие в ней напряжения постоянны по толщине и, следовательно, изгиб оболочки отсутствует. Теория оболочек, построенная на этом допущении, называется *безмоментной теорией оболочек*. Условием применимости этой теории является также отсутствие в оболочке резких переходов, защемлений, внешняя нагрузка не должна содержать сосредоточенных сил и моментов.

3.1.2. Вывод расчетных формул

Вырежем из оболочки бесконечно малый элемент K двумя меридиональными и двумя нормальными сечениями (рис. 99). Этот элемент в изометрии показан на рис. 100, *а*, а его три проекции – на рис. 100, *б*.

Пусть в оболочке находится газ под давлением q . Обозначим через ρ_m радиус кривизны дуги меридиана, а через ρ_t – радиус кривизны нормального сечения, перпендикулярного к дуге меридиана. Дуги меридиана элемента K ограничены углом $d\theta$, а дуги элемента в нормальном сечении – углом $d\varphi$. Длины этих дуг соответственно будут: $dS_m = \rho_m d\theta$, $dS_t = \rho_t d\varphi$. Суммарные силы, действующие по граням элемента: $Q_m = \sigma_m dS_t \delta$, $Q_t = \sigma_t dS_m \delta$, $Q_q = q dS_t dS_m$ где σ_m и σ_t – соответственно меридиональное и тангенциальное напряжения.

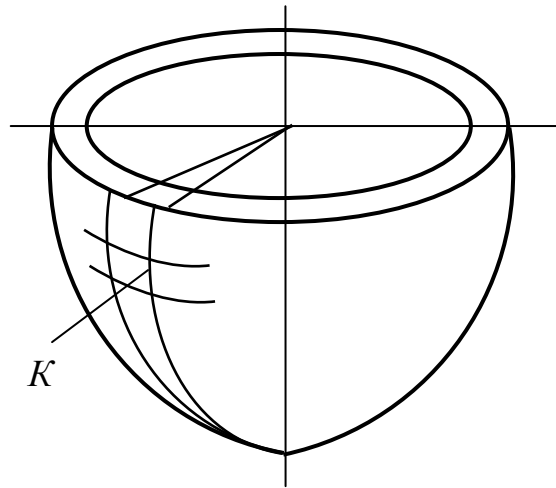


Рис. 99

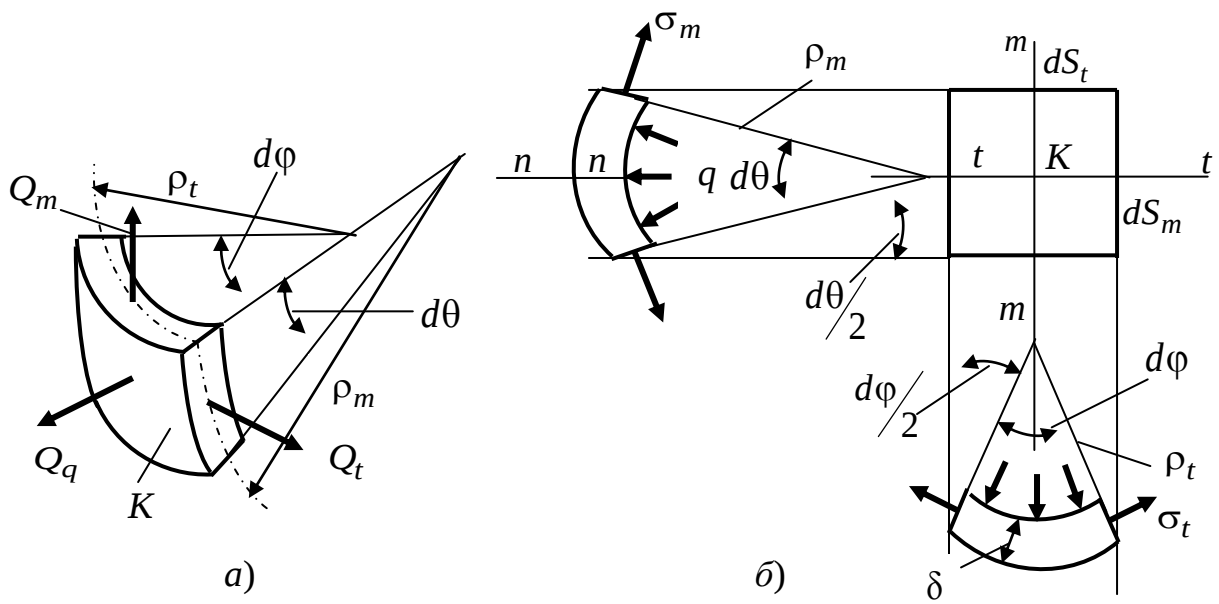


Рис. 100

Составим уравнение равновесия, спроецировав все силы на нормаль $n-n$:

$$\Sigma F_{n-n} = q dS_t dS_m - 2\sigma_t \delta dS_m \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) - 2\sigma_m \delta dS_t \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0.$$

Откуда получаем формулу Лапласа:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{\delta}. \quad (108)$$

Составим второе уравнение равновесия для части оболочки, отсеченной коническим нормальным сечением (рис. 101).

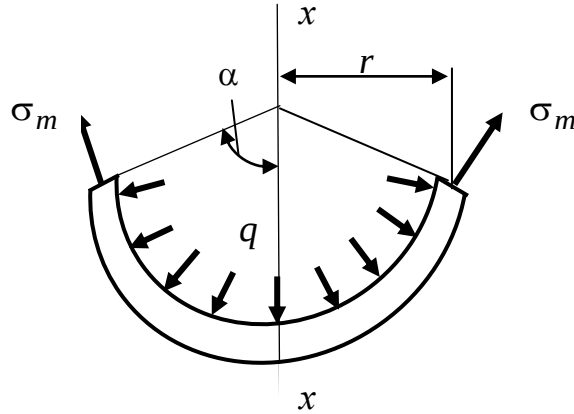


Рис. 101

Спроецируем все силы на ось x - x :

$$\Sigma F_{x-x} = \sigma_m 2\pi r \delta \sin \alpha - q\pi r^2 = 0.$$

Из этого уравнения определяется σ_m , а затем из уравнения Лапласа σ_t .

Пример 1

Рассчитать на прочность тонкостенную сферическую оболочку, в которой находится газ под давлением q . Радиус срединной поверхности оболочки r , толщина стенки δ (рис. 102, а).

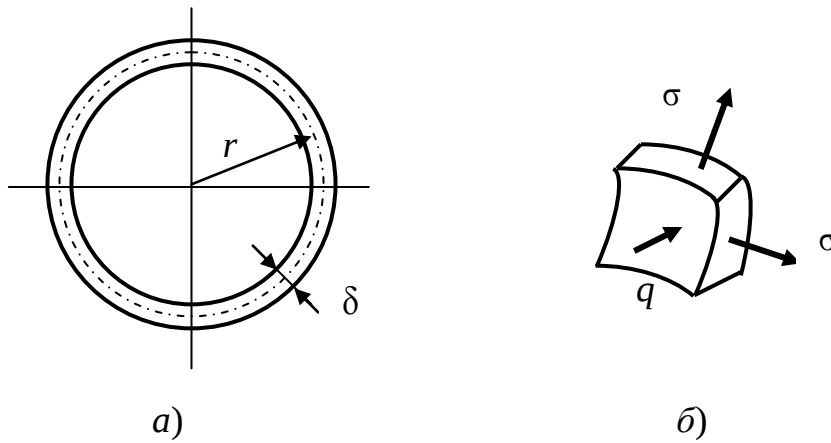


Рис. 102

Решение

Уравнение Лапласа: $\frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma}{r} = \frac{q}{\delta}$, откуда $\sigma = \frac{qr}{2\delta}$.

Вырежем в произвольном месте элемент оболочки – рис. 102, б. Главные напряжения $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\sigma_3 = -q \approx 0$, поскольку $q \ll \sigma$, как это видно из полученной формулы для σ . Эквивалентное напряжение по 3-й теории прочности $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma = \frac{qr}{2\delta}$.

Условие прочности: $\sigma_{\text{экв}} = \frac{qr}{2\pi} \leq [\sigma]$.

Пример 2

Рассчитать на прочность и жесткость тонкостенную цилиндрическую оболочку, находящуюся под внутренним давлением газа q .

Решение

Вырежем бесконечно малый элемент оболочки двумя меридиональными и двумя окружными сечениями (рис. 103, а). Запишем уравнение

Лапласа: $\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{\delta}$. Поскольку $\rho_m = \infty$, $\rho_t = r$, из уравнения Лапласа

получаем $\sigma_t = \frac{qr}{\delta}$. Из уравнения равновесия $\Sigma F_{x-x} = \sigma_m 2\pi r \delta - q\pi r^2 = 0$

получим: $\sigma_m = \frac{qr}{2\delta}$.

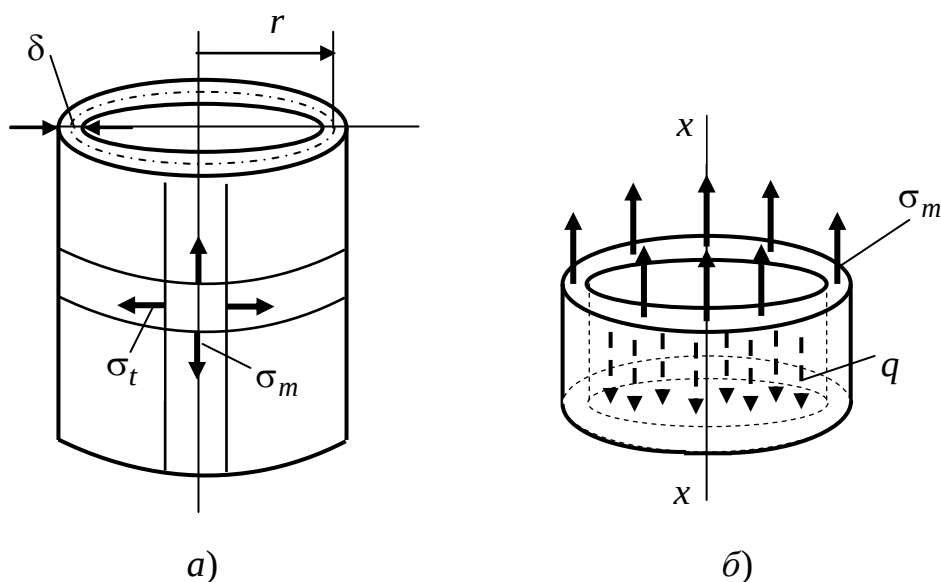


Рис. 103

Главные напряжения: $\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_2 = \sigma_m$, $\sigma_3 = -q \approx 0$.

По третьей теории прочности $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{qr}{\delta} \leq [\sigma]$.

Сравнивая эквивалентные напряжения у сферической и цилиндрической оболочек, видим, что сферическая оболочка может выдержать в два раза большую нагрузку.

Выполним расчет на жесткость. $\varepsilon_t = \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu \sigma_m) = \frac{qr}{E\delta} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$,

откуда $\Delta r = \frac{qr^2 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{E\delta} \leq [\Delta r]$.

3.2. Изгиб цилиндрической оболочки при симметричном нагружении

Выше был рассмотрен случай растяжения оболочек без изгиба (безмоментная теория). Теперь остановимся на более общем случае, когда в сечениях оболочки возникают и изгибающие моменты, и нормальные силы.

Рассчитаем на прочность симметрично нагруженный тонкостенный цилиндр постоянной толщины h с радиусом срединной поверхности R (рис. 104).

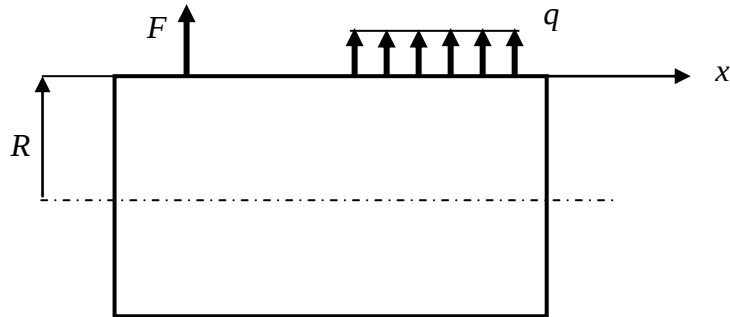


Рис. 104

Обозначим через w радиальное перемещение, а через ϑ угол наклона касательной к образующей срединной поверхности (рис. 105, а). При этом

$$\vartheta = \frac{dw}{dx}. \quad (109)$$

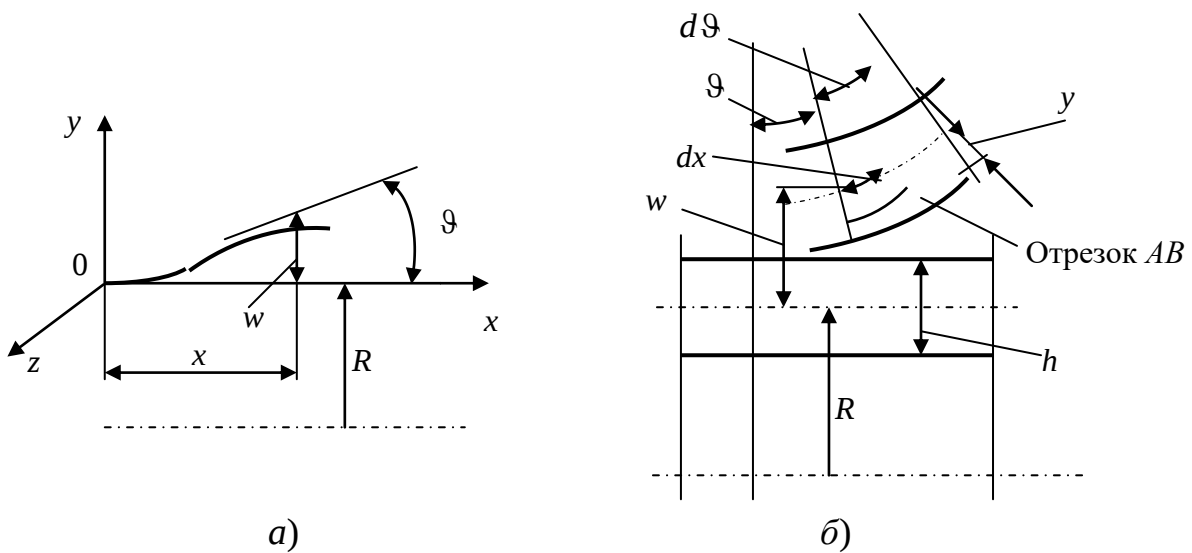


Рис. 105

Относительное удлинение ε_x отрезка AB , расположенного на расстоянии y от срединной поверхности (рис. 105, б), складывается из удлинения ε_0 срединной поверхности и удлинения, обусловленного искривлением образующей цилиндра:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + y \frac{d\vartheta}{dx}. \quad (110)$$

Относительное удлинение в окружном направлении:

$$\varepsilon_z = \frac{w}{R}. \quad (111)$$

Линейным деформациям ε_x и ε_z соответствуют напряжения σ_x и σ_z , связанные с ними обобщенным законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_z); \\ \sigma_z &= \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_z + \mu \varepsilon_x). \end{aligned}$$

С учетом (110) и (111) эти выражения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\varepsilon_0 + \mu \frac{w}{R} + y \frac{d\vartheta}{dx} \right); \\ \sigma_z &= \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\mu \varepsilon_0 + \frac{w}{R} + \mu y \frac{d\vartheta}{dx} \right). \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Рассмотрим элемент оболочки с размерами dx , dz , h (рис. 106, а). Нормальные силы в площадках hdz и hdy , отнесенные к единице длины, будут:

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dy = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\varepsilon_0 + \mu \frac{w}{R} \right); \\ T_t &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t dy = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{w}{R} + \mu \varepsilon_0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Изгибающие моменты, отнесенные к единице длины,

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x y dy = D \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad M_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t y dy = D\mu \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (114)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – жесткость оболочки на изгиб.

Теперь составим уравнения равновесия. На рис. 106, а показаны силы и моменты, приложенные к граням элемента. К определенным четырем силовым факторам по формулам (113) и (114) добавлены поперечные силы Q и внешние силы, характеризуемые давлением p . При переходе от передней грани с координатой x к задней грани с координатой $x + dx$ силы получают соответствующие приращения.

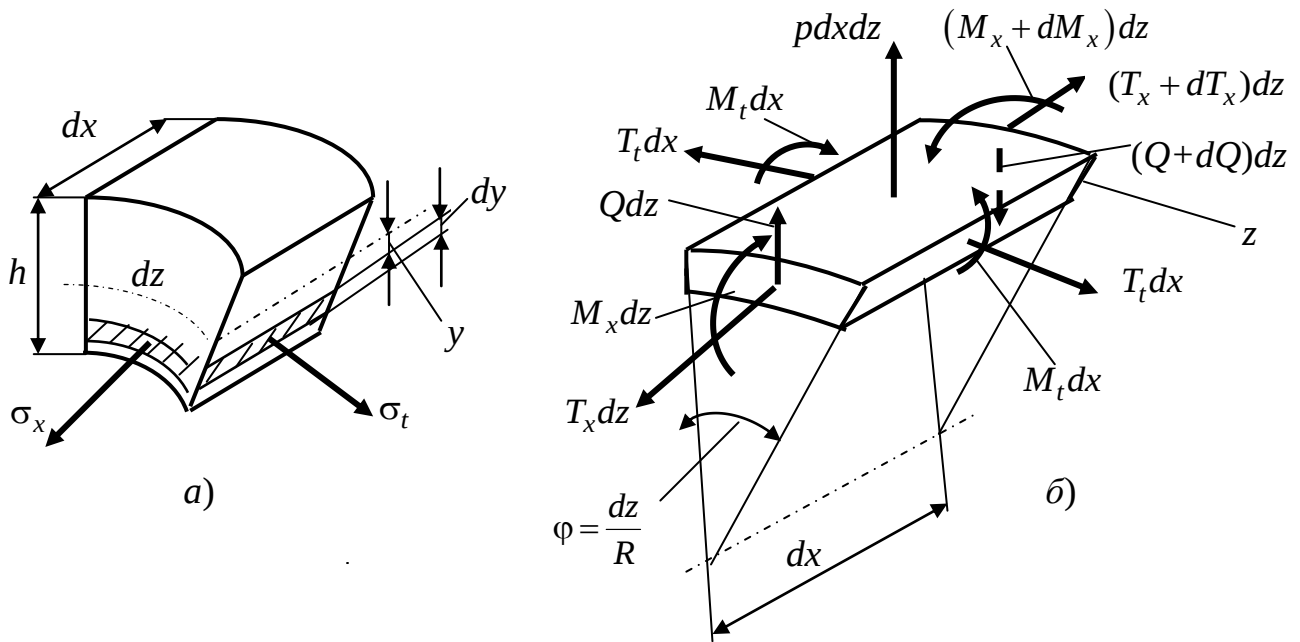


Рис. 106

Проецируя все силы на ось цилиндра, получаем

$$dT_x = 0; \quad T_x = \text{const.}$$

Проецируем силы на направление радиуса:

$$-T_t dx \frac{dz}{R} - dQ dz + p dx dz = 0,$$

откуда

$$\frac{dQ}{dx} = p - \frac{T_t}{R}. \quad (115)$$

Составляем третье уравнение равновесия:

$$\Sigma m_z = -Q dz dx + dM_x dz = 0,$$

откуда

$$Q = \frac{dM_x}{dx}. \quad (116)$$

Преобразуем полученные уравнения. Из уравнений (113) исключаем ε_0 , а из (115) и (116) – поперечную силу Q . В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} T_t &= \frac{Eh}{R} w + \mu T_x; \\ \frac{d^2 M_x}{dx^2} &= p - \frac{T_t}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Исключаем из этих уравнений T_t :

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = p - \frac{Eh}{R^2} w - \frac{\mu}{R} T_x.$$

И, наконец, исключим M_x из полученного уравнения, используя первую формулу (114), и получим уравнение относительно одного неизвестного w :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4k^4 w = \frac{p}{D} - \frac{\mu T_x}{RD}, \quad (118)$$

где

$$4k^4 = \frac{Eh}{R^2 D} = \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h^2}. \quad (119)$$

Решение уравнения (118) можно искать в виде:

$$w = e^{-kx} (c_1 \sin kx + c_2 \cos kx) + e^{kx} (c_3 \sin kx + c_4 \cos kx) + w^*, \quad (120)$$

где w^* – частное решение, которое зависит от функции $p(x)$.

Для определения четырех постоянных необходимо задать четыре граничных условия, а затем решить систему четырех уравнений.

Граничные условия.

1. Край защемлен: $w = 0$; $\frac{dw}{dx} = 0$.

2. Шарнирно-опертый край: $w = 0$; $\frac{d^2 w}{dx^2} = 0$ ($M_x = 0$).

3. Свободный край: $\frac{d^2 w}{dx^2} = 0$; $\frac{d^3 w}{dx^3} = 0$ ($Q = 0$).

4. Край нагружен силой Q_0 и моментом M_0 : $D \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0$; $D \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_0$.

Наибольшие напряжения определяются выражениями (112) при $y = \pm \frac{h}{2}$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x \max} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\varepsilon_0 + \mu \frac{w}{R} \right) \pm \frac{h}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} \right], \\ \sigma_{t \max} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\mu \varepsilon_0 + \frac{w}{R} \right) \pm \mu \frac{h}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} \right]. \end{aligned} \right\}$$

Если исключить отсюда при помощи выражений (113) и (114) вели-

чины $\left(\varepsilon_0 + \mu \frac{w}{R} \right)$, $\left(\mu \varepsilon_0 + \frac{w}{R} \right)$, $\frac{d^2 w}{dx^2}$, $\mu \frac{d^2 w}{dx^2}$, то получим

$$\sigma_{x \max} = \frac{T_x}{h} \pm \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_{t \max} = \frac{T_t}{h} \pm \frac{6M_t}{h^2}. \quad (121)$$

3.3. Изгиб круглых симметрично нагруженных пластин

Пусть прогибы пластины w существенно меньше ее толщины h (такие пластины называются тонкими плитами). В этом случае можно считать, что нормальные напряжения в сечениях, параллельных срединной плоскости, пренебрежимо малы по сравнению с изгибными напряжениями, т. е. надавливание между слоями пластины отсутствует.

Перейдем к определению напряжений в таких пластинах, нагруженных силами, симметрично расположенными относительно ее оси y (рис. 107, *а*). Деформации, перемещения и напряжения будут также симметричными относительно оси y . Прогиб w связан с углом поворота нормали ϑ очевидным соотношением (рис. 107, *б*)

$$\vartheta = -\frac{dw}{dr}. \quad (122)$$

Знак минус в (122) берется в соответствии с рис. 107, *б*. С уменьшением прогиба w угол ϑ возрастает.

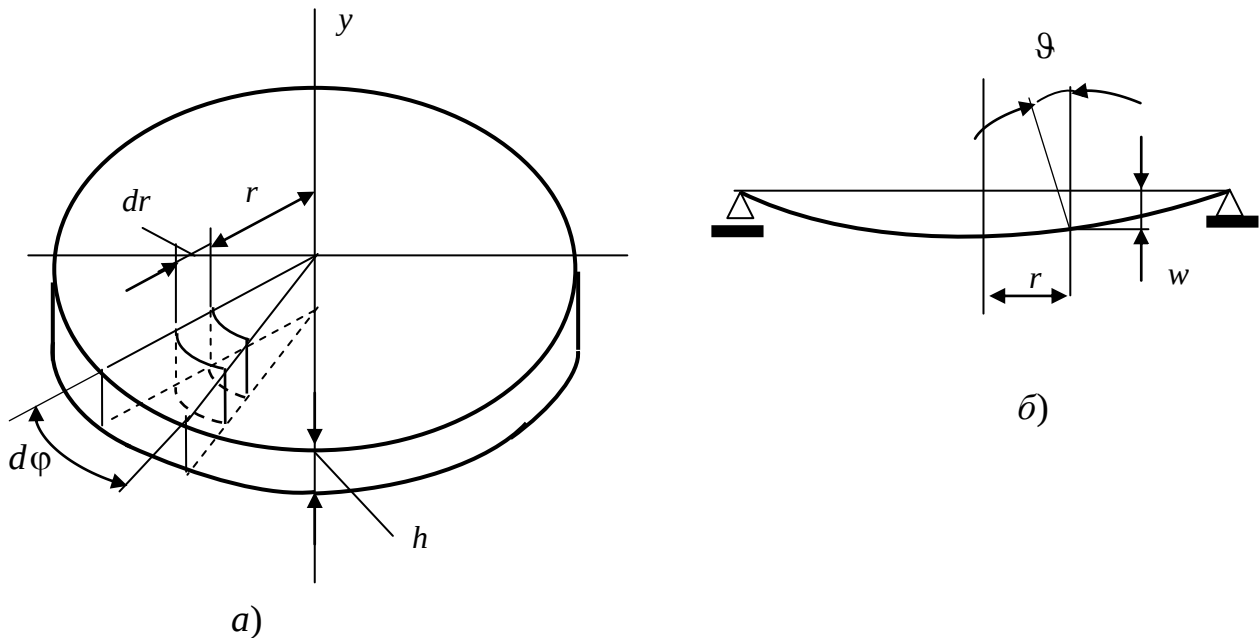


Рис. 107

На рис. 108 показано осевое сечение пластины. Точки, расположенные на нормали BD , после изгиба пластины образуют нормаль B_1D_1 , повернутую на угол ϑ . Нормаль AC повернется на угол $\vartheta + d\vartheta$.

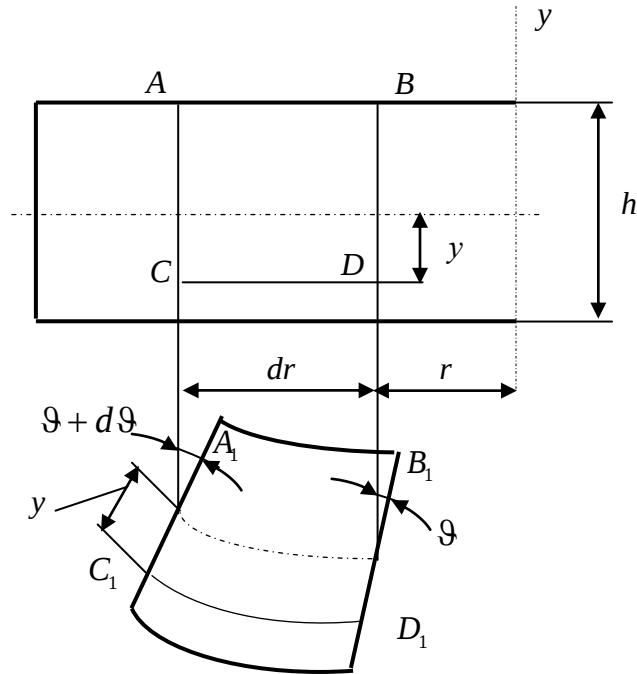


Рис. 108

Отрезок CD , расположенный на расстоянии y от срединной поверхности, получает относительное удлинение:

$$\varepsilon_r = y \frac{d\vartheta}{dr}. \quad (123)$$

Относительное удлинение в т. D в окружном направлении:

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r + y\vartheta) - 2\pi r}{2\pi r} = y \frac{\vartheta}{r}. \quad (124)$$

Двумя осевыми сечениями, проведенными под углом $d\varphi$ друг к другу, и двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $r + dr$ выделим элемент пластины, показанный на рис. 107 и рис. 109, *a*. Поскольку в сечениях, параллельных срединной плоскости, нормальными напряже-

ниями можно пренебречь, выразим напряжения через линейные деформации ε_r и ε_t .

Тогда из обобщенного закона Гука получим:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t); \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r). \quad (125)$$

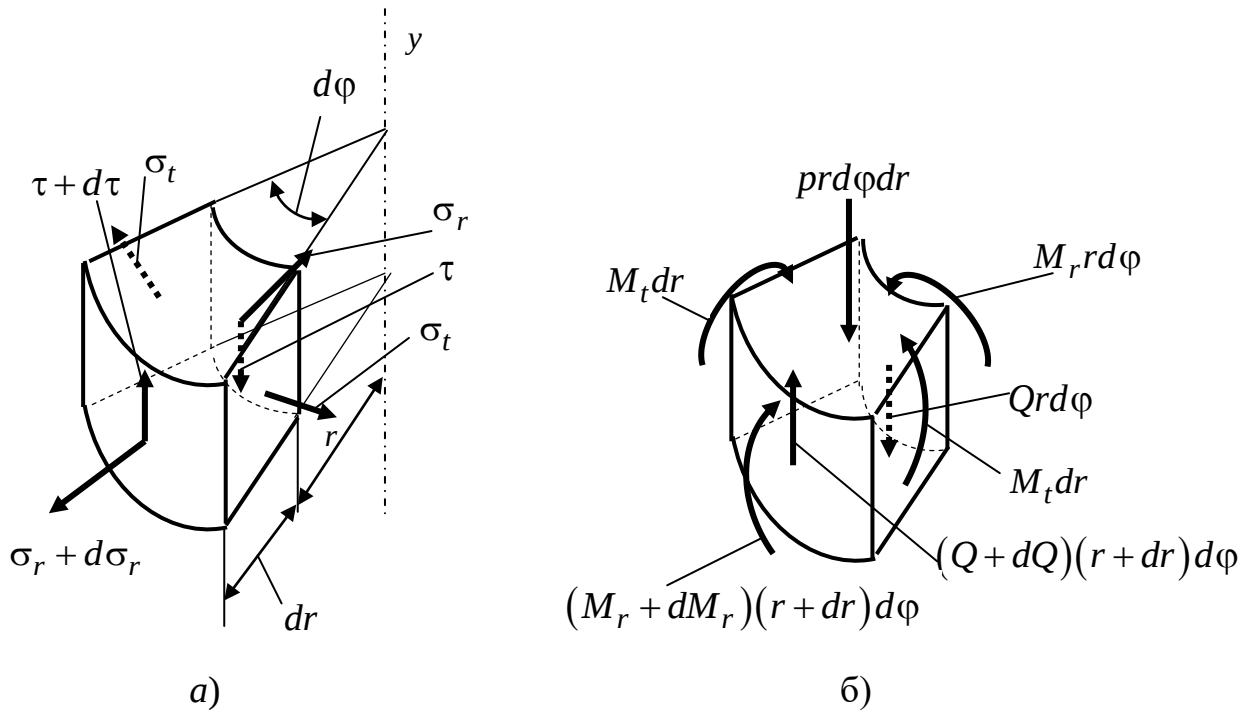


Рис. 109

Подставляя в (125) полученные выражения (123) и (124), получим:

$$\sigma_r = \frac{E\gamma}{1-\mu^2} \left(\frac{d\gamma}{dr} + \mu \frac{\gamma}{r} \right); \quad \sigma_t = \frac{E\gamma}{1-\mu^2} \left(\frac{\gamma}{r} + \mu \frac{d\gamma}{dr} \right). \quad (126)$$

На гранях элемента возникают и касательные напряжения. Из условий симметрии очевидно, что они могут возникать только на площадках, перпендикулярных радиусу r и только в вертикальном направлении (см. рис. 109, а).

Зная напряжения σ_r и σ_t , определим моменты, приходящиеся на единицу длины сечения:

$$M_r r d\phi = r d\phi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r y dy; \quad M_t dr = dr \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t y dy.$$

Подставляя в эти формулы выражения (126), получим

$$M_r = D \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right), \quad M_t = D \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right), \quad (127)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – жесткость пластины на изгиб.

Составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma Y (Q + dQ)(r + dr) d\phi - Q r d\phi - p r d\phi dr = 0,$$

откуда

$$p r = \frac{d}{dr} (Q r); \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \Sigma m_z = & (M_r + dM_r)(r + dr) d\phi - M_r r d\phi - p r d r d\phi \frac{dr}{2} - \\ & - M_t d r d\phi + (Q + dQ)(r + dr) d\phi dr = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$M_t - \frac{d}{dr} (M_r r) = Q r. \quad (129)$$

Подставляем (127) в (128):

$$r \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r} = -\frac{Q r}{D}.$$

Из этого выражения получаем:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\vartheta r) \right] = -\frac{Q}{D}. \quad (130)$$

Два раза интегрируем (130):

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr} \int (r \int Q dr) dr. \quad (131)$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из граничных условий, таких же, как и для оболочек.

Поперечная сила Q может быть найдена из уравнения равновесия (128).

После того, как найдена функция ϑ (131), из выражений (127) определяются изгибающие моменты M_r и M_t , а из формулы (122) – прогиб w .

Получим теперь расчетные формулы для напряжений. Для этого выражения $\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} = \frac{M_r}{D}$ и $\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} = \frac{M_t}{D}$, полученные из (127), подставим в (126):

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3} y; \quad \sigma_t = \frac{12M_t}{h^3} y. \quad (132)$$

Наибольшие напряжения имеют место при $y = \pm \frac{h}{2}$:

$$\sigma_{r \max} = \pm \frac{6M_r}{h^2}; \quad \sigma_{t \max} = \pm \frac{6M_t}{h^2}. \quad (133)$$

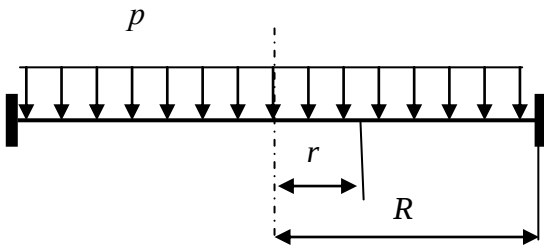


Рис. 110

Пример

Определить максимальный прогиб и максимальное эквивалентное напряжение в круглой пластине, защемленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой p (рис. 110).

Решение

Для центральной части пластины, отсеченной окружностью радиуса r , из уравнения равновесия $Q2\pi r = p\pi r^2$ находим:

$$Q = \frac{pr}{2}. \quad (134)$$

Из выражения (131) после двукратного интегрирования, с учетом (134), находим:

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{pr^3}{16D}.$$

Угол поворота ϑ в центре пластины должен быть равен нулю. Это возможно только в том случае, если $C_2 = 0$. Таким образом,

$$\vartheta = C_1 r - \frac{pr^3}{16D}. \quad (135)$$

Кроме того, на контуре при $r = R$ угол $\vartheta = 0$, из (135) получаем:
 $C_1 = \frac{pR^2}{16D}$. Формула (135) принимает вид:

$$\vartheta = \frac{p}{16D} (R^2 r - r^3). \quad (136)$$

Из (127) с учетом (136) получим выражения для моментов:

$$M_r = \frac{p}{16} [R^2 (1 + \mu) - r^2 (3 + \mu)]; \quad M_t = \frac{p}{16} [R^2 (1 + \mu) - r^2 (1 + 3\mu)]. \quad (137)$$

Далее из (122) с учетом (136) получим:

$$w = \frac{p}{16D} \left(C_3 - \frac{1}{2} R^2 r^2 + \frac{r^4}{4} \right),$$

где постоянная $C_3 = \frac{R^4}{4}$ из условия, что на контуре $w = 0$.

Формула для прогиба принимает окончательный вид:

$$w = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2)^2. \quad (138)$$

Максимальный прогиб будет при $r = 0$:

$$w_{\max} = \frac{pR^4}{64D}.$$

Переходим к напряжениям. Из формул (137) для моментов видно, что максимальное по модулю значение имеет момент M_r вблизи защемления

при $r = R$: $|M_{r\max}| = \frac{2pR^2}{16}(1+\mu)$. Тангенциальный момент в этих же точ-

ках, вычисленный по формуле (137), $|M_t| = \frac{2p\mu R^2}{16}$.

Очевидно, что опасными будут точки на поверхности пластины вблизи защемления, и главные напряжения в этих точках вычисляем по формулам (133):

$$\sigma_1 = \sigma_r = \frac{2pR^2}{16} \frac{6}{h^2}; \quad \sigma_2 = \sigma_t = \frac{2\mu pR^2}{16} \frac{6}{h^2}; \quad \sigma_3 = 0.$$

Максимальное эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{\text{экв. max}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{3}{4} \frac{pR^2}{h^2}.$$

4. ДЕТАЛИ МАШИН

В этом разделе в силу ограниченности объема курса мы рассмотрим только соединения деталей. Это ключевой вопрос раздела.

Соединения деталей могут быть разъемными и неразъемными. К разъемным относятся резьбовые, шпоночные и клиновые соединения. К числу неразъемных – заклепочные и сварные.

4.1. Упрощенный расчет резьбовых соединений

Резьбовые соединения (винт-гайка) разделяются на крепежные (метрические и дюймовые резьбы) и специальные (ходовые, трубные и упорные резьбы). Мы рассмотрим расчет на прочность только крепежных метрических резьб (рис. 111). На рис. 111: d_1 – внутренний диаметр; d_{cp} – средний диаметр; d – наружный диаметр; S – шаг резьбы.

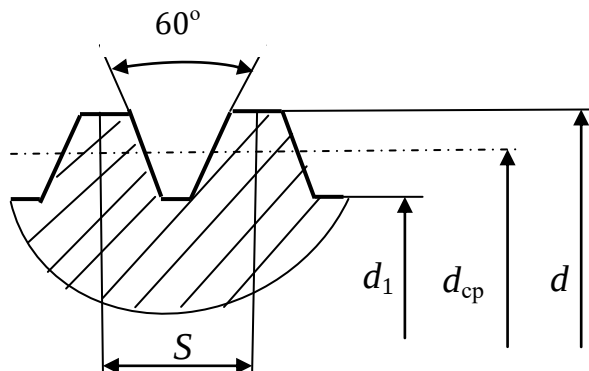


Рис. 111

Метрическая резьба может быть основной или мелкой. Обозначение основной метрической резьбы: $M(d)$, например $M(20)$. У мелких метрических резьб меньше шаг S и глубина резьбы. Все размеры резьб строго регламентированы стандартом ГОСТ 9253–59.

Сама резьба болта и гайки работает на срез, а стержень болта, ограниченный внутренним диаметром резьбы d_1 , работает на растяжение. Гайка стандартной высоты имеет столько витков резьбы, что срезаемая растягивающей силой резьба равнопрочна растягиваемому болту. Поэтому упрощенный расчет резьбового соединения проводится для болта по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A_1} \leq [\sigma]_p, \quad (139)$$

где $A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$; $[\sigma]_p = 0,6\sigma_T$; F – растягивающая продольная сила.

Зная F , по формуле (139) можно найти d_1 , а затем по ГОСТ подобрать резьбу.

Но при определении силы F необходимо учитывать особенности работы резьбового соединения. Рассмотрим следующие случаи.

1. Болты, нагруженные только внешней продольной силой.

Примером такого соединения может служить резьбовая часть грузового крюка (рис. 112). В этом случае F – это вес поднимаемого груза.

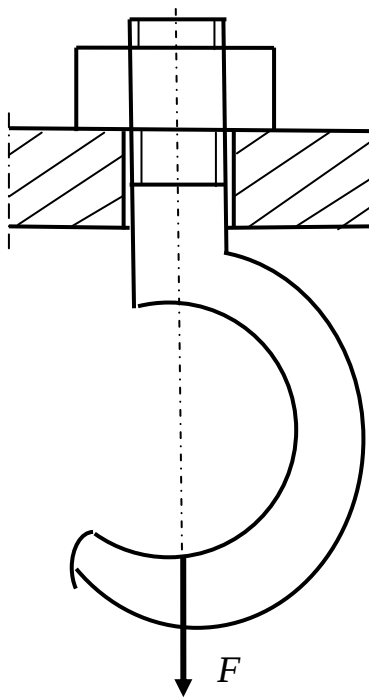


Рис. 112

2. Болты, нагруженные поперечной силой (рис. 113).

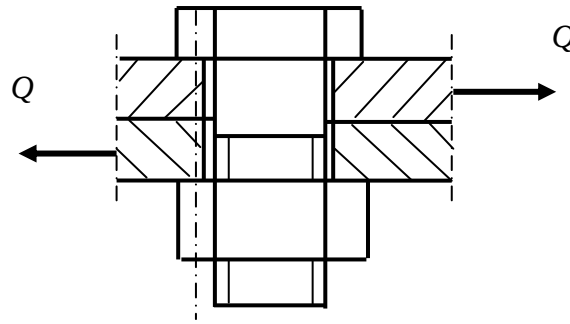


Рис. 113

Это резьбовое соединение должно обеспечить несдвигаемость стягиваемых листов поперечными силами Q . Для этого необходима предварительная затяжка соединения силой F_3 , обеспечивающей необходимую силу трения:

$$F_{\text{тр}} = F_3 f \geq Q, \quad \text{откуда } F_3 = \frac{Q}{f}. \quad (140)$$

Здесь f — коэффициент трения между стягиваемыми листами.

В условии прочности (139): $F = F_3$.

3. Расчет предварительно затянутых болтов с дополнительной осевой нагрузкой.

Этот случай иллюстрируется рис. 114, на котором видно, что крышка с уплотнением должна обеспечить герметичность сосуда, в котором находится газ под давлением p . Растягивающая сила, приходящаяся на один болт, складывается из отрывающей силы $F_{\text{отр}}$ от давления газа на крышку и силы предварительной затяжки F_3 , которая должна обеспечить герметичность сосуда. Точный расчет F_3 здесь довольно сложен в силу необходимости учета деформаций всех соединяемых деталей, поэтому в упрощенном расчете с дополнительным запасом прочности в качестве расчетной продольной силы принимают:

$$F = 2F_{\text{отр}}. \quad (141)$$

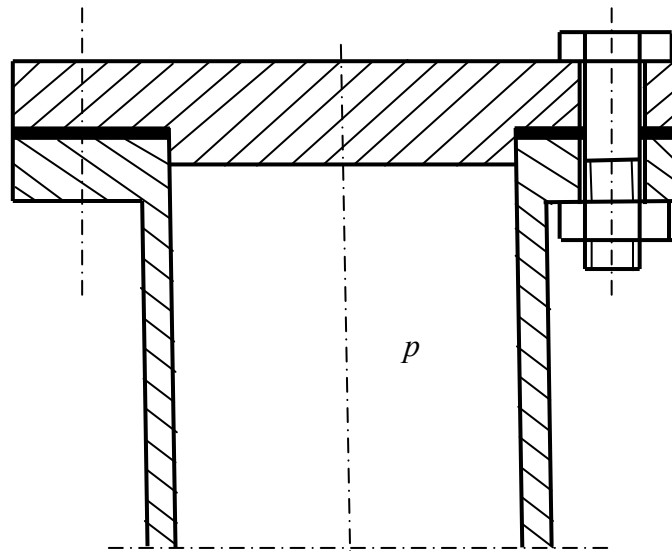


Рис. 114

4. Расчет болтов на срез (рис. 115).

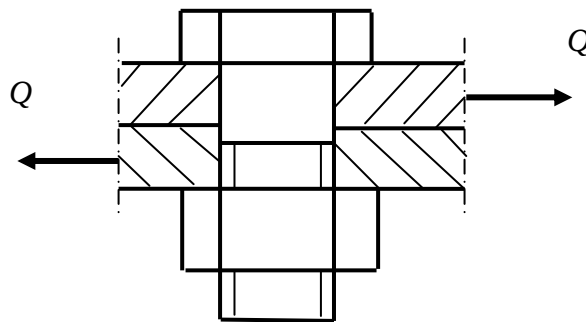


Рис. 115

В этом случае болт воспринимает поперечную нагрузку Q , стоит без зазора и рассчитывается на срез:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q}{A_{\text{с}}} \leq [\tau]_{\text{ср}}, \quad (142)$$

где $A_{\text{с}}$ – площадь срезаемого сечения болта;

допускаемое напряжение среза $[\tau]_{\text{ср}} \approx (0,2 - 0,3)\sigma_{\text{Т}}$.

4.2. Расчет шпоночных соединений

Шпонки предназначены для передачи вращающего момента от вала на ступицу зубчатого колеса. Шпонки бывают призматические, сегментные, клиновые и специальной конструкции. Мы рассмотрим расчет простейших, наиболее часто употребляемых призматических шпонок прямоугольного поперечного сечения (рис. 116).

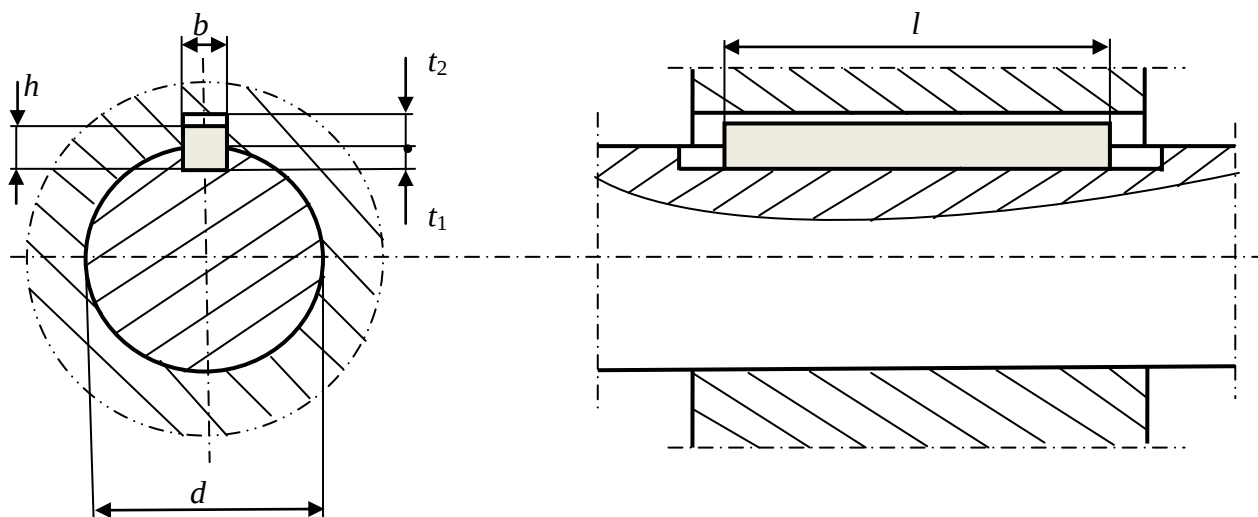


Рис. 116

Поскольку размеры вала рассчитываются по передаваемому моменту, то естественно связать размеры сечения шпонки с диаметром вала. Поэтому размеры сечения шпонки b , h , глубина ее посадки в вал t_1 и глубина паза t_2 в ступице берутся по справочным таблицам в зависимости от диаметра вала d . А длина шпонки l определяется из условия ее прочности на смятие по формуле

$$l = \frac{2M}{d(h-t_1)[\sigma]_{\text{см}}}, \quad (143)$$

где M – передаваемый вращающий момент;

$[\sigma]_{\text{см}}$ – допускаемое напряжение смятия;

$[\sigma]_{\text{см}} = 110 - 190$ МПа при стальной ступице.

4.3. Расчет заклепочных соединений

С помощью заклепок выполняются неразъемные соединения, как правило, тонких листов (рис. 117).

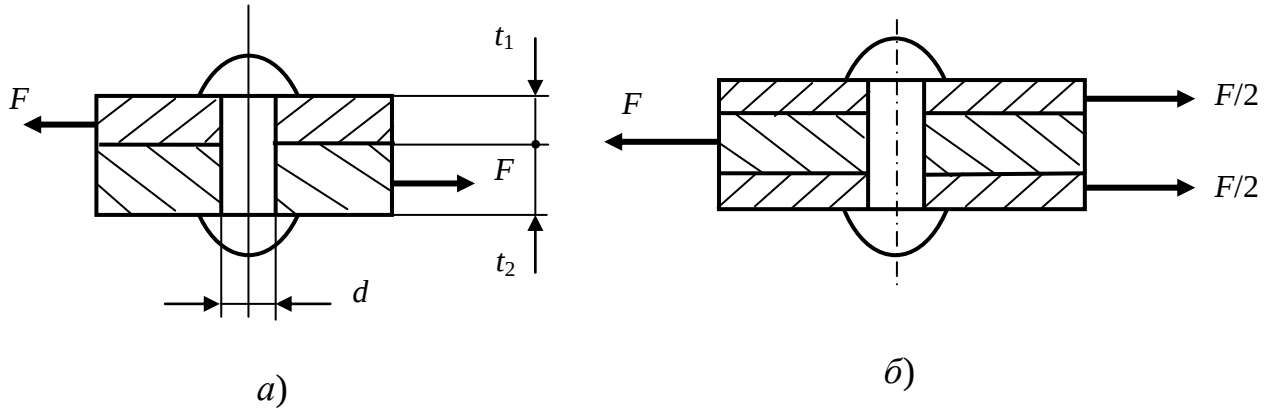


Рис. 117

Заклепки рассчитываются на срез и смятие.

Условие прочности на срез:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{4F}{k\pi nd^2} \leq [\tau]_{\text{ср}}. \quad (144)$$

Условие прочности на смятие:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{ndt_{\text{min}}} \leq [\sigma]_{\text{см}}. \quad (145)$$

В этих формулах k – число поверхностей среза (на рис. 117, а: $k = 1$, на рис. 117, б: $k = 2$); n – число заклепок.

Допускаемые напряжения на срез и смятие выбираются в зависимости от материала заклепок и соединяемых деталей.

4.4. Расчет сварных соединений

Сварные соединения являются также неразъемными и широко применяются в технике в силу своей экономичности, доступности и относительной надежности.

Сварные швы разделяются на стыковые и угловые (валиковые).

Стыковой шов на рис. 118, а рассчитывается на растяжение:

$$\sigma = \frac{F}{hl} \leq [\sigma]_p. \quad (146)$$

Стыковой шов на рис. 118, б рассчитывается на растяжение и изгиб:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} \leq [\sigma]_p. \quad (147)$$

В этой формуле площадь сечения шва $A = h\delta$; осевой момент сопротивления сечения $W = \frac{\delta h^2}{6}$.

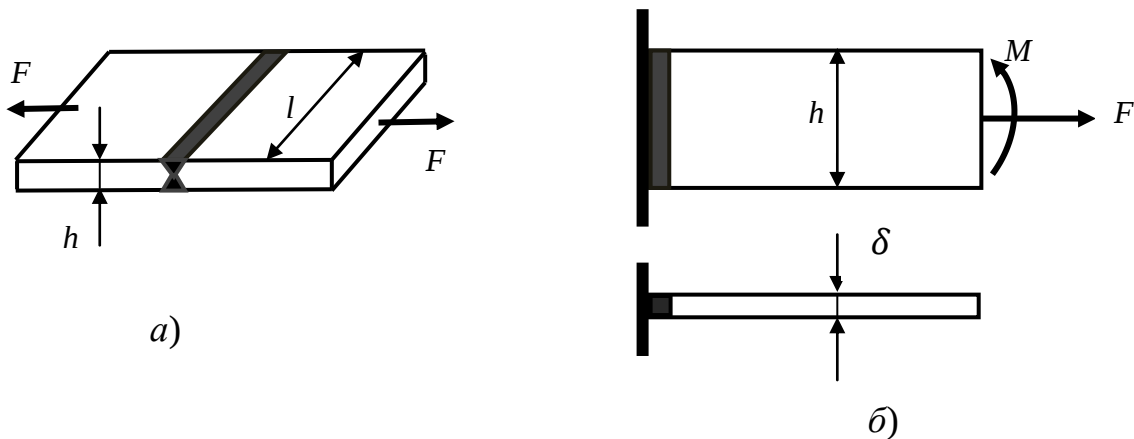


Рис. 118

Допускаемое напряжение на растяжение для электродов, изготовленных из малоуглеродистой стали, при автоматической сварке принимается 150 МПа, а при ручной сварке 135 МПа.

Угловые швы рассчитываются на срез.

Угловой шов на рис. 119, *a* рассчитывается по формуле

$$\tau = \frac{F}{A_c} + \frac{M}{W_c} \leq [\tau]_{\text{ср}}, \quad (148)$$

где $A_c = 0,7kh$ – наименьшая площадь среза шва (рис. 119, *б*);

k – катет шва;

$W_c = \frac{0,7kh^2}{6}$ – осевой момент сопротивления среза шва;

$[\tau]_{\text{ср}} = 0,65[\sigma]_p$ – при автоматической сварке;

$[\tau]_{\text{ср}} = 0,6[\sigma]_p$ – при ручной сварке.

Заметим, что по формуле (148), как правило, при заданной нагрузке рассчитывается катет сварного шва.

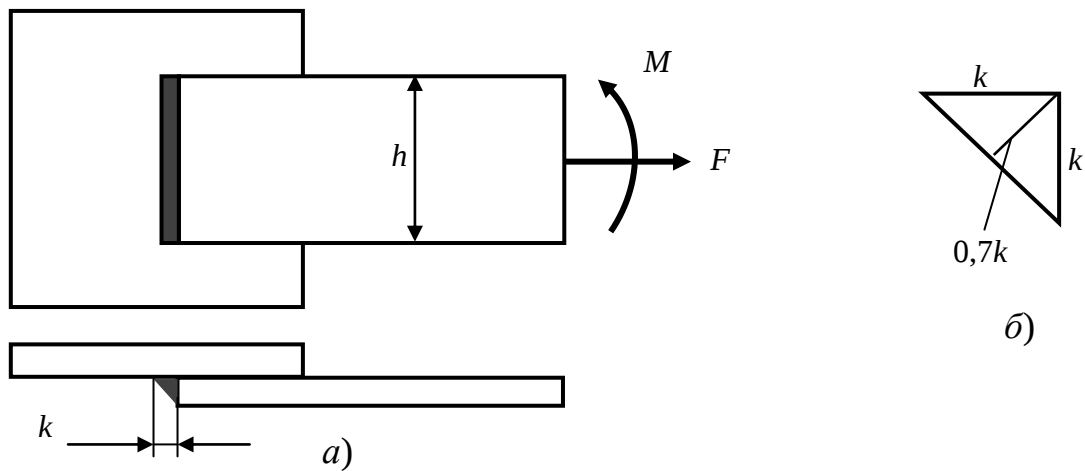


Рис. 119

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Атапин В. Г. Сопротивление материалов. – М. : Юрайт, 2015. – Сер. Бакалавр. Академический курс.
2. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. – М. : Наука, 1968.
3. Тимошенко С. П., Дж. Гере. Механика материалов / пер. с англ. – М. : Мир, 1976.
4. Ахметзянов М. Х., Лазарев И. Б. Сопротивление материалов. – Новосибирск : Изд-во СГУПС, 1997.
5. Дунаев П. Ф., Леликов О. П. Детали машин. Курсовое проектирование. – 2-е изд. – М. : Высшая школа, 1990.