Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

К. Ф. Афонин

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ.
СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЖДУ НИМИ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия для обучающихся по направлению
подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование
(уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2020

УДК 528.2/.3
А946

Рецензенты: кандидат технических наук, консультант ООО «Гео плюс» *С. В. Кужелев*

кандидат технических наук, доцент СГУГиТ *Н. Н. Кобелева*

Афонин, К. Ф.

А946 Высшая геодезия. Системы координат и преобразования между ними [Текст] : учеб. пособие / К. Ф. Афонин. – Новосибирск : СГУГиТ, 2020. – 112 с.

ISBN 978-5-907320-08-6

Учебное пособие подготовлено кандидатом технических наук, доцентом К. Ф. Афониным на кафедре космической и физической геодезии СГУГиТ.

Рассмотрены общие сведения об основных системах координат, применяемых в геодезии, приведены необходимые рабочие формулы и примеры расчетов. Даны практические рекомендации по преобразованию координат из одной системы в другую.

Учебное пособие по дисциплине «Системы координат» предназначено для обучающихся по направлению подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата), также может быть использовано обучающимися по специальности 21.05.01 Прикладная геодезия (уровень специалитета) при изучении дисциплины «Высшая геодезия и основы координатно-временных систем».

Рекомендовано к изданию кафедрой космической и физической геодезии, Ученым советом Института геодезии и менеджмента СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 528.2/.3

ISBN 978-5-907320-08-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Применение различных систем координат при решении практических задач геодезии, топографии, землеустройства и кадастра объектов недвижимости неизбежно. Это вызвано наличием у каждой системы координат целого набора положительных и отрицательных свойств, которые делают удобным или неудобным использование той или иной системы. С другой стороны, применение разных систем координат вынуждает геодезистов выполнять преобразование координат своих точек из одной системы в другую. Преобразование координат в геодезии осуществляется по специальным формулам, зачастую весьма громоздким. Поэтому во всех промышленных программных продуктах предусмотрена возможность выполнять такие преобразования. Однако специалистам геодезического профиля, на наш взгляд, необходимо иметь теоретические знания и приобрести практические навыки самостоятельного решения задач по преобразованию координат в различных системах.

Для получения, закрепления и систематизации теоретических знаний и приобретения вышеназванных практических навыков предназначено данное учебное пособие. Оно может использоваться при изучении дисциплины «Системы координат» и отдельных разделов дисциплины «Высшая геодезия и основы координатно-временных систем», а также при выполнении лабораторных работ по этим дисциплинам.

Изучение дисциплины «Системы координат» преследует достижение следующих целей:

- расширение, закрепление и систематизацию теоретических знаний, приобретение навыков практического применения этих знаний для решения конкретных научно-технических и производственных задач по преобразованию координат в различных системах;
- приобретение опыта математической обработки, анализа и систематизации результатов инженерных расчетов;

- приобретение опыта представления и защиты результатов своей работы.

В ходе выполнения лабораторной работы на тему «Системы координат и преобразования между ними», предусмотренной учебным планом по дисциплинам «Системы координат» и «Высшая геодезия и основы координатно-временных систем» (прил. 1, 2), обучающимися должны быть решены следующие задачи:

- систематизация и анализ теоретического материала по указанной теме;
- выполнение инженерных расчетов;
- анализ полученных результатов и формирование выводов;
- разработка оптимальных технологических схем решения поставленных задач.

Автор выражает благодарность рецензентам – кандидату технических наук С. В. Кужелеву (ООО «Гео плюс») и кандидату технических наук, доценту Н. Н. Кобелевой (СГУГиТ), а также редактору Е. М. Федяевой (СГУГиТ), чьи замечания и предложения способствовали улучшению содержания учебного пособия.

1. ОСНОВНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ГЕОДЕЗИИ

1.1. Общие сведения

Существует большое количество различных систем координат. В данном учебном пособии рассмотрены земные системы координат, которые тем или иным образом связаны с нашей планетой и участвуют в ее суточном вращении вокруг своей оси, причем не все земные системы координат, а только те, которые используются в производственной деятельности геодезистов. Что же называется системой координат?

Есть несколько определений системы координат. В энциклопедии под системой координат понимается набор математических правил, устанавливающих точкам пространства соответствующие значения координат. В данном учебном пособии мы будем придерживаться определения системы, которое дается в системном анализе. Системой называется единство взаимосвязанных элементов, совместно действующих для достижения общей цели. В нашем контексте элементами системы будут отдельные координаты, а общей целью – определение положения точки в пространстве, на поверхности эллипсоида или на плоскости.

Международная служба вращения Земли (МСВЗ) – International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS), которая занимается оценкой параметров вращения и координат Земли, выделяет теоретические системы координат и их практическую реализацию [1].

Для теоретических систем должны быть определены концепция системы, фундаментальная теория и стандарты. Для них принято применять термин Terrestrial Reference System (TRS). На русский язык это можно перевести как земная система отсчета координат. Если к названному термину добавляется слово Internetional (ITRS), то будет получаться в переводе Международная земная система отсчета координат. Практическая реализация систем координат обозначается термином Terrestrial Reference Frame (TRF), что в переводе означает земная отсчетная основа. Земная отсчетная основа представляет собой набор точек (реперов) геодезической сети, координаты которых вычислены в некоторой земной системе отсчета. Добавление к термину слова Internetional (ITRF) будет означать в переводе Международная земная отсчетная основа.

По данной классификации учебное пособие посвящено изучению различных систем отсчета координат.

1.2. Классификации систем координат

Для решения различных задач, связанных с осуществлением хозяйственной деятельности на территории государства или его субъектов, приходится в силу ряда причин использовать разные системы координат (рис. 1), каждая из которых имеет свои достоинства и недостатки.

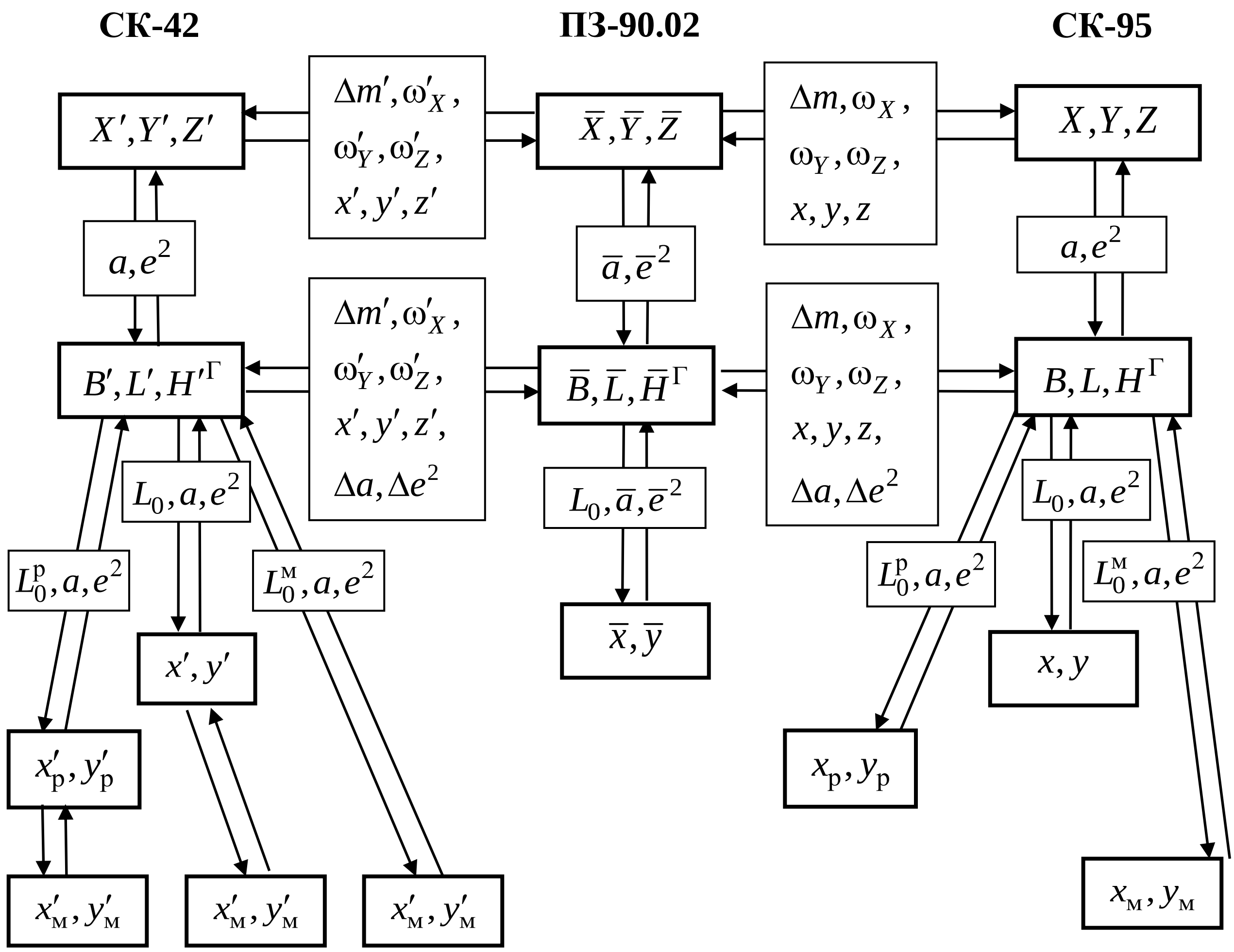

Рис. 1. Государственные (референцные) и общеземные системы координат

На рис. 1 и в дальнейшем используются следующие обозначения:

X, Y, Z – пространственные прямоугольные координаты;

B, L, H^{Γ} – геодезические пространственные координаты;

x, y – плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера;

$x_{\text{р}}$, $y_{\text{р}}$ – плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера в региональной системе;

$x_{\text{м}}$, $y_{\text{м}}$ – плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера в местной системе;

a, e^2 – параметры эллипсоида вращения;

L_0 – долгота осевого меридиана зоны в проекции Гаусса – Крюгера;

Δm, ω_X, ω_Y, ω_Z, x, y, z – параметры связи двух систем пространственных прямоугольных координат;

Δa, Δe^2 – разности параметров двух эллипсоидов вращения.

Существует несколько классификаций систем координат. С одной стороны, имеются системы геодезических пространственных, пространственных прямоугольных, плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера. Система геодезических пространственных координат связана с поверхностью эллипсоида вращения, принимаемого за модель Земли. Положение любой точки пространства в этой системе будет однозначно определяться тремя координатами: геодезической широтой B, геодезической долготой L и геодезической высотой H^{Γ}. Тремя координатами (X, Y, Z) определяется положение любой точки и в системе пространственных прямоугольных координат. Эта система не связана с поверхностью модели Земли и поэтому используется при математической обработке результатов спутниковых наблюдений (например, для определения координат точки с помощью ГНСС-технологий).

Однако основной системой координат для выполнения геодезических, инженерно-геодезических и топографических работ, межевания земель, ведения кадастра объектов недвижимости и осуществления других специальных работ является система плоских прямоугольных координат. Она всегда связана с тем или иным математическим законом (проекцией) изображения поверхности эллипсоида вращения на плоскости. На территории Российской Федерации используется проекция Гаусса – Крюгера.

В любой проекции поверхность модели Земли должна делиться на участки (обычно они называются зонами), которые изображаются на плоскости независимо друг от друга. Граничными линиями зон в проекции Гаусса – Крюгера являются геодезические меридианы. Размеры зон по долготе в принципе могут быть любыми. Обычно используются шести- и трехградусные зоны. Меридиан, проходящий посредине зоны, называется осевым. Изображения осевого меридиана и экватора эллипсоида на плоскости принимаются за координатные оси, а точка их пересечения – за начало системы действительных плоских прямоугольных координат. При этом ось абсцисс направлена на север, а ось ординат – на восток.

Таким образом, в каждой зоне имеется своя система координат. Для того чтобы различать зоны, необходимо знать либо ее номер, присвоенный заранее, либо долготу осевого меридиана L_0. Для выполнения взаимных преобразований координат из одной системы в другую с необходимой точностью в геодезической литературе имеются строгие формулы, которые позволяют решать эти задачи на любом эллипсоиде вращения [1–3, 12–15, 18–23]. Для выполнения вычислений (переходов, изображенных вертикальными стрелками на рис. 1) необходимо использовать параметры применяемого эллипсоида вращения (a, e^2) и долготу осевого меридиана L_0 выбранной зоны.

С другой стороны, каждая из перечисленных систем координат может быть общеземной и государственной. Примерами общеземных систем координат являлись системы ПЗ-90.02 (ранее ПЗ-90) и WGS-84, а государственных – СК-42 и СК-95. Для горизонтальных связей между системами (см. рис. 1) также имеются специальные формулы [1–3, 12–15, 21–23]. Однако числовые значения параметров преобразования систем СК-42 и ПЗ-90 известны с недостаточной для решения многих задач точностью. Это явилось одной из причин ввода на территории России единой государственной системы координат 1995 года (СК-95). Эта система координат была введена постановлением Правительства РФ от 28.07.2000 № 586 и являлась обязательной при осуществлении геодезических и картографических работ начиная с 1 июля 2002 г.

В настоящее время в соответствии с постановлением Правительства РФ от 28.12.2012 № 1463 осуществляется переход к новой государственной системе координат (ГСК-2011*)*. Для обеспечения функционирования системы ГЛОНАСС Министерства обороны РФ будут использовать обновленную версию общеземной геоцентрической системы координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11). Переход к новым системам координат должен был закончиться к 1 января 2017 г.

Для такого перехода необходимо преобразовать координаты Гаусса – Крюгера всех пунктов государственных геодезических сетей в систему координат ГСК-2011 (рис. 2), потому что они будут меняться по сравнению с координатами в старых государственных системах СК-42 или СК-95 на значительные величины.

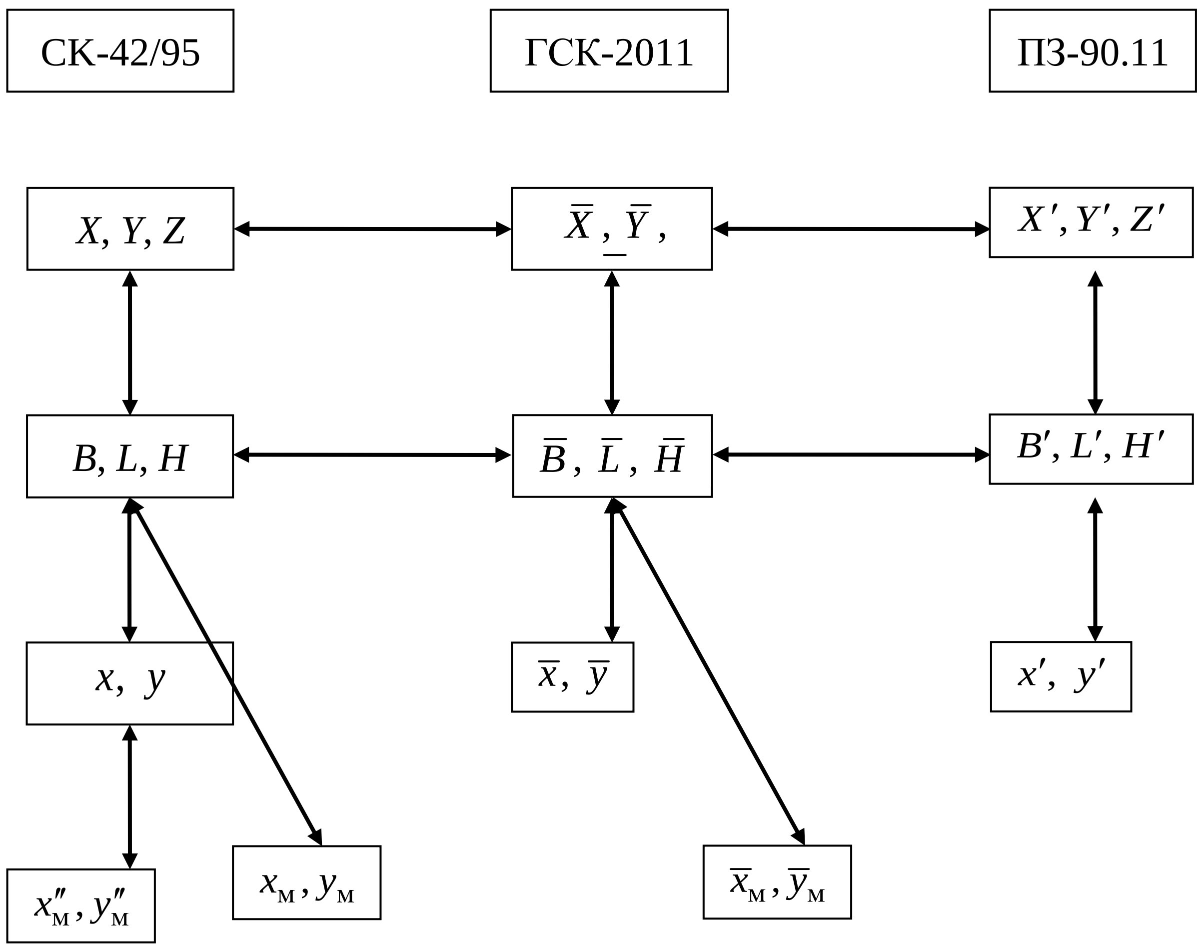

Рис. 2. Системы координат СК-42, СК-95, ГСК-2011, ПЗ-90.11

По исследованиям, выполненным нами в 2016 г. [8], эти изменения могут колебаться в интервале от 47 до 143 м по оси абсцисс и от –134 до 128 м по оси ординат. Однако согласно постановлению Правительства РФ от 24.11.2016 № 1240 ввод новых систем координат отложен до 1 января 2021 г.

В табл. 1 приведены элементы взаимного ориентирования различных систем координат согласно ГОСТ Р 32453–2017 [15].

Кроме указанной классификации, система плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера может быть местной. Под местной системой понимается такая система координат, в которой начало отсчета координат и ориентировка осей координат смещены по отношению к началу отсчета и положению координатных осей в единой государственной системе координат. В свою очередь, внутри систем местных плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера можно выделить две группы: системы координат региональные (СКР) и собственно местные системы координат (СКМ) [3, 16].

Таблица 1

Элементы взаимного ориентирования систем координат

Номер связи	1	2	3	4	5	6
Исходная система	ПЗ-90.11	ПЗ-90.11	ПЗ-90.11	ПЗ-90.11	ПЗ-90.11	ПЗ-90.11
Конечная система	ГСК-2011 Эпоха 2011.0	СК-42	СК-95	ПЗ-90.02	WGS-84 (G1150)	ITRF-2008 Эпоха 2010.0
x (м)	0,000	–23,557	–24,457	0,373	0,013	–0,003
y (м)	–0,014	140,844	130,784	–0,186	–0,106	–0,001
z (м)	0,008	79,778	81,538	–0,202	–0,022	0,000
ω_X (сек.)	0,000562	0,00230	0,00230	0,00230	0,00230	0,000019
ω_Y (сек.)	0,000019	0,34646	–0,00354	–0,00354	–0,00354	–0,000042
ω_Z (сек.)	–0,000053	0,79421	0,13421	0,00421	0,00421	0,000002
$\Delta m \cdot 10^6$	0,0006	0,228	0,228	0,0080	0,008	0,000

Региональными плоскими прямоугольными координатами Гаусса – Крюгера следует считать те, которые реализуются в нескольких зонах на территории субъектов Российской Федерации, а местными – те, которые вводятся на территории населенных пунктов, строительных площадок и т. п. и реализуются в одной зоне.

В последующих подразделах учебного пособия рассмотрены перечисленные системы координат, их достоинства и недостатки, а также приведены формулы для взаимного преобразования координат из одной системы в другую.

1.3. Система геодезических пространственных координат

В системе геодезических пространственных координат положение любой точки пространства можно задать тремя координатами (рис. 3): геодезической широтой B, геодезической долготой L и геодезической высотой H^{Γ}.

Геодезической широтой B называется острый угол, образованный нормалью Kn к поверхности эллипсоида вращения и плоскостью его экватора (см. рис. 3). Нормалью к поверхности в заданной точке является перпендикуляр к касательной плоскости в точке K_1. Геодезическая широта изменяется от 0° на экваторе до 90° на полюсах. Различают северные и южные широты для соответствующих полушарий.

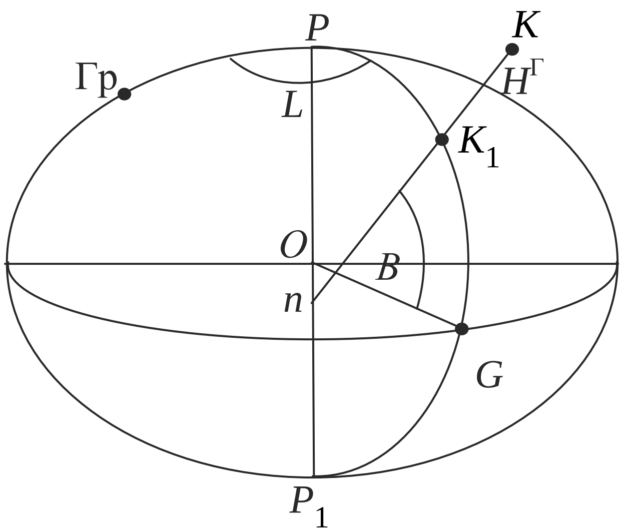

Рис. 3. Система геодезических пространственных координат

Координатная линия равных широт называется геодезической параллелью. С геометрической точки зрения она представляет собой линию пересечения поверхности эллипсоида вращения и плоскости, перпендикулярной оси его вращения. Все геодезические параллели – окружности разного радиуса. Если секущая плоскость будет проходить через центр эллипсоида, то будет получена параллель максимального радиуса, называемая экватором.

Геодезической долготой L (см. рис. 3) называется двугранный угол, образованный плоскостями геодезических меридианов начального (Гринвича) и точки K (меридиан PK_1GP_1). Долгота может изменяться от 0 до 360° и отсчитываться от Гринвичского меридиана на восток или изменяться от 0 до 180°. В последнем случае необходимо указывать, к востоку или к западу от Гринвича находится точка K.

Координатная линия равных долгот является геодезическим меридианом. Геодезический меридиан это часть линии пересечения поверхности эллипсоида вращения и плоскости, содержащей ось вращения, и заключенная между полюсами. Все геодезические меридианы одинаковы и являются половинами эллипсов.

Геодезической высотой $H^{Г}$ принято называть отрезок нормали KK_1 к поверхности эллипсоида вращения, заключенный между этой поверхностью и точкой K ($H^{Г} = KK_1$). Геодезическая высота обычно положительна, но встречаются особые случаи, когда она может быть отрицательной (например, в шахтах, карьерах и т. п.). Геодезическую высоту не следует путать с ортометрической и нормальной высотами, которые отсчитываются от начальных уровенной (геоид) или почти уровенной (квазигеоид) поверхностей соответственно. Различия между ними могут достигать десятки метров. На территории Российской Федерации в каталогах координат пунктов и реперов хранятся нормальные высоты.

Система геодезических пространственных координат обладает рядом достоинств.

1. Она едина для всей поверхности Земли и позволяет однозначно определять положение любой точки пространства.

2. Координатными линиями в этой системе являются геодезические меридианы и параллели, относящиеся непосредственно к поверхности эллипсоида вращения. Эти же линии являются основными линиями в любой картографической проекции, их используют для составления карт и объединения всех съемочных и картографических материалов в единое целое.

3. Геодезические широта и долгота определяют положение нормали к поверхности принятого эллипсоида. Это обстоятельство используется при определении составляющих уклонений отвесных линий и проведении других исследований поверхности Земли.

4. Геодезические широта и долгота точек K и K_1 одинаковы, а высоты разные ($H^{\Gamma}{}_1 = 0$). Поэтому использование данной системы позволяет общую сложную задачу по нахождению координат разделить на две подзадачи и тем самым уменьшить размерность вектора совместно определяемых координат точек. Так, для определения B, L (x, y) на объекте создаются плановые геодезические сети, а третья координата – высота – вычисляется по результатам нивелирования.

5. Поправки в измеренные величины (редукции) за переход с физической поверхности Земли на поверхность эллипсоида вращения обычно незначительны. Во-первых, это позволяет использовать приближенные (грубые) значения аргументов для их вычисления, а во-вторых, не учитывать такие поправки при выполнении работ невысокой точности.

К недостаткам системы геодезических пространственных координат обычно относят следующее.

1. Существуют трудности вычисления широт и долгот, так как решение прямых и обратных геодезических задач на поверхности эллипсоида вращения выполняется по очень сложным громоздким формулам.

2. При использовании ГНСС-технологий создания геодезических сетей поправки в результаты измерений за редукцию на поверхность эллипсоида вращения станут большими, соизмеримыми с самими измерениями. Поэтому применение геодезических пространственных координат будет невыгодным или даже невозможным.

1.4. Система пространственных прямоугольных координат

За начало координат в этой системе принимается центр эллипсоида – точка O (рис. 4). Ось аппликат OZ направлена вдоль полярной оси на север.

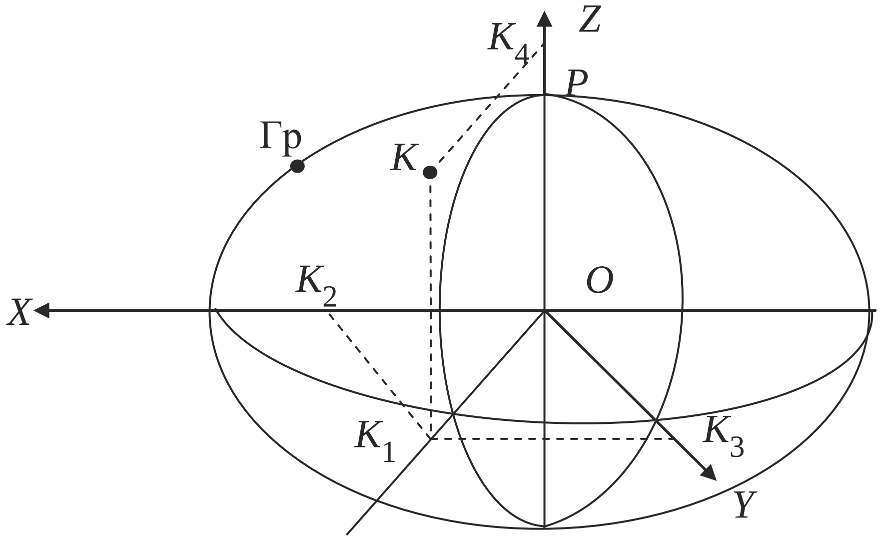

Рис. 4. Система пространственных прямоугольных координат

Ось абсцисс OX расположена по линии пересечения плоскостей Гринвичского меридиана и экватора. Ось ординат OY совпадает с линией пересечения плоскостей геодезического меридиана с долготой 90° и экватора и дополняет систему до правой.

Положение любой точки пространства будет однозначно определяться тремя координатами (см. рис. 4): абсцисса равна отрезку OK_2 ($X = OK_2$), ордината соответствует отрезку координатной оси OK_3 ($Y = OK_3$), а аппликата равна отрезку OK_4 ($Z = OK_4$).

К достоинствам системы пространственных прямоугольных координат можно отнести следующее.

1. Имеется возможность однозначного определения положения любой точки пространства.

2. Для применения системы пространственных прямоугольных координат не нужно иметь поверхность относимости (поверхность эллипсоида вращения).

3. Следствием второго преимущества является то, что здесь отсутствует необходимость в редуцировании результатов полевых измерений на поверхность относимости. Поэтому эта система координат практически незаменима при математической обработке результатов спутниковых измерений.

В качестве недостатков данной системы координат можно отметить следующее.

1. Нельзя уменьшить размерность задач по определению координат точек (размерность вектора координат). Имеется в виду, что необходимо сразу выполнить такое количество измерений, которое позволит вычислить три координаты определяемых точек.

2. Систему пространственных прямоугольных координат неудобно использовать в топографии, землеустройстве и кадастре, при проектировании и строительстве инженерных сооружений.

3. Основной системой для решения практических задач геодезии, топографии, землеустройства и кадастра является система плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера. Однако строгих формул для прямого перехода от пространственных прямоугольных к плоским прямоугольным координатам нет. Поэтому такой переход обычно осуществляется в два этапа: сначала необходимо вычислить геодезические пространственные координаты по пространственным прямоугольным координатам, а затем плоские прямоугольные координаты по геодезическим.

1.5. Система плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера

При производстве массовых топографо-геодезических работ, таких как производство топографических и кадастровых съемок, геодезическое обеспечение проектирования, строительства и эксплуатации инженерных сооружений и других, применение систем пространственных прямоугольных или геодезических пространственных координат становится неудобным и обременительным. В практическом использовании наиболее распространена система плоских прямоугольных координат. Однако ввод такой системы координат всегда сопряжен с отображением поверхности модели

Земли (поверхности эллипсоида вращения) на плоскости по какому-либо математическому закону. Закон, связывающий геодезические координаты на поверхности эллипсоида вращения и плоские прямоугольные координаты, называется проекцией. В математической картографии существует большое количество геодезических проекций и соответствующих им систем плоских прямоугольных координат. При изображении поверхности модели Земли на плоскости в любой геодезической проекции неизбежно ее деление на отдельные участки, которые принято называть зонами.

На территории России используется проекция Гаусса – Крюгера. В этой проекции поверхность эллипсоида вращения делится на зоны геодезическими меридианами. В нашей стране установлены размеры зон в 6 и 3° по долготе. Первые считаются основными, поэтому математическая обработка результатов измерений и оформление материалов топосъемок выполняются в шестиградусных зонах. Трехградусные зоны используются при производстве крупномасштабного картографирования (масштабов 1 : 5 000 и крупнее) и вводе систем региональных плоских прямоугольных координат. Меридианы, проходящие посредине зон, называются осевыми.

На рис. 5 изображена поверхность эллипсоида вращения, на которой показаны граничные и осевой меридианы произвольной зоны, а также экватор. Западный граничный меридиан первой шестиградусной зоны совпадает с Гринвичским меридианом. Осевые меридианы первой шести- и первой трехградусной государственных зон совпадают. Нумерация зон ведется на восток от Гринвича.

Долготы осевых меридианов L_0 шести- и трехградусных зон можно вычислить по формулам [3, 18, 19, 21]

$$L_0^{(6)} = 6n - 3; \quad (1)$$

$$L_0^{(3)} = 3n', \quad (2)$$

где n, n' – номера шести- и трехградусных зон соответственно.

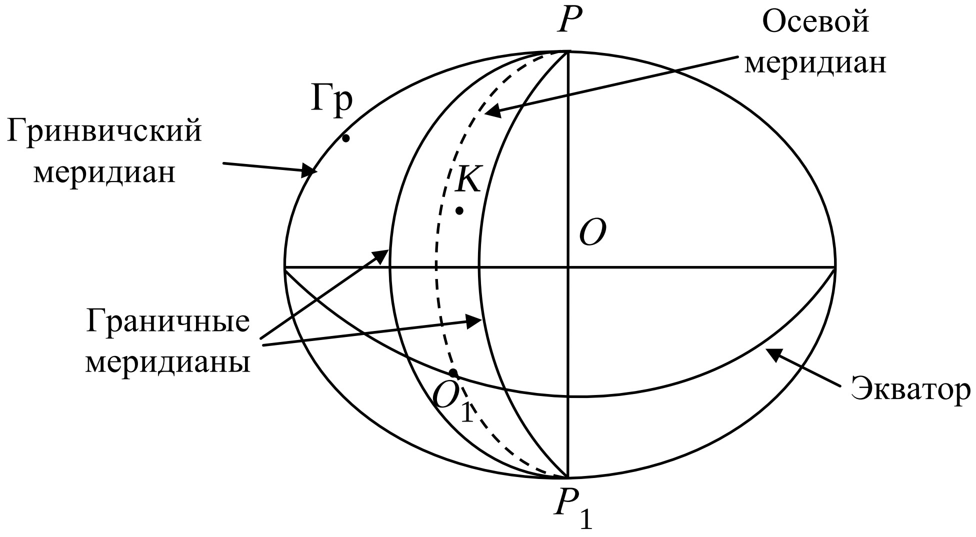

Рис. 5. Деление поверхности эллипсоида на зоны

При развертывании поверхности эллипсоида вращения на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера только осевые меридианы зон и экватор изобразятся прямыми линиями, которые принимаются за координатные оси (рис. 6).

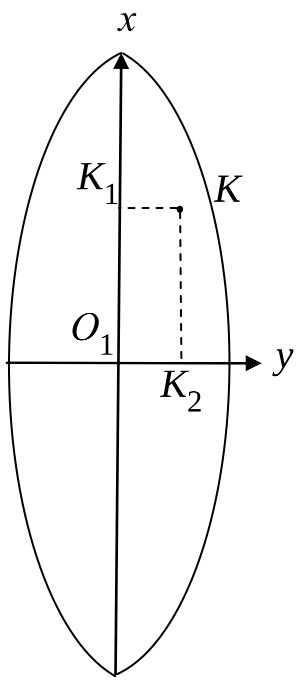

Рис. 6. Изображение отдельной зоны на плоскости
в проекции Гаусса – Крюгера

Пересечение этих прямых является началом системы действительных плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера. Все остальные кривые поверхности эллипсоида вращения (граничные меридианы зон, параллели и др.) остаются на плоскости кривыми линиями.

Действительными плоскими прямоугольными координатами Гаусса – Крюгера для точки K будут являться отрезки координатных осей $x = O_1K_1 = KK_2$; $y = O_1K_2 = KK_1$.

К положительным свойствам данной системы координат и проекции обычно относят следующее.

1. Отсутствуют искажения вследствие равноугольности проекции.
2. Зоны в проекции Гаусса – Крюгера совершенно одинаковые, и поэтому вид применяемых формул для связи систем координат и редуцирования измеренных величин на плоскость не будет зависеть от номера зоны.
3. Пара действительных координат – абсцисса x и ордината y – однозначно определяет положение любой точки внутри одной зоны.
4. Применение системы плоских прямоугольных координат позволяет значительно упростить решение многих задач геодезии, топографии, землепользования. Поэтому в массовых работах она является основной.

У проекции Гаусса – Крюгера, по мнению специалистов, имеются два недостатка. Во-первых, в данной системе координат возникают трудности при математической обработке результатов полевых измерений на объектах, вытянутых вдоль параллели и занимающих значительную площадь (объектах, расположенных в нескольких зонах). Во-вторых, действительные плоские прямоугольные координаты не дают представление о том, где на поверхности Земли находится точка. Она может располагаться в любой из 60 шестиградусных зон.

Для того чтобы по значениям координат можно было судить о местоположении точки на Земле, в каталогах координат пунктов принято помещать так называемые условные координаты Гаусса – Крюгера x', y'. При этом действительные и условные координаты связаны соотношениями [3, 18, 19, 21]

$$x' = x; \tag{3}$$

$$y' = n \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + y. \quad (4)$$

Действительные и условные абсциссы равны. Для получения условной ординаты надо к действительной прибавить номер зоны, умноженный на 10^6, и 500 000 м. Перенос начала координат к востоку на 500 км необходим для того, чтобы в случае отрицательной действительной ординаты не происходило вычитания ее из номера зоны.

Контрольные вопросы по первому разделу

1. Почему в геодезии вынуждены использовать различные системы координат?
2. Какие существуют классификации систем координат?
3. Какими координатами можно задать положение точки в пространстве в системе геодезических координат?
4. Что называется нормалью к поверхности?
5. Что называется геодезической широтой?
6. Как изменяется широта на поверхности Земли?
7. Чему равна широта на экваторе?
8. Чему равна широта на Северном и Южном полюсах?
9. Что называется геодезической долготой?
10. Какие кривые поверхности эллипсоида вращения называются геодезическими меридианами?
11. Какие кривые поверхности эллипсоида вращения называются геодезическими параллелями?
12. Какой геодезический меридиан принят за начальный?
13. Как изменяется долгота на поверхности Земли?
14. Какие линии поверхности эллипсоида вращения являются координатными линиями в системе геодезических координат?
15. Что называется геодезической высотой?
16. Какие могут быть высоты на поверхности Земли?
17. На какой поверхности геодезические высоты равны нулю?
18. Какими достоинствами обладает система геодезических пространственных координат?

19. Какие существуют недостатки у системы геодезических пространственных координат?

20. Какими координатами можно задать положение точки в пространстве в системе пространственных прямоугольных координат?

21. Какая точка принимается за начало в системе пространственных прямоугольных координат?

22. Как расположены координатные оси в системе пространственных прямоугольных координат?

23. Какими преимуществами характеризуется система пространственных прямоугольных координат?

24. Какие недостатки имеет система пространственных прямоугольных координат?

25. Как происходит деление поверхности эллипсоида вращения на зоны в проекции Гаусса – Крюгера?

26. Какие меридианы называются граничными?

27. Какой меридиан называется осевым?

28. Какие существуют размеры зон?

29. Как можно вычислить долготу осевого меридиана зоны по ее номеру?

30. Как изображаются основные линии поверхности эллипсоида вращения на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера?

31. Как расположены координатные оси в системе плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера?

32. Какая точка принимается за начало в системе действительных плоских прямоугольных координат?

33. Какими координатами можно определить положение точки в системе действительных плоских прямоугольных координат?

34. Какими достоинствами обладает система плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера?

35. Какие недостатки существуют у системы плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера?

36. Для чего введены условные ординаты в проекции Гаусса – Крюгера?

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ В ДРУГУЮ

2.1. Основные параметры земного эллипсоида и соотношения между ними

Поверхность земного эллипсоида, принимаемая за геометрическую модель нашей планеты, можно построить путем вращения плоской кривой – эллипса вокруг его малой оси. В этом случае можно говорить о том, что поверхность земного эллипсоида является эллипсоидом вращения и состоит из бесчисленного множества совершенно одинаковых эллипсов. К основным параметрам эллипса относят [3, 18, 19, 21]: большую a и малую b полуоси, полярное сжатие α, квадраты первого e^2 и второго e'^2 эксцентриситетов. Полуосями являются отрезки (рис. 7) $a = OE = OE_1$, $b = OP = OP_1$.

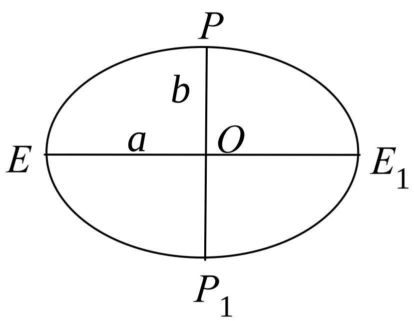

Рис. 7. Параметры эллипса

Остальные параметры связаны с полуосями формулами [3, 18, 19, 21]

$$\alpha = \frac{a-b}{a}; \tag{5}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \tag{6}$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}. \tag{7}$$

Для того чтобы построить поверхность эллипсоида вращения, достаточно задать два параметра, один из которых обязательно должен быть линейным (например, a и α). Связь между квадратами эксцентриситетов и полярным сжатием осуществляется с помощью соотношений [3, 18, 19, 21]

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}; \tag{8}$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}; \tag{9}$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2. \tag{10}$$

2.2. Радиусы кривизны плоских кривых на поверхности эллипсоида вращения

Через любую точку поверхности эллипсоида вращения можно провести бесчисленное множество кривых. Эти кривые можно разделить на две группы: так называемые плоские кривые и кривые двоякой кривизны. В геодезии находят применение и те, и другие. Однако в данном пособии нас будут интересовать только плоские кривые. Плоские кривые – это такие кривые, которые получены от пересечения поверхности эллипсоида вращения и какой-либо плоскости. Таких кривых также можно провести бесчисленное множество в любой точке поверхности.

В свою очередь, плоские кривые могут быть нормальными и наклонными сечениями. Нормальным сечением называется линия пересечения поверхности эллипсоида и плоскости, содержащей нормаль к этой поверхности. Примерами нормальных сечений являются геодезический меридиан, первый вертикал, экватор. Наклонным сечением является линия пересечения поверхности эллипсоида и плоскости, не содержащей нормаль к этой поверхности. Геодезические параллели (кроме экватора) представляют собой наклонные сечения.

Нормальные сечения, проходящие через произвольную точку поверхности эллипсоида, имеют различную кривизну. Среди бесчисленного множества нормальных сечений можно выделить два взаимно перпендикулярных, с экстремальными значениями радиусов кривизны: геодезический меридиан и первый вертикал (рис. 8). Первым вертикалом называется нормальное сечение K_1G, плоскость которого перпендикулярна плоскости геодезического меридиана.

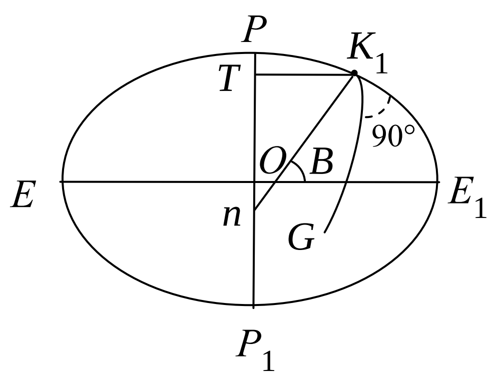

Рис. 8. Геодезический меридиан, первый вертикал и геодезическая параллель

Радиусы кривизны геодезического меридиана M и первого вертикала N можно определить по формулам [3, 18, 19, 21]

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3}; \tag{11}$$

$$N = \frac{a}{W}, \tag{12}$$

где W – первая сфероидическая функция геодезической широты, которая вычисляется следующим образом:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}\,. \tag{13}$$

Радиус кривизны первого вертикала имеет очень важную геометрическую интерпретацию. Это отрезок нормали к поверхности эллипсоида вращения, заключенный между его поверхностью и точкой пересечения с малой осью $N = K_1 n$.

При возрастании геодезической широты от 0 до 90° радиусы нормальных сечений возрастают. Так, на экваторе $W_0 = 1$, следовательно, $M_0 = a(1 - e^2)$; $N_0 = a$. На полюсах $W_{90} = \sqrt{1 - e^2}$, поэтому радиусы кривизны главных нормальных сечений достигают своих максимальных значений: $M_{90} = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$; $N_{90} = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$. Кроме этого, радиусы меридиана и первого вертикала оказываются равными. Радиус кривизны нормальных сечений на полюсах называют полярным радиусом: $c = M_{90} = N_{90}$. Учет формулы (8) дает возможность представить полярный радиус несколько иначе: $c = a\sqrt{1 + e'^2}$. Использование полярного радиуса и квадрата второго эксцентриситета позволяет упростить формулы (11), (12):

$$M = \frac{c}{V^3}; \tag{14}$$

$$N = \frac{c}{V}. \tag{15}$$

Здесь буквой V обозначена вторая сфероидическая функция геодезической широты:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}\,. \tag{16}$$

Почленное деление выражения (15) на (14) дает дробь

$$\frac{N}{M} = V^2, \tag{17}$$

анализ которой позволяет сделать следующие выводы:

– радиус кривизны первого вертикала не может быть меньше радиуса кривизны меридиана ($N \geq M$);
– на полюсах радиусы кривизны нормальных сечений равны и равны полярному радиусу;
– среди нормальных сечений минимальное значение имеет радиус кривизны меридиана на экваторе.

Радиус кривизны геодезической параллели $r = K_1T$ (см. рис. 8) можно вычислить по формуле

$$r = N \cos B. \qquad (18)$$

Максимального значения радиус параллели достигает на экваторе при широте, равной 0°. Здесь радиус параллели равен большой полуоси. Экватор является единственной параллелью, которая, в свою очередь, является нормальным сечением. При движении точки к полюсам радиус параллели будет убывать.

2.3. Соотношения между геодезическими пространственными и пространственными прямоугольными координатами

2.3.1. Определение пространственных прямоугольных координат по геодезическим пространственным координатам

Формулы для вычисления пространственных прямоугольных координат точки по ее геодезическим пространственным координатам можно получить из решения прямоугольных треугольников (рис. 9) KK_6n, K_1K_2O, KK_4n [21]. Катет K_6n прямоугольного треугольника KK_6n равен:

$$K_6n = (N + H^{\Gamma})\cos B. \qquad (19)$$

Однако этот катет равен отрезку OK_1, который является расстоянием от центра эллипсоида вращения до проекции точки K на плоскость экватора.

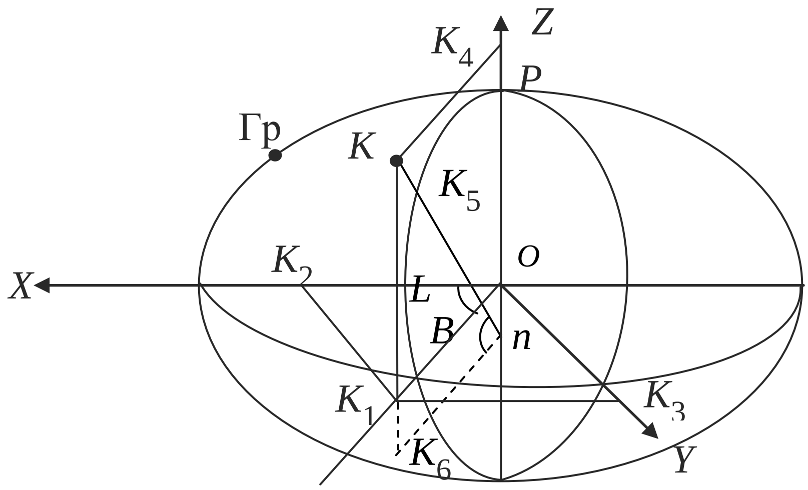

Рис. 9. Связь геодезических и прямоугольных
пространственных координат

Поэтому решение прямоугольного треугольника K_1K_2O по известной гипотенузе K_1O и углу L дает возможность вычислить его катеты OK_2 и K_1K_2. Эти катеты, в свою очередь, являются абсциссой X и ординатой Y точки K:

$$X = \left(N + H^{\Gamma}\right)\cos B \cos L; \qquad (20)$$

$$Y = (N + H^{\Gamma})\cos B \sin L. \qquad (21)$$

Аппликата Z точки K равна разности отрезков K_4n и On. Величину отрезка K_4n можно получить из решения прямоугольного треугольника KK_4n, в котором гипотенуза равна $(N + H^{\Gamma})$, а угол в точке K равен геодезической широте B:

$$K_4n = (N + H^{\Gamma})\sin B. \qquad (22)$$

Величина отрезка On не зависит от геодезической высоты. Для всех точек нормали Kn (см. рис. 9) она будет одинакова. Поэтому рассмотрим положение точки K на меридианном эллипсе в прямоугольной меридиональной системе координат (рис. 10).

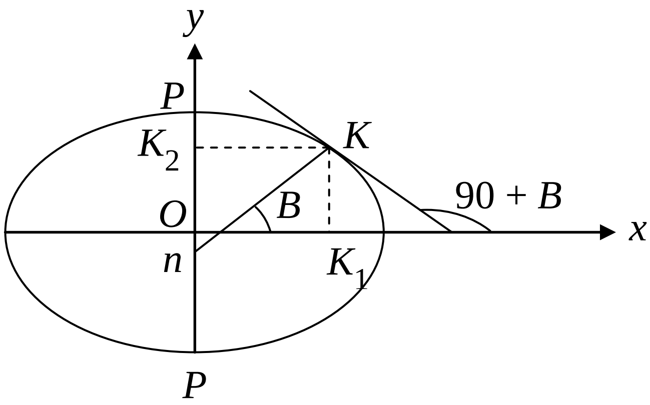

Рис. 10. Связь геодезической широты и прямоугольных меридиональных координат

Длину отрезка *On* можно получить как разность:

$$On = K_2 n - OK_2 . \tag{23}$$

Величину катета K_2n можно определить из решения прямоугольного треугольника KK_2n (см. рис. 10):

$$K_2 n = N \sin B . \tag{24}$$

Вторая составляющая уравнения (23) равна координате $y = OK_2$ в меридиональной системе координат (см. рис. 10). Для ее определения запишем уравнение меридианного эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{25}$$

Дифференцирование этого уравнения с учетом того, что

$$b^2 = a^2 (1 - e^2), \tag{26}$$

дает

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1-e^2)}{y}. \tag{27}$$

С другой стороны, первая производная равна тангенсу угла, образованного касательной кривой с положительным направлением оси абсцисс (см. рис. 10):

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(90 + B) = -\operatorname{ctg} B. \tag{28}$$

Сравнение правых частей равенств (27), (28) позволяет записать

$$y = x(1-e^2)\operatorname{tg} B. \tag{29}$$

Катет $KK_2 = x$ можно определить из решения прямоугольного треугольника KK_2n:

$$x = N\cos B. \tag{30}$$

Поэтому ордината y будет равна:

$$y = N(1-e^2)\sin B. \tag{31}$$

Подстановка выражений (24) и (31) в формулу (23) дает

$$On = Ne^2 \sin B. \tag{32}$$

Учет выражений (32) и (22) позволяет получить окончательную формулу для вычисления аппликаты Z точки K (см. рис. 9) по ее геодезическим пространственным координатам:

$$Z = (N(1-e^2) + H^{\Gamma})\sin B. \tag{33}$$

Примеры вычисления пространственных прямоугольных координат по геодезическим пространственным координатам для эллипсоидов с разными параметрами приведены в прил. 9.

2.3.2. Вычисление геодезических пространственных координат по пространственным прямоугольным координатам

Обратный переход от пространственных прямоугольных координат к геодезическим пространственным координатам выполнить несколько сложнее. И эти трудности связаны с определением геодезических широт и высот. Формулу для вычисления геодезической долготы можно получить путем почленного деления выражения (21) на (20):

$$\operatorname{tg} L' = \frac{Y}{X}. \tag{34}$$

Однако это еще не будет долготой. Переход от L' к геодезической долготе L нужно выполнить с учетом знаков координат X и Y. Это напоминает известную связь румба и дирекционного угла в обратной геодезической задаче. В нашем переходе возможны три случая.

Первый случай. Предположим, что $X = 0$ и вычисление по формуле (34) невозможно. Тогда необходимо анализировать числитель этой формулы, и будут возможны три варианта:

1) если $Y = 0$, то долгота не определяется;
2) если $Y > 0$, то $L = 90$;
3) если $Y < 0$, то $L = 270$.

Второй случай. Предположим, что $X > 0$. Тогда будут возможны два варианта:

1) если $Y \geq 0$, то $L = L'$;
2) если $Y < 0$, то $L = 360 - |L'|$.

Третий случай. Если координата X отрицательна ($X < 0$), то также будут возможны два варианта:

1) если $Y \geq 0$, то $L = 180 - |L'|$;
2) если $Y < 0$, то $L = 180 + L'$.

После определения геодезической долготы можно вычислить расстояние $OK_1 = Q$ между центром эллипсоида вращения и проекцией точки K на плоскость экватора. Его можно определить как гипотенузу прямоугольного треугольника K_1K_2O (см. рис. 9):

$$Q = \sqrt{X^2 + Y^2}\,. \tag{35}$$

С другой стороны, расстояние Q можно выразить через геодезические широту и высоту. Для этого можно использовать формулу (19), полученную ранее. Почленное деление (33) на (19) дает выражение

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z}{Q} \frac{1}{(1 - \dfrac{Ne^2}{(N + H^{\Gamma})})}\,. \tag{36}$$

Неизвестные величины – широта B и высота H^{Γ} – находятся в этом уравнении слева и справа от знака равенства.

В научной литературе, учебниках и ГОСТах описано более полутора десятков способов вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам. Эти способы реализуют либо итерационные [3, 12–15, 17, 21], либо неитерационные пути решения данной задачи [24, 25]. Однако есть еще и третий путь – вычисление дифференциальной поправки и последующее введение ее в приближенное значение геодезической широты.

Использование итерационных алгоритмов обычно предполагает решение двух подзадач:

1) отыскание начального значения неизвестных.
2) выработку признака (условия) окончания итерационного процесса.

Наиболее удачный, на наш взгляд, итерационный способ решения задачи был предложен К. А. Лапингом [17] на заре использования искусственных спутников Земли в геодезии. Формулу для вычисления начального значения широты $B^{(1)}$ можно получить из выражения (36), временно предполагая, что геодезическая высота равна нулю ($H^{\Gamma} = 0$). Тогда

$$\operatorname{tg} B^{(1)} = \frac{Z}{Q(1 - e^2)}\,. \tag{37}$$

Анализ формулы (37) предполагает наличие двух частных случаев.

Первый случай. Если аппликата равна нулю ($Z = 0$), то точка находится в плоскости экватора, и геодезическая широта также равна нулю. Геодезическая высота в этом случае будет равна разности $H^{\Gamma} = Q - a$.

Второй случай. Если $Q = 0$, то точка находится на оси Z. Это, в свою очередь, будет означать, что геодезическая широта равна 90° (северной или южной широты в зависимости от знака координаты Z). Геодезическая высота может быть вычислена как разность $H^{\Gamma} = |Z| - b$.

В остальных случаях можно построить итерационный процесс по определению геодезической широты, в котором внутри каждой итерации ($i = 1, 2, 3, \ldots$) необходимо вычислять

$$W^{(i)} = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B^{(i)}}; \tag{38}$$

$$N^{(i)} = \frac{a}{W^{(i)}}; \tag{39}$$

$$T^{(i)} = Z + N^{(i)} e^2 \sin B^{(i)}; \tag{40}$$

$$\operatorname{tg} B^{(i+1)} = \frac{T^{(i)}}{Q}. \tag{41}$$

Здесь и далее буквой i обозначен номер итерации. Итерационный процесс заканчивается в том случае, когда модуль разности широт, вычисленных в двух смежных итерациях, не будет превышать какой-то наперед заданной величины ε_B (как правило, $\varepsilon_B = 0{,}000\ 1''$):

$$\left| B^{(i+1)} - B^{(i)} \right| \le \varepsilon_B. \tag{42}$$

Если условие (42) не выполняется, то номер итерации увеличивается на единицу, и вычисления повторяют, начиная с формулы (38). При выполнении условия (42) геодезическая широта считается найденной. Последний этап решения задачи заключается в определении геодезической высоты. Для этого итерационный процесс не нужен. Здесь можно воспользоваться одной из формул:

$$H^{\Gamma} = \frac{Q}{\cos B} - N; \tag{43}$$

$$H^{\Gamma} = \frac{Z}{\sin B} - (1 - e^2)N\,; \tag{44}$$

$$H^{\Gamma} = Q\cos B + Z\sin B - N(1 - e^2 \sin^2 B)\,. \tag{45}$$

Предпочтение следует отдавать универсальной формуле (45), которая позволяет определить геодезическую высоту в любой точке пространства.

Кроме этого, формула (45) позволяет вычислить геодезическую высоту с меньшей погрешностью, чем формулы (43) и (44). Предположим, что погрешности определения пространственных координат по осям *X, Y, Z* одинаковые и равны m_X. Нами [4] были получены удобные для практического применения формулы, по которым можно рассчитать погрешности вычисления высоты по каждой из трех приведенных формул соответственно:

$$m_H = \frac{m_X}{\cos B}\sqrt{(1 + \sin^2 B(1 + \cos^4 B))}\,; \tag{46}$$

$$m_H = \frac{m_X}{\sin B}\sqrt{(1 + \cos^2 B(1 + \sin^4 B))}\,; \tag{47}$$

$$m_H = m_X\sqrt{1 + (3 + 4e^2)\sin^2 B\cos^2 B}\,. \tag{48}$$

Погрешность вычисления геодезической высоты по трем формулам и на разных широтах будет характеризоваться данными табл. 2.

Таблица 2

Погрешность вычисления геодезической высоты

Номер формулы	Широта						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
(43)	m_X	1,10 m_X	1,36 m_X	1,80 m_X	2,68 m_X	5,38 m_X	–
(44)	–	5,38 m_X	2,68 m_X	1,80 m_X	1,36 m_X	1,10 m_X	m_X
(45)	m_X	1,10 m_X	1,25 m_X	1,33 m_X	1,25 m_X	1,10 m_X	m_X

В первой колонке (см. табл. 2) указаны номера формул, используемых для вычисления геодезической высоты.

Анализ помещенных в таблицу результатов позволяет сделать следующие выводы. При использовании формулы (43) погрешность вычисления высоты возрастает с увеличением широты. На экваторе она равна погрешности определения пространственных прямоугольных координат, а в северных широтах может превышать ее в 3–5 раз. На полюсах эту формулу применять нельзя.

С использованием формулы (44) наблюдается обратная картина. Погрешность определения высоты убывает при увеличении широты. На полюсах она равна погрешности получения пространственных прямоугольных координат, а в южных широтах может превышать ее в 3–5 раз. На экваторе формула (44) неприменима.

Формула (45) универсальна, ее можно применять на разных широтах. При этом на экваторе и полюсах погрешность определения высоты равна погрешности получения пространственных прямоугольных координат. Наихудший случай соответствует широте в 45°. Здесь погрешность вычисления высоты может достигать $1{,}33\, m_X$.

В частном случае, когда точка K находится на поверхности эллипсоида вращения и геодезическая высота равна нулю, формула (37) позволяет сразу вычислить окончательное значение широты.

Неитерационные способы определения геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам реализованы рядом авторов. Один из них был предложен Б. Р. Боурингом [20, 24, 25]. В этом способе геодезическая широта вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z + e^2 \dfrac{a \sin^3 u}{\sqrt{1-e^2}}}{Q - e^2 a \cos^3 u}. \tag{49}$$

Здесь через u обозначена широта точки K_5 (см. рис. 9), которую можно вычислить по формуле

$$\operatorname{tg} u = \frac{Z}{Q\sqrt{1-e^2}}. \tag{50}$$

При этом возможны два частных случая, описанные в способе Лапинга.

Геодезические долготу и высоту можно определить по формулам, приведенным ранее в данном подразделе.

Третий путь решения задачи заключается в вычислении дифференциальной поправки и последующего введения ее в приближенное значение геодезической широты. Одним из первых этот путь был реализован А. В. Буткевичем в 1967 г. [11]. В данном учебном пособии приведены формулы, позволяющие решать задачу с большей точностью, чем способами, рассмотренными в [9, 11].

Порядок действий при использовании дифференциальной поправки для вычисления геодезической широты может состоять из *пяти этапов*.

На первом этапе необходимо вычислить приближенное значение геодезической широты B_0:

$$B_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{F}{(1-e^2)}\right), \tag{51}$$

где

$$F = \frac{Z}{Q}. \tag{52}$$

Из сравнения формул (37) и (51), (52) видно, что B_0 равно $B^{(1)}$ в способе Лапинга. В этом способе также могут иметь место частные случаи определения геодезической широты по аналогии со способом Лапинга.

Использование приближенной широты позволяет определить *на втором этапе* приближенное значение радиуса кривизны первого вертикала N_0 по формулам (12), (13).

На третьем этапе алгоритма необходимо получить приближенное значение геодезической высоты H_0^{Γ}:

$$H_0^{\Gamma} = Q\cos B_0 + Z\sin B_0 - N_0(1-e^2\sin^2 B_0). \tag{53}$$

Четвертый этап посвящен определению дифференциальной поправки ΔB в приближенное значение широты по формулам

$$\Delta B = -\frac{FN_0 e^2 \cos^2 B_0 H_0^{\Gamma}}{G_0^2}(1 + \frac{H_0^{\Gamma}}{G_0})\rho; \tag{54}$$

$$G_0 = N_0(1 - e^2) + H_0^{\Gamma}. \tag{55}$$

Геодезическая широта *на заключительном пятом этапе* вычисляется как сумма двух слагаемых по формуле

$$B = B_0 + \Delta B. \tag{56}$$

Окончательное значение геодезической высоты можно не вычислять и считать, что $H^{\Gamma} = H_0^{\Gamma}$. Это утверждение основано на следующем. Во-первых, нами была получена формула, по которой можно определить среднюю квадратическую погрешность широты m_B, необходимую для вычисления геодезической высоты с заданной средней квадратической погрешностью m_H:

$$m_B = \frac{m_H \rho}{((Z + \frac{ae^2 \sin B}{W})\cos B - Q \sin B}. \tag{57}$$

Во-вторых, выполнены вычисления поправок ΔB в приближенные значения широт и погрешностей, с которыми необходимо знать широты для вычисления высот по формуле (45) с погрешностью 0,000 5 м. Результаты расчетов сведены в табл. 3. Широта изменяется с шагом в 15° от экватора до полюса, высота во всех вариантах расчетов взята равной 10 000 м.

Таблица 3

Поправки в широту и погрешности широты

Геодезическая широта	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
ΔB (сек.)	0,0	–0,5	–0,9	–1,1	–0,9	–0,5	0,0
m_B (сек.)	–	6,2	3,6	3,1	3,5	6,1	–

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

– максимальная поправка в приближенную широту составляет 1,1″ на широте в 45°;

– минимальная погрешность, с которой надо знать широту, равна 3,1″ при широте 45°;

– вычисленную по формуле (53) геодезическую высоту можно считать окончательным значением.

В прил. 6–8 приведены примеры вычисления геодезических пространственных координат по пространственным прямоугольным координатам с использованием разных способов для эллипсоидов ПЗ-90, ГСК-2011, Красовского и для разных систем координат (ПЗ-90.11, ГСК-2011, СК-42, СК-95).

2.4. Определение плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера по геодезическим координатам

Аргументами формул, связывающих плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера и геодезические координаты, являются геодезическая широта B и разность долгот l точки K и осевого меридиана зоны (рис. 11).

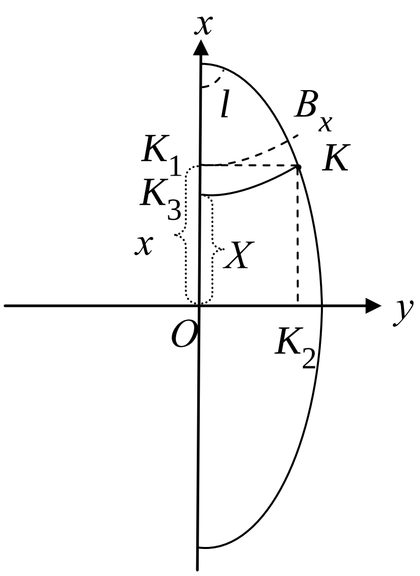

Рис. 11. Связь геодезических и плоских прямоугольных координат

Рабочие формулы и технологическая последовательность вычисления плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера по геодезическим координатам заключаются в следующем [3, 18, 19, 21].

1. Определение номера зоны n по формуле

$$n = \text{целое}\,1\,(\frac{(L+3^\circ)}{6^\circ}), \tag{58}$$

где «целое 1» означает процедуру получения целого числа путем округления результата вычисления по правилам Гаусса.

2. Вычисление долготы осевого меридиана L_0 зоны с номером n и получение разности долгот l:

$$L_0 = 6^\circ n - 3^\circ; \tag{59}$$

$$l = L - L_0. \tag{60}$$

3. Определение действительных плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера x, y:

$$x = X + \Delta x; \tag{61}$$

$$\Delta x = \frac{N \cos B \sin B l^2}{2\rho^2} \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{12\rho^2}(5 - \text{tg}^2 B + 9\eta^2) + \\ & + \frac{l^4 \cos^4 B}{360\rho^4}(61 - 58\,\text{tg}^2 B + \text{tg}^4 B) + \ldots \end{aligned} \right\}; \tag{62}$$

$$y = \frac{N \cos B l}{\rho} \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{6\rho^2}(1 - \text{tg}^2 B + \eta^2) + \frac{l^4 \cos^4 B}{120\rho^4} \times \\ & \times (5 - 18\,\text{tg}^2 B + \text{tg}^4 B + 14\eta^2 - 58\eta^2\,\text{tg}^2 B) + \ldots \end{aligned} \right\}, \tag{63}$$

где X – длина дуги меридиана от экватора до параллели с широтой B, которую с погрешностью, не превышающей 0,2 мм, можно вычислить по формуле

$$X = a(1-e^2)(G_0 \frac{B}{\rho} + G_1 \sin 2B + G_2 \sin 4B + G_3 \sin 6B + ...) . \qquad (64)$$

Для получения коэффициентов G_0, G_1, G_2, G_3 можно использовать соотношения

$$G_0 = 1 + {}^3\!/_4\, e^2 + {}^{45}\!/_{64}\, e^4 + {}^{175}\!/_{256}\, e^6 + {}^{11\,025}\!/_{16\,384}\, e^8 + ...; \qquad (65)$$

$$G_1 = -{}^3\!/_8\, e^2 - {}^{15}\!/_{32}\, e^4 - {}^{525}\!/_{1\,024}\, e^6 - {}^{2\,205}\!/_{4\,096}\, e^8 - ...; \qquad (66)$$

$$G_2 = {}^{15}\!/_{256}\, e^4 + {}^{105}\!/_{1\,024}\, e^6 + {}^{2\,205}\!/_{16\,384}\, e^8 + ...; \qquad (67)$$

$$G_3 = -{}^{35}\!/_{3\,072}\, e^6 - {}^{315}\!/_{12\,288}\, e^8 - ... . \qquad (68)$$

Эти коэффициенты являются функцией только квадрата эксцентриситета эллипсоида вращения, поэтому для используемого эллипсоида они могут вычисляться только один раз.

4. Определение условных плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера:

$$x' = x; \qquad (69)$$

$$y' = y + n \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5. \qquad (70)$$

В учебном пособии [21] утверждается, что погрешность вычисления плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера по формулам (61)–(70) не превышает 0,001 м при разности долгот l до 3° 30′.

Примеры определения условных плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера по геодезическим координатам для систем координат ПЗ-90.11, ГСК-2011, СК-42, СК-95 приведены в прил. 13.

2.5. Вычисление геодезических координат по плоским прямоугольным координатам Гаусса – Крюгера

Формулы, по которым можно вычислить геодезические координаты по известным плоским прямоугольным координатам Гаусса – Крюгера, широко представлены в специальной литературе [3, 18, 19, 21]. Технологическая цепочка преобразования условных плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера x', y' в геодезические координаты содержит пять этапов.

1. Определение номера n шестиградусной государственной зоны по формуле

$$n = \text{целое}\,\left({}^{y'}\!\!\diagup_{10^6} \right), \tag{71}$$

где «целое» означает процедуру выделения целого путем отбрасывания дробной части.

2. Получение действительных плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера x, y:

$$x = x'; \tag{72}$$

$$y = y' - n \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^5. \tag{73}$$

3. Вычисление геодезической широты B_x вспомогательной параллели (см. рис. 11):

$$\beta = \frac{x}{G_0 a(1-e^2)}; \tag{74}$$

$$B_x = (\beta + Q_1 \sin 2\beta + Q_2 \sin 4\beta + Q_3 \sin 6\beta)\rho. \tag{75}$$

Вспомогательные коэффициенты Q_1, Q_2, Q_3 также зависят только от квадрата эксцентриситета и могут определяться по формулам

$$Q_1 = {}^3\!\!\diagup_8\, e^2 + {}^3\!\!\diagup_{16}\, e^4 + {}^{213}\!\!\diagup_{2\,048}\, e^6 + {}^{255}\!\!\diagup_{4\,096}\, e^8 + \ldots; \tag{76}$$

$$Q_2 = {}^{21}\!/_{256}\, e^4 + {}^{21}\!/_{256}\, e^6 + {}^{549}\!/_{8\,192}\, e^8 + \ldots; \tag{77}$$

$$Q_3 = {}^{151}\!/_{6\,144}\, e^6 + {}^{4\,065}\!/_{24\,576}\, e^8 + \ldots\,. \tag{78}$$

4. Определение геодезической широты B и разности долгот l:

$$B = B_x - \frac{y^2(1+\eta_x^2)\,\mathrm{tg}\,B_x}{2N_x^2}\rho \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{y^2}{12N_x^2}(5 + 3\,\mathrm{tg}^2 B_x + \eta_x^2 - 9\eta_x^2\,\mathrm{tg}^2 B_x) + \\ &+ \frac{y^4}{360N_x^4}(61 + 90\,\mathrm{tg}^2 B_x + 45\,\mathrm{tg}^4 B_x) + \ldots \end{aligned} \right\}; \tag{79}$$

$$l = \frac{y}{N_x \cos B_x}\rho \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{y^2}{6N_x^2}(1 + 2\,\mathrm{tg}^2 B_x + \eta_x^2) + \\ &+ \frac{y^4}{120N_x^4}(5 + 28\,\mathrm{tg}^2 B_x + 24\,\mathrm{tg}^4 B_x + 6\eta_x^2 + 8\eta_x^2\,\mathrm{tg}^2 B_x) + \ldots \end{aligned} \right\}. \tag{80}$$

Здесь индекс x означает, что радиус кривизны первого вертикала N должен вычисляться с использованием вспомогательной широты B_x по формулам (12), (13). Через η_x^2 обозначено произведение

$$\eta_x^2 = e'^2 \cos^2 B_x. \tag{81}$$

5. Вычисление долготы осевого меридиана L_0 шестиградусной зоны по формуле (59) и геодезической долготы L точки

$$L = L_0 + l. \tag{82}$$

Погрешность вычисления геодезических координат по формулам (74)–(82) не превышает 0,000 1″ при разности долгот l до 3° 30′ [19].

Пример преобразования условных плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера в геодезические координаты для СК-95 и ГСК-2011 приведен в прил. 14.

2.6. Определение сближения меридианов в проекции Гаусса – Крюгера

Сближением меридианов γ в проекции Гаусса – Крюгера называется угол, образованный касательной к изображению геодезического меридиана точки и линией параллельной изображению осевого меридиана зоны (рис. 12). Сближение меридианов используется для связи двух ориентирующих углов: геодезического азимута A_{12} и дирекционного угла α_{12} направления K_1K_2.

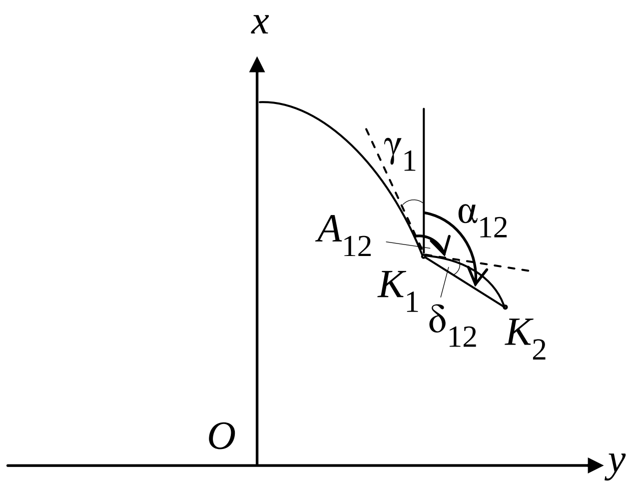

Рис. 12. Связь между геодезическим азимутом и дирекционным углом

Необходимость ввода нового ориентирующего угла на плоскости вызвана свойствами проекции Гаусса – Крюгера. К сожалению, в этой проекции все кривые поверхности эллипсоида вращения, за исключением осевого меридиана зоны и экватора, изображаются на плоскости кривыми линиями. Геодезический меридиан точки K_1 и геодезическая линия эллипсоида K_1K_2 будут изображаться кривыми линиями, вогнутой стороной обращенными в сторону осевого меридиана зоны (см. рис. 12). И хотя угловые величины поверхности эллипсоида при переходе на плоскость не изменяются вследствие равноугольности проекции Гаусса – Крюгера, пользоваться ими становится неудобно. Приходится заменять изображение геодезической линии K_1K_2 хордой K_1K_2, а вместо изображения геодезического меридиана точки K_1 использовать линию, параллельную изображению осевого меридиана зоны.

Геодезическим азимутом A_{12} направления K_1K_2 на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера называется угол, образованный касательными к изображению геодезического меридиана точки K_1 и геодезической линии K_1K_2. Дирекционным углом α_{12} направления K_1K_2 называется угол, образованный линией, проведенной через точку K_1 параллельно изображению осевого меридиана зоны и хордой K_1K_2. И, наконец, угол δ_{12}, образованный касательной к изображению геодезической линии K_1K_2 и хордой K_1K_2, называется в геодезии поправкой за кривизну изображения геодезической линии на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера.

Рис. 12 позволяет записать формулу, связывающую два вышеназванных ориентирующих угла:

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}. \tag{83}$$

Для вычисления сближения меридианов с погрешностью, не превышающей 0,002″, можно воспользоваться одной из формул [18, 19, 21], например:

$$\gamma_1 = l_1 \sin B_1 (1 + \frac{l_1^2 \cos^2 B_1}{3\rho^2}(1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{l_1^4 \cos^4 B_1}{15\rho^4}(2 - tg^2 B_1) + ...). \tag{84}$$

Приближенные расчеты (с погрешностью 2–3″) можно выполнять по формуле

$$\gamma_1 \approx l_1 \sin B_1. \tag{85}$$

Поправка δ_{12} в направление K_1K_2 может определяться по формуле

$$\delta_{12} = -\frac{f}{3}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2). \tag{86}$$

Здесь буквой f обозначено выражение

$$f = \frac{\rho}{2R^2}, \tag{87}$$

где R – средний радиус кривизны, который можно определить следующим образом:

$$R = \sqrt{MN}. \tag{88}$$

Для вычисления поправки по формуле (86) необходимо использовать приближенные координаты определяемых пунктов. Точность, с которой должны быть получены эти координаты, зависит от класса точности создаваемой геодезической сети и расстояний между пунктами удаления объекта от осевого меридиана зоны. Как правило, погрешность определения приближенных координат пунктов может составлять несколько десятков метров.

Величины поправок в направления за кривизну изображения геодезических линий на плоскости при расстояниях в 20 км обычно не превышают 10–12″ на краю шестиградусной зоны и в топографии не учитываются. Сближение меридианов по абсолютной величине на краю шестиградусной зоны будет стремиться к 3°. Поэтому сближение меридианов необходимо учитывать при выполнении работ любого класса точности.

В прил. 16 приведен пример вычисления сближения меридианов в заданной точке для ГСК-2011 и СКМ-2.

2.7. Масштаб изображения. Редуцирование расстояний с поверхности эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера

Масштабом изображения m в математической картографии называется отношение бесконечно малого отрезка на плоскости dS к соответствующему отрезку на поверхности эллипсоида вращения ds:

$$m = \frac{dS}{ds}. \tag{89}$$

Масштаб изображения является важной характеристикой любой проекции. Он дает возможность оценить величину линейных искажений и используется при получении формул для связи соответствующих расстояний на эллипсоиде и плоскости. Чем ближе масштаб изображения к единице, тем меньше искажения. Если масштаб равен единице, то искажения отсутствуют.

В проекции Гаусса – Крюгера масштаб изображения равен [18–21]:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}. \tag{90}$$

Анализ формулы (90) позволяет сделать следующие выводы.

1. Масштаб изображения в проекции Гаусса – Крюгера не может быть меньше единицы, так как действительная ордината фигурирует в этой формуле в четной степени.

2. Расстояние на плоскости не может быть меньше, чем соответствующее расстояние на поверхности эллипсоида вращения, потому что масштаб – это отношение двух отрезков (формула (89)).

3. На осевом меридиане зоны масштаб изображения равен единице, поэтому говорят, что осевой меридиан любой зоны изображается без искажений.

4. Кроме ординаты, масштаб изображения в проекции Гаусса – Крюгера зависит от среднего радиуса, а значит, от широты. При возрастании широты средний радиус будет увеличиваться. Поэтому при движении точки на север вдоль линии, параллельной оси абсцисс, искажения будут уменьшаться.

Для получения формул редуцирования расстояний на плоскость необходимо проинтегрировать выражение (89):

$$\int_{S=0}^{S=S_{12}} dS = \int_{s=0}^{s=s_{12}} m ds. \tag{91}$$

Рабочие формулы для редуцирования измеренного между точками K_1 и K_2 расстояния с поверхности эллипсоида вращения на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера будут иметь вид:

$$S_{12} = s_{12} + \frac{y_{\text{ср}}^2}{2R^2} s_{12} + \frac{\Delta y_{12}^2}{24R^2} s_{12} + \frac{y_{\text{ср}}^4}{24R^4} s_{12}, \tag{92}$$

или

$$S_{12} = s_{12} + \Delta S_{12}, \tag{93}$$

где поправка ΔS_{12} равна:

$$\Delta S_{12} = \frac{y_{\text{ср}}^2}{2R^2} s_{12} + \frac{\Delta y_{12}^2}{24R^2} s_{12} + \frac{y_{\text{ср}}^4}{24R^4} s_{12}. \tag{94}$$

В формулах (92)–(94) буквами s_{12} и S_{12} обозначены расстояния на поверхности эллипсоида и на плоскости соответственно, символом ΔS_{12} – поправка в расстояние за переход с поверхности эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера, а $y_{\text{ср}}$ и Δy_{12} – средняя действительная ордината и разность ординат соответственно.

Для редуцирования расстояний необходимо знать приближенные действительные координаты определяемых пунктов. Отметим, что ординаты и разности ординат участвуют в формулах (92), (94) только в четной степени. Поэтому расстояние на плоскости в этой проекции не может быть меньше соответствующего расстояния на поверхности эллипсоида. Неучет в формулах (92), (94) последних членов может привести к погрешности редуцирования в несколько миллиметров для 20-километровых расстояний, измеренных на краю шестиградусной зоны.

Пример определения масштаба изображения в точке для ГСК-2011 и СКМ-2 рассмотрен в прил. 16. Вычисление приближенных координат пункта в ГСК-2011 и СКМ-2 выполнено в прил. 17. Вычисление дирекционного угла и редуцирование расстояния с поверхности эллипсоида на плоскость в ГСК-2011 и СКМ-2 рассмотрено в прил. 18.

2.8. Связь двух систем пространственных прямоугольных координат

В векторной форме связь двух систем пространственных прямоугольных координат можно записать с помощью равенства

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} (1 + \Delta m) + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (95)$$

В формуле (95) использована следующая система обозначений:

$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix}$ – вектор-столбец пространственных прямоугольных координат в конечной системе;

$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ – вектор-столбец пространственных прямоугольных координат в исходной системе;

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – вектор-столбец пространственных прямоугольных координат центра исходной системы относительно центра конечной системы;

Δm – относительное изменение масштаба в двух системах координат:

$$\Delta m = \frac{\bar{S} - S}{S}, \qquad (96)$$

где $\bar{S}$ и S – расстояния между одноименными точками пространства, вычисленные по координатам, заданным в конечной и начальной системах соответственно;

R – матрица преобразования (разворота) размерностью 3 × 3.

В общем случае матрица разворота R состоит из девяти элементов r_{ij}, которые принято называть направляющими косинусами:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11}\, r_{12}\, r_{13} \\ r_{21}\, r_{22}\, r_{23} \\ r_{31}\, r_{32}\, r_{33} \end{pmatrix}. \tag{97}$$

Здесь символами r_{ij} обозначены косинусы углов, образованных координатными осями новой и старой систем координат. При этом первый индекс соответствует номеру элемента в вектор-столбце пространственных прямоугольных координат в конечной (новой) системе, а второй – номеру элемента в вектор-столбце пространственных прямоугольных координат в начальной (старой) системе. Например, $r_{11} = \cos(\overline{X}, X)$; $r_{12} = \cos(\overline{X}, Y)$ и т. д.

Геодезистов интересует не любое преобразование координат, а ортогональное преобразование, при котором направляющие косинусы связаны шестью условиями. Суммы квадратов направляющих косинусов по любым строкам или столбцам должны равняться единице:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} r_{1i}^2 = 1; \tag{98}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} r_{2i}^2 = 1; \tag{99}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} r_{3i}^2 = 1, \tag{100}$$

а суммы произведений направляющих косинусов разных строк или столбцов – нулю:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} r_{1i} r_{2i} = 0; \tag{101}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} r_{1i} r_{3i} = 0; \tag{102}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} r_{2i} r_{3i} = 0. \tag{103}$$

Поэтому из девяти направляющих косинусов независимыми будут только три, и матрицу преобразования R можно представить как произведение трех матриц разворота вокруг координатных осей X, Y, Z:

$$R = R_X R_Y R_Z \,. \tag{104}$$

Матрица R_x позволяет перейти от исходной системы XYZ к некоторой промежуточной системе координат $X'Y'Z'$ (рис. 13).

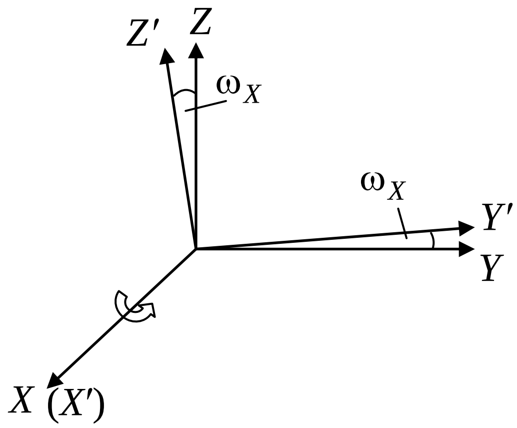

Рис. 13. Разворот вокруг оси абсцисс

Общие правила формирования матриц разворота позволяют записать

$$R_X = \begin{pmatrix} \cos 0 & \cos 90 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos \omega_X & \cos(90 - \omega_X) \\ \cos 90 & \cos(90 + \omega_X) & \cos \omega_X \end{pmatrix}. \tag{105}$$

Использование формул приведения дает возможность упростить запись:

$$R_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_X & \sin \omega_X \\ 0 & -\sin \omega_X & \cos \omega_X \end{pmatrix}. \tag{106}$$

Аналогично можно получить формулы для вычисления элементов матриц разворота R_Y и R_Z вокруг осей ординат и аппликат соответственно:

$$R_Y = \begin{pmatrix} \cos\omega_Y & 0 & -\sin\omega_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega_Y & 0 & \cos\omega_Y \end{pmatrix}; \tag{107}$$

$$R_Z = \begin{pmatrix} \cos\omega_Z & \sin\omega_Z & 0 \\ -\sin\omega_Z & \cos\omega_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{108}$$

Здесь ω_X, ω_Y, ω_Z – углы разворота вокруг соответствующих координатных осей.

Формулы (95), (104), (106)–(108) совершенно строгие. Они позволяют выполнить преобразование пространственных прямоугольных координат при любых значениях параметров ω_X, ω_Y, ω_Z, Δm, x, y, z. Если предположить, что углы разворота малы, то при разложении синусов и косинусов в ряды можно будет ограничиться первыми членами и пренебречь квадратами и последующими степенями аргументов (ω^2, ω^3 и т. д.).

Докажем это утверждение. Разложение в ряды дает

$$\sin\omega = \frac{\omega}{\rho} - \frac{\omega^3}{6\rho^3} + \ldots ; \tag{109}$$

$$\cos\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2\rho^2} + \ldots . \tag{110}$$

Так как дробь $\frac{\omega}{\rho}$ меньше единицы, то погрешность преобразования пространственных прямоугольных координат Δ при неучете второго члена разложения в формуле (110) будет больше. Эту погрешность можно оценить с помощью равенства

$$\Delta = \frac{\omega^2 X}{2\rho^2}. \tag{111}$$

Из табл. 1 видно, что максимальный угол разворота не превышает 0,8″. Для точек на земной поверхности пространственные прямоугольные координаты не могут превышать 6 400 км. Для таких точек вычисления по формуле (111) дают погрешность преобразования координат, равную 0,000 05 м. Выражение (111) позволяет получить формулу для решения обратной задачи – определения максимальной величины угла разворота координатных осей, позволяющей не учитывать вторые члены разложения в ряды (109), (110):

$$\omega = \rho\sqrt{\frac{2\Delta}{X}}\,. \tag{112}$$

Предположим, что погрешность преобразования координаты за один угол разворота не должна превышать 0,000 5 м. Тогда вычисления по формуле (112) будут давать 2,6″. Таким образом, можно сделать следующий вывод: если углы разворота вокруг координатных осей не будут превышать 2,6″, то при разложении косинусов и синусов в ряды можно ограничиваться только первыми членами.

В этом случае выражения (106)–(108) примут вид:

$$R_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_X \\ 0 & -\omega_X & 1 \end{pmatrix}; \tag{113}$$

$$R_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega_Y & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{114}$$

$$R_Z = \begin{pmatrix} 1 & \omega_Z & 0 \\ -\omega_Z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{115}$$

При перемножении матриц (113)–(115) также можно не учитывать произведения углов ω_X, ω_Y, ω_Z друг на друга:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 1 & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & 1 \end{pmatrix}. \tag{116}$$

Формулы (95), (96), (116) дают возможность преобразовать пространственные прямоугольные координат с погрешностью, не превышающей 0,001 м. Эти формулы можно записать и в линейном виде, пренебрегая произведениями параметров ω_X, ω_Y, ω_Z, Δm, x, y, z [13, 15, 21]. Они получили название формул Гельмерта:

$$\bar{X} = X + \Delta mX + {\omega_Z}/{\rho}\, Y - {\omega_Y}/{\rho}\, Z + x; \tag{117}$$

$$\bar{Y} = Y + \Delta mY - {\omega_Z}/{\rho}\, X + {\omega_X}/{\rho}\, Z + y; \tag{118}$$

$$\bar{Z} = Z + \Delta mZ + {\omega_Y}/{\rho}\, X - {\omega_X}/{\rho}\, Y + z\,. \tag{119}$$

Для того чтобы определить, с какой точностью надо знать пространственные прямоугольные координаты точки для преобразования их в другую систему, продифференцируем формулы поправок за неравенство масштабов $\Delta_m = \Delta mX$ и разворот координатных осей $\Delta_\omega = {\omega}/{\rho}\, X$, входящие в выражения (117)–(119). Дифференцирование позволяет получить формулы

$$m_X = \frac{m_{\Delta m}}{\Delta m}; \tag{120}$$

$$m_X = \frac{m_{\Delta\omega}\rho}{\omega}. \tag{121}$$

Предположим, названные поправки необходимо вычислять с одинаковой погрешностью, равной 0,000 5 м ($m_{\Delta m} = m_{\Delta\omega} = 0{,}000\,5$ м). Тогда после подстановки в формулы (120), (121) максимальных по модулю значений параметров преобразования координат (см. табл. 1): ω = 0,8″,

$\Delta m = 0{,}22 \cdot 10^{-6}$ и X = 6 400 км – будет получено, что координаты для вычисления поправок за неравенство масштабов необходимо знать с погрешностью более 2 км, а за развороты осей – 130 м. Поэтому можно сделать вывод о том, что для вычисления поправок в формулах (117)–(119) можно использовать приближенные пространственные прямоугольные координаты точки, известные с погрешностью 100–130 м.

Обратный переход от координат $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ к координатам X, Y, Z можно выполнить двумя путями. Во-первых, можно получить формулы для обратного преобразования путем переноса поправочных членов в левую часть равенств (117)–(119) и учитывать, что при вычислении поправок можно использовать те пространственные прямоугольные координаты, которые на данный момент известны:

$$X = \bar{X} - \Delta m \bar{X} - {}^{\omega_Z}\!/_{\rho}\, \bar{Y} + {}^{\omega_Y}\!/_{\rho}\, \bar{Z} - x; \tag{122}$$

$$Y = \bar{Y} - \Delta m \bar{Y} + {}^{\omega_Z}\!/_{\rho}\, \bar{X} - {}^{\omega_X}\!/_{\rho}\, \bar{Z} - y; \tag{123}$$

$$Z = \bar{Z} - \Delta m \bar{Z} - {}^{\omega_Y}\!/_{\rho}\, \bar{X} + {}^{\omega_X}\!/_{\rho}\, \bar{Y} - z. \tag{124}$$

Второй путь заключается в том, чтобы использовать формулы (117)–(119), но при этом изменить знаки семи параметров преобразования на обратные.

Пример выполнения преобразований по формулам (117)–(119) приведен в прил. 3–5.

2.9. Связь двух систем геодезических пространственных координат

Формулы для связи двух систем геодезических пространственных координат приведены в [13–15, 21]. В данном учебном пособии эти формулы представлены несколько в другом виде. Если известны геодезические пространственные координаты B, L, H^{Γ} в исходной системе, то соответствующие координаты $\bar{B}, \bar{L}, \bar{H}^{\Gamma}$ в конечной системе можно получить следующим образом:

$$\bar{B} = B + \Delta B; \tag{125}$$

$$\bar{L} = L + \Delta L; \tag{126}$$

$$\bar{H}^{\Gamma} = H^{\Gamma} + \Delta H . \tag{127}$$

В свою очередь, разность геодезических широт ΔB можно представить в виде суммы поправок:

$$\Delta B = \Delta B_1 + \Delta B_2 + \Delta B_3, \tag{128}$$

где

$$\Delta B_1 = \frac{\rho}{(M + H^{\Gamma})}(\Sigma_2 + \Sigma_3); \tag{129}$$

$$\Delta B_2 = (1 + e_{\text{ср}}^2 \cos 2B)(-\omega_X \sin L + \omega_Y \cos L); \tag{130}$$

$$\Delta B_3 = -\rho \Delta m e_{\text{ср}}^2 \sin B \cos B, \tag{131}$$

в которых

$$\Sigma_1 = x \cos L + y \sin L; \tag{132}$$

$$\Sigma_2 = N \sin B \cos B (\frac{\Delta a e_{\text{ср}}^2}{a_{\text{ср}}} + (1 + \frac{N^2}{a_{\text{ср}}^2}) \frac{\Delta e^2}{2}); \tag{133}$$

$$\Sigma_3 = -\Sigma_1 \sin B + z \cos B . \tag{134}$$

Здесь поправка ΔB_1 является поправкой в широту, которая вызвана несовпадением центров двух эллипсоидов в пространстве и различием их параметров. Вторая поправка ΔB_2 учитывает непараллельность координатных осей, а третья ΔB_3 – неравенство масштабов в двух системах координат. Углы разворота ω должны выражаться в секундах.

В формулах (130), (131), (133), (134) и далее введены обозначения согласно ГОСТам [13–15]:

$$\Delta a = \bar{a} - a; \qquad \Delta e^2 = \bar{e}^2 - e^2; \tag{135}$$

$$a_{\text{ср}} = \frac{\bar{a} + a}{2}; \qquad e^2_{\text{ср}} = \frac{\bar{e}^2 + e^2}{2}, \tag{136}$$

где $\bar{a}, \bar{e}^2$ – параметры конечного эллипсоида;

a, e^2 – параметры начального эллипсоида.

Поправка в геодезическую долготу может быть представлена в виде суммы двух поправок:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2, \tag{137}$$

где

$$\Delta L_1 \frac{\rho}{(N + H^{\Gamma})\cos B}(-x \sin L + y \cos L); \tag{138}$$

$$\Delta L_2 = \operatorname{tg} B(1 - e^2_{\text{ср}})(\omega_X \cos L + \omega_Y \sin L) - \omega_Z. \tag{139}$$

Первая поправка ΔL_1 учитывает несовпадение центров двух систем координат в пространстве, а вторая ΔL_2 – непараллельность координатных осей.

Поправку в геодезическую высоту удобно представить в виде суммы четырех поправок:

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4, \tag{140}$$

где

$$\Delta H_1 = -\frac{a_{\text{ср}}}{N}\Delta a + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2}; \tag{141}$$

$$\Delta H_2 = \Sigma_1 \cos B + z \sin B; \tag{142}$$

$$\Delta H_3 = -e^2_{\text{ср}} N \sin B \cos B(\frac{\omega_X}{\rho}\sin L - \frac{\omega_Y}{\rho}\cos L); \tag{143}$$

$$\Delta H_4 = \Delta m\left(\frac{a_{\text{ср}}^2}{N} + H^{\Gamma}\right). \tag{144}$$

Первая поправка ΔH_1 выражает влияние на высоту несовпадения параметров эллипсоидов, вторая поправка ΔH_2 позволяет учесть несовпадение их центров. Влияние непараллельности координатных осей можно оценить с помощью третьей поправки ΔH_3. И, наконец, четвертая поправка ΔH_4 вызвана различиями в масштабах в двух системах координат.

Радиусы кривизны меридиана M и первого вертикала N, которые фигурируют в формулах связи координат, должны вычисляться по формулам (11)–(12) с использованием средних значений параметров.

Таким образом, для преобразования геодезических пространственных координат необходимо знать девять параметров: относительное изменение масштаба Δm; три угла поворота вокруг соответствующих координатных осей пространственной прямоугольной системы $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$; пространственные прямоугольные координаты центра исходной системы относительно центра конечной x, y, z; разности больших полуосей Δa и квадратов первых эксцентриситетов Δe^2 конечного и начального эллипсоидов.

Для выполнения обратного перехода от геодезических пространственных координат $\bar{B}, \bar{L}, \bar{H}^{\Gamma}$ к геодезическим пространственным координатам B, L, H^{Γ} поправки в координаты необходимо алгебраически вычитать:

$$B = \bar{B} - \Delta B; \tag{145}$$

$$L = \bar{L} - \Delta L; \tag{146}$$

$$H^{\Gamma} = \bar{H}^{\Gamma} - \Delta H. \tag{147}$$

Учитывая, что при вычислении поправок в координаты достаточно удерживать 5–6 верных значащих цифр, в формулах (129)–(134), (138), (139), (141)–(144) можно использовать те значения геодезических координат, которые известны. Здесь также возможно применение второго пути, который заключается в использовании формул (125)–(127). Однако при вычислении поправок (129)–(134), (138), (139), (141)–(144) знаки параметров преобразования необходимо изменить на обратные.

Примеры выполнения преобразования геодезических пространственных координат из системы координат ПЗ-90.11 в ГСК-2011, СК-42 и СК-95 приведены в прил. 10–12.

Контрольные вопросы по второму разделу

1. Какими параметрами можно задать поверхность эллипсоида вращения?
2. Какой параметр должен обязательно присутствовать при задании поверхности эллипсоида вращения?
3. Какими формулами связаны между собой большая и малая полуоси, полярное сжатие, квадраты первого и второго эксцентриситетов?
4. Что называется плоской кривой?
5. Сколько плоских кривых можно провести через произвольную точку поверхности?
6. На какие группы кривых можно подразделить плоские кривые?
7. Что называется нормальным сечением?
8. Что называется наклонным сечением?
9. Сколько нормальных сечений можно провести через произвольную точку поверхности?
10. Сколько наклонных сечений можно провести через произвольную точку поверхности?
11. Какие нормальные и наклонные сечения поверхности эллипсоида вращения наиболее часто используются в геодезии?
12. Какие нормальные сечения поверхности эллипсоида вращения называются главными?
13. Как можно вычислить радиус кривизны меридиана?
14. По каким формулам можно вычислить радиус кривизны первого вертикала?
15. Как изменяются радиусы кривизны главных нормальных сечений при увеличении геодезической широты?
16. В какой точке поверхности эллипсоида вращения радиусы кривизны главных нормальных сечений имеют максимальные значения?
17. Могут ли радиусы кривизны главных нормальных сечений эллипсоида оказаться равными?

18. Что называется полярным радиусом?

19. Какое нормальное сечение имеет минимальное значение радиуса кривизны?

20. Какую геометрическую интерпретацию можно дать радиусу кривизны первого вертикала?

21. Может ли геодезическая параллель быть нормальным сечением?

22. По какой формуле можно вычислить радиус кривизны геодезической параллели?

23. По каким формулам можно вычислить пространственные прямоугольные координаты, если известны геодезические координаты?

24. В чем трудность вычисления геодезических координат по пространственным прямоугольным координатам?

25. По каким формулам можно вычислить геодезические координаты, если известны пространственные прямоугольные координаты?

26. Что является признаком окончания итерационного процесса вычисления геодезической широты?

27. В каком частном случае итерационный процесс не нужен?

28. Что, кроме геодезических координат, необходимо знать для вычисления координат Гаусса – Крюгера?

29. Для чего нужны условные ординаты?

30. Какая формула связывает условную и действительную ординаты?

31. Какой геометрический смысл имеет X в проекции Гаусса – Крюгера?

32. Может ли выполняться неравенство $X > x$?

33. В каких случаях может выполняться равенство $x = X$?

34. Может ли действительная ордината быть отрицательной?

35. Когда действительная ордината будет равна нулю?

36. Когда действительная абсцисса точки равна нулю?

37. По какой формуле можно вычислить долготу осевого меридиана государственной шестиградусной зоны по ее номеру?

38. По какой формуле можно вычислить долготу осевого меридиана государственной трехградусной зоны по ее номеру?

39. Может ли выполняться неравенство $B > B_x$?

40. В каких случаях может выполняться равенство $B = B_x$?

41. Когда разность долгот l будет отрицательной?

42. Что называется сближением меридианов в проекции Гаусса – Крюгера?

43. Для чего используется сближение меридианов?

44. Почему в равноугольной проекции Гаусса – Крюгера приходится вводить поправки в угловые величины при переходе с поверхности эллипсоида на плоскость?

45. По какой формуле можно вычислить сближение меридианов с погрешностью 2–3″?

46. От каких аргументов зависит сближение меридианов?

47. Может ли сближение меридианов в проекции Гаусса – Крюгера быть отрицательным?

48. Что называется масштабом изображения?

49. По какой формуле можно вычислить масштаб изображения в проекции Гаусса – Крюгера?

50. От каких аргументов зависит масштаб изображения в проекции Гаусса – Крюгера?

51. Может ли масштаб изображения в проекции Гаусса – Крюгера быть меньше единицы?

52. Какие линии поверхности эллипсоида вращения изображаются на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера без искажений?

53. Для чего используется масштаб изображения?

54. Какие параметры необходимо знать для преобразования пространственных прямоугольных координат из одной системы в другую?

55. Что означает индекс в углах разворота?

56. В каких случаях параметры x, y, z будут равны нулю?

57. Влияние каких параметров необходимо дополнительно учитывать при преобразовании геодезических широт и высот из одной системы в другую?

58. По какой формуле можно вычислить ΔS ?

59. Может ли выполняться неравенство $s_{эл} > S_{пл}$?

3. ТОЧНОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

3.1. Точность преобразования пространственных прямоугольных координат из общеземных систем в референцные

Как было сказано выше, Правительством РФ в постановлении от 28.12.2012 № 1463 были введены новые государственные системы координат: геодезическая система координат 2011 года (ГСК-2011) и общеземная геоцентрическая система координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11). При этом ГСК-2011 также является по своей сути общеземной и геоцентрической. В то же время применение действующих в настоящее время государственных референцных систем координат СК-42 и СК-95 продлено до 1 января 2021 г. Поэтому вопросы преобразования пространственных прямоугольных координат из общеземных систем в референцные продолжают оставаться актуальными. Такое преобразование, как известно, можно выполнить по формулам Гельмерта (117)–(119).

В данном подразделе конкретизирована принятая ранее система обозначений:

$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ – пространственные прямоугольные координаты в конечной системе (СК-42 или СК-95);

X, Y, Z – пространственные прямоугольные координаты в исходной системе (ПЗ-90.02, ПЗ-2011, WGS-84 и т. д.).

Погрешность вычисления референцных координат зависит от четырех факторов:

1) точности приближенных формул (117)–(119);
2) погрешностей определения общеземных координат;
3) используемой вычислительной техники;
4) погрешностей семи параметров преобразования координат.

В данном подразделе рассмотрим влияние четвертого фактора.

Дифференцирование формулы (117) позволяет записать равенство

$$m_{\bar{X}}^{\ 2} = m_X^{\ 2} + m_{X\Delta m}^{\ 2} + 2m_{X\omega}^{\ 2} + m_x^{\ 2}, \tag{148}$$

где $m_{\bar{X}}$ – погрешность определения пространственных прямоугольных координат ($\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$) в референцной системе;

m_X – погрешность вычисления пространственных прямоугольных координат (X, Y, Z) в общеземной системе;

$m_{X\Delta m}$ – влияние погрешности относительного изменения масштаба на точность вычисления пространственных прямоугольных координат в референцной системе;

$m_{X\omega}$ – влияние погрешностей углов разворота на точность вычисления пространственных прямоугольных координат в референцной системе;

m_x – погрешности в положении центра референцной системы относительно центра общеземной системы координат.

Аналогичные формулы можно получить для ординат и аппликат.

В свою очередь, влияние неточного знания масштаба и углов разворота можно определить по формулам

$$m_{X\Delta m} = X m_{\Delta m}; \tag{149}$$

$$m_{X\omega} = X\,\frac{m_\omega}{\rho}, \tag{150}$$

где $m_{\Delta m}$ и m_ω – погрешности соответствующих параметров преобразования координат.

В ГОСТ Р 51794–2001 [13] для связи систем координат СК-42 и ПЗ-90 приведены не только числовые значения семи параметров, но и значения погрешностей этих параметров: $m_{\Delta m} = 0,25\cdot 10^{-6}$; $m_\omega = 0,1''$; m_x = 2–3 м. Поэтому в стандарте правильно, на наш взгляд, удержано количество значащих цифр. Например, $x = -25 \pm 2$ м.

Вычисления по формулам (149), (150) дают $m_{X\Delta m}$ = 1,6 м; $m_{X\omega}$ = 3,1 м. Тогда уравнение (148) позволяет оценить погрешность вычисления координат по формулам (117)–(119). Для СК-42 она может составлять 6–7 м (при условии, что пространственные прямоугольные координаты в общеземной системе получены безошибочно). Предельная погрешность может быть в 2,5 раза больше и равняться 15–17,5 м. Это явилось одной из причин ввода в 2000 г. новой референцной государственной системы координат СК-95.

К сожалению, в первой редакции ГОСТа [13] не указаны погрешности числовых значений параметров связи систем координат ПЗ-90 и СК-95. Можно лишь предполагать, что они не хуже, чем при связи ПЗ-90 и WGS-84, и составляли $m_x = m_y = m_z$ = 2–4 см. Все углы разворота ω и относительное изменение масштаба Δm по условию ввода СК-95 были равны нулю.

Во второй и последующих редакциях ГОСТа [14, 15] числовые значения всех параметров связей для взаимного преобразования систем координат также приведены без указания погрешностей их получены. С другой стороны, эти параметры опубликованы с излишним количеством значащих цифр. Например, для положения центра референцной системы СК-42 относительно центра общеземной системы ПЗ-90.02 указано новое значение x = –23,93 м, а относительно центра системы ПЗ-90.11 дано –23,557. Поэтому у специалистов, использующих эти стандарты, может складываться впечатление о сантиметровом и даже миллиметровом уровне точности при преобразовании координат. Однако это не так.

Эволюция параметров преобразования координат при переходе к системам координат ПЗ-90.02, а затем к ПЗ-90.11 представлена в табл. 4. Эти новые значения параметров получены путем сложения старых значений и некой корректирующей поправки, которая равна изменению положения центра старой системы координат относительно центра новой (ПЗ-90 и ПЗ-90.02, ПЗ-90.02 и ПЗ-90.11). Об этом говорят данные последних двух строк табл. 4.

Таблица 4

Эволюция параметров преобразования пространственных прямоугольных координат

Исходная СК	Конечная СК	Параметры			Преобразования				Номер ГОСТа
		x (м)	y (м)	z (м)	ω_X (сек.)	ω_Y (сек.)	ω_Z (сек.)	$\Delta m \cdot 10^6$	
ПЗ-90	СК-42	–25 ± 2	141 ± 2	80 ± 3	0,00 ± 0,1	0,35 ± 0,1	0,66 ± 0,1	0,00 ± 0,25	Р 51794–2001 [13]
Разности параметров		*1,07*	*0,03*	*–0,02*	*0,00*	*0,00*	*0,13*	*0,22*	
ПЗ-90.02	СК-42	–23,93	141,03	79,98	0,00	0,35	0,79	0,22	Р 51794–2008 [14]
Разности параметров		*0,373*	*–0,186*	*–0,202*	*0,002 30*	*–0,003 54*	*0,004 21*	*0,008*	
ПЗ-90.11	СК-42	–23,557	140,844	79,778	0,002 30	0,346 46	0,794 21	0,228	32453–2017 [15]
ПЗ-90	СК-95	–25,90	130,94	81,76	0	0	0	0	Р 51794–2001 [13]
Разности параметров		*1,07*	*0,03*	*–0,02*	*0,00*	*0,00*	*0,13*	*0,22*	
ПЗ-90.02	СК-95	–24,83	130,97	81,74	0,00	0,00	0,13	0,22	Р 51794–2008 [14]
Разности параметров		*0,373*	*–0,186*	*–0,202*	*0,002 30*	*–0,003 54*	*0,004 21*	*0,008*	
ПЗ-90.11	СК-95	–24,457	130,784	81,538	0,002 30	–0,003 54	0,134 21	0,228	32453–2017 [15]
ПЗ-90.02	ПЗ-90	1,07	0,03	–0,02	0,00	0,00	0,13	0,22	Р 51794–2008 [14]
ПЗ-90.11	ПЗ-90.02	0,373	–0,186	–0,202	0,002 30	–0,003 54	0,004 21	0,008	32453–2017 [15]

Например, для СК-42 параметр $x_{новое} = -25 + 1{,}07$ м $= -23{,}93$ м, для СК-95 $x_{новое} = -25{,}90 + 1{,}07$ м $= -24{,}87$ м. Поэтому даже если поправка в старое значение параметра получена безошибочно, то значение нового параметра имеет ту же погрешность, которая была заявлена в ГОСТе [13], а именно 2–3 м для СК-42. Аналогично получены и другие шесть параметров. Поэтому преобразование пространственных прямоугольных координат из общеземной системы ПЗ-90.02 в референцную СК-42 будет выполняться с той же погрешностью в 6–7 м. В отношении преобразования координат из системы ПЗ-90.02 в СК-95 можно ожидать погрешностей на дециметровом уровне.

Аналогичные выводы можно сделать относительно точности преобразования пространственных прямоугольных координат из системы ПЗ-90.11 в системы СК-42 и СК-95. В связи с вышеизложенным возникает закономерный вопрос: можно ли повысить точность преобразования координат из общеземных систем в референцные? Оказывается, можно. И для этого есть два пути: во-первых, можно определять и затем использовать локальные параметры связи для ограниченной территории; во-вторых, можно преобразовывать не сами координаты, а приращения пространственных прямоугольных координат. Далее рассмотрим эти пути подробнее.

3.2. Определение и использование локальных параметров преобразования пространственных прямоугольных координат

Для определения локальных параметров преобразования на объекте производства работ необходимо иметь так называемые опорные пункты, координаты которых должны быть известны в двух системах координат: референцной и общеземной. Как правило, опорными являются пункты плановой государственной геодезической сети, на которых дополнительно выполняются ГНСС-определения. Это позволяет выразить уравнения (117)–(119) относительно семи уточняемых параметров связи двух систем координат.

Так как уточняемых параметров семь, а каждый опорный пункт позволяет составить только три уравнения вида (117)–(119), то количество опорных пунктов не может быть меньше трех.

В этом случае будет возможна математическая обработка по методу наименьших квадратов (МНК). Увеличение числа опорных пунктов будет давать возможность повысить точность определения параметров преобразования координат. С другой стороны, это влечет за собой возрастание материальных и временных затрат на полевые работы. Необходимость обеспечения компромисса между затратами и точностью будет приводить, как это часто бывает в геодезии, к решению задачи оптимизации.

Пусть на объекте (рис. 14) имеется t пунктов (D_1, D_2, …, D_i, …, D_t), для которых известны координаты в референцной системе. На этом же объекте расположены n пунктов (K_1, K_2, …, K_j, …, K_n) новой геодезической сети, у которых необходимо определить пространственные прямоугольные координаты в этой же референцной системе. Для решения задачи следует выполнить ГНСС-измерения на (t + n) пунктах, при этом t будут выступать в роли опорных.

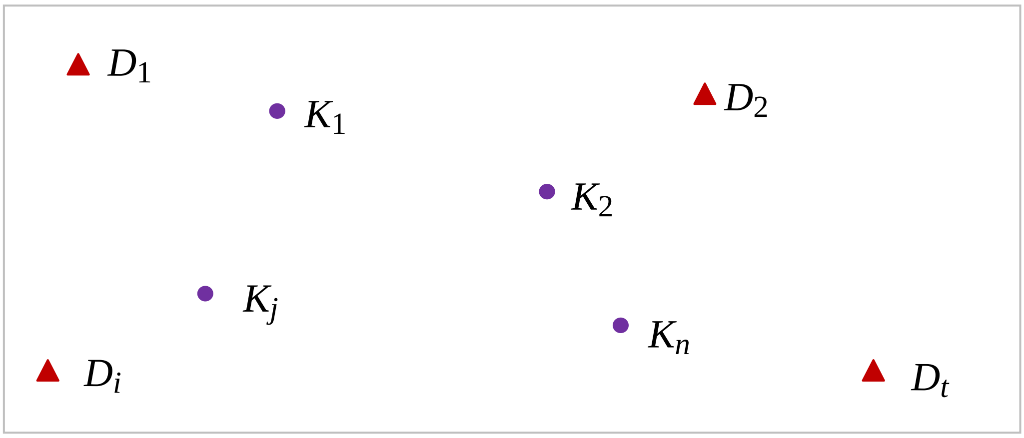

Рис. 14. Схема расположения пунктов на объекте

Для этих опорных пунктов уравнения (117)–(119) можно записать следующим образом: общеземные координаты X, Y, Z равны референцным $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ минус поправки, т. е.

$$X_i = \overline{X}_i - \Delta m \overline{X}_i - {}^{\omega_Z}\!/_{\rho}\, \overline{Y}_i + {}^{\omega_Y}\!/_{\rho}\, Z_i - x; \qquad (151)$$

$$Y_i = \overline{Y}_i - \Delta m \overline{Y}_i + {}^{\omega_Z}\!/_{\rho}\, \overline{X}_i - {}^{\omega_X}\!/_{\rho}\, \overline{Z}_i - y; \qquad (152)$$

$$Z_i = \overline{Z}_i - \Delta m \overline{Z}_i - {}^{\omega_Y}\!/_{\rho}\, \overline{X}_i + {}^{\omega_X}\!/_{\rho}\, \overline{Y}_i - z; \qquad (153)$$

где $i = 1, 2, \ldots, t$.

Каждый из семи параметров можно представить в виде суммы приближенного значения и поправки. При этом в качестве приближенных логично использовать значения, опубликованные в ГОСТах [13–15]:

$$\Delta m = \Delta m^0 + \delta_{\Delta m}; \qquad (154)$$

$$\omega_X = \omega_X^0 + \delta_{\omega_X}; \qquad (155)$$

$$\omega_Y = \omega_Y^0 + \delta_{\omega_Y}; \qquad (156)$$

$$\omega_Z = \omega_Z^0 + \delta_{\omega_Z}; \qquad (157)$$

$$x = x^0 + \delta_x; \qquad (158)$$

$$y = y^0 + \delta_y; \qquad (159)$$

$$z = z^0 + \delta_z. \qquad (160)$$

Общеземные пространственные координаты, в свою очередь, можно записать как сумму измеренных значений и поправок к ним:

$$X_i = X_i' + \vartheta_{X_i}; \qquad (161)$$

$$Y_i = Y_i' + \vartheta_{Y_i}; \qquad (162)$$

$$Z_i = Z_i' + \vartheta_{Z_i}. \qquad (163)$$

Если в уравнения (151)–(153) подставить приближенные значения параметров связи, то вычисленные общеземные пространственные прямоугольные координаты можно назвать приближенными:

$$X_i^0 = \overline{X}_i - \Delta m^0 \overline{X}_i - {\omega_Z^0}/{\rho}\, \overline{Y}_i + {\omega_Y^0}/{\rho}\, \overline{Z}_i - x^0; \tag{164}$$

$$Y_i^0 = \overline{Y}_i - \Delta m^0 \overline{Y}_i + {\omega_Z^0}/{\rho}\, \overline{X}_i - {\omega_X^0}/{\rho}\, \overline{Z}_i - y^0; \tag{165}$$

$$Z_i^0 = \overline{Z}_i - \Delta m^0 \overline{Z}_i - {\omega_Y^0}/{\rho}\, \overline{X}_i + {\omega_X^0}/{\rho}\, \overline{Y}_i - z^0. \tag{166}$$

Линеаризация уравнений (151)–(153) позволяет записать систему трех параметрических уравнений поправок для каждого из t опорных пунктов:

$$\vartheta_{X_i} = -\overline{X}_i \delta_{\Delta m} - \frac{\overline{Y}_i}{\rho}\delta_{\omega_Z} + \frac{\overline{Z}_i}{\rho}\delta_{\omega_Y} - \delta_x + L_{X_i}; \tag{167}$$

$$\vartheta_{Y_i} = -\overline{Y}_i \delta_{\Delta m} + \frac{\overline{X}_i}{\rho}\delta_{\omega_Z} - \frac{\overline{Z}_i}{\rho}\delta_{\omega_X} - \delta_y + L_{Y_i}; \tag{168}$$

$$\vartheta_{Z_i} = -\overline{Z}_i \delta_{\Delta m} - \frac{\overline{X}_i}{\rho}\delta_{\omega_Y} + \frac{\overline{Y}_i}{\rho}\delta_{\omega_X} - \delta_z + L_{Z_i}, \tag{169}$$

где свободные члены L равны разностям вычисленных по формулам (164)–(166) и измеренных пространственных прямоугольных координат в общеземной системе:

$$L_{X_i} = X_i^0 - X_i'; \tag{170}$$

$$L_{Y_i} = Y_i^0 - Y_i'; \tag{171}$$

$$L_{Z_i} = Z_i^0 - Z_i'. \tag{172}$$

Решение 3t-уравнений вида (167)–(169) по МНК под условием

$$\sum_{i=1}^{i=t}(\vartheta_{X_i}^2+\vartheta_{Y_i}^2+\vartheta_{Z_i}^2)=\min \tag{173}$$

позволяет вычислить поправки, а затем и уточненные значения семи параметров связи систем координат по формулам (154)–(160). Математическая обработка по МНК позволяет выполнить и оценку точности этих параметров.

Полученные таким образом параметры можно затем многократно использовать на объекте для преобразования общеземных пространственных прямоугольных координат в соответствующие референцные координаты для n новых пунктов с помощью уравнений вида

$$\bar{X}_j=X_j+\Delta mX_j+{}^{\omega_Z}/_{\rho}\,Y_j-{}^{\omega_Y}/_{\rho}\,Z_j+x; \tag{174}$$

$$\bar{Y}_j=Y_j+\Delta mY_j-{}^{\omega_Z}/_{\rho}\,X_j+{}^{\omega_X}/_{\rho}\,Z_j+y; \tag{175}$$

$$\bar{Z}_j=Z_j+\Delta mZ_j+{}^{\omega_Y}/_{\rho}\,X_j-{}^{\omega_X}/_{\rho}\,Y_j+z. \tag{176}$$

3.3. Преобразование разностей пространственных прямоугольных координат из общеземной системы в референцную

Предположим, что на пунктах K_1 и K_2 (рис. 15) выполнены ГНСС-наблюдения, в результате которых получены разности пространственных прямоугольных координат $\Delta X_{12}, \Delta Y_{12}, \Delta Z_{12}$ в общеземной системе (ПЗ-90.02, ПЗ-90.11, WGS -84 и т. д.).

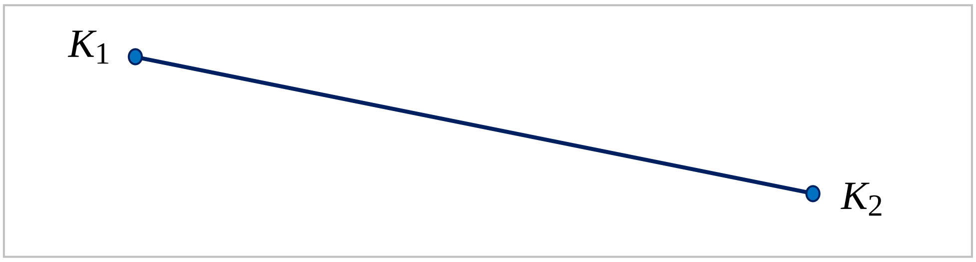

Рис. 15. Фрагмент геодезической сети

Получим формулы для перехода к разностям одноименных координат $\Delta\overline{X}_{12}, \Delta\overline{Y}_{12}, \Delta\overline{Z}_{12}$ в референцной системе (СК-42, СК-95). Для этого запишем формулы (174)–(176) для пунктов K_2 и K_1:

$$\overline{X}_2 = X_2 + \Delta m X_2 + \frac{\omega_Z}{\rho} Y_2 - \frac{\omega_Y}{\rho} Z_2 + x; \tag{177}$$

$$\overline{Y}_2 = Y_2 + \Delta m Y_2 - \frac{\omega_Z}{\rho} X_2 + \frac{\omega_X}{\rho} Z_2 + y; \tag{178}$$

$$\overline{Z}_2 = Z_2 + \Delta m Z_2 + \frac{\omega_Y}{\rho} X_2 - \frac{\omega_X}{\rho} Y_2 + z; \tag{179}$$

$$\overline{X}_1 = X_1 + \Delta m X_1 + \frac{\omega_Z}{\rho} Y_1 - \frac{\omega_Y}{\rho} Z_1 + x; \tag{180}$$

$$\overline{Y}_1 = Y_1 + \Delta m Y_1 - \frac{\omega_Z}{\rho} X_1 + \frac{\omega_X}{\rho} Z_1 + y; \tag{181}$$

$$\overline{Z}_1 = Z_1 + \Delta m Z_1 + \frac{\omega_Y}{\rho} X_1 - \frac{\omega_X}{\rho} Y_1 + z. \tag{182}$$

Вычтем почленно из уравнений (177)–(179) уравнения (180)–(182). После выноса за скобки параметров связи систем координат и ввода обозначений

$$\Delta X_{12} = X_2 - X_1; \tag{183}$$

$$\Delta Y_{12} = Y_2 - Y_1; \tag{184}$$

$$\Delta Z_{12} = Z_2 - Z_1; \tag{185}$$

$$\Delta \overline{X}_{12} = \overline{X}_2 - \overline{X}_1; \tag{186}$$

$$\Delta \overline{Y}_{12} = \overline{Y}_2 - \overline{Y}_1; \tag{187}$$

$$\Delta \overline{Z}_{12} = \overline{Z}_2 - \overline{Z}_1 \tag{188}$$

можно записать три уравнения вида

$$\Delta \overline{X}_{12} = \Delta X_{12} + \Delta m \Delta X_{12} + \frac{\omega_Z}{\rho} \Delta Y_{12} - \frac{\omega_Y}{\rho} \Delta Z_{12}; \tag{189}$$

$$\Delta \overline{Y}_{12} = \Delta Y_{12} + \Delta m \Delta Y_{12} - \frac{\omega_Z}{\rho} \Delta X_{12} + \frac{\omega_X}{\rho} \Delta Z_{12}; \tag{190}$$

$$\Delta \overline{Z}_{12} = \Delta Z_{12} + \Delta m \Delta Z_{12} + \frac{\omega_Y}{\rho} \Delta X_{12} - \frac{\omega_X}{\rho} \Delta Y_{12}. \tag{191}$$

Характерно, что координаты центра референцной системы относительно центра общеземной системы в уравнениях (189)–(191) не участвуют.

Максимальный суммарный размер поправок в разности общеземных координат может составлять для разных расстояний S между пунктами K_1 и K_2 от нескольких сантиметров до метров (табл. 5). При вычислении поправок было учтено, что приращения пространственных прямоугольных координат не могут превышать расстояний между пунктами.

Таблица 5

Величины поправок в разности координат

Максимальная сумма поправок	Расстояние S, км						
	1	5	10	30	50	100	200
ПЗ-90.02 – СК-42 (м)	0,006	0,03	0,06	0,17	0,30	0,58	1,15
ПЗ-90.02 – СК-95 (м)	0,001	0,004	0,009	0,03	0,04	0,09	0,17

Анализ данных табл. 5 позволяет сделать вывод о том, что в ряде случаев в зависимости от необходимой точности преобразования разностей координат эти поправки можно не учитывать и считать

$$\Delta\overline{X}_{12} \approx \Delta X_{12}; \tag{192}$$

$$\Delta\overline{Y}_{12} \approx \Delta Y_{12}; \tag{193}$$

$$\Delta\overline{Z}_{12} \approx \Delta Z_{12}. \tag{194}$$

Дифференцирование уравнений (189)–(191) позволяет получить формулы для оценки точности преобразования разностей координат по оси абсцисс:

$$m^2_{\Delta\overline{X}} = m^2_{\Delta X} + m_1^2 + 2m_2^2. \tag{195}$$

Без учета погрешностей измерения разностей координат в общеземной системе можно записать

$$m_{\Delta\overline{X}} \approx S\sqrt{m^2_{\Delta m} + \frac{2m^2_{\omega}}{\rho^2}}. \tag{196}$$

Такая погрешность преобразования будет по каждой координатной оси.

Расчеты, выполненные по формуле (196), для разных расстояний между пунктами дают следующие результаты (табл. 6).

Таблица 6

Погрешности преобразования разностей координат (по каждой координатной оси) для разных расстояний

$m_{\Delta X}$	Расстояние S, км						
	1	5	10	30	50	100	200
ПЗ-90.02 – СК-42 (см)	0,1	0,4	0,7	2,2	3.6	7,3	14,6
ПЗ-90.02 – СК-95 (см)	0,01	0,05	0,1	0,3	0,5	0,9	1,8

Таким образом, преобразование разностей координат позволяет повысить точность преобразования в 50–100 раз.

3.4. Связь разностей геодезических пространственных координат, заданных в двух системах

Предположим, что для пунктов K_1 и K_2 (см. рис. 15) известны геодезические пространственные координаты в какой-то исходной системе. Тогда для этих пунктов можно вычислить разности одноименных координат:

$$\Delta B_{12} = B_2 - B_1; \tag{197}$$

$$\Delta L_{12} = L_2 - L_1; \tag{198}$$

$$\Delta H_{12}^{\Gamma} = H_2^{\Gamma} - H_1^{\Gamma}. \tag{199}$$

Формулы для перехода к разностям геодезических пространственных координат в конечной системе можно получить путем преобразования разностей поправок $\Delta B_1, \Delta B_2, \Delta B_3, \Delta L_1, \Delta L_2, \Delta H_1, \Delta H_2, \Delta H_3, \Delta H_4$, вычисляемых по формулам (129)–(144), для двух пунктов K_1 и K_2.

В результате таких преобразований нами ранее [5] получено, что разности геодезических координат в конечной системе можно представить в виде сумм

$$\overline{\Delta B}_{12} = \Delta B_{12} + \delta B_{12}; \quad \overline{\Delta L}_{12} = \Delta L_{12} + \delta L_{12}; \quad \overline{\Delta H}_{12}^{\Gamma} = \Delta H_{12} + \delta H_{12}. \tag{200}$$

В свою очередь, корректирующие поправки $\delta B_{12}, \delta L_{12}, \delta H_{12}$ в разности геодезических пространственных координат также удобно представить в виде сумм поправок:

$$\delta B_{12} = \delta B_1 + \delta B_2 + \delta B_3 + \delta B_4; \tag{201}$$

$$\delta L_{12} = \delta L_1 + \delta L_2; \tag{202}$$

$$\delta H_{12} = \delta H_1 + \delta H_2 + \delta H_3 + \delta H_4. \tag{203}$$

Поправка в разность широт δB_1 двух точек K_1 и K_2 вызвана несовпадением центров двух эллипсоидов:

$$\delta B_1 = \rho(\frac{z\cos B_2 - c_2 \sin B_2}{(M_2 + H_2^{\Gamma})} - \frac{z\cos B_1 - c_1 \sin B_1}{(M_1 + H_1^{\Gamma})}). \qquad (204)$$

Здесь буквами c_1 и c_2 обозначены соотношения

$$c_1 = x\cos L_1 + y\sin L_1; \qquad c_2 = x\cos L_2 + y\sin L_2. \qquad (205)$$

Для вычисления второй поправки в разность широт нами получены формулы

$$\delta B_2 = \frac{\rho}{(M_{\text{ср}} + H_{\text{ср}})}(\frac{\Delta a e_{\text{ср}}^2}{a_{\text{ср}}} + (1 + \frac{1}{W_{\text{ср}}^2})\frac{\Delta e^2}{2})(d_2 - d_1); \qquad (206)$$

$$d_1 = N_1 \sin B_1 \cos B_1; \quad d_2 = N_2 \sin B_2 \cos B_2. \qquad (207)$$

Появление этой поправки вызвано несовпадением параметров используемых эллипсоидов.

Третья и четвертая поправки в разности широт обусловлены непараллельностью координатных осей и несовпадением масштабов соответственно:

$$\delta B_3 = (1 + e_{\text{ср}}^2 \cos 2B_{\text{ср}})(\omega_Y(\cos L_2 - \cos L_1) - \omega_X(\sin L_2 - \sin L_1)); \quad (208)$$

$$\delta B_4 = -\rho \Delta m e_{\text{ср}}^2 (\sin B_2 \cos B_2 - \sin B_1 \cos B_1). \qquad (209)$$

Поправка в разность геодезических долгот, в свою очередь, состоит их двух поправок (формула (202)): первая вызвана несовпадением центров двух эллипсоидов; вторая – непараллельностью осей:

$$\delta L_1 = \rho(y(\frac{\cos L_2}{t_2} - \frac{\cos L_1}{t_1}) - x(\frac{\sin L_2}{t_2} - \frac{\sin L_1}{t_1})); \qquad (210)$$

$$\delta L_2 = (1 - e_{\text{ср}}^2)(\omega_X(\operatorname{tg} B_2 \cos L_2 - \operatorname{tg} B_1 \cos L_1) + \omega_Y(\operatorname{tg} B_2 \sin L_2 - \operatorname{tg} B_1 \sin L_1)). \quad (211)$$

Буквами t_1 и t_2 обозначены произведения

$$t_1 = (N_1 + H_1^{\Gamma})\cos B_1; \quad t_2 = (N_2 + H_2^{\Gamma})\cos B_2. \qquad (212)$$

Четыре поправки в разность геодезических высот (формула (203)) можно вычислить по следующим формулам:

$$\delta H_1 = \frac{\Delta a W_{\text{ср}}}{N_{\text{ср}}}(N_2 - N_1) + \frac{\Delta e^2}{2}(N_2 \sin^2 B_2 - N_1 \sin^2 B_1)\,; \tag{213}$$

$$\delta H_2 = c_2 \cos B_2 - c_1 \cos B_1 + z(\sin B_2 - \sin B_1)\,; \tag{214}$$

$$\delta H_3 = e_{\text{ср}}^2 (\frac{\omega_Y}{\rho}(d_2 \cos L_2 - d_1 \cos L_1) - \frac{\omega_X}{\rho}(d_2 \sin L_2 - d_1 \sin L_1))\,; \tag{215}$$

$$\delta H_4 = \Delta m(H_2^{\Gamma} - H_1^{\Gamma} - W_{\text{ср}}^2 (N_2 - N_1))\,. \tag{216}$$

Первая поправка позволяет учесть несовпадение параметров двух эллипсоидов, вторая – несовпадение центров, третья – непараллельность координатных осей, четвертая – неравенство масштабов в двух системах координат. Индекс «ср» означает, что эти величины должны вычисляться по средней широте точек K_1 и K_2.

Если геодезические пространственные координаты пункта K_1 в новой (конечной) системе известны, то геодезические координаты пункта K_2 в этой системе будут равны суммам:

$$\overline{B}_2 = \overline{B}_1 + \overline{\Delta B}_{12}\,; \tag{217}$$

$$\overline{L}_2 = \overline{L}_1 + \overline{\Delta L}_{12}\,; \tag{218}$$

$$\overline{H}_2^{\Gamma} = \overline{H}_1^{\Gamma} + \overline{\Delta H}_{12}\,. \tag{219}$$

Контрольные вопросы по третьему разделу

1. От каких факторов зависит погрешность преобразования пространственных прямоугольных координат из одной системы в другую?

2. Какова реальная погрешность преобразования пространственных прямоугольных координат из общеземных систем в СК-42?

3. Какова реальная погрешность преобразования пространственных прямоугольных координат из общеземных систем в СК-95?

4. Как можно повысить точность преобразования пространственных прямоугольных координат из общеземных систем в референцные?

5. В чем преимущества преобразования разностей координат из одной системы в другую?

4. РЕГИОНАЛЬНЫЕ И МЕСТНЫЕ СИСТЕМЫ ПЛОСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ГАУССА – КРЮГЕРА

4.1. Необходимость ввода местных систем плоских прямоугольных координат

Под термином «ввод местных координат» в геодезии понимают технологию преобразования координат пунктов из государственной системы (СК-42, СК-95, ГСК-2011) в местную.

Необходимость ввода таких систем плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера обусловлена двумя причинами. Первая причина связана с обеспечением режима секретности при использовании каталогов координат пунктов и результатов топографической съемки. Если эта информация будет храниться и использоваться в местных системах координат, то в соответствии с действующими нормативными документами она не будет иметь грифа «Секретно». Вторая причина вызвана желанием геодезистов уменьшить величины поправок в измеренные величины за переход с поверхности эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера с тем, чтобы их можно было не учитывать при работе на своем объекте (населенном пункте, строительной площадке, карьере и т. п.), занимающем небольшую площадь. Максимальная площадь объекта не может превышать территорию субъекта Российской Федерации.

В местных системах координат положение начала отсчета координат и ориентировка осей должны отличаться от существующих в государственных системах координат. С методической точки зрения [3, 16] местные системы координат целесообразно разделить на две группы: региональные (СКР) и собственно местные (СКМ).

Региональными системами плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера нужно называть те, которые вводятся на территории субъектов Российской Федерации. Они, как правило, реализуются в нескольких трехградусных зонах. В местных системах координат используется одна зона, размер которой специально не устанавливается, потому что он зависит от площади конкретного объекта (населенного пункта, строительной площадки и т. д.). Размер такой зоны может меняться в зависимости от изменения площади объекта.

4.2. Способы ввода региональных и местных систем плоских прямоугольных координат

Региональные системы плоских прямоугольных координат можно установить только одним способом – изменением долгот осевых меридианов региональных зон по отношению к государственным зонам. В этом случае технология преобразования координат Гаусса – Крюгера из государственной системы в СКР будет содержать *три основных этапа* [3, 16].

На первом этапе необходимо перейти от условных плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера к геодезическим координатам. При этом можно использовать формулы (71)–(82) и технологию, описанную в подразд. 2.5.

Второй этап алгоритма является ключевым. Он заключается в определении номера зоны k в СКР по формуле

$$k = \text{целое}\,1\left(\frac{(L - L_0^{(1)} + 3^0)}{3^0}\right), \qquad (220)$$

в вычислении долготы осевого меридиана $L_0^{(k)}$этой зоны и получении новой разности долгот $l_\text{р}$:

$$L_0^{(k)} = L_0^{(1)} + 3^0(k-1); \qquad (221)$$

$$l_\text{р} = L - L_0^{(k)}. \qquad (222)$$

На третьем этапе необходимо вычислить действительные плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера $x_\text{р}$, $y_\text{р}$ по формулам (61)–(68), которые приведены в подразд. 2.4 данного учебного пособия.

Завершает этот этап определение условных плоских прямоугольных координат по действительным координатам:

$$x'_{\text{р}} = x_{\text{р}} + x_0; \tag{223}$$

$$y'_{\text{р}} = y_{\text{р}} + k \cdot 10^6 + y_0. \tag{224}$$

Анализ формул (220)–(224) позволяет сделать вывод о том, что для взаимосвязи двух систем плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера (государственной и региональной) требуется знать значения трех параметров (ключей). Такими параметрами являются:

– долгота осевого меридиана $L_0^{(1)}$ первой трехградусной зоны;
– координаты x_0, y_0 начала региональной действительной системы плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера относительно начала региональной условной системы.

Эти параметры устанавливаются разработчиками СКР, хранятся в территориальных инспекциях государственного геодезического надзора и являются закрытой для рядовых пользователей информацией.

Для установления местных систем плоских прямоугольных координат на территории различных объектов в России применяют два способа. Первый способ принципиально такой же, как и способ ввода СКР, который был описан ранее. Отличие состоит лишь в том, что в СКМ нет деления на зоны, и поэтому за осевой меридиан обычно принимается тот, который проходит примерно посредине объекта.

В этом случае формулы (222)–(224) примут несколько иной вид:

$$l_{\text{м}} = L - L_0^{\text{м}}; \tag{225}$$

$$x'_{\text{м}} = x_{\text{м}} + x_0; \tag{226}$$

$$y'_{\text{м}} = y_{\text{м}} + y_0. \tag{227}$$

Такой способ ввода СКМ отличается своей строгостью. Его использование не вносит дополнительных искажений в результаты полевых измерений при их математической обработке. Однако он требует выполнения большого объема вычислительных работ, справиться с которым без привлечения компьютеров было затруднительно. Поэтому до компьютеризации геодезического производства часто применяли другой способ, идея которого заключается в развороте координатных осей государственной системы и смещении начала координат (рис. 16).

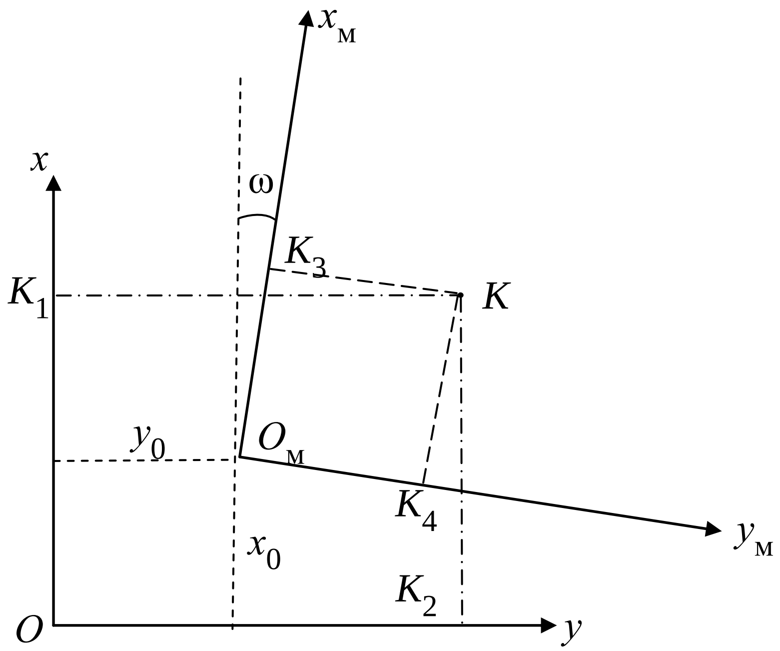

Рис. 16. Второй способ ввода местной системы координат

Во втором способе формулы связи действительных плоских прямоугольных координат в государственной $x = OK_1$, $y = OK_2$ и местной $x_м = O_мK_3$, $y_м = O_мK_4$ системах имеют более простой вид:

$$x_м = a_1 x_1 + b_1 y_1; \tag{228}$$

$$y_м = -b_1 x_1 + a_1 y_1, \tag{229}$$

где

$$a_1 = \cos\omega(1 + \Delta m); \tag{230}$$

$$b_1 = \sin\omega(1 + \Delta m); \tag{231}$$

$$x_1 = x - x_0; \qquad (232)$$

$$y_1 = y - y_0, \qquad (233)$$

в которых ω – угол разворота координатных осей местной системы относительно осей государственной системы координат (положительным считается разворот по ходу часовой стрелки);

Δm – относительное изменение масштаба в местной системе координат;

x_0, y_0 – координаты центра местной системы координат относительно центра государственной системы координат.

При втором способе ввода СКМ параметры перехода ω, Δm, x_0, y_0 задаются разработчиком системы координат, и так же, как и при первом способе, они должны быть закрыты для рядовых пользователей. Этот способ установления местных систем плоских прямоугольных координат может привести к дополнительным искажениям результатов математической обработки полевых измерений. Причем величина искажений будет возрастать с увеличением площади объекта, на котором установлена СКМ. Поэтому в настоящее время второй способ ввода местных систем координат, по нашему мнению, использовать нецелесообразно.

В лабораторной работе (см. прил. 1) обучающимся необходимо вычислить действительные плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера одного пункта в местной системе координат, воспользовавшись первым способом. Так как границы объекта не заданы, то обучающимся предложено за осевой меридиан в СКМ принять меридиан с геодезической долготой, кратной 30′ и ближайшей к долготе пункта. Например, если долгота равна $88^\circ\,42'\,37''$, то долгота осевого меридиана в местной системе должна быть $88^\circ\,30'$. Величины смещений начала координат x_0, y_0 следует принять равными нулю.

Пример преобразования плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера из СК-95 в СКМ-1 и из ГСК-2011 в СКМ-2 приведен в прил. 15.

4.3. Изменения дирекционных углов при вводе региональных и местных систем координат

При вводе региональных и местных систем плоских прямоугольных координат первым способом будут изменяться дирекционные углы направлений по сравнению с их значениями в государственных системах координат. Методика оценивания величин таких изменений должна быть одинакова для СКР и СКМ. Получить формулу для расчета изменения дирекционных углов можно следующим образом. Формулу (83) связи дирекционных углов и геодезических азимутов можно записать и для местной системы координат:

$$\alpha_{12}^{\text{м}} = A_{12} - \gamma_1^{\text{м}} + \delta_{12}^{\text{м}}, \tag{234}$$

где сближение меридианов $\gamma_1^{\text{м}}$ и поправку за кривизну изображения геодезической линии на плоскости $\delta_{12}^{\text{м}}$ в СКМ можно вычислить по формулам (84), (86) соответственно. При этом разность долгот и приближенные координаты пунктов необходимо взять в местной системе координат.

Разность выражений (234) и (83) дает формулу для вычисления величины изменения дирекционных углов одноименных направлений:

$$\alpha_{12}^{\text{м}} - \alpha_{12} = (\gamma_1 - \gamma_1^{\text{м}}) + (\delta_{12}^{\text{м}} - \delta_{12}). \tag{235}$$

Анализ уравнения (235) позволяет говорить о том, что на изменение дирекционных углов влияют две причины.

Первая причина – это изменение сближения меридианов в точке K_1 (см. рис. 12). Разность сближений меридианов зависит от величины изменения долгот осевых меридианов в государственной и местной системах координат. Это основная поправка в дирекционные углы. По абсолютной величине она может достигать нескольких градусов и должна учитываться при выполнении топогеодезических работ любого класса точности и назначения.

Вторая причина различия в дирекционных углах заключается в том, что при переходе к СКМ изменяется величина поправки в направление за кривизну изображения геодезической линии на плоскости. Разность поправок $(\delta_{12}^{м} - \delta_{12})$ будет по модулю гораздо меньше, чем разность сближения меридианов. Эта разность, как правило, будет выражаться в секундах, в редких случаях может достигать 10–12″. Поэтому учитывать ее необходимо только при выполнении геодезических работ соответствующего класса точности.

Формулы для вычисления разностей дирекционных углов одноименных направлений в СКР и государственной системах координат также будут иметь вид формулы (235). Особенность ввода региональных и местных систем координат первым способом заключается в том, что дирекционные углы одноименных направлений будут изменяться по-разному. Величина изменения будет зависеть от местоположения линии K_1K_2, ее ориентировки и длины.

При вводе местных систем координат вторым способом дирекционные углы всех направлений будут изменяться на одну и ту же величину, равную углу разворота координатных осей ω (см. рис. 16).

При выполнении лабораторной работы (см. прил. 1) обучающимся предложено оценить величину изменения дирекционных углов направлений. Для этого необходимо выполнить вычисление сближения меридианов в заданной точке и поправок за кривизну изображения геодезической линии на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера в различных системах координат: ГСК-2011 и СКМ-2. Примеры определения сближения меридианов и дирекционных углов рассмотрены в прил. 16, 18.

4.4. Изменения длин сторон при вводе региональных и местных систем координат

Кроме дирекционных углов на объектах, где введена региональная или местная система плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера первым способом, будут изменяться и линейные искажения, а это, в свою очередь, будет приводить к изменению поправок в расстояния, которые вызваны переходом с поверхности эллипсоида вращения на плоскость. Для получения формулы, по которой можно оценить величину изменения расстояний на плоскости при вводе региональных или местных (первым способом) систем координат, будем предполагать, что поверхности относимости в этих системах одинаковые.

Тогда можно записать приближенные формулы для редуцирования расстояния s_{12} с эллипсоида на плоскость в государственной и местной системах координат соответственно:

$$S_{12} = s_{12} + \frac{y_{\text{ср}}^2}{2R_{\text{ср}}^2} s_{12}; \tag{236}$$

$$S_{12}^{\text{м}} = s_{12} + \frac{(y_{\text{ср}}^{\text{м}})^2}{2R_{\text{ср}}^2} s_{12}. \tag{237}$$

Здесь S_{12}, $S_{12}^{\text{м}}$ – редуцированные на плоскость расстояния в государственной и местной системах координат; $y_{\text{ср}}$, $y_{\text{ср}}^{\text{м}}$ – средние действительные ординаты измеренного расстояния в государственной и местной системах координат. Разность выражений (236) и (237) равна:

$$S_{12} - S_{12}^{\text{м}} = \frac{s_{12}}{2R_{\text{ср}}^2}(y_{\text{ср}} + y_{\text{ср}}^{\text{м}})(y_{\text{ср}} - y_{\text{ср}}^{\text{м}}). \tag{238}$$

Таким образом, изменение длины зависит от величины измеренного расстояния и действительных ординат пунктов на его концах, заданных в государственной и местной системах координат.

Предположим, что необходимо редуцировать на плоскость расстояние длиной 20 км. Средняя ордината этого отрезка в государственной системе координат была 210 км, а в местной оказалась равной 10 км. В результате вычислений по формуле (238) будет получено, что расстояние между одноименными точками в местной системе координат будет на 11 м короче, чем в государственной.

Если местная система координат введена вторым способом, то все расстояния изменятся пропорционально множителю $(1 + \Delta m)$. В частном случае, когда разработчик СКМ установил, что относительное изменение масштаба равно нулю ($\Delta m = 0$), длины сторон изменяться не будут.

Примеры редуцирования расстояния с поверхности эллипсоида на плоскость в ГСК-2011 и СКМ-2 приведены в прил. 18.

Контрольные вопросы по четвертому разделу

1. По каким причинам вводятся местные системы координат?
2. Как можно классифицировать местные системы плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера?
3. Каким способом можно вводить региональные системы координат?
4. В чем заключается технология ввода СКР?
5. Какие параметры необходимо знать для ввода СКР?
6. За счет каких факторов будут изменяться координаты в СКР по сравнению с координатами в государственных системах?
7. Какими способами можно вводить местные системы координат?
8. В чем различие технологий ввода МСК разными способами?
9. В чем достоинства и недостатки этих способов?
10. На какую величину могут изменяться дирекционные углы направлений при вводе СКР?
11. На какую величину могут изменяться дирекционные углы направлений при вводе СКМ первым способом?
12. На какую величину могут изменяться дирекционные углы направлений при вводе СКМ вторым способом?
13. Как изменяются линейные искажения при вводе СКР?
14. Как изменяются линейные искажения при вводе СКМ первым способом?
15. На какую величину изменится масштаб при вводе СКМ вторым способом?
16. На какую величину могут изменяться расстояния на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера при вводе СКР?
17. На какую величину могут изменяться расстояния на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера при вводе СКМ вторым способом?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии «Высшая геодезия. Системы координат и преобразования между ними» рассмотрены земные системы координат, которые тем или иным образом связаны с нашей планетой и участвуют в ее суточном вращении вокруг своей оси, причем не все земные системы координат, а только те, которые используются в производственной деятельности геодезистов. Но даже таких систем существует достаточно много.

У каждой системы координат имеется целый набор положительных и отрицательных свойств, которые делают удобным или неудобным их использование в той или иной ситуации. Поэтому применение различных систем координат при решении разнообразных практических задач геодезии, топографии, землеустройства и кадастра объектов недвижимости становится неизбежным.

Кроме того, в учебном пособии рассмотрены не только различные системы координат, их достоинства и недостатки, но и разнообразные связи между ними.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антонович К. М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии : монография. В 2 т. – М. : Картгеоцентр, 2005. – Т. 1. – 334 с.

2. Антонович К. М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии : монография. В 2 т. – М. : Картгеоцентр, 2006. – Т. 2. – 360 с.

3. Афонин К. Ф. Высшая геодезия. Системы координат и преобразования между ними : учеб.-метод. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2011. – 66 с.

4. Афонин К. Ф. Сравнение способов вычисления геодезической высоты по прямоугольным пространственным // ГЕО-Сибирь-2007. III Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 25–27 апреля 2007 г.). – Новосибирск : СГГА, 2007. Т. 1, ч. 1. – С. 107–109.

5. Афонин К. Ф. Оптимизация выбора опорных пунктов при определении локальных параметров связи общеземных и референцных систем прямоугольных пространственных координат. Постановка задач оптимизации // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2012. VIII Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия» : сб. материалов в 3 т. (Новосибирск, 10–20 апреля 2012 г.). – Новосибирск : СГГА, 2012. Т. 1. – С. 60–65.

6. Афонин К.Ф. Точность преобразования пространственных прямоугольных координат из общеземных систем в референцные // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2015. XI Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия» : сб. материалов в 2 т. (Новосибирск, 13–25 апреля 2015 г.). – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. Т. 1. – С. 160–163.

7. Афонин К. Ф. Технология преобразования плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера из системы координат субъекта Федерации в единую государственную геодезическую систему координат

ГСК-2011 // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2015. XI Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия» : сб. материалов в 2 т. (Новосибирск, 13–25 апреля 2015 г.). – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. Т. 1. – С. 154–159.

8. Афонин К. Ф. Вычисление площадей территорий в новой государственной системе координат ГСК-2011 // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2016. XII Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия» : сб. материалов в 2 т. (Новосибирск, 18–22 апреля 2016 г.). – Новосибирск : СГУГиТ, 2016. Т. 1. – С. 64–69.

9. Афонин К. Ф., Трифонова Ю. С. Определение геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам путем использования дифференциальной поправки // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. XV Междунар. науч. конгр., 24–26 апреля 2019 г., Новосибирск : сб. материалов в 9 т. Т. 1 : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия». – Новосибирск : СГУГиТ, 2019. № 2. – С. 3–8.

10. Афонин К. Ф. Использование дифференциальных поправок для вычисления геодезических широт по пространственным прямоугольным координатам // Вестник СГУГиТ. – 2020. – Т. 25, № 1. – С. 7–15.

11. Буткевич А. В. О переходе от пространственных прямоугольных координат к геодезическим // Геодезия и картография. – 1967. – № 5. – С. 6–7.

12. Глушков В. В., Насретдинов К. К., Шаравин А. А. Космическая геодезия: Методы и перспективы развития. – М. : Институт политического и военного анализа, 2002. – 448 с.

13. ГОСТ Р 51794–2001. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. Государственный стандарт Российской Федерации. – М. : Госстандарт России, 2001. – 10 с.

14. ГОСТ Р 51794–2008. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. Национальный стандарт Российской Федерации. – М. : Стандартинформ, 2009. – 16 с.

15. ГОСТ 32453–2017. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. Межгосударственный стандарт. – Введ. 2018-01-07. – М. : Стадартинформ, 2017. – 19 с.

16. Система региональных плоских прямоугольных координат Новосибирской области / А. П. Карпик, К. Ф. Афонин, Н. А. Телеганов, П. К. Шитиков, Д. Н. Ветошкин, С. В. Кужелев, В. А. Тимонов // ГЕО-Сибирь-2008. IV Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 5 т. (Новосибирск, 22–24 апреля 2008 г.). – Новосибирск : СГГА, 2008. Т. 1, ч. 1. – С. 20–31.

17. Лапинг К. А. Вычисление координат и высот точек по измеренным азимутам нормальных сечений и углам наклона хорд на двух исходных пунктах // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1962. – № 1. – С. 3–8.

18. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии : учебник для вузов. – М. : Недра, 1969. – 304 с.

19. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии : учебник для вузов. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Недра, 1979. – 296 с.

20. Огородова Л. В. Высшая геодезия : учебник для вузов. – М. : Геодезкартиздат, 2006. – 384 с.

21. Телеганов Н. А., Елагин А. В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2004. – 238 с.

22. Телеганов Н. А., Тетерин Г. Н. Метод и системы координат в геодезии : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2008. – 143 с.

23. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы) : учеб. пособие для вузов / Н. В. Яковлев, Н. А. Беспалов, В. П. Глумов, Ю. Г. Карпушин, А. В. Мерзенин, Л. В. Огородова, Л. П. Пеллинен. – Изд. 2-е. – М. : Альянс, 2007. – 368 с.

24. Bowring B. R. The accuracy of geodetic latitude and height equations // Surv. Rev. – 1985. – 38. – P. 200–206.

25. Bowring B. R. Transformation from spatial to geodetic coordinates // Surv. Rev. – 1976. – 23. – P. 323–327.

Приложение 1

ЗАДАНИЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЖДУ НИМИ»

Цель работы: изучить способы преобразования координат в различных системах: геодезической, пространственной, пространственной прямоугольной и плоской прямоугольной в проекции Гаусса – Крюгера.

Исходные данные

1. Задание на выполнение лабораторной работы.
2. Пространственные прямоугольные координаты точки в системе координат ПЗ-90.11.
3. Геодезический азимут и длина геодезической линии между двумя точками на поверхности эллипсоида ГСК-2011.
4. Параметры эллипсоидов (табл. П.1).

Таблица П.1

Номер	Эллипсоид	a (м)	e^2	Система координат
1	Красовского	6 378 245	0,006 693 421 62	СК-42, СК-95
2	ПЗ-90	6 378 136	0,006 694 366 19	ПЗ-90, ПЗ-90.02, ПЗ-90.11
3	ГСК-2011	6 378 136,5	0,006 694 398 11	ГСК-2011

5. Элементы взаимного ориентирования систем координат (табл. П.2).

Таблица П.2

Номер связи	Исходная система	Конечная система	x (м)	y (м)	z (м)	ω_X (сек.)	ω_Y (сек.)	ω_Z (сек.)	$\Delta m\cdot10^6$
1	ПЗ-90.11	ГСК-2011	0,000	–0,014	0,008	0,000 56	0,000 02	–0,000 05	0,000 6
2	ПЗ-90.11	СК-42	–23,557	140,844	79,778	0,002 30	0,346 46	0,794 21	0,228
3	ПЗ-90.11	СК-95	–24,457	130,784	81,538	0,002 30	–0,003 54	0,134 21	0,228

6. Список рекомендуемой литературы.

Порядок выполнения работы

1. Выполнить необходимые вычисления и получить каталоги геодезических, пространственных прямоугольных, плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера в системах ПЗ-90.11, ГСК-2011, СК-42, СК-95.

2. Обосновать целесообразность ввода местной системы (СКМ) плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера.
3. Преобразовать для заданной точки плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера из ГСК-2011 в СКМ.
4. Вычислить дирекционный угол на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера в государственной (ГСК-2011) и местной (СКМ) системах координат. Оценить величину изменений дирекционных углов. Указать причины полученных изменений.
5. Редуцировать заданное расстояние с поверхности эллипсоида вращения на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера в государственной (ГСК-2011) и местной (СКМ) системах координат. Оценить величину изменений редуцированных длин. Указать причину полученных изменений.

Рекомендуемая литература

1. Афонин, К. Ф. Высшая геодезия. Системы координат и преобразования между ними [Текст] : учеб. пособие / К. Ф. Афонин. – Новосибирск : СГУГиТ, 2020.
2. Мазуров, Б. Т. Высшая геодезия [Текст] : учебник для вузов / Б. Т. Мазуров. – Новосибирск : СГУГиТ, 2016.
3. Телеганов, Н. А. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем [Текст] : учеб. пособие / Н. А. Телеганов, А. В. Елагин. – Новосибирск : СГГА, 2004.
4. Телеганов, Н. А. Метод и системы координат в геодезии [Текст] : учеб. пособие / Н. А. Телеганов, Г. Н. Тетерин. – Новосибирск : СГГА, 2008.
5. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы) [Текст] / под ред. Н. В. Яковлева. – М. : Альянс, 2007.
6. ГОСТ 32453–2017. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек [Текст]. – М. : Стандартинформ, 2017.

Приложение 2

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1 ПЗ-90.11 X = 483 940,268 м Y = 3 843 116,886 м Z = 5 051 711,601 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 50° 05′ 05,929″ S_{12} = 10 048,774 м	**Вариант 2** ПЗ-90.11 X = 20 671,090 м Y = 3 411 499,648 м Z = 5 371 396,352 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 277° 28′ 35,733″ S_{12} = 14 765,684 м	**Вариант 3** ПЗ-90.11 X = 293 879,309 м Y = 4 050 991,738 м Z = 4 902 485,878 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 178° 11′ 37,396″ S_{12} = 13 732,080 м
Вариант 4 ПЗ-90.11 X = 375 689,394 м Y = 4 080 269,009 м Z = 4 872 453,550 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 33° 00′ 16,729″ S_{12} = 11 137,570 м	**Вариант 5** ПЗ-90.11 X = 50 214,883 м Y = 3 767 690,061 м Z = 5 130 053,232 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 259° 25′ 38,805″ S_{12} = 13 344,112 м	**Вариант 6** ПЗ-90.11 X = 3 410,376 м Y = 3 757 146,557 м Z = 5 138 239,543 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 179° 31′ 19,465″ S_{12} = 11 824,126 м
Вариант 7 ПЗ-90.11 X = 83 636,382 м Y = 3 676 400,156 м Z = 5 195 088,620 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 144° 18′ 31,098″ S_{12} = 13 116,927 м	**Вариант 8** ПЗ-90.11 X = 401 590,552 м Y = 3 604 326,100 м Z = 5 230 539,958 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 315° 23′ 37,800″ S_{12} = 12 285,205 м	**Вариант 9** ПЗ-90.11 X = 417 909,583 м Y = 3 284 005,560 м Z = 5 433 909,372 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 322° 18′ 49,666″ S_{12} = 11 371,396 м
Вариант 10 ПЗ-90.11 X = 284 946,867 м Y = 3 914 611,222 м Z = 5 011 671,248 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 56° 04′ 21,436″ S_{12} = 10 018,529 м	**Вариант 11** ПЗ-90.11 X = 409 106,140 м Y = 3 615 401,421 м Z = 5 221 521,531 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 356° 00′ 01,013″ S_{12} = 14 017,954 м	**Вариант 12** ПЗ-90.11 X = 72 531,709 м Y = 3 862 264,405 м Z = 5 059 267,459 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 320° 57′ 40,167″ S_{12} = 11 830,319 м

Вариант 13 ПЗ-90.11 X = 33 854,819 м Y = 3 452 860,795 м Z = 5 345 517,180 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 122° 35′ 51,010″ S_{12} = 14 951,024 м	**Вариант 14** ПЗ-90.11 X = 364 358,126 м Y = 3 774 793,921 м Z = 5 111 434,013 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 272° 06′ 44,643″ S_{12} = 10 841,634 м	**Вариант 15** ПЗ-90.11 X = 233 331,108 м Y = 3 207 759,624 м Z = 5 490 283,443 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 258° 52′ 06,613″ S_{12} = 14 125,189 м
Вариант 16 ПЗ-90.11 X = 410 972,087 м Y = 3 686 704,448 м Z = 5 171 504,258 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 118° 38′ 51,555″ S_{12} = 10 883,747 м	**Вариант 17** ПЗ-90.11 X = 352 462,704 м Y = 3 314 916,551 м Z = 5 420 086,224 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 38° 23′ 25,735″ S_{12} = 14 568,679 м	**Вариант 18** ПЗ-90.11 X = 427 931,304 м Y = 3 956 894,674 м Z = 4 968 492,930 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 82° 09′ 29,705″ S_{12} = 11 034,826 м
Вариант 19 ПЗ-90.11 X = 464 636,065 м Y = 3 680 625,789 м Z = 5 172 193,172 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 120° 24′ 53,613″ S_{12} = 12 931,709 м	**Вариант 20** ПЗ-90.11 X = 44 572,016 м Y = 3 357 013,698 м Z = 5 405 446,802 м Эллипсоид ГСК-2011 A_{12} = 149° 14′ 32,512″ S_{12} = 12 767,604 м	

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ В СИСТЕМЕ ГСК-2011 ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ В СИСТЕМЕ ПЗ-90.11

Элементы взаимного ориентирования систем координат ПЗ-90.11 и ГСК-2011

$x =$ 0
$y =$ –0,014
$z =$ 0,008
$\omega_X =$ 0,000 56
$\omega_Y =$ 0,000 02
$\omega_Z =$ –0,000 05
$\Delta m =$ 0,000 000 000 6

	Вычисление X (м)	Вычисление Y (м)	Вычисление Z (м)
Координаты в ПЗ-90.11	319 112,513	3 678 779,247	5 183 573,360
$\Delta m \cdot X$ (или $\Delta m \cdot Y$, или $\Delta m \cdot Z$)	0,000	0,002	0,003
$\omega_X \cdot Y/\rho$			0,010
$\omega_X \cdot Z/\rho$		0,014	
$\omega_Y \cdot X/\rho$			0,000
$\omega_Y \cdot Z/\rho$	0,001		
$\omega_Z \cdot X/\rho$		0,000	
$\omega_Z \cdot Y/\rho$	–0,001		
Координаты x (или y, или z)	0,000	–0,014	0,008
Координаты в ГСК-2011	319 112,512	3 678 779,249	5 183 573,361

Приложение 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ В СИСТЕМЕ СК-42 ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ В СИСТЕМЕ ПЗ-90.11

Элементы взаимного ориентирования систем координат ПЗ-90.11 и СК-42

$x =$ –23,557
$y =$ 140,844
$z =$ 79,778
$\omega_X =$ 0,002 30
$\omega_Y =$ 0,346 46
$\omega_Z =$ 0,794 21
$\Delta m =$ 0,000 000 228

	Вычисление X (м)	Вычисление Y (м)	Вычисление Z (м)
Координаты в ПЗ-90.11	319 112,513	3 678 779,247	5 183 573,360
$\Delta m \cdot X$ (или $\Delta m \cdot Y$, или $\Delta m \cdot Z$)	0,073	0,839	1,182
$\omega_X \cdot Y/\rho$			0,041
$\omega_X \cdot Z/\rho$		0,058	
$\omega_Y \cdot X/\rho$			0,536
$\omega_Y \cdot Z/\rho$	8,707		
$\omega_Z \cdot X/\rho$		1,229	
$\omega_Z \cdot Y/\rho$	14,165		
Координаты x (или y, или z)	–23,557	140,844	79,778
Координаты в СК-42	319 094,487	3 678 919,759	5 183 654,815

Приложение 5

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ В СИСТЕМЕ СК-95 ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ В СИСТЕМЕ ПЗ-90.11

Элементы взаимного ориентирования систем координат ПЗ-90.11 и СК-95

$x =$ –24,457
$y =$ 130,784
$z =$ 81,538
$\omega_X =$ 0,002 30
$\omega_Y =$ –0,003 54
$\omega_Z =$ 0,134 21
$\Delta m =$ 0,000 000 228

	Вычисление X (м)	Вычисление Y (м)	Вычисление Z (м)
Координаты в ПЗ-90.11	319 112,513	3 678 779,247	5 183 573,360
$\Delta m \cdot X$ (или $\Delta m \cdot Y$, или $\Delta m \cdot Z$)	0,073	0,839	1,182
$\omega_X \cdot Y/\rho$			0,041
$\omega_X \cdot Z/\rho$		0,058	
$\omega_Y \cdot X/\rho$			–0,005
$\omega_Y \cdot Z/\rho$	–0,089		
$\omega_Z \cdot X/\rho$		0,208	
$\omega_Z \cdot Y/\rho$	2,394		
Координаты x (или y, или z)	–24,457	130,784	81,538
Координаты в СК-95	319 090,611	3 678 910,720	5 183 656,033

Приложение 6

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ (СПОСОБ ЛАПИНГА)

Параметры эллипсоидов	*ПЗ-90*	*ГСК-2011*	*Красовского*
a (м)	6 378 136	6 378 136,5	6 378 245
e^2	0,006 694 366 19	0,006 694 398 11	0,006 693 421 62

Система координат	ПЗ-90.11	ГСК-2011	СК-42	СК-95
X (м)	319 112,513	319 112,512	319 094,487	319 090,611
Y (м)	3 678 779,247	3 678 779,249	3 678 919,759	3 678 910,720
Z (м)	5 183 573,360	5 183 573,361	5 183 654,815	5 183 656,033
L (рад)	1,484 268 787 7	1,484 268 788 1	1,484 276 939 3	1,484 277 773 3
L (гр. мин. сек.)	85° 02′ 32,4139″	85° 02′ 32,4140″	85° 02′ 34,0953″	85° 02′ 34,2673″
Q (м)	3 692 593,877	3 692 593,880	3 692 732,306	3 692 722,966
B_1 (рад)	0,954 990 736 9	0,954 990 751 8	0,954 980 021 9	0,954 981 325 4
B_1 (гр. мин. сек.)	54° 43′ 00,9793″	54° 43′ 00,9824″	54° 42′ 58,7692″	54° 42′ 59,0380″
W_1	0,997 767 080 2	0,997 767 069 5	0,997 767 429 5	0,997 767 425 3
N_1 (м)	6 392 409,739	6 392 410,308	6 392 516,745	6 392 516,771
T_1 (м)	5 218 505,752	5 218 505,924	5 218 582,598	5 218 583,849
B_2 (рад)	0,954 990 537 1	0,954 990 552 3	0,954 979 804 5	0,954 981 110 1
B_2 (гр. мин. сек.)	54° 43′ 00,9381″	54° 43′ 00,9412″	54° 42′ 58,7243″	54° 42′ 58,9937″
$IB_2–B_1I$ (сек.)	0,041 2″	0,041 2”	0,044 8″	0,044 4″
W_2	0,997 767 080 8	0,997 767 070 1	0,997 767 430 2	0,997 767 426 0
N_2 (м)	6 392 409,734	6 392 410,304	6 392 516,74	6 392 516,767
T_2 (м)	5 218 505,747	5 218 505,919	5 218 582,593	5 218 583,844
B_3 (рад)	0,954 990 536 7	0,954 990 551 8	0,954 979 804 0	0,954 981 109 7
B_3 (гр. мин. сек.)	54° 43′ 00,9380″	54° 43′ 00,9411″	54° 42′ 58,7242″	54° 42′ 58,9936″
$IB_3–B_2I$ (сек.)	0,000 1″	0,000 1″	0,000 1″	0,000 1″
$H^{г}$ (м)	402,775	402,346	438,458	434,057

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ (СПОСОБ БОУРИНГА)

Параметры эллипсоидов	*ПЗ-90*	*ГСК-2011*	*Красовского*
a (м)	6 378 136	6 378 136,5	6 378 245
e^2	0,006 694 366 19	0,006 694 398 11	0,006 693 421 62

Система координат	ПЗ-90.11	ГСК-2011	СК-42	СК-95
X (м)	319 112,513	319 112,512	319 094,487	319 090,611
Y (м)	3 678 779,247	3 678 779,249	3 678 919,759	3 678 910,720
Z (м)	5 183 573,360	5 183 573,361	5 183 654,815	5 183 656,033
L (рад)	1,484 268 787 7	1,484 268 788 1	1,484 276 939 3	1,484 277 773 3
L (гр. мин. сек.)	85° 02′ 32,4139″	85° 02′ 32,4140″	85° 02′ 34,0953″	85° 02′ 34,2673″
Q (м)	3 692 593,877	3 692 593,880	3 692 732,306	3 692 722,966
U (рад)	0,953 406 307 6	0,953 406 315 0	0,953 395 805 2	0,953 397 110 1
B (рад)	0,954 990 536 6	0,954 990 551 8	0,954 979 804 0	0,954 981 109 7
B (гр. мин. сек.)	54° 43′ 00,9380″	54° 43′ 00,9411″	54° 42′ 58,7242″	54° 42′ 58,9936″
W	0,997 767 080 8	0,997 767 070 1	0,997 767 430 2	0,997 767 426 0
N (м)	6 392 409,734	6 392 410,304	6 392 516,740	6 392 516,767
$H^{г}$ (м)	402,775	402,346	438,458	434,057

Приложение 8

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ (СПОСОБ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОПРАВОК)

Параметры эллипсоидов	*ПЗ-90*	*ГСК-2011*	*Красовского*
a (м)	6 378 136	6 378 136,5	6 378 245
e^2	0,006 694 366 19	0,006 694 398 11	0,006 693 421 62

Система координат	ПЗ-90.11	ГСК-2011	СК-42	СК-95
X (м)	319 112,513	319 112,512	319 094,487	319 090,611
Y (м)	3 678 779,247	3 678 779,249	3 678 919,759	3 678 910,720
Z (м)	5 183 573,360	5 183 573,361	5 183 654,815	5 183 656,033
L (рад)	1,484 268 787 7	1,484 268 788 1	1,484 276 939 3	1,484 277 773 3
L (гр. мин. сек.)	85° 02′ 32,4139″	85° 02′ 32,4140″	85° 02′ 34,0953″	85° 02′ 34,2673″
Q (м)	3 692 593,877	3 692 593,880	3 692 732,306	3 692 722,966
F	1,403 775 647	1,403 775 647	1,403 745 082	1,403 748 963
B_0 (рад)	0,954 990 736 9	0,954 990 751 8	0,954 980 021 9	0,954 981 325 4
B_0 (гр. мин. сек.)	54° 43′ 00,9793″	54° 43′ 00,9824″	54° 42′ 58,7692″	54° 42′ 59,0380″
$\sin B_0$	0,816 308 389 9	0,816 308 398 6	0,816 302 200 8	0,816 302 953 7
$\cos B_0$	0,577 616 319 5	0,577 616 307 2	0,577 625 066 1	0,577 624 002 1
W_0	0,997 767 080 2	0,997 767 069 5	0,997 767 429 5	0,997 767 425 3
N_0 (м)	6 392 409,739	6 392 410,308	6 392 516,745	6 392 516,771
H_0 (м)	402,775	402,346	438,458	434,057
G_0 (м)	6 350 019,382	6 350 019,315	6 350 167,392	6 350 163,018
ΔB (сек)	–0,041 3″	–0,041 3″	–0,044 9″	–0,044 5″
B (гр. мин. сек.)	54° 43′ 00,9380″	54° 43′ 00,9411″	54° 42′ 58,7242″	54° 42′ 58,9936″
$H^{\text{г}}$ (м) = H_0 (м)	402,775	402,346	438,458	434,057

Приложение 9

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ

Параметры эллипсоидов	*ПЗ-90*	*ГСК-2011*	Красовского
a (м)	6 378 136	6 378 136,5	6 378 245
e^2	0,006 694 366 19	0,006 694 398 11	0,006 693 421 62

Система координат	ПЗ-90.11	ГСК-2011	СК-42	СК-95
B (гр. мин. сек.)	54° 43′ 00,9380″	54° 43′ 00,9411″	54° 42′ 58,7242″	54° 42′ 58,9936″
L (гр. мин. сек.)	85° 02′ 32,4139″	85° 02′ 32,4140″	85° 02′ 34,0953″	85° 02′ 34,2673″
$H^{\text{г}}$ (м)	402,775	402,346	438,458	434,057
$\sin B$	0,816 308 274 3	0,816 308 282 9	0,816 302 074 8	0,816 302 829 2
$\cos B$	0,577 616 482 9	0,577 616 470 7	0,577 625 244 2	0,577 624 178 0
$\sin L$	0,996 258 827 5	0,996 258 827 6	0,996 259 532 0	0,996 259 604 0
$\cos L$	0,086 419 607 4	0,086 419 606 9	0,086 411 486 2	0,086 410 655 5
W	0,997 767 080 8	0,997 767 070 1	0,997 767 430 2	0,997 767 426 0
N (м)	6 392 409,734	6 392 410,304	6 392 516,740	6 392 516,767
X (м)	319 112,513	319 112,512	319 094,487	319 090,612
Y (м)	3 678 779,247	3 678 779,250	3 678 919,760	3 678 910,719
Z (м)	5 183 573,360	5 183 573,360	5 183 654,814	5 183 656,034

Приложение 10

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ В СИСТЕМЕ ГСК-2011 ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ В СИСТЕМЕ ПЗ-90.11

Элементы взаимного ориентирования систем координат ГСК-2011 и ПЗ-90.11

x = 0
y = –0,014
z = 0,008
ω_X = 0,000 56
ω_Y = 0,000 02
ω_Z = –0,000 05
Δm = 0,000 000 000 6

Параметры эллипсоидов	*ПЗ-90*	*ГСК-2011*	*Средние значения*
a (м)	6 378 136	6 378 136,5	6 378 136,3
e^2	0,006 694 366 19	0,006 694 398 11	0,006 694 382 15

Разности параметров эллипсоидов (ПЗ-90 – Красовского)

Δa (м)	0,5
Δe^2	0,000 000 031 92

Элементы формул	Вычисление широты B	Вычисление долготы L	Вычисление высоты H
Координаты в ПЗ-90.11 (B, L, H)	54° 43′ 00,9380″	85° 02′ 32,4139″	402,775 (м)
sin (B, L)	0,816 308	0,996 259	
cos (B, L)	0,577 616	0,086 420	
W	0,997 767		
M (N)	6 378 123 (м)	6 392 463 (м)	
$\rho/(M + H)$, $(\rho/((N + H) \cos B))$	0,032 337 4	0,055 858 6	
$N \sin B \cos B$	3 014 130 (м)		
Σ_1	–0,014 (м)		
Σ_2	0,098 (м)		
Σ_3	0,016 (м)		
ΔB_1	0,003 7″		
ΔB_2	–0,000 6″		
ΔB_3	0,000 0″		
ΔL_1		–0,000 1″	
ΔL_2		0,000 2″	
ΔH_1			–0,431 (м)
ΔH_2			–0,002 (м)
ΔH_3			0,000 (м)
ΔH_4			0,004 (м)
Разности координат (ΔB, ΔL, ΔH)	0,003 1″	0,000 1″	–0,429 (м)
Координаты в ГСК-2011 (B, L, H)	54° 43′ 00,9411″	85° 02′ 32,4140″	402,346 (м)

Приложение 11

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ В СИСТЕМЕ СК-42 ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ В СИСТЕМЕ ПЗ-90.11

Элементы взаимного ориентирования систем координат СК-42 и ПЗ-90.11

$x =$ –23,557
$y =$ 140,844
$z =$ 79,778
$\omega_X =$ 0,002 3
$\omega_Y =$ 0,346 46
$\omega_Z =$ 0,794 21
$\Delta m =$ 0,000 000 228

Параметры эллипсоидов	*ПЗ-90*	*Красовского*	*Средние значения*
a (м)	6 378 136	6 378 245	6 378 190,5
e^2	0,006 694 366 19	0,006 693 421 62	0,006 693 893 91

Разности параметров эллипсоидов (ПЗ-90 – Красовского)

Δa (м)	109
Δe^2	–0,000 000 944 57

Элементы формул	Вычисление широты B	Вычисление долготы L	Вычисление высоты H
Координаты в ПЗ-90.11 (B, L, H)	54° 43′ 00,9380″	85° 02′ 32,4139″	402,775 (м)
sin (B, L)	0,816 308	0,996 259	
cos (B, L)	0,577 616	0,086 420	
W	0,997 767		
M (N)	6 378 123 (м)	6 392 463 (м)	
$\rho/(M + H)$, $(\rho/((N + H) \cos B))$	0,032 337 4	0,055 858 6	
$N \sin B \cos B$	3 014 130 (м)		
Σ_1	138,281 (м)		
Σ_2	–2,509 (м)		
Σ_3	–66,799 (м)		
ΔB_1	–2,241 2″		
ΔB_2	0,027 6″		
ΔB_3	–0,000 1″		
ΔL_1		1,990 8″	
ΔL_2		–0,309 4″	
ΔH_1			–110,768 (м)
ΔH_2			144,997 (м)
ΔH_3			0,003 (м)
ΔH_4			1,451 (м)
Разности координат (ΔB, ΔL, ΔH)	–2,213 8″	1,681 4″	35,682 (м)
Координаты в СК-42 (B, L, H)	54° 42′ 58,7242″	85° 02′ 34,0953″	438,457 (м)

Приложение 12

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ В СИСТЕМЕ СК-95 ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ В СИСТЕМЕ ПЗ-90.11

Элементы взаимного ориентирования систем координат СК-95 и ПЗ-90.11

$x =$ –24,457
$y =$ 130,784
$z =$ 81,538
$\omega_X =$ 0,002 3
$\omega_Y =$ –0,003 54
$\omega_Z =$ 0,134 21
$\Delta m =$ 0,000 000 228

Параметры эллипсоидов	*ПЗ-90*	*Красовского*	*Средние значения*
a (м)	6 378 136	6 378 245	6 378 190,5
e^2	0,006 694 366 19	0,006 693 421 62	0,006 693 893 91

Разности параметров эллипсоидов (ПЗ-90 – Красовского)

Δa (м) 109
Δe^2 –0,000 000 944 57

Элементы формул	Вычисление широты B	Вычисление долготы L	Вычисление высоты H
Координаты в ПЗ-90.11 (B, L, H)	54° 43′ 00,9380″	85° 02′ 32,4139″	402,775 (м)
sin (B, L)	0,816 308	0,996 259	
cos (B, L)	0,577 616	0,086 420	
W	0,997 767		
M (N)	6 378 123 (м)	6 392 463 (м)	
$\rho/(M + H)$, $(\rho/((N + H) \cos B))$	0,032 337 4	0,055 858 6	
$N \sin B \cos B$	3 014 130 (м)		
Σ_1	128,181 (м)		
Σ_2	–2,509 (м)		
Σ_3	–57,538 (м)		
ΔB_1	–1,941 7″		
ΔB_2	–0,002 6″		
ΔB_3	–0,000 1″		
ΔL_1		1,992 4″	
ΔL_2		–0,138 9″	
ΔH_1			–110,768 (м)
ΔH_2			140,600 (м)
ΔH_3			0,000 (м)
ΔH_4			1,451 (м)
Разности координат (ΔB, ΔL, ΔH)	–1,944 5″	1,853 5″	31,282 (м)
Координаты в СК-95 (B, L, H)	54° 42′ 58,9935″	85° 02′ 34,2674″	434,057 (м)

Приложение 13

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ГАУССА – КРЮГЕРА ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ КООРДИНАТАМ

Параметры эллипсоидов	*ПЗ-90*	*ГСК-2011*	*Красовского*
a (м)	6 378 136	6 378 136,5	6 378 245
e^2	0,006 694 366 19	0,006 694 398 11	0,006 693 421 62

Система координат	ПЗ-90.11	ГСК-2011	СК-42	СК-95
B (гр. мин. сек.)	54° 43′ 00,9380″	54° 43′ 00,9411″	54° 42′ 58,7242″	54° 42′ 58,9936″
L (гр. мин. сек.)	85° 02′ 32,4139″	85° 02′ 32,4140″	85° 02′ 34,0953″	85° 02′ 34,2673″
n	15	15	15	15
L_0	87°	87°	87°	87°
l (гр. мин. сек.)	–1° 57′ 27,5861″	–1° 57′ 27,5860″	–1° 57′ 25,9047″	–1° 57′ 25,7327″
l (рад)	–0,034 167 661 5	–0,034 167 661 2	–0,034 159 510 0	–0,034 158 675 9
$\sin B$	0,816 308 274 3	0,816 308 283 1	0,816 302 074 9	0,816 302 829 1
$\cos B$	0,577 616 482 9	0,577 616 470 5	0,577 625 244 0	0,577 624 178 2
$\mathrm{tg}\, B$	1,413 235 768 8	1,413 235 814 3	1,413 203 601 1	1,413 207 514 3
η^2	0,002 248 566 4	0,002 248 577 1	0,002 248 315 2	0,002 248 306 9
W	0,997 767 080 8	0,997 767 070 1	0,997 767 430 2	0,997 767 426 0
N (м)	6 392 409,734	6 392 410,304	6 392 516,740	6 392 516,767
G_0	1,005 052 491 3	1,005 052 515 5	1,005 051 773 9	1,005 051 773 9
G_1	–0,002 531 549 0	–0,002 531 561 2	–0,002 531 188 8	–0,002 531 188 8
G_2	0,000 002 656 9	0,000 002 656 9	0,000 002 656 1	0,000 002 656 1
G_3	–0,000 000 003 5	–0,000 000 003 5	–0,000 000 003 5	–0,000 000 003 5
$L \cos B$	–0,019 735 804 5	–0,019 735 803 8	–0,019 731 395 3	–0,019 730 877 1
X (м)	6 065 717,493	6 065 717,944	6 065 756,282	6 065 764,609
Δx (м)	1 759,550	1 759,550	1 758,753	1 758,665
y (м)	–126 151,196	–126 151,203	–126 125,127	–126 121,816
x' (м)	6 067 477,042	6 067 477,493	6 067 515,034	6 067 523,274
y' (м)	15 373 848,804	15 373 848,797	15 373 874,873	15 373 878,184

Приложение 14

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ПО ПЛОСКИМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ ГАУССА – КРЮГЕРА

Параметры эллипсоида	*Красовского*	*ГСК-2011*
a (м)	6 378 245	6 378 136,5
e^2	0,006 693 421 62	0,006 694 398 11

Система координат	СК-95	ГСК-2011
x' (м)	6 067 523,274	6 067 477,493
y' (м)	15 373 878,184	15 373 848,797
n	15	15
y (м)	–126 121,816	–126 151,203
G_0	1,005 051 773 9	1,005 052 515 5
Q_1	0,002 518 464 8	0,002 518 833 4
Q_2	0,000 003 699 9	0,000 003 701 0
Q_3	0,000 000 007 7	0,000 000 007 7
β (рад)	0,952 880 649 2	0,952 889 902 7
B_x (рад)	0,955 256 840 8	0,955 266 426 3
$\sin B_x$	0,816 462 067 0	0,816 467 601 6
$\cos B_x$	0,577 399 076 1	0,577 391 249 9
$\mathrm{tg}\, B_x$	1,414 034 245 6	1,414 062 997 6
η^2	0,002 246 554 9	0,002 246 824 0
W_x	0,997 766 553 9	0,997 766 197 4
N_x (м)	6 392 522,354	6 392 415,895
L_0 (рад)	1,518 436 449 2	1,518 436 449 2
l (рад)	–0,034 158 675 9	–0,034 167 661 2
B (рад)	0,954 981 109 5	0,954 990 551 7
L (рад)	1,484 277 773 3	1,484 268 788 1
B (гр. мин. сек.)	54° 42′ 58,9935″	54° 43′ 00,9411″
L (гр. мин. сек.)	85° 02′ 34,2673″	85° 02′ 32,4140″

Приложение 15

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ГАУССА – КРЮГЕРА В СКМ-1 И СКМ-2 ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ КООРДИНАТАМ

Параметры эллипсоида	*Красовского*	*ГСК-2011*
a (м)	6 378 245	6 378 136,5
e^2	0,006 693 422	0,006 694 398

Система координат	СКМ-1/СК-95	СКМ-2/ГСК-2011
B (гр. мин. сек.)	54° 42′ 58,9936″	54° 43′ 00,9411″
B (рад)	0,954 981 109 7	0,954 990 551 8
L (гр. мин. сек.)	85° 02′ 34,2673″	85° 02′ 32,4140″
L (рад)	1,484 277 773 3	1,484 268 788 1
$L_0^{\text{м}}$ (гр.)	85°	85°
$L_0^{\text{м}}$ (рад)	1,483 529 864 2	1,483 529 864 2
l (рад)	0,000 747 909 1	0,000 738 923 9
$\sin B$	0,816 302 829 1	0,816 308 283 1
$\cos B$	0,577 624 178 2	0,577 616 470 5
$\operatorname{tg} B$	1,413 207 514 3	1,413 235 814 3
η^2	0,002 248 306 9	0,002 248 577 1
W	0,997 767 426 0	0,997 767 070 1
N (м)	6 392 516,767	6 392 410,304
G_0	1,005 051 773 9	1,005 052 515 5
G_1	–0,002 531 188 8	–0,002 531 561 2
G_2	0,000 002 656 1	0,000 002 656 9
G_3	–0,000 000 003 5	–0,000 000 003 5
$l \cos B$	0,000 432 010 4	0,000 426 814 6
X (м)	6 065 764,609	6 065 717,944
Δx (м)	0,843	0,823
$x_{\text{м}}$ (м)	6 065 765,452	6 065 718,767
$y_{\text{м}}$ (м)	2 761,634	2 728,374

Приложение 16

ВЫЧИСЛЕНИЕ СБЛИЖЕНИЯ МЕРИДИАНОВ И МАСШТАБА ИЗОБРАЖЕНИЯ В ГСК-2011 И СКМ-2

Параметры эллипсоида	*ГСК-2011*
a (м)	6 378 136,5
e^2	0,006 694 398 11

Система координат	ГСК-2011	СКМ-2
B (гр. мин. сек.)	54° 43′ 00,9411″	54° 43′ 00,9411″
B (рад)	0,954 990 551 8	0,954 990 551 8
L (гр. мин. сек.)	85° 02′ 32,4140″	85° 02′ 32,4140″
L (рад)	1,484 268 788 1	1,484 268 788 1
n	15	
L_0 (гр)	87°	85°
L_0 (рад)	1,518 436 449 2	1,483 529 864 2
l (рад)	–0,034 167 661 1	0,000 738 923 9
sin B	0,816 308 283 1	0,816 308 283 1
cos B	0,577 616 470 5	0,577 616 470 5
tg B	1,413 235 814 3	1,413 235 814 3
η^2	0,002 248 577 1	0,002 248 577 1
W	0,997 767 070 1	0,997 767 070 1
N (м)	6 392 410,304	6 392 410,304
γ (рад)	–0,027 894 990 5	0,000 603 189 7
γ (гр. мин. сек.)	–1° 35′ 53,755″	2′ 04,417″
x (м)	6 067 477,493	6 065 718,767
y (м)	–126 151,203	2 728,374
R (м)	6 385 235,488	6 385 235,488
m	1,000 195 17	1,000 000 09

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ КООРДИНАТ ПУНКТА В ГСК-2011 И СКМ-2

Система координат	ГСК-2011	СКМ-2
A_{12} (гр. мин. сек.)	152° 54′ 00″	152° 54′ 00″
A_{12} (рад)	2,668 61	2,668 61
γ_1 (гр .мин. сек.)	–1° 35′ 54″	2′ 04″
γ_1 (рад)	–0,027 90	0,000 60
α_{12} (рад)	2,696 50	2,668 01
x_2 (м)	6 054 481	6 052 906
x_1 (м)	6 067 477	6 065 719
Δx_{12} (м)	–12 997	–12 812
$\cos \alpha_{12}$	–0,902 57	–0,889 94
s_{12} (эллипсоид)	14 397	14 397
m	1,000 20	1,000 00
S_{12} (плоскость)	14 400	14 397
$\sin \alpha_{12}$	0,430 54	0,456 08
Δy_{12} (м)	6 200	6 566
y_1 (м)	–126 151	2 728
y_2 (м)	–119 952	9 295

Приложение 18

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПРАВОК В НАПРАВЛЕНИЕ И РАССТОЯНИЕ ЗА ПЕРЕХОД НА ПЛОСКОСТЬ В ПРОЕКЦИИ ГАУССА – КРЮГЕРА В ГСК-2011 И СКМ-2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА И РАССТОЯНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Система координат	ГСК-2011	СКМ-2
x_1 (км)	6 067,477	6 065,718
x_2 (км)	6 054,480	6 052,906
Δx_{12} (км)	–12,997	–12,812
y_1 (км)	–126,151	2,728
y_2 (км)	–119,951	9,294
Δy_{12} (км)	6,200	6,566
$y_{ср}$ (км)	–123,051	6,011
R (км)	6 385,235	6 385,235
f	0,002 529 5	0,002 529 5
δ_{12} (сек.)	–4,079″	0,159″
A_{12} (рад)	2,668 610 807	2,668 610 807
γ_1 (рад)	–0,027 894 991	0,000 603 190
δ_{12} (рад)	–0,000 019 778	0,000 000 773
α_{12} (рад)	2,696 486 020	2,668 008 390
α_{12} (гр. мин. сек.)	154° 29′ 50,166″	152° 51′ 56,234″
s_{12} (м)	14 396,588	14 396,588
ΔS_{12} (м)	2,674	0,007
S_{12} (м)	14 399,262	14 396,595

Приложение 19

КАТАЛОГ КООРДИНАТ ПУНКТА В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ

Система координат	X (м) Y (м) Z (м)	B L $H^{Г}$ (м)	x (м) y (м) –
ПЗ-90.11	319 112,513	54° 43′ 00,9380″	6 067 477,042
	3 678 779,247	85° 02′ 32,4139″	15 373 848,804
	5 183 573,360	402,775	–
ГСК-2011	319 112,512	54° 43′ 00,9411″	6 067 477,493
	3 678 779,249	85° 02′ 32,4140″	15 373 848,797
	5 183 573,361	402,346	–
СК-42	319 094,487	54° 42′ 58,7242″	6 067 515,034
	3 678 919,759	85° 02′ 34,0953″	15 373 874,873
	5 183 654,815	438,458	–
СК-95	319 090,611	54° 42′ 58,9936″	6 067 523,274
	3 678 910,720	85° 02′ 34,2673″	15 373 878,184
	5 183 656,033	434,057	–
СКМ-1/СК-95	–	–	6 065 765,452
	–	–	2 761,634
	–	–	–
СКМ-2/ГСК-2011	–	–	6 065 718,767
	–	–	2 728,374
	–	–	–

Учебное издание

Афонин Константин Федорович

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ.
СИСТЕМЫ КООРДИНАТ
И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЖДУ НИМИ

Редактирование и компьютерная верстка
Е. М. Федяевой

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.
Подписано в печать 21.05.2020. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 6,51. Тираж 90 экз. Заказ 57.
Гигиеническое заключение
№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.