

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

Н. Н. Кобелева, А. В. Елагин

СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве практикума для обучающихся по направлению подготовки
21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2020

УДК 528.2
К552

Рецензенты: кандидат технических наук, консультант ООО «Гео плюс»
С. В. Кужелев
кандидат технических наук, доцент СГУГиТ *К. Ф. Афонин*

Кобелева, Н. Н.

К552 Сфероидическая геодезия [Текст] : практикум / Н. Н. Кобелева,
А. В. Елагин. – Новосибирск : СГУГиТ, 2020. – 64 с.
ISBN 978-5-907320-505

Практикум подготовлен кандидатом технических наук, доцентом Н. Н. Кобелевой и кандидатом технических наук, доцентом А. В. Елагиным на кафедре космической и физической геодезии СГУГиТ.

В практикуме описана последовательность выполнения практических работ по дисциплине «Сфероидическая геодезия». Рассмотрено содержание работ, даны методические рекомендации по их выполнению, сопровождающиеся краткими теоретическими сведениями, приведены требования к выполнению, оформлению и защите работ.

Практикум по дисциплине «Сфероидическая геодезия» предназначен для обучающихся по направлению подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата).

Рекомендован к изданию кафедрой космической и физической геодезии, Ученым советом Института геодезии и менеджмента СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 528.2

ISBN 978-5-907320-505

© СГУГиТ, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Общие требования к выполнению практических работ	6
Практическая работа № 1. Вычисление координат точек земного эллипсоида, радиусов кривизны, длин дуг меридианов, параллелей, площадей и размеров сфероидических трапеций	8
Практическая работа № 2. Решение сфероидических треугольников	22
Практическая работа № 3. Решение прямой и обратной геодезических задач на поверхности эллипсоида	29
Практическая работа № 4. Редуцирование элементов геодезической сети с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера и вычисление плоских прямоугольных координат	37
Заключение	51
Библиографический список	52
Приложение 1. Пример оформления титульного листа	53
Приложение 2. Задания к практическим работам	54
Приложение 3. Исходные данные для выполнения практических работ	60

ВВЕДЕНИЕ

Поверхность Земли имеет сложную неправильную форму, что не дает возможности выполнять математическую обработку геодезических измерений непосредственно на ней или проектировать ее на плоскость по строгим математическим законам при создании карт. Поэтому для решения задач, связанных с топографо-геодезическим изучением больших участков земной поверхности, геодезисты и картографы используют некоторую поверхность, близкую по форме к поверхности реальной Земли, но достаточно простую по математическому описанию.

В качестве такой поверхности («поверхности относимости») обычно используют эллипсоид вращения. Результаты геодезических измерений, выполняемых на земной поверхности, проектируются на поверхность эллипсоида с учетом отступлений реальной поверхности Земли от эллипсоида и особенностей структуры гравитационного поля.

Основной целью сфероидической геодезии является изучение геометрии земного эллипсоида, поверхность которого принимается при изучении фигуры Земли за поверхность относимости, а также методов решения различных геодезических задач на этой поверхности [2, 6]. Кроме того, в практической геодезии очень широкое распространение получила система плоских прямоугольных координат, поэтому в сфероидической геодезии рассматриваются вопросы отображения поверхности эллипсоида на плоскость с целью установления системы плоских прямоугольных координат, а также редуцирования измеренных элементов геодезических сетей с эллипсоида на плоскость.

Овладение обучающимися теоретическими основами этой части курса геодезии и закрепление их самостоятельным практическим решением определенных задач дадут возможность будущему специалисту правильно и научно обоснованно ставить и решать различные геодезические задачи, возникающие на производстве.

Дисциплина изучается на 4-м курсе в 7-м семестре. Для ее освоения необходимы знания, умения и навыки, приобретенные при изучении дисци-

плин «Высшая геодезия», «Системы координат», «Спутниковые системы и технологии позиционирования». Также необходимы навыки, полученные при прохождении летних учебной и производственной практик.

Темы практических работ отражены в табл. В.1.

Таблица В.1

Номер практической работы	Темы практических занятий	Трудоемкость, часы ауд.
1	Вычисление координат точек земного эллипсоида, радиусов кривизны, длин дуг меридианов, параллелей, площадей и размеров сфероидических трапеций	6
2	Решение сфероидических треугольников	6
3	Решение прямой и обратной геодезических задач на поверхности эллипсоида	6
4	Редуцирование элементов геодезической сети с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера и вычисление плоских прямоугольных координат	12
	Всего	30

Структура описания каждой практической работы: название, краткие теоретические сведения, цель и задачи работы, исходные данные, порядок выполнения работы, ответы на контрольные вопросы.

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

В соответствии с учебным планом подготовки бакалавров по направлению 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» профиля «Геодезия» предусмотрено выполнение обучающимися 4-го курса практических работ по дисциплине «Сфероидическая геодезия».

Целью работ является углубление и закрепление теоретических знаний, полученных обучающимися на лекциях и в процессе самостоятельного изучения учебного материала, а следовательно, формирование у них определенных умений и навыков.

В ходе практических занятий преподавателем даются подробные рекомендации по выполнению практических работ, обучающимся рекомендуется внимательно их слушать и фиксировать основные положения в тетради, задавать уточняющие вопросы. Затем обучающиеся приступают к выполнению заданий, для некоторых работ требуется привлечение компьютерной техники. Работы выполняются по вариантам. Контроль со стороны преподавателя осуществляется на протяжении всего периода выполнения работы.

Поскольку работы рассчитаны на несколько занятий, преподаватель разбивает работу на части и в начале каждого занятия поясняет, какая часть работы должна быть выполнена к концу занятия. Для своевременного обнаружения вопросов и ошибок, а также их устранения обучающимся рекомендуется показывать выполненную часть работы после каждого занятия.

Результаты, полученные в практической работе, должны быть проанализированы, оформлены выводы, что позволяет выявить способность обучающегося к анализу и интерпретации результатов собственной деятельности.

По каждому заданию должен быть представлен оформленный отчет, содержащий:

- титульный лист (пример оформления дан в прил. 1);
- задания к практическим работам (приведены в прил. 2);

- исходные данные в соответствии с номером варианта (для выполнения всех практических работ представлены в прил. 3);
- описание разделов работы с рабочими формулами, реализованным алгоритмом, полученными результатами и пояснениями;
- выводы по работе или заключение;
- ответы на контрольные вопросы.

При необходимости обучающийся может дополнить работу приложениями.

Работа оформляется на листах формата А4 в редакторе Microsoft Word, вычислительной программе MathCAD или Microsoft Excel. Обязательное требование к оформлению работы: исходные данные и результаты вычислений должны быть представлены с необходимым и обоснованным количеством значащих цифр, с указанием размерностей величин.

Выполненную практическую работу обучающийся сдает на проверку преподавателю и после исправления замечаний защищает ее. Защита практической работы заключается в собеседовании по контрольным вопросам. После оценки преподавателем практическая работа выкладывается в личный кабинет обучающегося в Электронно-информационной образовательной среде (ЭИОС) СГУГиТ.

Практическая работа № 1
ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ ТОЧЕК ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА,
РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ, ДЛИН ДУГ МЕРИДИАНОВ,
ПАРАЛЛЕЛЕЙ, ПЛОЩАДЕЙ И РАЗМЕРОВ
СФЕРОИДИЧЕСКИХ ТРАПЕЦИЙ

Цель работы: изучить геометрию земного эллипсоида, системы координат, применяемые в высшей геодезии, научиться определять площадь и размеры рамок сфероидических трапеций

Бюджет времени: 6 часов аудиторной работы.

Краткие теоретические сведения

Земным эллипсоидом называют эллипсоид вращения, форма и размеры которого с той или иной степенью *точности* соответствуют форме и размерам Земли [4–6, 8].

Величины, определяющие размеры и форму эллипсоида, называют *параметрами эллипсоида*. Обычно в качестве параметров эллипсоида используют (см. рис. 1.1):

– большую полуось a , определяющую его размеры в линейных единицах;

– сжатие $\alpha = (a - b) / a$, где через b обозначена малая полуось (ось вращения). В вычислениях вместо сжатия чаще используют квадрат *первого эксцентриситета*

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (1.1)$$

или квадрат *второго эксцентриситета*

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}. \quad (1.2)$$

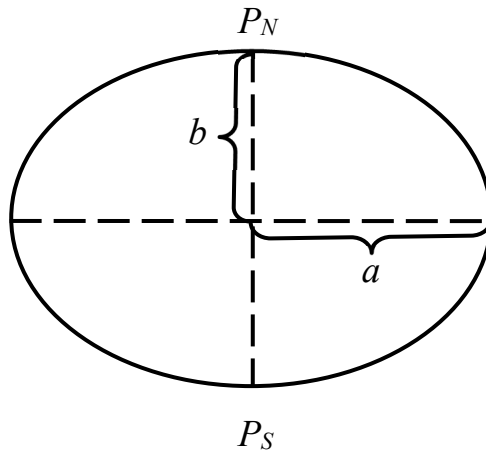


Рис. 1.1. Параметры земного эллипсоида

Связь между сжатием, и эксцентриситетами выражается следующими формулами:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2; \quad (1.3)$$

$$e'^2 = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2}. \quad (1.4)$$

Таким образом, для задания размеров и формы эллипсоида достаточно назначить два параметра, один из которых должен быть линейной величиной [6, 8]. Обычно используют пары: большая полуось и сжатие; большая полуось и эксцентриситет (первый или второй).

Кроме того, многие теоретические выкладки упрощаются, если ввести полярный радиус кривизны c :

$$c = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (1.5)$$

В России для обработки результатов геодезических измерений, в качестве отсчетной (координатной) поверхности принят референц-эллипсоид Красовского с параметрами: $a = 6\,378\,245$ м, $\alpha = 1 : 298,3$.

Положение точек на поверхности земного эллипсоида, на поверхности Земли и в пространстве может быть определено с помощью различных систем координат. Однако в геодезии наибольшее распространение получили следующие системы:

- система прямоугольных координат x, y , отнесенных к плоскости меридиана данной точки (координаты меридианного эллипса);
- система прямоугольных пространственных координат X, Y, Z ;
- система геодезических пространственных координат B, L, H ;
- система геоцентрических широт и геодезических долгот Φ, L ;
- система приведенных широт и геодезической долгот U, L ;
- полярная система координат A, S, Z ;
- система плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера x, y .

Характеристики перечисленным системам координат с приведением необходимых чертежей представлены в [1–4, 8, 9].

Плоскости, проходящие через нормаль к поверхности, называют *нормальными плоскостями*, а сечения поверхности этими плоскостями – *нормальными сечениями*.

В любой точке поверхности через нормаль можно провести множество нормальных плоскостей и получить соответствующее множество нормальных сечений. Из этого множества принято выделять 2 сечения, которые называются *главными нормальными сечениями*. Они отличаются тем, что кривизна поверхности в направлении этих сечений принимает экстремальные значения.

Для поверхности эллипсоида (рис. 1.2) главными нормальными сечениями являются:

- *сечение меридиана*, образованное нормальной плоскостью, проходящей через данную точку и ось вращения эллипсоида (на рис. 1.2 сечение NTS по меридиану точки T);
- *сечение первого вертикала*, образованное плоскостью, перпендикулярной плоскости меридиана (на рис. 1.2 сечение WTE).

В общем случае для указания любого нормального сечения необходимо задать его направление. Направления на поверхности эллипсоида задаются геодезическими азимутами.

Геодезическим азимутом называют двугранный угол между северной полуплоскостью меридиана и нормальной плоскостью, определяющей некоторое направление. В частности, азимут нормального сечения определяет направление нормальной плоскости, образующей это сечение. Азимут отсчитывают от северной полуплоскости меридиана по часовой стрелке в пределах от 0° до 360° . Например, на рис. 1.2 азимутом A сечения TK является угол NTK .

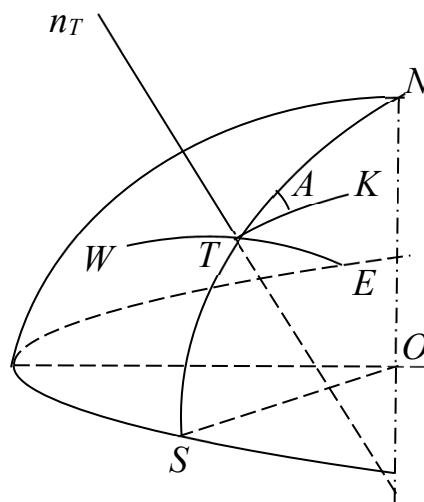


Рис. 1.2. Нормальные сечения

В качестве величин, характеризующих кривизну поверхности эллипсоида в различных точках и направлениях, используют *радиусы кривизны нормальных сечений*.

Радиус кривизны R_A любого нормального сечения, заданного азимутом A , может быть вычислен по формуле Эйлера

$$R_A = \frac{M \cdot N}{M \sin^2 A + N \cos^2 A}, \quad (1.6)$$

где M – радиус кривизны меридиана ($A = 0^\circ$ и $A = 180^\circ$),

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W^3}; \quad (1.7)$$

N – радиус кривизны первого вертикала ($A = 90^\circ$ и $A = 270^\circ$),

$$N = \frac{a}{W}. \quad (1.8)$$

Входящая в формулы (1.7) и (1.8) величина W – первая сфероидическая функция, определяется выражением

$$W = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 B}. \quad (1.9)$$

Из формул (1.7)–(1.9) следует, что радиусы кривизны главных нормальных сечений M и N зависят только от широты B . В общем же случае, согласно формуле (1.6), радиус кривизны нормального сечения R_A в данной точке поверхности эллипсоида зависит как от широты B этой точки, так и от направления сечения, заданного азимутом A .

Исключение составляют точки полюсов, где нормальные сечения по любому направлению являются меридианами. Подставив в формулу (1.9) значение $B = \pm 90^\circ$ и используя формулы (1.7), (1.8), можно получить

$$M = N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = c. \quad (1.10)$$

Подставив величину c в формулу (1.6), можно убедиться, что в точках полюса $R_A = c = \text{const}$, т. е. кривизна эллипсоида на полюсах не зависит от направления.

Иногда возникает необходимость характеризовать кривизну поверхности в данной точке одной величиной вне зависимости от направления. В качестве такой величины используют *средний радиус кривизны*, который вычисляется как среднее геометрическое радиусов кривизны главных нормальных сечений:

$$R = \sqrt{M \cdot N}. \quad (1.11)$$

Средний радиус кривизны R является функцией широты B . Минимальное значение он имеет на экваторе, а на полюсе приобретает максимальное значение $R = c$.

При решении некоторых специальных задач в геодезии требуется знать площади и размеры рамок сфероидических трапеций. Например, при постро-

ении съемочной трапеции нужны размеры сторон рамок трапеции, а при определении объемов съемочных работ необходимо знать площади трапеций того или иного масштаба. Учитывая, что съемочные трапеции до масштаба 1 : 2 000 включительно ограничены меридианами и параллелями, то задача сводится к вычислению размеров сторон и площадей сфероидических трапеций.

Сфероидическая трапеция – это геометрическая фигура поверхности эллипсоида, ограниченная меридианами и параллелями. Размеры рамок можно вычислять на основании формул длин дуг меридианов и параллелей, только с учетом масштаба съемочной трапеции m (в формулах это знаменатель масштаба) (рис. 1.3).

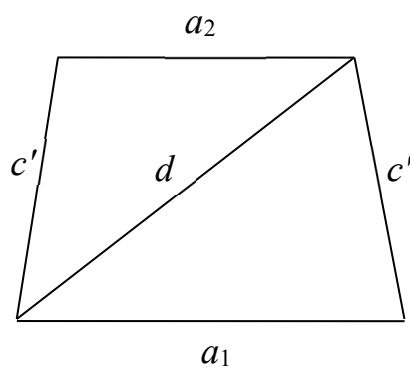


Рис. 1.3. Обозначения рамок трапеции

Нормальные сечения играют важную роль в геодезии, так как измерения, выполненные на земной поверхности, после их редуцирования на эллипсоид представляют собой нормальные сечения. Через одну точку на поверхности эллипсоида в направлении другой точки можно провести одно нормальное сечение. Со второй точки на первую, очевидно, тоже будет проходить одно нормальное сечение. Но поверхность эллипсоида – поверхность переменной кривизны. Отсюда возникает двойственность нормальных сечений, которая приводит к неопределенности при построении геометрических фигур на эллипсоиде. Так, например, если на местности имеется треугольник, в вершинах которого измерены углы, то после их редуцирования на эллипсоид вследствие двойственности нормальных сечений результатам измерений будет соответствовать разорванная фигура из шести сторон и трех углов (на каждом пункте измеренному углу соответствует угол между двумя прямыми нормальными сечениями) (рис. 1.4).

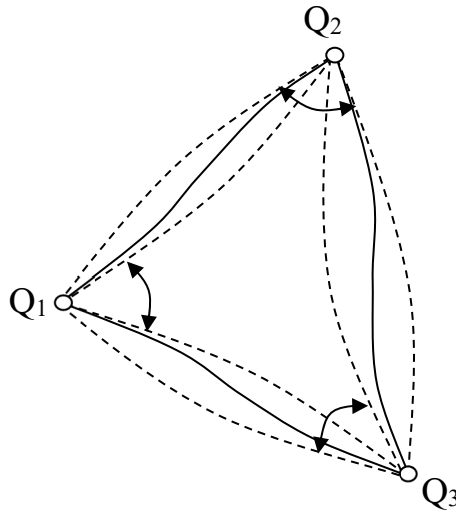


Рис. 1.4. Сфероидический треугольник

Для устранения этой неопределенности соединим вершины фигуры кратчайшими линиями. Кратчайшие линии на любой поверхности в геодезии называются *геодезическими линиями* (на рис. 1.4 – сплошные линии). Тогда получим замкнутый сфероидический треугольник. Но для образования такого треугольника на поверхности эллипсоида необходимо от непосредственно измеренных углов перейти к углам, образованным геодезическими линиями (рис. 1.5).

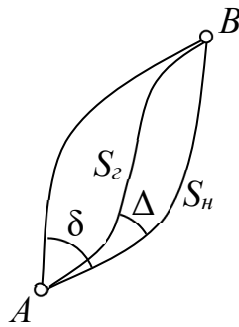


Рис. 1.5. Поправка за переход от азимута нормального сечения к азимуту геодезической линии

Приведем формулы для вычисления поправки δS за переход от длины нормального сечения к длине геодезической линии и поправки Δ за переход от азимута нормального сечения к азимуту геодезической линии (рис. 1.5).

$$\left. \begin{aligned} S &= S_H - S_T = \frac{S_H}{360} \sigma^4 \eta^4 \sin^2 2A; \\ \delta'' &= \frac{\rho''}{4} \sigma^2 \eta^2 \sin 2A; \\ \Delta &= -\frac{1}{3} \delta, \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

где $\sigma = \frac{S}{N}$; $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$.

При $S = 640$ км поправка $\delta S = 0.008$ мм. При $S = 32$ км поправка $\Delta = 0,003''$. Расчеты показывают, что поправки эти очень малы по сравнению с ошибками измерений, поэтому есть смысл их учитывать только при выполнении геодезических работ наивысшей точности.

Порядок выполнения работы

1. Кратко описать основные системы координат, используемые в высшей геодезии, с приведением необходимых чертежей, определений и пояснений [1–4, 8, 9].

По геодезическим координатам B, L исходного пункта своего варианта сети (см. прил. 3) вычислить:

- приведенную U и геоцентрическую Φ широты;
- прямоугольные координаты x, y меридианного эллипса;
- пространственные координаты X, Y, Z .

Рабочие формулы:

$$\begin{aligned} U &= \operatorname{arctg}(\sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B); \\ \Phi &= \operatorname{arctg}[(1-e^2) \operatorname{tg} B]; \\ x &= a \cos U; \\ y &= b \sin U; \\ X &= x \cos L; \\ Y &= x \sin L; \\ Z &= y. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Используя рабочие формулы (1.13), занести результаты преобразования координат в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Исходные данные		Результаты вычислений	
L_A	51°19'16,4140"	U	57°49'18,9576"
B_A	57°54'30,9335"	Φ	57°44'06,5279"
a	6 378 245,0 м	x	3 396 749,1516 м
b	6 356 863,0 м	y	5 380 430,3454 м
e^2	0,006 693 421 623	X	2 122 810,2399 м
		Y	2 651 712,2399 м
		Z	5 380 430,3454 м

2. Дать определения и показать на чертеже основные кривые поверхности эллипсоида вращения и их радиусы кривизны.

После проработки теоретической части [2, 6, 8] необходимо изобразить эллипсоид вращения, на котором показать длину дуги меридиана от экватора до параллели, проходящей через исходную точку A сети, параллель, первый вертикал и их радиусы кривизны. Дать определение нормального сечения, показать двойственность нормальных сечений и назвать причины, их порождающие.

2.1. По координатам исходной точки своего варианта вычислить радиусы кривизны меридиана, первого вертикала, средний радиус кривизны нормальных сечений.

Рабочие формулы:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{c}{V^3}; \\
 N &= \frac{c}{V}; \\
 R_{\text{ср}} &= \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2}; \\
 R_A &= \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 A},
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

где V – вторая сфероидическая функция широты,

$$V = \sqrt{1 + \eta^2}. \quad (1.15)$$

2.2. Вычислить длину дуги меридиана от экватора до параллели с широтой, равной широте исходной точки сети.

Помимо геометрических задач, длины дуг меридианов приходится вычислять при переходе от B, L к x, y в проекции Гаусса – Крюгера. При этом длины дуг вычисляются от экватора до параллели с заданной широтой и обозначаются большой буквой X .

Рабочие формулы:

$$X = a(1 - e^2) \left\{ \bar{A} \cdot B - \frac{\bar{B}}{2} \sin 2B + \frac{\bar{C}}{4} \sin 4B - \frac{\bar{D}}{6} \sin 6B \dots \right\}, \quad (1.16)$$

где $\bar{A} = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \dots;$

$$\bar{B} = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \dots;$$

$$\bar{C} = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \dots;$$

$$\bar{D} = \frac{35}{512}e^6 + \dots$$

В формуле (1.16) в первом произведении широта точки должна быть в радианах. Данная формула обеспечивает вычисление длин дуг меридианов с точностью до миллиметров при самых произвольных расстояниях, вплоть до 10 000 км.

Результаты решения задач пунктов 2.1 и 2.2 приведены в табл. 1.2

Таблица 1.2

Элементы формул	Числовые значения	Элементы формул	Числовые значения
B_A	57°54'30,9335"	N	6 393 621,6317 м
A_{AB}	48°47'01,746"	M	6 381 484,3992 м
e^2	0,006 738 525	$R_{ср.}$	6 387 550,1326 м
c	6 399 698,90 м	R_A	6 388 346,5645 м

		X	6 421 214,3588 м
--	--	---	------------------

2.3. Исследовать изменения радиуса кривизны нормального сечения в зависимости от азимута.

При исследовании изменения радиуса необходимо составить информацию для семи значений азимутов, равных

$$A_{\text{исх.}} + 15 \times i, (i = 0, 1, 2, \dots, 6), \quad (1.17)$$

где $A_{\text{исх.}}$ – азимут исходной стороны.

Исходные данные и результаты вычислений приведены в табл. 1.3

Таблица 1.3

Исходные данные		Результаты вычислений R_A , м
B	A	
57°54'30,9335"	48°47'01,746"	6 388 346,564
— —	63°47'01,746"	6 391 249,411
— —	78°47'01,746"	6 393 161,583
— —	93°47'01,746"	6 393 568,674
— —	108°47'01,746"	6 392 361,063
— —	123°47'01,746"	6 389 863,826
— —	138°47'01,746"	6 386 748,135

Сделать вывод по результатам вычислений.

3. Вычислить площадь и размеры рамок сфероидической трапеции.

3.1. Привести чертеж эллипсоида вращения с изображением на нем сфероидической трапеции [8].

3.2. Вычислить площадь сфероидической трапеции масштаба 1 : 50 000, в пределах которой расположена точка с широтой, равной широте исходного пункта Вашей сети.

Для выполнения данного пункта задания необходимо воспользоваться схемой расположения листов карты масштаба 1 : 1 000 000 (рис. 1.6).

Далее, следуя общей схеме деления листа карты масштаба 1 : 1 000 000 [10], нарисовать сфероидическую трапецию масштаба 1 : 50 000 (рис. 1.7), в пределах которой расположена исходная точка, и по формуле вычислить площадь трапеции.

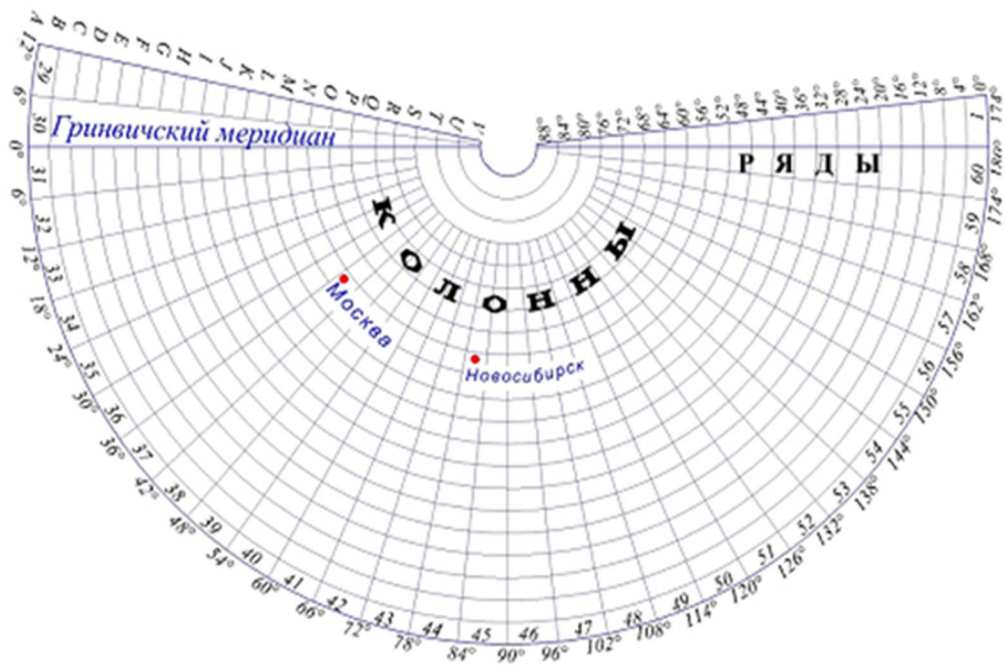


Рис. 1.6. Схема расположения листов карты масштаба 1 : 1 000 000

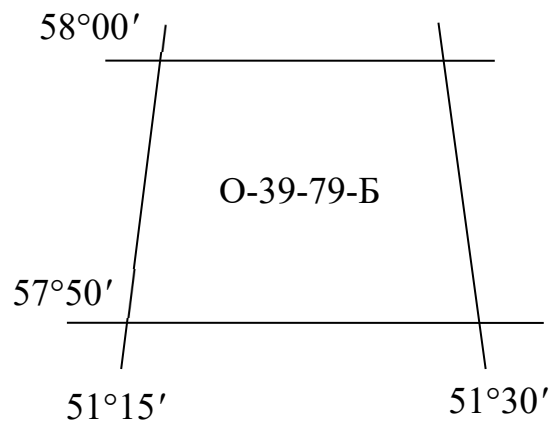


Рис. 1.7. Трапеция масштаба 1: 50 000

Рабочая формула для вычисления площади сфероидической трапеции:

$$\begin{aligned}
 P = b^2 (L_2 - L_1) & \left[\sin B_2 - \sin B_1 + \frac{2}{3} e^2 (\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1) + \right. \\
 & \left. + \frac{3}{5} e^4 (\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1) + \frac{4}{7} e^6 (\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1) + \dots \right], \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

где b – малая полуось эллипсоида, вычисляемая по одной из формул:

$$b = a(1 - \alpha) = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{a^2}{c}. \quad (1.19)$$

3.3. Вычислить размеры рамок сфероидической трапеции.

Рабочие формулы:

$$c' = M_{\text{ср}} \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \cdot \frac{1}{m}; \quad a_i = N_i \cos B_i \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \cdot \frac{1}{m}; \quad i = 1, 2;$$

$$d^2 = \left(a_1 - \frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 + \left[c'^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 \right] = a_1 a_2 + c'^2; \quad (1.20)$$

$$d = \sqrt{a_1 a_2 + c'^2}.$$

где $M_{\text{ср}}$ – радиус кривизны меридиана, вычисленный по средней широте трапеции;

B_1, B_2 – широты южной и северной рамок трапеции;

a_1 и a_2 – соответственно южная и северная рамки трапеции;

L_1, L_2 – долготы западной и восточной рамок трапеции;

c' – западная и восточная рамки;

d – диагональ трапеции, которая вычисляется для контроля правильности графического построения рамок трапеции;

$$\rho'' = 206\,264,8062''.$$

Результаты решения задач пунктов 3.2 и 3.3 представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Элементы формул	Числовые значения	Элементы формул	Числовые значения
B_1	57° 50'	m	1 : 50 000
B_2	58° 00'	a_1	29,704 2 см
L_1	51° 15'	a_2	29,566 9 см
L_2	51° 30'	c'	37,126 0 см
e^2	0,006 738 525	d	45,503 7 см
		P	275,062 7 км ²

4. Кратко изложить вопрос о расхождениях нормальных сечений и геодезической линии с приведением необходимых рисунков и окончательных формул [2, 5, 6, 8].

Рассчитать угловые и линейные расхождения для исходной стороны своей сети.

Применить рабочие формулы (1.12), результаты вычислений оформить в виде табл. 1.5.

Таблица 1.5

Элементы формул	Числовые значения	Элементы формул	Числовые значения
B_A	$57^{\circ}54'30,9335''$	δS , мм	$6,5 \times 10^{-14}$
A_{AB}	$48^{\circ}47'01,746''$	Δ''	$0,0005''$
S_{AB}	25 615,847 м		

Контрольные вопросы

1. Что такое геодезическая, астрономическая, геоцентрическая и приведенная широты? Их отличия.

2. Чем отличается геодезическая долгота от астрономической?

3. Что такое геодезический азимут? В чем его отличие от астрономического?

4. Какие кривые на поверхности эллипсоида вращения представляют наибольший интерес для геодезии и почему? Уравнение Клеро о свойстве геодезической линии.

5. Что такое кривизна кривой на поверхности вообще и в частности? Что такое нормальная и геодезическая кривизна?

6. Можно ли указать на поверхности эллипсоида две точки, между которыми возможно провести более одной геодезической линии?

7. В каких широтах дуга меридиана имеет максимальную и минимальную кривизну?

8. Найти геодезические координаты вершин трапеций $N - 42 - 123$.

9. В каких частных случаях взаимные нормальные сечения совпадают и в каких максимально расходятся?

10. Как расположатся геодезическая линия, прямое и обратное нормальные сечения и параллель, соединяющие две точки с одинаковыми широтами?

Практическая работа № 2 РЕШЕНИЕ СФЕРОИДИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Цель работы: изучить последовательность решения сфероидических треугольников с применением теоремы Лежандра и по способу аддитаментов.

Бюджет времени: 6 часов аудиторной работы.

Краткие теоретические сведения

Сфероидическим треугольником называется треугольник, образованный геодезическими линиями на поверхности эллипсоида вращения.

Для образования сфероидического треугольника на поверхности эллипсоида необходимо в каждое непосредственно измеренное горизонтальное направление ввести поправку за переход от азимута нормального сечения к азимуту геодезической линии (рис. 4). Вводить поправку в измеренные стороны не следует, так как сторона (после ее редуцирования на эллипсоид) будет представлять собой нормальное сечение, длина которого с очень высокой точностью равна длине, соответствующей геодезической линии.

Решение сфероидических треугольников представляет собой сложную задачу [2, 5, 6, 8]. Сложность этой проблемы обусловлена переменной кривизной поверхности эллипсоида.

Так, если взять два сфероидических треугольника с одинаковыми сторонами, но расположенных под разными широтами поверхности эллипсоида, то соответствующие им углы, в общем случае, равны не будут. Аналогично не будут равны и стороны треугольников, расположенных под разными широтами, у которых углы и одна (исходная) сторона соответственно равны.

Поэтому сфероидические треугольники решать без учета изменения кривизны нельзя.

Однако поверхность земного эллипсоида по своей форме близка к сфере ($\alpha \approx 1 : 300$), и поэтому можно ожидать, что элементы сфероидического треугольника будут мало отличаться от соответствующих элементов сферического треугольника с надлежаще подобранным радиусом шара.

В более фундаментальных курсах по сфероидической геодезии [6] доказывается, что сфероидические треугольники со сторонами, не превышающими 250 км, можно решать по формулам сферической тригонометрии, при этом относительные искажения элементов сферического треугольника будут меньше $1 \cdot 10^{-8}$. В случае, когда в треугольнике даны три угла и известна одна сторона (рис. 2.1), наиболее простым решением будет применение теоремы синусов сферической тригонометрии:

$$b = R \arcsin \left[\sin \left(\frac{a}{R} \right) \frac{\sin B}{\sin A} \right]; \quad d = R \arcsin \left[\sin \left(\frac{a}{R} \right) \frac{\sin D}{\sin A} \right]. \quad (2.1)$$

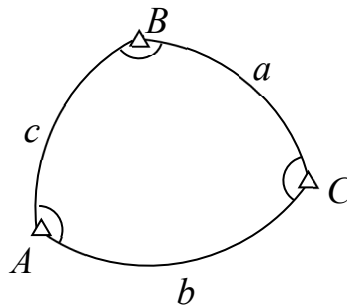


Рис. 2.1. Элементы сфероидического треугольника

Если известны три стороны в треугольнике, то углы можно вычислить на основании теоремы косинуса стороны сферической тригонометрии:

$$\begin{aligned} A &= \arccos \left(\frac{\cos \frac{a}{R} - \cos \frac{b}{R} \cos \frac{d}{R}}{\sin \frac{b}{R} \sin \frac{d}{R}} \right); \\ B &= \arccos \left(\frac{\cos \frac{b}{R} - \cos \frac{a}{R} \cos \frac{d}{R}}{\sin \frac{a}{R} \sin \frac{d}{R}} \right); \\ D &= \arccos \left(\frac{\cos \frac{d}{R} - \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R}}{\sin \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R}} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для решения малых сферических треугольников разработаны два способа, позволяющие не использовать обратные тригонометрические функции арксинусы и арккосинусы. Это способ аддитаментов и способ решения сферических треугольников с применением теоремы Лежандра.

Суть способа аддитаментов заключается в замене решения сферического треугольника решением плоского треугольника с углами, равными углам сферического треугольника, и измененной (на аддитамент) исходной стороной с последующим введением в полученные из решения плоского треугольника стороны поправок (аддитаментов).

В 1787 г. А. Лежандр доказал теорему, которая в последующем была положена в основу решения сферических треугольников со сторонами, не превышающими 200–220 км. Достоинством такого решения является то, что в этом случае решение сферического треугольника заменяется решением плоского треугольника со сторонами, равными соответствующим сторонам сферического треугольника, но измененными углами. Изменения сферических углов при переходе к углам плоского треугольника вычисляются на основании теоремы Лежандра, которая гласит: *если сферический треугольник заменить плоским с теми же сторонами, то углы плоского треугольника будут равны соответствующим углам сферического треугольника, уменьшенным на одну треть сферического избытка.*

Если стороны превышают 270 км, то треугольники решаются с применением расширенной теоремы Лежандра. При необходимости формулы могут быть взяты из учебника по сфероидической геодезии [6].

Порядок выполнения работы

1. Кратко изложить основные положения теории замены сфероидического треугольника сферическим при заданных искажениях элементов треугольника с приведением необходимых чертежей и окончательных формул.

При выполнении этого пункта задания вначале необходимо проработать по литературе [2, 5, 6, 8] теорию замены сфероидического треугольника сферическим и кратко изложить основные ее положения.

2. Описать последовательность решения сферических треугольников с применением теоремы Лежандра и по способу аддитаментов [2, 5, 6, 8].

3. Выполнить уравнивание углов и решить треугольники по способу аддитаментов.

Решения сферических треугольников с применением теоремы Лежандра и по способу аддитаментов рассмотрим на геодезической сети (рис. 2.2).

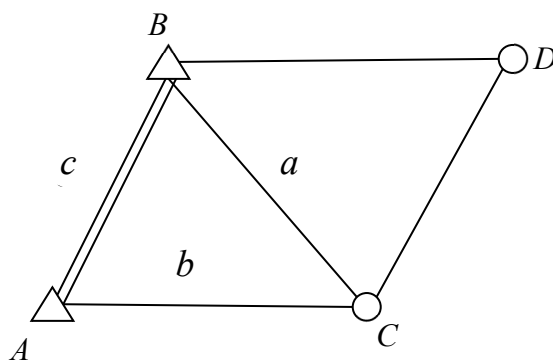


Рис. 2.2. Схема сети

Рабочие формулы:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= fc^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin C}; \\
 f &= \frac{\rho''}{2R_{\text{ср.}}^2}; \\
 W &= A + B + C - (180^\circ + \varepsilon); \\
 i' &= i - \frac{W}{3}, (i = A, B, C); \\
 A_s &= \frac{S^3}{6R_{\text{ср.}}^2}, (S = a, b, c); \\
 c' &= c - A_c; \\
 a' &= \frac{c'}{\sin C'} \sin A', b' = \frac{c'}{\sin C'} \sin B'; \\
 b &= b' + A_b, a = a' + A_a.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

В формулах приняты следующие обозначения:

ε – сферический избыток треугольника;

A_s – аддитамент (поправка) в общем виде;

W – невязка в углы треугольника;

i' – уравненные углы.

Технологическая последовательность решения сфероидического треугольника ABC заключается в следующем:

1) из исходной стороны c вычитают ее аддитамент A_c и получают сторону плоского треугольника c' ;

2) по известным уравненным углам (i') сферического треугольника и стороне c' решают треугольник как плоский, используя теорему синусов, и находят остальные стороны плоского треугольника a' и b' ;

3) полученные значения сторон исправляют их аддитаментами и находят искомые стороны сфероидического треугольника a и b .

Уравнивание углов и решение треугольника ABC способом аддитаментов представлено в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Но- мер тре- уголь- ника	Вер- шины тре- уголь- ника	Углы сфероидиче- ского тре- угольника I	$\frac{W}{3}$	Уравненные углы I'	Условные стороны S' , м	Аддита- менты A_s , м	Стороны сфероидиче- ского тре- угольника S , м
1	C	75°30'19,489"	0,615"	75°30'20,104"	25 615,778	0,069	25 615,847
	B	41°14'31,217"	0,615"	41°14'31,832"	17 442,175	0,022	17 442,197
	A	63°15'08,457"	0,615"	63°15'09,072"	23 626,852	0,054	23 626,906
	Σ	179°59'59,163"					
	ε	1,008"	1,845"	180°00'01,008"			
	W	-1,845"					

Решить второй треугольник сети BDC способом аддитаментов, продолжив табл. 2.1.

4. Используя вычисленные стороны, решить треугольники как плоские с применением теоремы Лежандра.

Рабочие формулы:

$$i' = 2 \arctg\left(\frac{M}{p-S}\right), \text{ где } (i' = A', B', C'; S = a, b, c);$$

$$M = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}; p = \frac{1}{2}(a+b+c); \quad (2.4)$$

$$i = i' + \frac{\varepsilon}{3}; \varepsilon = 2pMf; f = \frac{\rho''}{2R_{\text{ср.}}^2}; R_{\text{ср.}} = \frac{c}{V^2};$$

$$V^2 = 1 + e'^2 \times \cos^2 B_{\text{ср.}}$$

В формулах приняты следующие обозначения:

M – площадь треугольника;

p – полупериметр треугольника.

Технологическая последовательность решения линейных треугольников по теореме Лежандра заключается в следующем:

1) вычисление плоских условных углов треугольников i' ;

2) вычисление сферического избытка (ε) и площади треугольника по формуле (M);

3) вычисление сфероидических углов треугольников i ;

Решение треугольника ABC приведено в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Номер треугольника	Вершины треугольника	Стороны сфероидического треугольника S , м	Углы плоского треугольника i'	$\frac{\varepsilon}{3}$	Углы сфероидического треугольника i
1	C	25 615,847	75°30'19,768"	0,336"	75°30'20,104"
	B	17 442,197	41°14'31,496"	0,336"	41°14'31,832"
	A	23 626,906	63°15'08,736"	0,336"	63°15'09,072"
	p	33 342,475 м			
	M	5 983,187 м ²	180°00'00,000"	1,008"	180°00'01,008"
	ε	1,008"			

Контролем правильности вычисления углов сфероидического треугольника будет их равенство с уравненными углами в табл. 2.1.

Решить второй треугольник сети BDC , продолжив табл. 2.2.

Контрольные вопросы

1. Что такое сфероидический треугольник?

2. При каких размерах сторон сфероидические треугольники можно решать как сферические, если требуется определить элементы треугольника с точностью $1 \cdot 10^{-6}$?

3. В чем отличие решения сферических и сфероидических треугольников?

4. Что такое аддитамент стороны и как он вычисляется?

5. Сформулировать теорему Лежандра и привести формулу перехода от угла сфероидического треугольника к плоскому при больших сторонах.

6. Как вычисляется сферический избыток ε при сторонах, меньших и больших 90 км?

Практическая работа № 3

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА

Цель работы: изучить основы решения главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида вращения.

Бюджет времени: 6 часов аудиторной работы.

Краткие теоретические сведения

Положение точки Q на земной поверхности и в пространстве может быть однозначно определено плановыми геодезическими координатами B, L и геодезической высотой H [7]. Обычно плановые координаты точек определяются отдельно от высот. В сфероидической геодезии рассматриваются только способы определения плановых координат. Теория определения высот точек рассматривается в курсе теоретической геодезии. При построении плановых геодезических сетей традиционными наземными методами (триангуляция, полигонометрия, трилатерация), координаты пунктов определяются путем последовательного вычисления координат определяемых пунктов, начиная от исходного по измеренным углам и сторонам [2, 4, 5, 7, 8].

Задача, связанная с вычислением координат определяемого пункта по известным координатам исходного пункта, измеренному азимуту и расстоянию называется *прямой геодезической задачей*. При решении прямой геодезической задачи дано:

- 1) геодезические координаты B_1, L_1 исходного пункта Q_1 ;
- 2) полярные координаты S и A_1 определяемого пункта Q_2 .

Требуется найти:

- 1) геодезические координаты B_2, L_2 пункта Q_2 ;
- 2) обратный азимут A_2 с пункта Q_2 на пункт Q_1 .

Прямую геодезическую задачу можно рассматривать как задачу преобразования полярных координат в геодезические [7, 8].

На практике часто решают и другую задачу, а именно: по геодезическим координатам пунктов Q_1 и Q_2 определяется кратчайшее расстояние S

между ними и азимуты A_1 и A_2 . Такая задача в геодезии получила название *обратной геодезической задачи*. Решить обратную задачу – это значит преобразовать геодезические координаты точки в полярные (рис. 3.1).

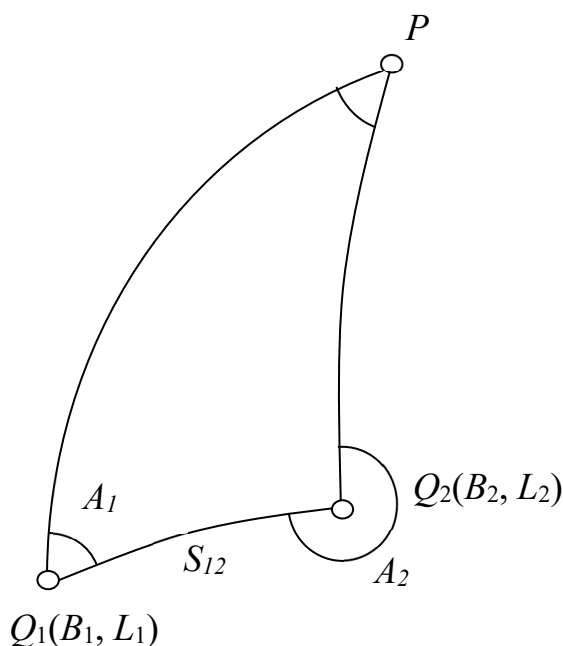


Рис. 3.1. Прямая и обратная геодезические задачи

Прямую и обратную геодезические задачи часто называют *главной геодезической задачей*. Решение главной геодезической задачи на эллипсоиде может осуществляться по различным кривым, соединяющим точки Q_1 и Q_2 (нормальные, геоцентрические сечения, хорды и т. д.). Однако наибольшее распространение в геодезической практике получили способы решения главных геодезических задач по геодезическим линиям.

В основе решения геодезических задач на поверхности эллипсоида лежат дифференциальные уравнения геодезической линии:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{dS} &= \frac{\cos A}{M}; \\ \frac{dL}{dS} &= \frac{\sin A}{N \cos B}; \\ \frac{dA}{dS} &= \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Принимая S за независимую переменную и интегрируя (3.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \int_0^S \frac{\cos A}{M} dS; \\ L_2 &= L_1 + \int_0^S \frac{\sin A}{N \cos B} dS; \\ A_2 &= A_1 \pm 180^\circ + \int_0^S \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B ds. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Формулы (3.2) дают решение прямой геодезической задачи в общем виде. Однако проинтегрировать выражения (3.2) точно невозможно, так как интеграл эллиптический и не может быть выражен с помощью конечного числа элементарных функций. Поэтому мы можем проинтегрировать (3.2) только приближенно. Приближенные методы интегрирования при решении главной геодезической задачи делятся на три группы.

К *первой группе* относятся методы, основанные на разложении подынтегральных функций (3.2) в ряды с последующим почленным интегрированием ряда.

Во *второй группе* используется сфера как некоторая вспомогательная поверхность, и решение задачи осуществляется на этой сфере с последующим переходом на эллипсоид.

К данной группе приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений геодезической линии относится способ Бесселя.

Алгоритм решения прямой геодезической задачи по способу Бесселя:

- 1) $\alpha_1 = A_1$;
- 2) $\varphi_1 = U_1 = \operatorname{arctg}(\sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B_1)$;
- 3) $\sigma_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} U_1}{\cos A_1}\right)$, $A_0 = \operatorname{arcsin}(\cos U_1 \sin A_1)$;
- 4) $k^2 = e'^2 \cos^2 A_0$.

По формулам вычисляем коэффициенты $C_0, C_1, C_2, C_3, D_0, D_1, D_2, D_3$:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 1 + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6 + \dots; \\ C_1 &= \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{16}k^4 + \frac{15}{512}k^6 + \dots; \\ C_2 &= \frac{1}{64}k^4 - \frac{3}{256}k^6 + \dots; \\ C_3 &= \frac{1}{512}k^6 + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$D_0 = bC_0; \quad D_1 = \frac{C_1}{C_0}; \quad D_2 = \frac{C_2}{2C_0}; \quad D_3 = \frac{C_3}{3C_0}; \quad (3.4)$$

5) методом приближений находим σ , при этом $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma$:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 + D_1 \sin \sigma \cos(2\sigma_1 + \sigma) + D_2 \sin 2\sigma \cos(4\sigma_1 + 2\sigma) + \\ &+ D_3 \sin 3\sigma \cos(6\sigma_1 + 3\sigma), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\sigma_0 = \frac{S}{D_0}$;

6) $\lambda_1 = \text{arctg}(\text{tg } \sigma_1 \sin A_0)$, $\lambda_2 = \text{arctg}(\text{tg } \sigma_2 \sin A_0)$;

7) $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$;

8) $A'_2 = \text{arctg}\left(\frac{\text{tg } A_0}{\cos \sigma_2}\right)$, $U_2 = \text{arctg}(\text{tg } \sigma_2 \cos A'_2)$;

9) вычисляем коэффициенты β_i :

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \dots - \left(\frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{16}e^6\right)\cos^2 A_0 + \\ &+ \left(\frac{3}{128}e^6 + \dots\right)\cos^4 A_0 + \dots; \\ \beta_2 &= \left(\frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \dots\right)\cos^2 A_0 - \left(\frac{1}{32}e^6 + \dots\right)\cos^4 A_0 + \dots; \\ \beta_3 &= \left(\frac{1}{128}e^6 + \dots\right)\cos^4 A_0; \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

10) вычисляем ΔL :

$$\begin{aligned} \Delta L = \Delta\lambda - \sin A_0 [\beta_1\sigma + \beta_2 \sin \sigma \cos(2\sigma_1 + \sigma) + \\ + \frac{\beta_3}{2} \sin 2\sigma \cos(4\sigma_1 + 2\sigma) + \dots]; \end{aligned} \quad (3.7)$$

11) получаем окончательные координаты по формулам:

$$\begin{aligned} B_2 &= \operatorname{arctg}(\sqrt{1 + e'^2} \operatorname{tg} U_2); \\ L_2 &= L_1 + \Delta L; \\ A_2 &= A'_2 \pm 180^\circ. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В формулах приняты следующие обозначения:

φ , λ , α – соответственно сферические широта, долгота и азимут;

σ – сферическое расстояние, т. е. расстояние, выраженное в частях радиуса;

U – приведенная широта точки;

σ_1 и σ_2 – сферические расстояния от экватора до точек;

λ_1 и λ_2 – сферические долготы точек;

A_0 – постоянная величина (азимут, под которым дуга большого круга пересекает экватор).

В *третьей группе* исходные дифференциальные уравнения (3.2) интегрируются при помощи какого-нибудь численного метода, например, Симпсона, Рунге – Кутта, Адамса, Эверхарта и т. д.

Порядок выполнения работы

1. Изложить общие основы решения главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида вращения с обоснованием точности вычисления геодезических координат и азимутов. Перечислить наиболее распространенные способы решения прямой и обратной геодезических задач [2, 5, 7, 8].

2. По данным геодезическим координатам исходного пункта A , стороне AB и ее азимуту решить прямую геодезическую задачу по способу Бесселя.

Поверхность эллипсоида очень близка к поверхности сферы, поэтому возможен следующий путь решения главной геодезической задачи:

– отобразить сторону полярного сфероидического треугольника на сферу с целью перехода от элементов сфероидического треугольника к элементам полярного сферического треугольника;

– решить сферический треугольник на сфере по формулам сферической тригонометрии;

– перейти от сферических элементов к сфероидическим.

Алгоритм и формулы для решения прямой геодезической задачи по способу Бесселя рассмотрены в кратких теоретических сведениях. Результаты вычислений представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Элементы формул	Числовые значения	Элементы формул	Числовые значения
B_A	$57^{\circ}54'30,9335''$	λ_1	$44^{\circ}01'03,1724''$
L_A	$51^{\circ}19'16,4140''$	λ_2	$44^{\circ}20'39,3178''$
A_{AB}	$48^{\circ}47'01,746''$	$\Delta\lambda$	$19'36,1454''$
S_{AB}	25615,847 м	A_{BA}	$229^{\circ}03'38,060''$
A_0	$23^{\circ}36'56,768''$	ΔL	$19'35,0331''$
σ_1	$67^{\circ}28'55,4012''$	L_B	$51^{\circ}38'51,4471''$
σ_2	$67^{\circ}42'44,5711''$	B_B	$58^{\circ}03'34,9712''$
Σ	$13'49,1699''$		

3. Решить обратную геодезическую задачу по формулам со средними аргументами.

При решении обратной геодезической задачи известными величинами являются геодезические координаты пунктов A и B (B_1, B_2, L_1, L_2), требуется определить длину геодезической линии S_{AB} между ними и азимуты A_{AB} и A_{BA} .

Рабочие формулы:

$$\Delta B = \frac{B_2 - B_1}{\rho''}; \Delta L = \frac{L_2 - L_1}{\rho''}; B_{cp} = \frac{B_2 + B_1}{2};$$

$$P = \Delta B M_{cp} \left\{ 1 - \frac{\Delta L^2}{12} - \frac{(\Delta L \sin B_{cp})^2}{24} \right\};$$

$$Q = \Delta L \cos B_{cp} N_{cp} \left\{ 1 + \frac{\Delta B^2}{24} - \frac{(\Delta L \sin B_{cp})^2}{24} \right\}, \text{ где } \Delta L = L_2 - L_1; \quad (3.9)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}; A_{cp} = \arctg\left(\frac{Q}{P}\right);$$

$$\Delta A = \Delta L \sin B_{cp} \left\{ 1 + \frac{\Delta B^2}{8} + \frac{\Delta L^2}{12} - \frac{(\Delta L \sin B_{cp})^2}{12} \right\};$$

$$A_{AB} = A_{cp} - \frac{\Delta A}{2}; A_{BA} = A_{cp} \pm 180^\circ + \frac{\Delta A}{2}.$$

В формулах приняты следующие обозначения:

$\Delta B, \Delta L, \Delta A$ – приращения геодезических координат и азимутов точек A и B сети;

Q, P – вспомогательные величины;

N_{cp}, M_{cp} – средние значения радиусов кривизны первого вертикала и меридиана соответственно точек A и B .

Результаты вычислений представлены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Элементы формул	Числовые значения	Элементы формул	Числовые значения
B_1	57°54'30,9335"	Q	19 309,687 м
B_2	58°03'34,9712"	A_{cp}	48°55'19,904"
L_1	51°19'16,4140"	ΔA	16'36,314"
L_2	51°38'51,4471"	S_{AB}	25 615,847 м
P	16 831,745 м	A_{AB}	48°47'01,746"
		A_{BA}	229°03'38,060"

Контроль решения обратной геодезической задачи в данном случае может быть осуществлен путем сравнения вычисленных величин со значением исходной стороны AB и ее азимутов.

Контрольные вопросы

1. Что такое прямая и обратная геодезические задачи? Сколько исходных данных и каких надо иметь при решении той и другой задач?
2. Чем вызвано различие прямого и обратного азимутов?
3. С какой точностью необходимо вести вычисления приращений геодезических координат и азимутов?
4. Какие методы решения главной геодезической задачи целесообразно применять при больших расстояниях?
5. Как можно проконтролировать с помощью теоремы Клеро вычисление широты определяемой точки и обратного геодезического азимута?
6. Перечислите основные этапы и порядок действия в них при решении главной геодезической задачи по способу Бесселя.
7. Почему обратная геодезическая задача по способу Бесселя решается методом приближений?
8. Приведите приближенные формулы вычисления разностей широт, долгот и азимутов и оцените погрешности решения задачи по ним.

Практическая работа № 4
РЕДУЦИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ
С ЭЛЛИПСОИДА НА ПЛОСКОСТЬ
В ПРОЕКЦИИ ГАУССА – КРЮГЕРА И ВЫЧИСЛЕНИЕ
ПЛОСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Цель работы: рассмотреть порядок действий при переходе с эллипсоида на плоскость при математической обработке геодезических измерений в проекции Гаусса – Крюгера.

Бюджет времени: 12 часов аудиторной работы.

Краткие теоретические сведения

Математическая обработка измерений, выполненных на больших территориях с целью изучения фигуры Земли, осуществляется на эллипсоиде в единой геодезической системе координат [1, 3, 7, 11].

Однако при построении на небольших территориях геодезических сетей, предназначенных для производства топографических съемок, для обеспечения строительства крупных инженерно-технических сооружений, железных и шоссейных дорог и т. д. более удобной является плоская прямоугольная система координат.

Основным преимуществом системы плоских прямоугольных координат является простота и удобство формул плоской тригонометрии, используемых при математической обработке геодезических измерений и решении различных геодезических задач.

Известно, что поверхность эллипсоида не может быть развернута на плоскость без искажений. Поэтому и не может быть предложена система плоских координат, в которой взаимное положение точек будет выражено без искажений. При любом способе отображения эллипсоида на плоскость мы будем иметь дело с искажениями, но какими? Это зависит от выбора проекции и ее условий отображения. Так при проектировании на плоскость сфероидического треугольника в зависимости от типа проекции могут быть

искажены только стороны, а углы спроектированы без искажений, либо углы исказятся, а стороны будут теми же, что и на эллипсоиде, либо будут искажены и углы и стороны и т. д.

Для геодезии очень важно, чтобы величина искажений угловых и линейных элементов была небольшой, тогда их можно будет легко учесть. С теоретической точки зрения, при любом изображении эллипсоида на плоскость можно вычислить все искажения и с требуемой степенью точности, как бы велики они не были. Но тогда был бы потерян практический смысл перехода на плоскость, так как вычисление больших искажений выполнялось бы по таким же сложным формулам, как и решение геодезических задач на эллипсоиде.

С точки зрения искажений, для геодезии наиболее приемлемы равноугольные (конформные) проекции. Достоинство конформной проекции состоит в том, что масштаб изображения в данной точке не зависит от направления, а это влечет за собой сохранение подобия бесконечно малых фигур и, следовательно, равноугольность, т. е. углы переносятся на плоскость без искажений.

В нашей стране для производства и математической обработки топографо-геодезических работ используется равноугольная (конформная) проекция эллипсоида на плоскость. Теоретические основы этой проекции разработаны К. Ф. Гауссом в начале XIX в., а доведена она до стадии практического применения Л. Крюгером в начале XX в. Поэтому данную проекцию геодезисты называют сокращенно проекцией Гаусса – Крюгера.

Поверхность земного эллипсоида в ней разделяется меридианами на зоны, которые простираются от Северного до Южного полюсов. Средний меридиан каждой зоны называется осевым, а крайние – граничными меридианами. Ширина зоны выбирается произвольно, в зависимости от величины искажений на краю зоны. В нашей стране приняты две системы координатных зон – шестиградусные и трехградусные. Шестиградусные зоны являются основными в том смысле, что все материалы математической обработки геодезических сетей и каталоги координат оформляются в системе шестиградусных зон. Трехградусные зоны используются только для производства крупномасштабных топографических съемок.

Счет шестиградусных зон ведется от Гринвичского меридиана на восток, при этом западный граничный меридиан первой шестиградусной зоны совпадает с Гринвичским меридианом. Граничные меридианы зон поочередно совпадают с западными и восточными рамками карт масштаба 1 : 1 000 000, а номер зоны n и долгота осевого меридиана L_0 вычисляются по формулам:

$$n = N - 30 = \text{целое} \left(\frac{L^\circ}{6^\circ} \right) + 1; L_0 = 6^\circ n - 3^\circ, \quad (4.1)$$

где N – номер колонны листа карты масштаба 1 : 1 000 000.

В системе трехградусных зон осевые меридианы располагаются через 3° по долготе и совпадают поочередно с граничными и осевыми меридианами шестиградусных зон, причем осевые меридианы первых шестиградусной и трехградусной зон совпадают. Долготы осевых меридианов трехградусных зон определяются по формуле

$$L_0 = 3^\circ n', \quad (4.2)$$

где $n' = \text{целое}[(L^\circ - 1,5^\circ) / 3^\circ] + 1$ – номер соответствующей трехградусной зоны.

Каждая зона в проекции Гаусса – Крюгера изображается на плоскости независимо от других зон в своей системе плоских прямоугольных координат.

Условия проекции Гаусса – Крюгера выводятся следующие:

- проекция равноугольна (конформна);
- осевой меридиан и экватор каждой зоны изображаются на плоскости прямыми линиями;
- масштаб изображения на осевом меридиане равен единице.

Исходя из второго условия, изображение осевого меридиана принимается за ось абсцисс, а изображение экватора – за ось ординат.

Системы плоских координат в каждой зоне проекции Гаусса – Крюгера совершенно однообразны, поэтому формулы преобразования координат,

углов, линий при проектировании их на плоскость будут одинаковыми для всех зон, независимо от их местоположения на эллипсоиде. Это одно из достоинств проекции Гаусса – Крюгера. Недостаток – неоднозначность определения положения точки, так как одни и те же числовые значения координат могут быть в разных зонах.

На территории России абсциссы пунктов геодезических сетей всегда положительные, а ординаты положительны к востоку от осевого меридиана и отрицательны к западу.

Чтобы исключить отрицательные ординаты и неоднозначность, т. е. иметь возможность по значениям плоских прямоугольных координат судить о местоположении зоны, вводятся условные ординаты [1, 7, 8]. Переход к ним осуществляется по формуле

$$y' = n \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + y, \quad (4.3)$$

где y' – условная ордината; n – номер зоны.

Порядок действий при переходе с эллипсоида на плоскость при математической обработке геодезических измерений в проекции Гаусса – Крюгера зависит от исходных данных, которыми мы располагаем для данной геодезической сети. Рассмотрим наиболее общий случай (рис. 4.1).

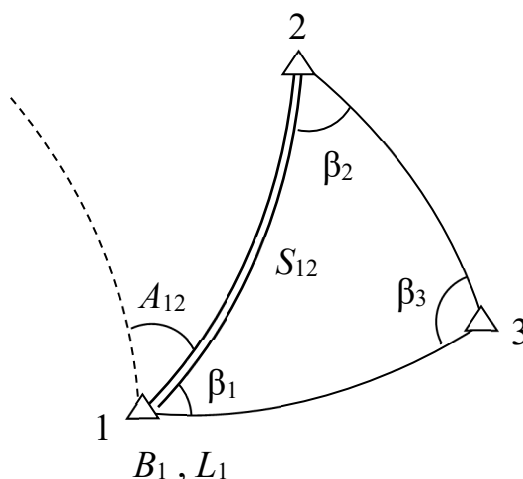


Рис. 4.1. Проектируемая с эллипсоида на плоскость геодезическая сеть

1. Переход от геодезических координат B_1 и L_1 исходного пункта к плоским прямоугольным координатам x_1, y_1 с одновременным вычислением сближения меридианов (γ) и масштаба изображения (m).

2. Редуцирование исходной стороны на плоскость и вычисление ее дирекционного угла:

$$\left. \begin{aligned} S' &= S \left(1 + \frac{y_{cp}^2}{2R_{cp}^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_{cp}^2} \right); \\ D_{12} &= A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}; \\ \delta_{12} &= -\frac{f}{3}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2). \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

На этом этапе решение можно выполнить только методом последовательных приближений, так как неизвестны координаты x_2, y_2 .

В первом приближении принимаем

$$\left. \begin{aligned} x_2 &\approx x_1; \\ y_2 &\approx y_1; \\ \delta &= 0; \\ S'' &= Sm_1; \\ D_{12} &\approx A_{12} - \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Во втором приближении вычисляем координаты второй точки

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + S'' \cos D_{12}; \\ y_2 &= y_1 + S'' \sin D_{12}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

И вновь определяем новые значения S', δ, D , а затем переходим к третьему приближению и т. д.

Приближения заканчиваются тогда, когда два смежных приближения повторяют друг друга.

3. Вычисление поправок в горизонтальные направления за кривизну изображения геодезической линии на плоскости.

Во все горизонтальные направления сети (прямые и обратные) вычисляются поправки по формуле

$$\delta_{ij} = -\frac{f}{3}(x_j - x_i)(2y_i + y_j), \quad (4.7)$$

где $f = \rho''/2R_{\text{ср}}^2$.

Для вычисления поправок необходимо знать координаты определяемых пунктов, которые нам неизвестны. Поэтому и на данном этапе задача решается по методу приближений.

Считая в первом приближении $\beta'_i = \beta_i$, удобно вычислять координаты по формулам Юнга:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_1 \operatorname{ctg} \beta'_2 + x_2 \operatorname{ctg} \beta'_1 - (y_2 - y_1)}{\operatorname{ctg} \beta'_1 + \operatorname{ctg} \beta'_2}; \\ y_3 &= \frac{y_1 \operatorname{ctg} \beta'_2 + y_2 \operatorname{ctg} \beta'_1 + (x_2 - x_1)}{\operatorname{ctg} \beta'_1 + \operatorname{ctg} \beta'_2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Плоские углы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \delta_{i,\text{пр}} - \delta_{i,\text{лев}}, \\ \beta'_i &= \beta_i + \Delta_i. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Во втором, третьем и т. д. приближениях уточненные плоские углы подставляются в формулы Юнга, и по все более и более точным координатам вычисляются поправки за кривизну изображения геодезической линии.

Поправки δ_{ij} невелики и редко превышают $10''$, поэтому для их вычисления достаточно знать координаты определяемых пунктов с точностью 7 м [7] и делать не более одного или двух приближений. В этом случае ошибка вычисления δ_{ij} не будет превышать $0,005''$.

Существует контроль правильности вычисления поправок за кривизну изображения геодезических линий по сферическим избыткам треугольников:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = -\varepsilon. \quad (4.10)$$

4. Математическая обработка геодезической сети на плоскости.

На этом этапе выполняют предварительную обработку, уравнивание и оценку точности геодезической сети.

5. Окончательные вычисления и составление каталога [1].

При составлении каталога, если пункты попадают в 30-минутное перекрытие зон, то их координаты в каталоге приводятся в системах двух смежных зон.

Порядок выполнения работы

1. Кратко описать основные этапы проектирования элементов геодезической сети с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера с приведением необходимых чертежей и основных формул.

Проработав теоретический материал [1, 3, 7, 8, 11] этой темы, следует изложить общую схему и последовательность этапов математической обработки геодезических сетей на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера с приведением геометрической интерпретации проектирования элементов геодезической сети с эллипсоида на плоскость. Обосновать точность вычисления элементов на различных этапах обработки сети. Указать причины, вынуждающие осуществлять преобразование координат из одной зоны в другую, и способы их преобразования.

2. Вычислить для пункта A плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера, сближение меридианов и масштаб изображения.

При решении этой задачи вначале следует определить номер n и долготу осевого меридиана L_0 зоны, в которой расположена точка A по формуле (4.1).

Вычисление плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера x, y :

$$x = X + \frac{N \cos B \sin B \cdot l^2}{2\rho^2} \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{12\rho^2} (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2) + \frac{l^4 \cos^4 B}{360\rho^4} (61 - 58 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \right\}; \quad (4.11)$$

$$y = \frac{N \cos B \cdot l}{\rho} \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{6\rho^2} (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \frac{l^4 \cos^4 B}{120\rho^4} (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2 B) \right\}, \quad (4.12)$$

где $l = L - L_0$,

X – длина дуги меридиана от экватора до параллели с широтой B , вычисленная по формуле (1.16).

Формула для вычисления сближения меридианов с погрешностью, не превышающей $0,000 5''$, имеет вид:

$$\gamma = l \sin B \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{3} (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{l^4 \cos^4 B}{15} (2 - \operatorname{tg}^2 B) \right\}. \quad (4.13)$$

Вычисление масштаба изображения в проекции Гаусса – Крюгера:

$$m = 1 + \frac{1}{2\rho^2} l^2 \cos^2 B (1 + \eta^2) + \frac{1}{24\rho^4} l^4 \cos^4 B (5 - 4 \operatorname{tg}^2 B). \quad (4.14)$$

Из этой формулы видно, что масштаб изображения в проекции Гаусса – Крюгера на осевом меридиане ($l = 0$) действительно равен единице, а по мере удаления от осевого меридиана увеличивается ($m > 1$) тем больше, чем дальше удалена точка от осевого меридиана.

Результаты вычислений представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Элементы формул	Числовые значения	Элементы формул	Числовые значения
B_A	$57^\circ 54' 30,9335''$	x_A	6 421 259,585 8 м
L_A	$51^\circ 19' 16,4140''$	y_A	19 043,672 м
n	9	γ	$0^\circ 16' 19,7187''$
		m	1,000 004 444

3. Рассчитать приближенное значение дирекционного угла и длину исходной стороны на плоскости.

Данный пункт задания выполняется по формулам (4.5).

4. Вычислить приближенные прямоугольные координаты пункта B и поправку за кривизну изображения геодезической линии AB (формулы (4.6), (4.7)).

Результаты решения задач пунктов 3 и 4 приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Элементы формул	Числовые значения	Элементы формул	Числовые значения
A_{AB}	$48^{\circ}47'01,746''$	x_A	6 421 259,585 8 м
γ	$0^{\circ}26'59,7187''$	y_A	19 043,672 м
S	25 615,847 м	x'_B	6 438 229,325 6 м
m	1,000 004 444	y'_B	38 232,350 5 м
D'_{AB}	$48^{\circ}30'42,0273''$	δ_{AB}	$-1,091 2''$
S'_{AB}	25 615,960 8 м		

5. Найти редуцированное значение исходной стороны, дирекционного угла и окончательные прямоугольные координаты пункта B (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Элементы формул	Числовые значения
D_{AB}	$48^{\circ}30'40,9361''$
S_{AB}	25 616,114 1 м
x_B	6 438 229,528 6 м
y_B	38 232,375 5 м

6. Вычислить приближенные координаты определяемых пунктов сети.

Плоские прямоугольные координаты определяемых пунктов сети могут быть вычислены двумя способами. Первый способ основан на решении прямых геодезических задач на плоскости по соответствующим сторонам сети. Но для этого необходимо предварительно решить треугольники на плоскости с целью определения сторон. Во втором способе координаты определяемого пункта вычисляются непосредственно по углам плоского треугольника и координатам двух пунктов.

Из нескольких видов формул для второго способа наиболее удобными являются формулы Юнга. Для вычисления координат определяемого пункта C в треугольнике ABC формулы будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{x_A \operatorname{ctg} B + x_B \operatorname{ctg} A - (y_B - y_A)}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}; \\ y_C &= \frac{y_A \operatorname{ctg} B + y_B \operatorname{ctg} A + (x_B - x_A)}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Результаты вычислений представлены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Элементы формул	Числовые значения	Элементы формул	Числовые значения
x_A	6 421 259,585 8 м	A	63°15'08,457"
y_A	19 043,672 м	B	41°14'31,217"
x_B	6 438 229,528 6 м	x_C	6 414 792,145 4 м
y_B	38 232,375 5 м	y_C	35 242,687 2 м

В данном пункте задания самостоятельно вычислить прямоугольные координаты определяемого пункта D треугольника BDC .

7. Рассчитать поправки за кривизну изображения геодезических линий сети и выполнить уравнивание углов треугольников.

Поправки за кривизну изображения геодезических линий вычисляют по формуле (4.7). Результаты вычислений поправок в углы треугольника ABC представлены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Элементы формул	Числовые значения	Элементы формул	Числовые значения
x_A	6 421 259,585 8 м	δ_{AB}	-1,0912"
y_A	19 043,672 м	δ_{BA}	1,3656"
x_B	6 438 229,528 6 м	δ_{BC}	2,2059"
y_B	38 232,375 5 м	δ_{CB}	-2,1469"
x_C	6 414 792,145 4 м	δ_{AC}	0,3996"
y_C	35 242,687 2 м	δ_{CA}	-0,4879"

Контроль вычисления поправок за кривизну изображения геодезических линий и уравнивание углов в треугольнике ABC выполнить по следующим формулам и результаты вычислений записать в табл. 4.6:

$$\begin{aligned}\Delta_i &= \delta_{i,\text{пр}} - \delta_{i,\text{лев}}, \text{ где } (i = A, B, C); \\ W &= (A + B + C) - 180^\circ; \\ i' &= i + \Delta_i; i'_{\text{ур}} = i' - \frac{W}{3}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Таблица 4.6

Номер треугольника	Вершины треугольника	Углы сферои- дического треугольника i	Δ	Углы плоского треугольника i'	$\frac{W}{3}$	Уравненные плоские углы треугольника $i'_{\text{ур}}$
1	C	$75^\circ 30' 19,489''$	$1,491''$	$75^\circ 30' 20,980''$	$0,615''$	$75^\circ 30' 21,595''$
	B	$41^\circ 14' 31,217''$	$-0,840''$	$41^\circ 14' 30,377''$	$0,615''$	$41^\circ 14' 30,992''$
	A	$63^\circ 15' 08,457''$	$-1,659''$	$63^\circ 15' 06,798''$	$0,615''$	$63^\circ 15' 07,413''$
	Σ E	$179^\circ 59' 59,163''$ $1,008''$	$-1,008''$	$179^\circ 59' 58,155''$	$1,845''$	$180^\circ 00' 00,000''$

Самостоятельно вычислить поправки за кривизну изображения геодезических линий сети и выполнить уравнивание углов треугольника BDC .

8. Найти окончательные прямоугольные координаты определяемых пунктов сети и составить каталог координат [1]. В каталоге координат должны быть записаны условные ординаты (формула (4.3)).

9. Преобразовать прямоугольные координаты пункта A в смежную зону.

При преобразовании прямоугольных координат в смежную зону используем аналитический способ преобразования как самый точный, который схематично можно представить в виде следующей цепочки преобразований:

$$x^I, y^I \Rightarrow B, l^I \Rightarrow B, L \Rightarrow B, l^{\text{II}} \Rightarrow x^{\text{II}}, y^{\text{II}}.$$

В этом способе связь различных систем плоских прямоугольных координат осуществляется с помощью системы геодезических координат, которая является единой для всей поверхности Земли.

Рабочие формулы и технологическая последовательность преобразований прямоугольных координат в смежную зону заключается в следующем [3, 7, 8, 11]:

1) сначала плоские прямоугольные координаты первой зоны преобразуем в геодезическую широту B и разность долгот l :

$$B = B_x - \rho \frac{y^2 (1 + \eta_x^2) \operatorname{tg} B_x}{2N_x^2} \left\{ 1 - \frac{y^2}{12N_x^2} (5 + 3 \operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2 - 9\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x) + \frac{y^4}{360N_x^4} (61 + 90 \operatorname{tg}^2 B_x + 45 \operatorname{tg}^4 B_x) \right\}; \quad (4.17)$$

$$l = \frac{\rho y}{N_x \cos B_x} \left\{ 1 - \frac{y^2}{6N_x^2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2) + \frac{y^4}{120N_x^4} \times \right. \\ \left. \times (5 + 28 \operatorname{tg}^2 B_x + 24 \operatorname{tg}^4 B_x + 6\eta_x^2 + 8\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x) \right\}, \quad (4.18)$$

где

$$\begin{aligned} B_x &= B_0 + (B_x - B_0); \\ B_0 &= \frac{x}{A}; \\ B_x - B_0 &= (\alpha + \beta \cos 2B_0 - \gamma \sin^2 2B_0) \sin 2B_0; \\ A &= a \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6 - \dots \right); \\ \alpha &= \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \frac{91}{512} e^6 + \dots; \\ \beta &= \frac{21}{128} (e^4 + e^6) + \dots; \\ \gamma &= \frac{151}{1536} e^6 + \dots; \end{aligned} \quad (4.19)$$

2) выполняем переход к долготе точки в соседней восточной зоне по формуле

$$L = L_0 + l; \quad (4.20)$$

3) преобразовываем геодезические координаты точки в плоские, но уже относительно осевого меридиана второй зоны по формулам (4.11), (4.12).

Результаты вычислений представлены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Элементы формул	Числовые значения	Элементы формул	Числовые значения
x_A	6 421 259,585 8 м	x'_A	6 435 357,034 7 м
y_A	19 043,672 м	y'_A	-336 422,526 8 м
n	10		

Контрольные вопросы

1. Какое отображение называется конформным (равноугольным)?
2. Условия отображения поверхности эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса. Зонирование.
3. Что такое сближение меридианов на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера и каковы формулы его вычисления?
4. Масштаб изображения. Как он вычисляется?
5. Геометрический смысл поправки за кривизну изображения геодезической линии на плоскости. Формулы для ее вычисления.
6. Какова связь дирекционного угла на плоскости с геодезическим азимутом?
7. Перечислить этапы проектирования элементов геодезических сетей с эллипсоида на плоскость.
8. С какой целью и как истинные ординаты в шестиградусных зонах заменяют «условными»?
9. Рассчитать приближенные значения относительного удлинения линий в проекции Гаусса на краю шести- и трехградусных зон для точек с заданной широтой.

10. Каким образом контролируется вычисление поправок за кривизну изображения геодезических линий при переносе сети триангуляции с эллипсоида на плоскость?

11. Что такое перекрытие двух зон и с какой целью они вводятся?

12. Какие существуют способы преобразования координат из одной зоны в другую?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящий практикум подготовлен в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего образования и рабочей программы дисциплины для обучающихся по направлению подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата).

В практикуме представлены:

- 1) системные представления о задачах и содержании практической составляющей дисциплины «Сфероидическая геодезия»;
- 2) описание разделов работы с рабочими формулами, реализованными алгоритмами, полученными результатами и пояснениями;
- 3) указания и требования, предъявляемые к оформлению и выполнению работ с приведением кратких теоретических сведений;
- 4) задания и исходные данные для выполнения индивидуальных практических работ по дисциплине.

Изучение геометрии земного эллипсоида, методов решения различных геодезических задач на его поверхности, отображения земного эллипсоида на плоскость с целью получения систем плоских прямоугольных координат составляют основное содержание дисциплины «Сфероидическая геодезия».

Целью рассмотренных в практикуме работ является углубление и закрепление теоретических знаний, полученных обучающимися на лекциях и в процессе самостоятельного изучения учебного материала, а следовательно, формирование у них определенных умений и навыков.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афонин К. Ф. Высшая геодезия. Системы координат и преобразования между ними : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2020. – 112 с.
2. Бойко Е. Г. Высшая геодезия. Ч. II. Сфероидическая геодезия : учеб. для вузов. – М. : «Картогеоцентр» – «Геодезиздат», 2003. – 144 с.
3. Крылов В. И. Координатно-временные преобразования в геодезии [Текст] : учеб. пособие. – М. : МИИГАиК, 2014. – 90 с.
4. Мазуров Б. Т. Высшая геодезия : учеб. для вузов. – Новосибирск : СГУГиТ, 2016. – 203 с.
5. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии : учебник для вузов. – изд. 2-е, перераб и доп. – М. : Недра, 1979. – 296 с.
6. Телеганов Н. А. Геометрия земного эллипсоида : учеб. пособие по сфероидической геодезии. Ч. 1. – Новосибирск : СГГА, 1995. – 83 с.
7. Телеганов Н. А. Решение геодезических задач на эллипсоиде и конформное отображение эллипсоида на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера : учеб. пособие по сфероидической геодезии. Ч. 2. – Новосибирск : СГГА, 1996. – 88 с.
8. Телеганов Н. А., Елагин А. В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2004. – 238 с.
9. Телеганов Н. А., Тетерин Г. Н. Метод и системы координат в геодезии : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2008. – 143 с.
10. Хорошилов В. С., Кобелева Н. Н. Геодезия : учеб.-метод. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2020. – 123 с.
11. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы) : учеб. пособие для вузов / Н. В. Яковлев, Н. А. Беспалов, В. П. Глумов, Ю. Г. Карпушин, А. В. Мерзенин, Л. В. Огородова, Л. П. Пеллинен. – изд. 2-е. – М. : Альянс, 2007. – 368 с.

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ГЕОСИСТЕМ
И ТЕХНОЛОГИЙ»
(СГУГиТ)

Кафедра космической и физической геодезии

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

**ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ ТОЧЕК ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА,
РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ, ДЛИН ДУГ МЕРИДИАНОВ, ПАРАЛЛЕЛЕЙ,
ПЛОЩАДЕЙ И РАЗМЕРОВ СФЕРОИДИЧЕСКИХ ТРАПЕЦИЙ**

Выполнил _____ Сидоров А. В.
(подпись)

Обучающийся группы БГ-41.

Проверил _____ Елагин А. В.
(подпись)

Доцент каф. КиФГ, к.т.н.

Новосибирск – 2020

ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

Кафедра космической и физической геодезии

Дисциплина: «Сфероидическая геодезия»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Тема: вычисление координат точек поверхности эллипсоида вращения, радиусов кривизны, длин дуг меридианов и параллелей, площадей и размеров рамок сфероидических трапеций.

Цель работы: изучить геометрию земного эллипсоида, системы координат, применяемые в высшей геодезии, научиться определять площадь и размеры рамок сфероидических трапеций.

Содержание работы

1. Кратко описать основные системы координат, используемые в высшей геодезии, с приведением необходимых чертежей, определений и пояснений.

По данным геодезическим координатам исходного пункта своего варианта сети вычислить:

- приведенную U и геоцентрическую Φ широты;
- прямоугольные координаты X, Y меридианного эллипса;
- пространственные координаты X, Y, Z .

2. Дать определения и показать на чертеже основные кривые поверхности эллипсоида вращения и их радиусы кривизны.

2.1. По координатам исходной точки своего варианта вычислить радиусы кривизны:

- меридиана;
- первого вертикала;
- средний радиус кривизны нормальных сечений.

2.2. Вычислить длину дуги меридиана от экватора до параллели с широтой, равной широте исходной точки сети.

2.3. Исследовать изменения радиуса кривизны нормального сечения в зависимости от азимута.

3. Вычислить площадь и размеры рамок сфероидической трапеции.

3.1. Привести чертеж эллипсоида вращения с изображением на нем сфероидической трапеции.

3.2. Вычислить площадь сфероидической трапеции масштаба $1 : 50\,000$, в пределах которой расположена точка с широтой, равной широте исходного пункта Вашей сети.

3.3. Вычислить размеры рамок сфероидической трапеции.

4. Кратко изложить вопрос о расхождениях нормальных сечений и геодезической линии с приведением необходимых рисунков и окончательных формул.

Рассчитать угловые и линейные расхождения для исходной стороны своей сети.

Контрольные вопросы

1. Что такое геодезическая, астрономическая, геоцентрическая и приведенная широты? Их отличия.
2. Чем отличается геодезическая долгота от астрономической?
3. Что такое геодезический азимут? В чем его отличие от астрономического?
4. Какие кривые на поверхности эллипсоида вращения представляют наибольший интерес для геодезии и почему? Уравнение Клеро свойства геодезической линии.
5. Что такое кривизна кривой на поверхности вообще и в частности? Что такое нормальная и геодезическая кривизна?
6. Можно ли указать на поверхности эллипсоида две точки, между которыми возможно провести более одной геодезической линии?
7. В каких широтах дуга меридиана имеет максимальную и минимальную кривизну?
8. Найти геодезические координаты вершин трапеций $N - 42-123$.
9. В каких частных случаях взаимные нормальные сечения совпадают и в каких максимально расходятся?
10. Как расположатся геодезическая линия, прямое и обратное нормальные сечения и параллель, соединяющие две точки с одинаковыми широтами?

Литература

1. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. – изд. 2-е. – М. : Недра, 1979.
2. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы) / под ред. Н. В. Яковлева. – М. : Альянс, 2007.
3. Телеганов Н. А. Геометрия земного эллипсоида : учеб. пособие. Ч. 1. – Новосибирск, 1995.
4. Телеганов Н. А., Елагин А. В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2004.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Тема: решение сфероидических треугольников.

Цель работы: изучить последовательность решения сфероидических треугольников с применением теоремы Лежандра и по способу аддитаментов.

Содержание работы

1. Кратко изложить основные положения теории замены сфероидического треугольника сферическим при заданных искажениях элементов треугольника с приведением необходимых чертежей и окончательных формул.

2. Описать последовательность решения сферических треугольников с применением теоремы Лежандра и по способу аддитаментов.

3. Выполнить уравнивание углов и решить треугольники по способу аддитаментов.

4. Используя вычисленные стороны, решить треугольники как линейные с применением теоремы Лежандра.

Контрольные вопросы

1. Что такое сфероидический треугольник?

2. При каких размерах сторон сфероидические треугольники можно решать как сферические, если требуется определить элементы треугольника с точностью $1 \cdot 10^{-6}$?

3. В чем отличие решения сферических и сфероидических треугольников?

4. Что такое аддитамент стороны и как он вычисляется?

5. Сформулировать теорему Лежандра и привести формулу перехода от угла сфероидического треугольника к плоскому при больших сторонах.

6. Как вычисляется сферический избыток ϵ при сторонах, меньших и больших 90 км?

Литература:

1. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. – изд. 2-е. – М. : Недра, 1979.

2. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы) / под ред. Н. В. Яковлева. – М. : Альянс, 2007.

3. Телеганов Н. А. Геометрия земного эллипсоида : учеб. пособие. Ч. 1. – Новосибирск, 1995.

4. Телеганов Н. А., Елагин А. В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2004.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Тема: решение прямой и обратной геодезических задач на поверхности эллипсоида.

Цель работы: изучить основы решения главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида вращения.

Содержание работы

1. Изложить общие основы решения главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида вращения с обоснованием точности вычисления геодезических координат и азимутов. Перечислить наиболее распространенные способы решения прямой и обратной геодезических задач.
2. По данным геодезическим координатам исходного пункта A , стороне AB и ее азимуту решить прямую геодезическую задачу по способу Бесселя.
3. Решить обратную геодезическую задачу по формулам со средними аргументами.

Контрольные вопросы

1. Что такое прямая и обратная геодезические задачи? Сколько исходных данных и каких надо иметь при решении той и другой задач?
2. Чем вызвано различие прямого и обратного азимутов?
3. С какой точностью необходимо вести вычисления приращений геодезических координат и азимутов?
4. Какие методы решения главной геодезической задачи целесообразно применять при больших расстояниях?
5. Как можно проконтролировать с помощью теоремы Клеро вычисление широты определяемой точки и обратного геодезического азимута?
6. Перечислите основные этапы и порядок действия в них при решении главной геодезической задачи по способу Бесселя.
7. Почему обратная геодезическая задача по способу Бесселя решается методом приближений?
8. Приведите приближенные формулы вычисления разностей широт, долгот и азимутов и оцените погрешности решения задачи по ним.

Литература

1. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. – изд. 2-е. – М. : Недра, 1979.
2. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы) / под ред. Н. В. Яковлева. – М. : Альянс, 2007.
3. Телеганов Н. А. Решение геодезических задач на эллипсоиде и конформное отображение эллипсоида на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера: учеб. пособие. по сфероидической геодезии. Ч. 2. – Новосибирск : СГГА, 1996.
4. Телеганов Н. А., Елагин А. В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2004.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Тема: проектирование элементов геодезической сети с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера и вычисление плоских прямоугольных координат.

Цель работы: рассмотреть порядок действий при переходе с эллипсоида на плоскость при математической обработке геодезических измерений в проекции Гаусса – Крюгера.

Содержание работы

1. Кратко описать основные этапы проектирования элементов геодезической сети с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера с приведением необходимых чертежей и основных формул.

2. Вычислить для пункта A плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера, сближение меридианов и масштаб изображения.

3. Рассчитать приближенные значения дирекционного угла и длину исходной стороны на плоскости.

4. Вычислить приближенные прямоугольные координаты пункта B и поправку за кривизну изображения геодезической линии AB .

5. Найти редуцированное значение исходной стороны, ее дирекционного угла и окончательные прямоугольные координаты пункта B .

6. Вычислить приближенные координаты определяемых пунктов сети.

7. Рассчитать поправки за кривизну изображения геодезических линий сети и выполнить уравнивание углов треугольников.

8. Найти окончательные прямоугольные координаты определяемых пунктов сети и составить каталог координат.

9. Преобразовать прямоугольные координаты пункта A в смежную зону.

Контрольные вопросы

1. Какое отображение называется конформным (равноугольным)?

2. Условия отображения поверхности эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса. Зонирование.

3. Что такое сближение меридианов на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера и каковы формулы его вычисления?

4. Масштаб изображения. Как он вычисляется?

5. Геометрический смысл поправки за кривизну изображения геодезической линии на плоскости. Формулы для ее вычисления.

6. Какова связь дирекционного угла на плоскости с геодезическим азимутом?

7. Перечислить этапы проектирования элементов геодезических сетей с эллипсоида на плоскость.

8. С какой целью и как истинные ординаты в шестиградусных зонах заменяют «условными»?
9. Рассчитать приближенные значения относительного удлинения линий в проекции Гаусса на краю шести- и трехградусных зон для точек с заданной широтой.
10. Каким образом контролируется вычисление поправок за кривизну изображения геодезических линий при переносе сети триангуляции с эллипсоида на плоскость?
11. Что такое перекрытие двух зон и с какой целью они вводятся?
12. Какие существуют способы преобразования координат из одной зоны в другую?

Литература

1. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. – Изд. 2-е. – М. : Недра, 1979.
2. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы) / под ред. Н. В. Яковлева. – М. : Альянс, 2007.
3. Телеганов Н. А. Решение геодезических задач на эллипсоиде и конформное отображение эллипсоида на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера: учеб. пособие. по сфероидической геодезии. Ч. 2. – Новосибирск : СГГА, 1996.
4. Телеганов Н. А., Елагин А. В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2004.
5. Афонин К. Ф. Высшая геодезия. Системы координат и преобразования между ними : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2020.

**ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

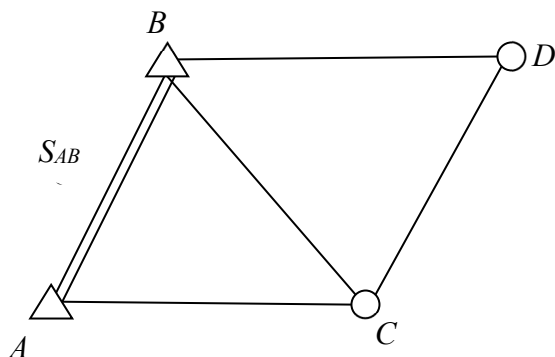


Схема сети

Номер варианта	B_A	Треугольник ABC , углы:	Треугольник BDC , углы:
	L_A		
	A_{AB}	A	B
	S_{AB}	B	D
		C	C
1	66°04'08,8368" 76°26'20,3962" 351°10'41,941" 23 491,993 м	62°07'45,830" 61°57'25,431" 55°54'47,948"	62°31'56,174" 56°13'03,668" 61°14'59,971"
2	68°43'42,9962" 47°53'15,0410" 241°37'20,612" 23 341,218 м	61°48'18,993" 62°11'53,981" 55°59'48,541"	60°10'04,316" 60°02'51,235" 59°47'04,454"
3	56°51'02,8352" 32°17'23,6386" 75°42'55,252" 22 876,300 м	59°58'14,378" 60°17'32,267" 59°44'13,230"	59°25'30,761" 61°48'46,191" 58°45'44,535"
4	44°16'14,2007" 42°02'37,4564" 6°13'04,913" 22 525,863 м	58°44'42,766" 58°47'05,942" 62°28'11,157"	59°06'33,706" 61°27'43,972" 59°25'43,603"
5	42°09'37,4279" 67°21'39,6984" 96°05'17,552" 22 611,244 м	58°19'43,886" 58°09'48,913" 63°30'29,717"	58°40'45,447" 61°04'59,623" 60°14'13,685"
6	50°10'04,3676" 88°19'33,8409" 264°03'24,041" 23 054,189 м	60°14'00,254" 59°42'52,680" 60°03'05,898"	61°50'38,245" 56°26'27,787" 61°42'53,142"

Номер варианта	B_A	Треугольник ABC , углы:	Треугольник BDC , углы:
	L_A A_{AB} S_{AB}		
7	63°55'16,0790" 80°56'04,6526" 353°38'05,135" 23 446,915 м	60°57'30,162" 60°49'36,850" 58°12'50,127"	61°01'32,674" 58°24'46,795" 60°33'40,784"
8	68°57'25,9513" 56°45'33,3911" 285°18'34,490" 23 429,900 м	62°25'31,490" 62°35'16,382" 54°59'12,234"	61°43'14,463" 57°41'37,814" 60°35'07,194"
9	61°37'07,6295" 34°01'04,8030" 119°09'35,472" 23 017,027 м	60°44'09,744" 61°11'15,961" 58°04'35,309"	59°17'44,992" 61°36'26,987" 59°05'48,157"
10	48°08'45,4728" 36°14'05,5092" 9°48'42,067" 22 589,146 м	59°11'40,707" 59°26'26,067" 61°21'54,093"	58°35'23,517" 62°07'16,872" 59°17'19,716"
11	41°07'08,5758" 61°06'15,9060" 57°41'54,450" 22 539,637 м	59°08'10,343" 58°54'15,339" 61°57'34,438"	59°59'18,987" 59°07'11,822" 60°53'28,597"
12	47°13'04,6149" 85°27'24,3518" 218°40'38,704" 22 914,007 м	60°31'11,306" 60°00'56,426" 59°27'51,994"	61°54'20,443" 55°46'16,485" 62°19'22,767"
13	60°18'31,3944" 87°11'17,7135" 344°38'58,629" 23 367,806 м	61°56'34,116" 61°33'42,787" 56°29'42,486"	62°51'08,737" 54°59'20,827" 62°09'31,037"
14	68°19'35,2615" 64°51'20,3280" 319°54'09,740" 23 483,884 м	62°11'45,985" 62°12'27,776" 55°35'45,666"	62°06'24,177" 57°14'24,636" 60°39'09,639"
15	65°05'37,0651" 38°00'48,1940" 167°07'44,812" 23 155,887 м	61°04'41,110" 61°33'04,856" 57°22'15,460"	59°24'08,523" 61°25'57,281" 59°09'52,952"
16	51°38'47,1073" 31°25'40,9253" 25°37'48,652" 22 683,817 м	58°21'53,329" 58°47'24,631" 62°50'44,438"	57°16'04,538" 64°51'50,256" 57°52'06,140"
17	41°14'57,2806" 53°00'04,3901" 27°37'11,586" 22 503,629 м	58°38'50,202" 58°29'49,180" 62°51'20,323"	59°32'17,180" 60°23'38,448" 60°04'03,998"

Номер варианта	B_A	Треугольник ABC , углы:	Треугольник BDC , углы:
	L_A A_{AB} S_{AB}		
18	45°22'11,5527" 79°31'36,0578" 169°39'30,554" 22 780,414 м	60°15'56,891" 59°55'35,848" 59°48'28,344"	60°47'31,051" 56°59'53,138" 62°12'36,218"
19	56°07'10,2857" 88°58'26,9237" 320°31'20,655" 23 257,792 м	60°49'18,184" 60°22'23,958" 58°48'16,494"	62°08'29,380" 56°16'21,606" 61°35'08,450"
20	68°40'51,1504" 72°10'44,4479" 344°19'47,269" 23 500,780 м	62°52'48,446" 62°55'25,730" 54°11'46,943"	61°59'11,230" 56°19'28,982" 61°41'20,150"
21	66°09'13,7341" 44°59'47,3125" 216°08'04,738" 23 281,780 м	61°13'31,532" 61°28'17,961" 57°18'09,914"	60°45'25,774" 59°58'42,903" 59°15'52,058"
22	55°11'47,7169" 31°54'41,9503" 56°07'56,926" 22 805,429 м	59°56'01,139" 60°16'26,271" 59°47'32,917"	59°10'45,068" 61°51'38,278" 58°57'37,350"
23	42°09'57,2844" 44°48'22,6198" 8°56'22,000" 22 506,487 м	57°32'04,428" 57°30'01,388" 64°57'52,774"	58°27'59,255" 63°01'55,340" 58°30'05,546"
24	41°55'43,0790" 73°15'19,0170" 120°58'44,066" 22 663,125 м	59°21'07,352" 58°56'17,628" 61°42'34,615"	60°46'33,166" 57°50'47,683" 61°22'39,076"
25	52°37'20,6263" 89°38'39,5127" 286°41'49,369" 23 128,660 м	61°07'29,111" 60°37'10,880" 58°15'19,456"	62°28'23,972" 55°08'46,282" 62°22'49,874"
26	65°21'13,6048" 79°44'05,3062" 355°01'30,461" 23 476,396 м	62°31'43,720" 62°19'03,460" 55°09'12,492"	62°51'05,762" 55°15'43,883" 61°53'10,117"
27	68°03'26,1997" 52°29'58,8834" 262°47'52,577" 23 386,237 м	61°55'00,162" 62°05'47,725" 55°59'11,774"	61°24'58,496" 58°35'03,818" 59°59'58,253"
28	59°25'20,1531" 31°14'54,6906" 94°06'24,407" 22 940,944 м	59°15'59,067" 59°47'15,437" 60°56'47,957"	57°46'51,251" 64°25'15,265" 57°47'51,652"

Номер варианта	B_A	Треугольник ABC , углы:	Треугольник BDC , углы:
	L_A A_{AB} S_{AB}		
29	46°36'21,8961" 38°39'24,1027" 6°10'34,316" 22 551,279 м	58°59'45,706" 59°12'45,349" 61°47'30,057"	58°24'47,014" 62°12'26,992" 59°22'46,632"
30	41°06'15,7051" 65°28'21,4189" 77°37'18,755" 22 573,692 м	59°12'03,633" 58°53'53,873" 61°54'02,430"	60°16'44,591" 58°37'48,266" 61°05'27,368"

Учебное издание

Кобелева Наталья Николаевна
Елагин Александр Викторович

СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Редактор *Е. Н. Ученова*

Компьютерная верстка *О. И. Голиков*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 04.12.2020. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 3,72. Тираж 55 экз. Заказ 152.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.