

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»  
(СГУГиТ)

В. А. Калюжин

**МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ  
И СЕРТИФИКАЦИЯ В ГЕОДЕЗИИ И КАДАСТРЕ**

**ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ МНОГОКРАТНЫХ  
РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве  
учебно-методического пособия для обучающихся по направлению  
подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры  
(уровень бакалавриата)

Новосибирск  
СГУГиТ  
2023

УДК 006:528.44(075.8)

К17

Рецензенты: кандидат технических наук, заместитель главы администрации  
Новосибирского района Новосибирской области *Ф. В. Каравайцев*

кандидат технических наук, профессор, СГУГиТ *Е. И. Аврунёв*

**Калюжин, В. А.**

К17 Метрология, стандартизация и сертификация в геодезии и кадастре. Обработка прямых многократных равноточных измерений : учебно-методическое пособие / В. А. Калюжин. – Новосибирск : СГУГиТ, 2023. – 75 с. – Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-907711-23-5

Учебно-методическое пособие подготовлено кандидатом технических наук, доцентом В. А. Калюжиным на кафедре геоматики и инфраструктуры недвижимости Сибирского государственного университета геосистем и технологий.

В учебно-методическом пособии рассмотрены основные положения раздела «Теоретические основы метрологии» и описана последовательность выполнения индивидуального задания по дисциплине «Метрология, стандартизация и сертификация в геодезии и кадастре» на тему «Обработка прямых многократных равноточных измерений». Приведен пример обработки результатов прямых многократных измерений метрового интервала металлической рулетки с помощью штриховой меры и представлены варианты индивидуального задания для обучающихся.

Учебно-методическое пособие по выполнению индивидуального задания по дисциплине «Метрология, стандартизация и сертификация в геодезии и кадастре» предназначено для обучающихся 1-го курса по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры (уровень бакалавриата).

Рекомендовано к изданию кафедрой геоматики и инфраструктуры недвижимости СГУГиТ, Ученым советом Института кадастра и природопользования СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 006:528.44(075.8)

ISBN 978-5-907711-23-5

© СГУГиТ, 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	4
1. Краткий исторический очерк развития систем единиц .....	7
2. Основные теоретические положения метрологии.....	14
3. Измерение .....	18
4. Погрешности измерений .....	27
5. Обработка результатов прямых равноточных измерений.....	49
6. Индивидуальное задание .....	60
Заключение .....	66
Библиографический список.....	67
Приложение 1. Варианты индивидуального задания .....	70
Приложение 2. Критические значения $Gt$ для критерия Граббса .....	73
Приложение 3. Значения коэффициентов Стьюдента $t$ .....	74

## ВВЕДЕНИЕ

В эпоху цифровой трансформации геодезии и кадастровой деятельности стали широко применяться современные электронные технические средства измерений (электронные тахеометры, цифровые нивелиры и т. п.) и информационно-измерительные системы (ГЛОНАСС, инерциальные навигационные или геодезические системы), реализующие полуавтоматический или автоматический режимы наблюдений и обработки. По этой причине термин «измерения» стали заменять термином «сбор данных о пространственных объектах».

Вместе с тем процесс измерения не изменился. Он также включает подготовительный, экспериментальный и вычислительный этапы, только теперь многие операции измерения автоматизированы и стало более удобно и комфортно выполнять наблюдения.

В этой связи рассмотрение основ теории измерений, в том числе методики обработки прямых многократных равноточных измерений величины, является актуальной задачей.

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры, основной образовательной программой высшего образования – бакалавриата по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры, профиль «Кадастр недвижимости» и рабочей программой дисциплины «Метрология, стандартизация и сертификация в геодезии и кадастре».

Целью учебно-методического пособия является формирование у обучающихся общепрофессиональной компетенции – способности обрабатывать и представлять полученные результаты с применением информационных технологий и прикладных аппаратно-программных средств.

К задачам относятся:

– формирование у обучающихся общего представления о метрологии как науке, ее целях, задачах, методах и способах их достижения;

- получение общего представления об основах теории измерений физических величин;
- получение практических навыков обработки прямых многократных равноточных измерений величины с помощью прикладного программного обеспечения.

Учебно-методическое пособие состоит из шести разделов и трех приложений.

В первом разделе рассмотрена эволюция систем единиц в метрологии, которая характеризуется эпохами: собирательной и антропологической, прототипов (артефактов) природы и квантовой. Сейчас наступает эпоха опережающего развития, опирающаяся на фундаментальные законы, которые позволяют реализовать все единицы с точностью, ограниченной только квантовой структурой природы.

Во втором разделе в сжатой форме раскрываются основные теоретические положения о метрологии как науке: объект, предмет, цель, задачи, единство измерений.

В третьем разделе рассмотрены основные операции измерения, сгруппированные в три этапа: подготовительный, экспериментальный и вычислительный. Приведены характеристики качества измерений и основные аксиомы теории измерения.

Четвертый раздел посвящен погрешностям измерений, где кратко рассмотрены: систематическая, случайная и грубая погрешности, меры и способы исключения систематической и грубой погрешности, точечная и интервальная оценки результата измерений.

В пятом разделе, опираясь на нормативно-технические документы и литературные источники, рассмотрена методика обработки прямых многократных равноточных измерений величины. Особое внимание уделено правилам представления и округления числовых значений величин и точечных оценок результата измерения. Для пояснения правил приводится ряд примеров.

Шестой раздел посвящен выполнению индивидуального задания. Он включает: цель, содержание, порядок выполнения работы и контрольные вопросы для подготовки к защите. Здесь подробно разобран пример обработки результатов прямых равноточных измерений и даны рекомендации по оформлению индивидуального задания.

Для выполнения индивидуального задания в прил. 1 представлены варианты, а в прил. 2 и 3 – вспомогательные статистические таблицы.

Для самоконтроля освоения теоретического материала в конце каждого раздела представлены контрольные вопросы.

Изучение изложенного материала рекомендуем начать с пятого и шестого разделов. После выполнения индивидуального задания следует вернуться к рассмотрению первых четырех.

## 1. КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ СИСТЕМ ЕДИНИЦ

Термин «метрология» происходит от двух древних греческих слов: «метро» – «мера» и «логос» – «речь, слово, понятие, учение» и означает учение о единицах и измерениях [12, 14, 16, 19].

Метрология зародилась еще в глубокой древности. Первое упоминание о системе мер и единицах измерений обнаружено в Месопотамии в середине третьего тысячелетия до нашей эры [14]. Эта система была введена Саргоном Аккадским, поэтому ее называют аккадской системой мер. Предполагают, что в ней были взаимосвязаны в единой системе меры времени, длины, веса и объема, в частности, десятая часть двойного вавилонского локтя (992, 33 мм) была принята за ребро куба, наполненного водой, вес которой равнялся тяжелой «мине» (982,4 г). Время в Вавилоне вначале определяли по водным часам, где использовалась мера «мина» – промежуток времени, за которое из куба вытекла половина массы воды. Это составляло примерно два астрономических часа (90 минут). Затем перешли на секунднй маятник длиной 992,35 мм.

Предполагают, что появление аккадской системы мер обусловлено введением первого государственного кадастра. Это привело к унификации и упорядочению не только в системе налогообложения, но и в технологии кадастровых, землеустроительных и геодезических работ, в том числе в подготовке специалистов-землемеров. Считают, что эта система мер оказала значительное влияние на египетскую, греческую, римскую системы мер, а через них и на другие страны, в том числе на Россию [25].

Развитие и формирование метрологии как науки осуществлялось через призму трансформации понятия «измерение» и эволюцию систем единиц.

Исторически важными этапами эволюции системы единиц являются следующие.

Почти до конца XVIII в. метрология имела собирательный и антропологический характер. Для определения веса драгоценных камней – *ка-*

*рат* (0,2 г) было принято семя боба, а горошина в качестве аптекарского веса – *гран* (0,062 г) [14]. Английский король Эдвард II в 1324 г. установил в качестве единицы длины законный дюйм как длину трех ячменных зерен, вытянутых из средней части колоса и приставленных своими концами друг к другу. Для измерения длин и веса почти все народы использовали антропологические единицы, т. е. размеры человеческого тела. Так, в Древней Руси в качестве измерения длины использовали: пядь (расстояние по прямой между концами вытянутых большого и указательного пальцев взрослого человека), локоть (расстояние по прямой от локтевого сгиба до конца указательного пальца вытянутой руки), день пути; для определения веса и объема – охапка, ноша, горсть и др. [16].

После Французской революции (1789–1794) 22 июня 1799 г. Парижская академия наук создала и передала в архив два платиновых эталона: метр и килограмм. За единицу метра была принята одна сорокамиллионная часть Парижского меридиана, а за единицу массы принимался килограмм – масса кубического дециметра чистой воды при температуре +3,98 °С и давлении 101 325 Па. Следовательно, в конце XVIII в. французские ученые первыми создали и предложили миру десятичную метрическую систему единиц, которая основывается на наиболее постоянных прототипах, артефактах природы, т. е. физических величинах, физических процессах и химических свойствах веществ [27]. Она явилась прологом международной метрической системы единиц (SI), но на ее формирование потребовалось еще 160 лет. К знаковым событиям этого периода относятся следующие.

В 1832 г. К. Ф. Гаусс поддержал применение метрической системы, добавив в нее третью величину – время, а единицу – *секунду*, равную 1/86 400 солнечного дня. Также было предложено принять за основные единицы измерений сначала *сантиметр*, *грамм* и *секунду*, а затем *метр*, *килограмм* и *секунду*. Опираясь на известные уравнения связи, были установлены другие физические величины, которые в последующем стали называть производными. Тем самым была принята не только сама система единиц, но и, что важнее, был определен принцип построения системы единиц измерения: *система единиц измерений должна содержать минимальное число основных единиц, при этом каждой физической величине соответствует только одна единица измерения* [27]. В дальнейшем он стано-

вится главным принципом международной системы единиц физических величин. Сейчас его трактуют как *удобство использования и практическая целесообразность* [1].

В 1889 г. были изготовлены последние варианты эталонов из сплава платины (90 %) и иридия (10 %). Выбор материала обусловлен химической устойчивостью сплава. Эталон для длины представлял собой линейку X-образного сечения длиной 102 см. Эталон массы был выполнен в форме цилиндра с равными высотой и диаметром (чуть более 39 мм). Сейчас эти эталоны единиц хранятся в Международном бюро мер и весов в Севре вблизи Парижа и являются в бóльшей степени историческими экспонатами [14].

Впоследствии, в рамках Метрической конвенции, подписанной 20 мая 1875 г., России были переданы по два эталона единицы длины и массы, которые были доставлены в Главную палату мер и весов.

Большую роль в становлении отечественной метрологии и внедрении метрической системы в России сыграл Д. И. Менделеев. Он с 1882 по 1907 гг. возглавлял Главную палату мер и весов. Сейчас это научное учреждение называется «Научно-исследовательский институт метрологии им. Менделеева». Период с 1892 по 1917 гг. называют периодом менделеевской метрологии. В этот период метрическая система внедрялась факультативно наряду со старой русской и английской системами. Только после декрета «О введении международной метрической системы мер и весов» с 1918 по 1927 гг. произошел переход к метрической системе [24].

После Великой Отечественной войны и до настоящего времени руководство метрологической деятельностью в нашей стране осуществляется Государственным комитетом по стандартизации (Госстандартом).

Под влиянием научных и технических открытий в 1940–60-х гг. столетия находит выражение бурное развитие прикладных исследований. Начало космической эры, строительство уникальных объектов, например, ускорителей заряженных частиц, атомных электростанций и т. п. обусловило выполнение измерений физических величин со сверхвысокой точностью. В свою очередь это приводит к повышению точности метрологического обеспечения до  $10^{-6}$ .

Физическая величина или величина – *свойство материального объекта или явления, общее в качественном отношении для многих, но в качественном индивидуальное для каждого из них* [23].

С 1954 по 1983 г. принимают название метрической системы – «Международная система единиц (SI)», которая сначала включала шесть основных физических величин и единиц (длину – *метр*; массу – *килограмм*; время – *секунду*; силу электрического тока – *ампер*; термодинамическую температуру – *кельвин*; силу света – *канделу*). Затем после продолжительного обсуждения, в 1971 г. на XIV Генеральной конференции по мерам и весам (ГКМВ) добавили седьмую физическую величину – количество вещества и единицу *моль*. Также в этот период произошли следующие изменения [13].

Платино-иридиевый эталон метра не позволял задать единицу с точностью, отвечающей современным требованиям науки и техники. Поэтому в 1960 г. была переопределена единица метр через излучение криптона – 86 (есть длина, равная  $1\,650\,763,73$  длинам волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между  $2p_{10}$  и  $5d_5$  уровнями атома криптона – 86).

В 1956 г. за единицу секунды принимают отношение  $1/31\,556\,926,974\,7$  тропического года 0 января 1900 в 12 часов, а в 1967/68 г. эта единица была пересмотрена и секунда стала равна  $9\,192\,631\,770$  периодам излучения, соответствующего переходу между сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133. После определения скорости распространения электромагнитных волн в вакууме  $c = 299\,792\,458$  метров в секунду (1975 г.), единица *метр* (1983 г.) стала равна длине пути, проходимого светом в вакууме за время  $1/299\,792\,458$  секунды. Использование квантовых эффектов при построении эталонов метра и секунды показало, что относительная погрешность сличения данных эталонов равны  $1 \times 10^{-9}$  и  $1 \times 10^{-12}$  соответственно. При этом относительная погрешность электрических эталонов была на уровне  $10^{-7}$ .

Следовательно, 1960–70-е гг. становятся, с одной стороны, завершающим этапом формирования метрической системы (SI), а с другой, началом перехода от *прототипов, артефактов природы* к *физическим величинам*, определяемыми уравнениями *фундаментальных законов природы и свойств материи* (квантовой теории, электродинамики, физики твердого тела, теории тонких структур и др.).

Переходный период продлился почти 60 лет. В течение этого периода перманентно (постоянно) происходили изменения, т. е. метрическая си-

стема усовершенствовалась: вводились новые понятия, производные величины единицы, обозначения кратных и дольных единиц; переопределялись основные единицы и т. д. [13]. А. С. Катков утверждает, что основной движущей силой усовершенствования системы единиц, в том числе переопределения единиц на основании квантовой теории и теории тонких структур явилась конкуренция измерительных возможностей электрических и механических величин. В результате электрические измерения величин в конкурентной борьбе победили за счет высокой точности и введением контролируемой опорной величины [9].

С 20 мая 2019 г. на основании резолюции XXVI ГКМВ (16 ноября 2018 г.) в новой метрической системе **SI (СИ)** все единицы стали определяться через фундаментальные физические константы (ФФК): точное значение частоты сверхтонкого расщепления невозмущенного основного состояния атома цезия-133  $\Delta_{\nu_{Cs}}$  (9 192 631 770 Гц); скорость света вакууме  $c$  (299 792 458 м/с); постоянную Планка  $h$  ( $6,62607015 \times 10^{-34}$  Дж·с); элементарный заряд  $e$  ( $1,602176634 \times 10^{-19}$  Кл); постоянную Больцмана  $k$  ( $1,380649 \times 10^{-23}$  Дж/К); постоянную Авогадро  $N_A$  ( $6,02214076 \times 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>); световую эффективность  $K_{кд}$  (683 лм/Вт), монохроматическое излучение  $540 \times 10^{12}$  Гц. Они заданы с нулевой неопределенностью [9, 10, 27].

Связь ФФК с основными единицами в новой метрической системе SI представлена на рис. 1.

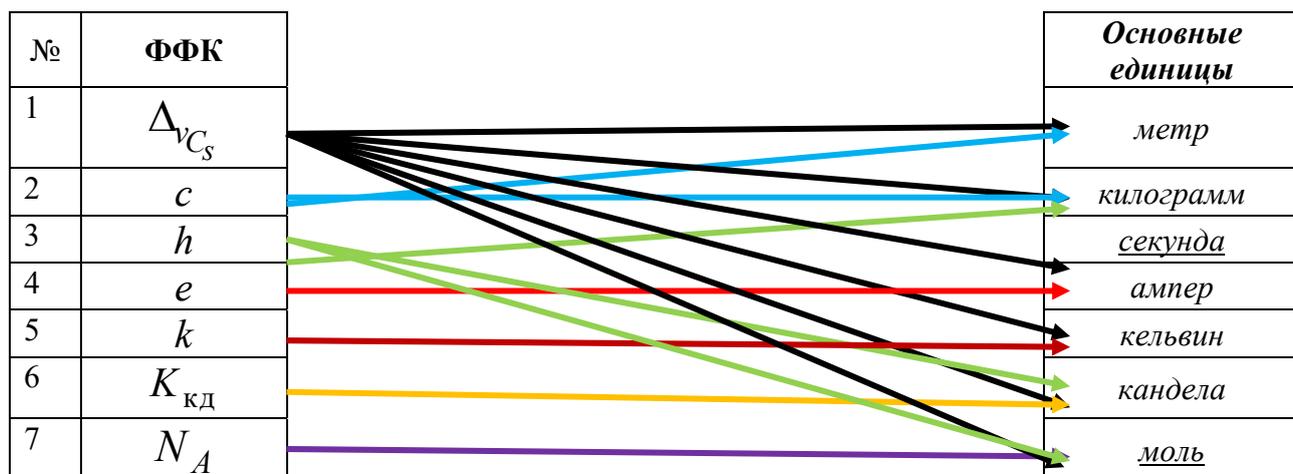


Рис. 1. Связь фундаментальных физических констант с основными единицами величин

Теперь новая метрическая система SI позволяет создать более простое и одновременно фундаментальное определение всей системы единиц, обеспечивающей предельную точность эталонов как для основных, так и для производных единиц.

Опираясь на ФФК, эталоны единиц величин можно задавать с относительной погрешностью от  $10^{-8}$  до  $10^{-12}$ . Две основные единицы (*секунда* и *моль*) определяются на основании только одной соответствующей ФФК (см. рис. 1.). Для всех остальных основных единиц требуется от двух до трех фундаментальных физических констант.

Впервые стал доступен полный набор определений, не требующий для сравнения какие-либо эталоны в виде артефактов, материальных свойств или описания измерений. Это позволяет реализовать все единицы с точностью, ограниченной практически только квантовой структурой природы и нашими техническими возможностями. Единицы могут быть воспроизведены независимо в любом месте и в любое время. По мере развития науки и технологии могут быть внедрены и более совершенные методы реализации без необходимости переопределения единиц.

В дальнейшем, за счет развития существующих теории и новых открытий, возможен процесс уточнения значений ФФК и переход на новые действительные уравнения физики, связывающие константы с единицами. Тем самым создается возможность для инноваций и повсеместной реализации с возрастающей точностью по мере развития технологий [7, 9, 13].

Считают, что метрология в XXI в. будет развиваться по следующим направлениям [7, 8, 10, 27, 28]:

- расширение и/или видоизменение ФФК за счет открытия и создания новых теорий;
- разработка методов и технологий измерений за границей сегодняшних возможностей метрологии в аспекте точности, размеров, протяженности и т. д. в условиях быстро меняющихся окружающих сред;
- разработка цифровой системы обеспечения единства измерений, где все средства измерений будут интегрированы в единую пространственно-распределенную интеллектуальную информационную систему испытаний, поверки и калибровки в масштабе реального времени.

Таким образом, в хронологии эволюции систем единиц в метрологии следует выделить следующие этапы. Условно их можно назвать так:

а) с глубокой древности до 1799 г., «Метрология 0» – это собирательная и антропологическая метрология;

б) с 1799 до 1954 г., «Метрология 1.0» – метрология прототипов (артефактов) природы;

в) с 1954 до 2019 г., «Метрология 2.0» – формирование квантовой метрологии.

С 2019 г. наступает новый период, который можно охарактеризовать как «Метрология 3.0» – метрология опережающего развития, опирающаяся на фундаментальные законы, которые позволяют реализовать все единицы с точностью, ограниченной только квантовой структурой природы.

Это создает основу для инноваций и повсеместной реализации с возрастающей точностью по мере развития технологий [13].

### **Контрольные вопросы**

1. Когда впервые упоминается о системах мер и единицах?
2. Когда была создана десятичная метрическая система единиц?
3. Какие основные величины и единицы определены в системе СИ?
4. Какие эпохи характеризуют эволюцию системы единиц от глубокой древности до настоящего времени?
5. Какие направления развития метрологии будут осуществляться в XXI в.?

## 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТРОЛОГИИ

В соответствии с РМГ 29–2013 [23] метрология – *это наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности*. Здесь ключевыми словами являются: «измерение», «единство измерений» и «точность».

Под измерением понимают *совокупность операций, выполняемых для определения количественного значения величины* [26].

*Единство измерений* – состояние измерений, когда результат измерения представлен в принятой единице величин, а точность измерения находится в пределах принятого уровня значимости (10, 5 либо 0,3 %), т. е. в границах доверительного интервала с соответствующей вероятностью (0,95, 0,99 либо 0,997) [1].

*Точность* – это качественная характеристика измерений; она определяется близостью измерения опорному значению величины. *Опорное значение* – значение величины, которое используют в качестве основы для сопоставления со значениями величин того же рода [16, 23]. В качестве опорного значения принимают истинное или действительное (эталонное) значение. Если в процессе измерения необходимый эталон отсутствует, то в качестве опорного значения принимают общее арифметическое среднее [21].

Государственная система обеспечения единства измерений состоит из [6, 14, 21] *правовой, организационной и технической* подсистем.

*Правовая подсистема* – комплекс взаимосвязанных законодательных и подзаконных актов, устанавливающих согласованные требования объектам обеспечения единства измерений.

*Организационную подсистему* составляют: Государственная метрологическая служба, иные государственные метрологические службы и метрологические службы федеральных органов исполнительной власти и юридических лиц.

*Техническая подсистема* выполняет функцию воспроизведения, хранения и передачи размеров единиц физических величин рабочим средствам измерения (РСИ) через систему государственных и рабочих эталонов (рис. 2).

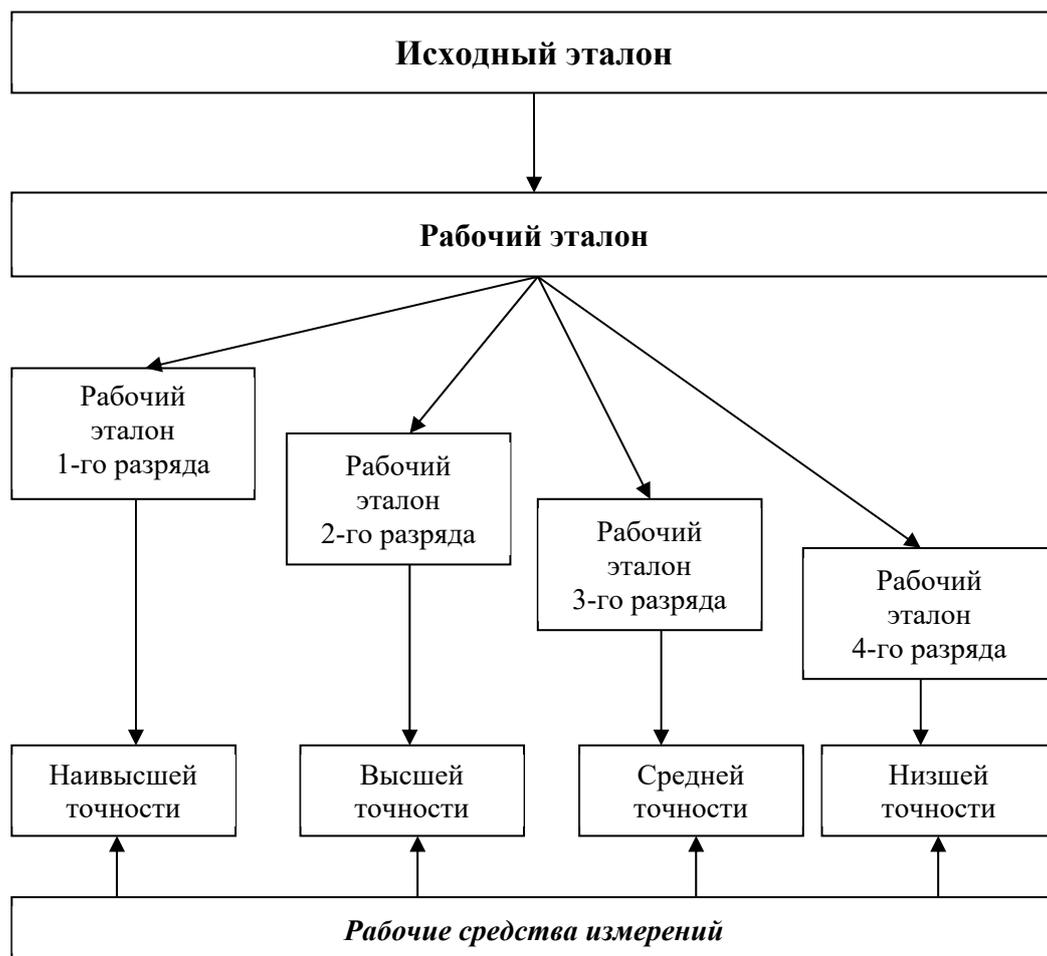


Рис. 2. Схема передачи размера единиц величины от исходного эталона к рабочим средствам измерения

*Эталон единицы* – это средство измерений (СИ) или комплекс СИ, обеспечивающий воспроизведение и/или хранение единицы с целью передачи ее размера нижестоящим по поверочной схеме средствам измерений, утвержденное в установленном порядке качестве эталона.

*Государственный эталон* – первичный специальный эталон, обладающий наивысшими метрологическими характеристиками, официально утвержденный в качестве исходного эталона для страны.

*Рабочий (разрядный) эталон* – эталон, предназначенный для передачи единицы величины рабочим средствам измерений.

Таким образом, передача единицы величины от эталона к рабочим средствам измерения (РСИ) осуществляется в три этапа (см. рис. 2):

– *воспроизведение единицы* физической величины с помощью государственного первичного специального эталона (исходного эталона);

– *передача размера единицы* величины от исходного эталона *рабочему эталону*. При необходимости рабочие эталоны подразделяют на разряды: 1-й, 2-й, 3-й, 4-й, ..., *n*-й;

– *передача размера единицы* через цепочку соподчиненных по разрядам рабочих эталонов. От последнего *рабочего эталона* в этой цепочке размер единицы передают *рабочему средству измерения*.

Все это предопределяет следующие основные теоретические положения метрологии [4, 6, 11, 12, 14, 19, 24, 28].

*Объектом метрологии* являются объекты и процессы окружающего мира, единицы величин, эталоны, технические средства измерений.

*Предметом метрологии* являются способы и методы измерения (извлечения) количественной информации о свойствах объектов с заданной точностью и достоверностью.

*Целью метрологии* является обеспечение единства измерений и организации метрологического обеспечения на всех этапах жизненного цикла рабочих средств измерений и научных исследований.

*Основные задачи метрологии:*

– разработка теории, методов и средств измерений и контроля с использованием систем искусственного интеллекта;

– разработка системы эталонов на основе фундаментальных физических констант;

– цифровая трансформация метрологии и инфраструктуры обеспечения единства измерений;

– разработка методов оценки погрешностей, состояния средства измерений и контроля;

– разработка методов передачи размеров единиц величин от эталонов к рабочим средствам измерения.

Решение вышерассмотренных задач обусловило деление метрологии на три раздела: теоретическая (фундаментальная), законодательная и прикладная (практическая) [24].

*Теоретическая метрология* – раздел, предметом которого является разработка терминологического и понятийного аппарата, теорий единства измерений, построения средств измерений и точности измерений.

*Законодательная метрология* – раздел, предметом которого является установление норм, правил, обязательных для исполнения по применению единиц физических величин, эталонов, методов и средств измерений, направленных на обеспечение единства измерений и требуемой точности измерений.

*Прикладная метрология* – раздел, предметом которого является практическое применение теоретических и законодательных разработок при воспроизведении, хранении и передачи единиц величин рабочим средствам измерений и контроле.

### **Контрольные вопросы**

1. Что понимают под метрологией?
2. Раскройте кратко состав и содержание государственной системы обеспечения единства измерений.
3. Определите теоретические положения метрологии как науки: объект, предмет и цели метрологии.
4. Какие задачи решает метрология?
5. Из каких разделов состоит метрология как наука и дисциплина?

### 3. ИЗМЕРЕНИЕ

Измерение – это совокупность упорядоченных, разнородных и различных по сложности операций, которые можно сгруппировать в ряд этапов [23]:

- подготовительный;
- экспериментальный;
- вычислительный.

На подготовительном этапе аккумулируют априорную информацию об объекте измерения и выполняют анализ, т. е. выполняют сбор данных об условиях измерений и исследуемой величине. В результате формулируют измерительную задачу, заключающуюся в определении значения величины путем ее измерения с требуемой точностью и в конкретных условиях [23]. Кроме этого, разрабатывают план проведения экспериментальных наблюдений. Затем подготавливают СИ для выполнения эксперимента и создают требуемые условия измерений и/или возможности их контроля.

Для постановки измерительной задачи рассматривают следующее: величину, которую необходимо измерить, метод, средство и методику измерения. Для определения величины формируют модель объекта и измеряемой величины, определяют конкретные величины, т. е. определяют способ получения значения величины.

Под *методом* понимают прием или совокупность приемов сравнения измеряемой величины с ее единицей или соотнесение со шкалой в соответствии с реализованным принципом измерения.

*Принцип измерения: явление материального мира, положенное в основу измерения.* Например, разность фаз гармонических колебаний электромагнитных волн оптического диапазона применяют для измерения длин сторон и углов; применение эффекта Доплера – для измерения скорости и приращения координат между двумя наземными пунктами.

По совокупности приемов использования принципов и средств измерений различают метод непосредственной оценки (непосредственного сравнения) и методы сравнения с мерой: дифференциальный, нулевой, совпаде-

ний, дополнения и замещения. *Метод непосредственного сравнения*, как правило, реализован в средствах измерений, в которых шкала заранее градуирована в принятых единицах измеряемой величины. Поэтому здесь о значении измеряемой величины судят по показанию на шкале в отсчетном устройстве средства измерения. В *методах сравнения* с мерой измеряемая величина сравнивается с величиной, воспроизведенной мерой [22, 23]. Следовательно, в процессе измерения величины методом непосредственного сравнения мера используется опосредованно, а в методах сравнения – непосредственно.

В зависимости от способа получения значения величины в том или ином методе собственно измерения разделяют на следующие типы: прямые, косвенные, совокупные и совместные [23].

В *прямом измерении* искомое значение величины получают непосредственно со средства измерения.

В *косвенном измерении* значение искомой величины определяют на основании прямых измерений других величин, функционально связанных с искомой величиной.

В *совокупном измерении* искомое значение величины определяют на основании измерений нескольких одноименных величин путем решения систем уравнений, получаемых при измерениях в различных сочетаниях.

В *совместном измерении* проводятся одновременно измерения двух или нескольких не одноименных величин для определения зависимости между ними.

Здесь следует отметить, что тип измерения определяют исходя из видов моделей исследуемого объекта и искомой величины, а количество измерений зависит от требуемой точности.

По количеству измерений величины измерения могут быть однократными и многократными. Если количество измерений больше или равно четырем, то эти измерения считают многократными. В ином случае их считают однократными.

Выбор типа средства измерения и методики измерений осуществляется на основании априорной оценки точности измерений и требований к метрологическим характеристикам прибора в конкретных условиях измерений.

Метод и тип измерения реализуется в средствах измерений. Средство измерений – это обобщающее понятие, под которым понимают техническое средство, во-первых, предназначенное для измерений; во-вторых, играющее важную роль и имеющее установленные метрологические характеристики.

Существуют разнообразные средства измерения. Они могут быть в виде простых устройств (мера, устройства сравнения, преобразователи) и комплексов (систем и измерительно-вычислительных комплексов). Все они или вырабатывают сигнал (показание) о значении измеряемой величины, или воспроизводят величину заданного размера. При этом важно знать степень соответствия измерительной информации истинному значению определяемой величины. Для этого были введены нормированные метрологические характеристики СИ. Это характеристики свойств СИ, оказывающих влияния на результат и его погрешности и предназначенных для определения результатов измерений, оценки технического уровня качества средств измерений и априорной инструментальной составляющей погрешности в определенных условиях измерения.

*Условия измерений* – совокупность влияющих величин, описывающих внешнее состояние окружающей среды и средства измерения.

*Влияющая величина* – это физическая величина, которая не измеряется СИ, но оказывает существенное влияние на результат измерения.

Для установленных конкретных ситуаций диапазонами значений влияющих величин выделяют нормальные, рабочие и предельные условия измерений [24].

*Нормальные условия* задаются в нормативно-технических документах, при этом изменения результата измерений под воздействием влияющих величин будут ничтожно малы. В качестве примера нормальных условий приведем некоторые из них: температура – 20 °С; давление окружающего воздуха – 750 мм рт. ст.; относительная влажность воздуха – 58 %.

*Рабочая область* значений влияющих величин – это область, в пределах которой устанавливается дополнительная погрешность или изменения показаний СИ.

*Предельные условия* измерений – это такие условия, которые характеризуются экстремальными значениями измеряемой и влияющих величин,

а СИ это может выдержать без разрушений и ухудшения метрологических характеристик.

Следовательно, подготовка проводится на основании априорной информации, и она определяет содержание последующих операций. Качество подготовительного этапа зависит не только от априорной информации, но и от того, как она была использована. Поэтому наличие априорной информации об объекте исследования и измеряемой величине является необходимым, но не достаточным условием для эффективной постановки измерительной задачи. Ошибки, допущенные при формировании измерительной задачи, затруднительно обнаружить и исключить на последующих этапах.

Экспериментальный этап является главным в процессе измерения величины. Прежде чем перейти к действиям на этом этапе, раскроем сущность простейшего измерения.

Сущность простейшего прямого измерения заключается в сравнении размера измеряемой величины  $Q$  с размерами исходной (эталонной) регулируемой многозначной меры

$$Q = \text{ч}[E], \quad (1)$$

где  $\text{ч}$  – число (значение) единиц;  $[E]$  – единица величины.

Уравнение (1) называется основным уравнением измерения.

Единица величины – величина фиксированного размера, которой условно присвоено числовое значение, равное единице.

В общем случае единицу измерения выражают через основные единицы величин с помощью степенного одночлена

$$[E] = z \cdot L^\alpha \cdot M^\beta \cdot T^\gamma \cdot I^\varepsilon \cdot \Theta^\lambda \cdot N^\omega \cdot J^o, \quad (2)$$

где  $z$  – безразмерный коэффициент пропорциональности, который равен единице;  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \lambda, \omega, o$  – показатели размерности, которые могут принимать любое значение и знак, в том числе ноль;  $L, M, T, I, \Theta, N, J$  – основные физические величины в международной системе единиц SI: *длина, масса, время, сила электрического тока, термодинамическая температура, количество вещества и сила света.*

Для общего случая последовательность действий на экспериментальном этапе следующая:

- взаимодействие средства и объекта измерения;
- преобразование измеряемой величины  $X$  в другую величину однородную (неоднородную) с ней,  $Q_{\text{и}} = \mathcal{C}[E]$ ;
- воспроизведение величины  $Q_{\text{м}} = \mathcal{C}[E]$  заданного размера, однородной с преобразованной величиной  $Q_{\text{и}}$ ;
- сравнение однородных величин  $Q_{\text{и}}$  и  $Q_{\text{м}}$ .

В процессе взаимодействия средства измерения с исследуемым объектом на вход СИ поступает измерительная информация о величине  $X$ , которая преобразуется в однородную величину  $Q_{\text{и}}$  с многозначной мерой  $Q_{\text{м}}$ . Преобразование осуществляется с помощью некоторого функционала  $F(X)$ , причем стремится выполнить линейное преобразование  $Q_{\text{и}} = Z \cdot X$ . Здесь  $Z$  – постоянная величина, например, масштабный коэффициент для перехода от дециметров в миллиметры.

Воспроизведение величины заданного размера  $Q_{\text{м}}$  осуществляется мерой, установленной точностью.

Сравнение измеряемой величины  $Q_{\text{и}}$  с  $Q_{\text{м}}$  заключается в установлении отношения между ними:  $Q_{\text{и}} = Q_{\text{м}}$ ;  $Q_{\text{и}} > Q_{\text{м}}$ ;  $Q_{\text{и}} < Q_{\text{м}}$ . Здесь следует отметить, что точное равенство измеряемой и воспроизведенной величин маловероятно. Поэтому в результате сравнения можно лишь установить, что  $|Q_{\text{и}} - Q_{\text{м}}| < [E]$ .

Для получения результата измерения (при  $\mathcal{C} = \mathcal{C}$ ) необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\Delta = \min\{Q_{\text{и}} - Q_{\text{м}}\}. \quad (3)$$

Здесь  $\Delta$  – погрешность результата измерения.

Из-за несовершенства СИ, меры, метода измерения и влияния внешних условий на определение числа единиц  $\mathcal{C}$  невозможно отыскать абсолютный минимум (3).

Вышеперечисленные факторы имеют как случайный, так и систематический характер. Они выражаются соответственно в виде случайной  $\delta$  и систематической  $\theta$  погрешности, т. е. погрешность результата измерения состоит из этих составляющих,  $\Delta = \delta + \theta$ .

Следовательно, измерения всегда отягощены случайной  $\delta$  и систематической  $\theta$  погрешностями, при этом их точный учет невозможен, а результат их совместного воздействия затруднительно предсказать. Вследствие чего уравнение измерения (1) имеет только приближенное решение [24]

$$\tilde{Q}_и = ч[E] + \delta + \theta. \quad (4)$$

Для уменьшения влияния систематической погрешности  $\theta$  проводят дополнительные исследования с целью выявления ее значения или характера либо закона. Затем определяют поправку и вычисляют исправленный результат измерения.

Так как характер влияния систематической погрешности  $\theta_i$  определяют тоже с некоторой погрешностью, исправленное значение результата измерения будет отягощено остаточным значением этой погрешности  $\tau$

$$\tilde{Q}_и = ч[E] + \delta + \tau. \quad (5)$$

В метрологии остаточное значение систематической погрешности  $\tau$  принято называть неисключенной систематической погрешностью (НСП). При количестве составляющих НСП более двух считают, что ее характер является квазислучайным, иными словами, близок к нормальному закону распределения случайных погрешностей. Тогда значение погрешности результата измерения  $\tilde{\Delta} = \delta + \tau$  скорее всего будет иметь случайный характер.

Известно, что предел средней арифметической случайной погрешности при неограниченном количестве измерений  $n$  стремится к нулю [17]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\tilde{\Delta}]}{n} = 0. \quad (6)$$

Поэтому влияние случайной погрешности можно уменьшить только путем увеличения количества измерений величины. Вот почему на практике выполняют минимум три-четыре и более измерений одной и той же величины. За окончательный результат принимают усредненное значение этой величины  $\bar{Q}_и$

$$\bar{Q}_и = \frac{\sum \tilde{Q}_{и,i}}{n}, \quad (7)$$

где  $\tilde{Q}_{и,i}$  – однократное значение измеряемой величины;  $n$  – количество измерений одной и той же величины, т. е. объем измерительной информации.

Таким образом, конечной целью измерений является результат измерения, причем разделяют, к чему он относится: показанию СИ, неисправленному или исправленному результату и проводилось ли усреднение результатов нескольких измерений.

На вычислительном этапе измерения выполняется математическая обработка, в том числе оценка качества экспериментальных данных (измерительной информации) в следующем порядке:

- предварительный анализ измерительной информации;
- вычисление и внесение поправок на систематические погрешности;
- выбор алгоритма математической обработки результатов измерений и проведение вычислительных операций;
- оценка качества, анализ и интерпретация полученных результатов;
- запись результата измерений и показателей погрешности.

По завершении измерений выполняют анализ экспериментальных данных с целью выявления и исключения грубых измерений.

Если известен характер влияния систематической погрешности, то вычисляют и вносят поправки в результат измерения, т. е. получают исправленный результат измерения.

Сейчас существует ряд способов математической обработки экспериментальных данных в зависимости от способа получения измеряемой величины, количества измерений (однократные или многократные), характеристики точности и условий измерений (равноточные или неравноточные)

[21]. Поэтому способ математической обработки экспериментальных данных определяется еще на подготовительном этапе. Здесь только уточняют порядок проведения вычислительных операций и изучаются требования, предъявляемые к форме представления промежуточных и окончательных результатов вычислений.

В соответствии с ГОСТ Р ИСО 9000–2001 и учебной литературой по метрологии [16, 21, 24], качество измерения – это степень соответствия погрешностей измерений величины требованиям измерительной задачи. Оно характеризуется точностью, правильностью, прецизионностью, повторяемостью, воспроизводимостью, достоверностью.

Поскольку термин «точность» был рассмотрен выше, перейдем к другим характеристикам качества измерения.

*Правильность* – это близость результата измерения истинному или действительному либо опорному значению величины. Показателем правильности является близость к нулю систематической погрешности [23].

*Прецизионность* – это близость повторных измерений между собой при измерении одной и той же или подобной величины при заданных условиях [23].

*Повторяемость* – это прецизионность измерений, выполненных в одинаковых условиях: то же местоположение, одно и то же средство измерений и оператор, та же методика измерений в течение длительного периода времени [23].

*Воспроизводимость* – это прецизионность измерений, выполненных в разных рабочих условиях, с участием разных операторов, с использованием других средств измерений, но по одной и той же методике [23].

*Достоверность* – это степень доверия к результату измерения, которая характеризуется вероятностью того, что истинное значение измеряемой величины находится в интервале. Такой интервал называют доверительным, а вероятность, соответственно, – доверительной.

Таким образом, результатом измерения является окончательное значение измеряемой величины, оценка качества измерений, условия измерений (температура, давление, влажность окружающего воздуха и т. п.) и другая доступная и существенная информация [23].

На основании вышеизложенного логически вытекают следующие основные аксиомы теории измерения [15, 24].

1. Истинное значение измеряемой величины отыскать невозможно.
2. Измерения без априорной информации об объекте исследования невозможны.
3. Объекты (процессы) реального мира могут быть измерены.
4. Измерение есть сравнение (сопоставление) свойства модели объекта с воспроизведенной единицей величины.
5. Результаты измерения являются случайными величинами.

### **Контрольные вопросы**

1. Что понимают под измерением?
2. Из каких этапов состоит процесс измерения?
3. В чем сущность каждого этапа измерения?
4. По каким характеристиками оценивают качество измерений?
5. Какие основные аксиомы определены в теории измерения?

#### 4. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Под погрешностью результата измерений понимается отклонение результата измерения  $x$  от истинного значения измеряемой величины  $X_{\text{ист}}$

$$\Delta = x - X_{\text{ист}}. \quad (8)$$

Поскольку истинное значение величины является неизвестным, в качестве него принимают опорное (эталонное) значение величины; если и это значение неизвестно, то вместо  $X_{\text{ист}}$  подставляют действительное значение  $X_{\text{д}}$ . На практике действительное значение получают путем арифметического усреднения многократных измерений величины. Считают, что среднее арифметическое значение настолько приближается к истинному значению величины, что для соответствующей задачи может быть принято вместо него, следовательно, погрешность результата измерений неизвестна. Поэтому при измерении имеют дело с приближенными значениями погрешности, т. е. с оценкой погрешности

$$\Delta \approx x - X_{\text{д}}. \quad (9)$$

В зависимости от характера изменения измеряемой величины в процессе наблюдений погрешность может быть статической или динамической.

По способу представления погрешность бывает:

а) абсолютная:  $\Delta = x - X_{\text{д}}$ ;

б) относительная:  $\delta = \frac{\Delta}{X_{\text{д}}}$ ;

в) приведенная (нормированная):  $\gamma = \frac{\Delta}{X_N}$ , где  $X_N$  – верхний предел

шкалы СИ.

По характеру зависимости абсолютной погрешности от значения измеряемой величины она может быть аддитивной (постоянной на всем диапа-

зоне шкалы СИ), мультипликативной (возрастающей, при увеличении значения измеряемой величины) и нелинейной (переменной).

Источниками погрешности являются следующие факторы: инструментальные, методические, субъективные (наблюдателя) и воздействие внешних условий на измеряемую величину и СИ.

По характеру проявления различают погрешности систематические, случайные и грубые.

### **Систематическая погрешность**

В начале 90-х годов прошлого века были внесены изменения в понятие «систематическая погрешность». Сейчас, с одной стороны, систематическую погрешность рассматривают как составляющую основной погрешности детерминированную величину. Значение и знак этой погрешности остаются постоянными либо закономерно изменяются при измерении одной и той же величины. С другой стороны, она является «вырожденной» случайной величиной, причем ей присущи некоторые свойства случайной величины (дисперсия и коэффициент взаимной корреляции), которые необходимо учитывать при объединении составляющих погрешности результатов измерения.

По характеру изменения во времени систематические погрешности могут быть постоянными или переменными. Переменные в зависимости от функциональной зависимости значения погрешности от времени либо измеряемой величины, либо внешних условий подразделяют на монотонно изменяющиеся и периодические. При воздействии на результат измерений сразу нескольких систематических погрешностей, разных по характеру изменения, общая систематическая погрешность может изменяться по более сложному закону.

Систематические погрешности приводят к смещению оценки результата измерения, т. е. к искажению среднего арифметического значения измеряемой величины. При математической обработке эти погрешности затруднительно обнаружить.

Для того чтобы свести значение систематической погрешности к полному или частичному исключению из результата измерения, на каждом этапе измерения применяют соответствующие меры.

На подготовительном этапе (до начала измерений) источники систематических погрешностей устраняют, если это возможно, либо предпринимают меры по уменьшению их влияния, либо учитывают их в процессе измерений. В качестве источников следует рассматривать:

- технически и/или метрологически неподготовленный к измерению прибор (образцовое или рабочее средство измерений);
- внешние факторы: температуру окружающего воздуха, давление, влажность, горизонтальную и вертикальную рефракции, электромагнитные поля, вибрацию и т. д.

Почти для всех конструкций средств измерений, имеющих подвижные или вращающиеся части, присущ «мертвый» («холостой») ход, например, в микрометренных наводящих или отсчетных винтах теодолита и нивелира. Если данный фактор не принимать во внимание при измерении, то это приведет к переменной систематической погрешности, поэтому при выполнении измерений рекомендуют вращать микрометренные винты либо по ходу, либо против хода часовой стрелки.

В период эксплуатации средств измерений происходит износ, старение и воздействие механической, электрической и тепловой и иной нагрузки на их корпус. Все это вызывает остаточное изменение в материале или в каком-либо механизме конструктивного узла корпуса средства измерений и послужить причиной изменения значений метрологических характеристик и появления дополнительных систематических погрешностей.

Поэтому необходимо ежегодно проводить метрологическую поверку, а перед измерениями обязательно выполнять технологическую поверку СИ, при которой проверяют механико-технологические и геометрические условия частей прибора, вытекающие из принципа измерения величины. Также определяют приписанные им основные метрологические характеристики и инструментальные систематические погрешности. Затем сопоставляют эти результаты с оценками погрешностей, представленными в свидетельстве о поверке СИ или с установленными для них значениями в нормативном документе.

Уменьшение влияния внешних факторов осуществляют путем создания с помощью специальных устройств (термостата, барокамеры, экранирования, массивной опоры для установки прибора и т. д.) нормальных усло-

вий измерений в лаборатории (см. разд. 3). Если измерения выполняются в полевых условиях, например, на геодезическом полигоне или на образцовом базисе, то предусматривают защиту прибора от внешних факторов и выбирают оптимальный период времени суток для измерений, когда влияния факторов будет минимальным.

На экспериментальном этапе (в процессе измерения) предпринимают меры по исключению субъективной систематической погрешности и по уменьшению влияния внешних факторов (температуры, давления, вибрации). Для исключения постоянной и переменной (монотонно изменяющейся) систематической погрешности применяют ряд методов.

Субъективная систематическая погрешность обусловлена индивидуальными особенностями человека (наблюдателя) и навыками выполнения измерений. Наиболее распространенным источником этой погрешности является параллакс при визуальном взятии отсчета по шкале и при визировании на специальную марку с помощью зрительной трубы СИ. Эти погрешности называют соответственно параллаксом отсчета и визирования.

Погрешность параллакса отсчета – это кажущееся смещение стрелки (неподвижного индекса) отсчетного устройства, а параллакс визирования – это кажущееся смещение сетки нитей зрительной трубы СИ по предмету при перемещении точки наблюдения.

Для исключения погрешности параллакса отсчета при взятии отсчета следует смотреть перпендикулярно к плоскости шкалы.

Влияние параллакса визирования на результат измерения можно существенно уменьшить, если четкость изображения сетки нитей и марки в зрительной трубе настраивать в следующем порядке: вначале добиться четкого изображения сетки нитей зрительной трубы, а затем – марки. Если при изменении угла зрения изображение сетки нитей относительно марки не перемещается, то считают, что параллакс отсутствует и можно выполнять визирование и измерения. В ином случае повторить вышеописанные действия.

Для уменьшения влияния температуры в полевых условиях СИ защищают от прямых солнечных лучей зонтом либо покрывают корпус прибора теплоизоляционным материалом, например, поролоном, теполофом и/или регистрируют метеоусловия (температуру воздуха, давление и влажность), чтобы в дальнейшем можно было ввести поправки в измерения.

Вибрацию исключают путем амортизации прибора или его частей с помощью поглотителей вибрации, например, губчатой резины.

Для устранения постоянной систематической погрешности применяют следующие методы.

1. *Замещение*. Суть этого метода заключается в замещении измеряемой величины известной мерой без изменений условий измерений.

3. *Противопоставление*. В этом методе сравнения измеряемой величины с мерой производят дважды, так, чтобы причина постоянной систематической погрешности оказывала на результат измерений разные, но известные воздействия.

3. *Компенсация*. В этом методе измеряемая величина измеряется дважды, так, чтобы постоянная систематическая погрешность входила в результат наблюдений каждого из них с разными знаками. Тогда среднее арифметическое значение будет свободно от систематической погрешности

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{X_{\text{ист}} + \cancel{\emptyset} + X_{\text{ист}} - \cancel{\emptyset}}{2}. \quad (10)$$

4. *Рандомизация*. Выполняют многократные измерения одной и той же величины разными методами или средствами измерений. Систематические погрешности в совокупности будут иметь случайный характер, поэтому при определении результата измерений систематические погрешности взаимно компенсируются.

Устранения переменной (монотонно изменяющейся) систематической погрешности осуществляют методом симметричных наблюдений.

Суть этого метода заключается в том, что в течение некоторого интервала времени выполняется несколько измерений одной и той же величины (рис. 3), а за окончательное значение принимают полусумму отдельных результатов  $x_i$ , симметричных по времени относительно середины интервала

$$\frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2}. \quad (11)$$

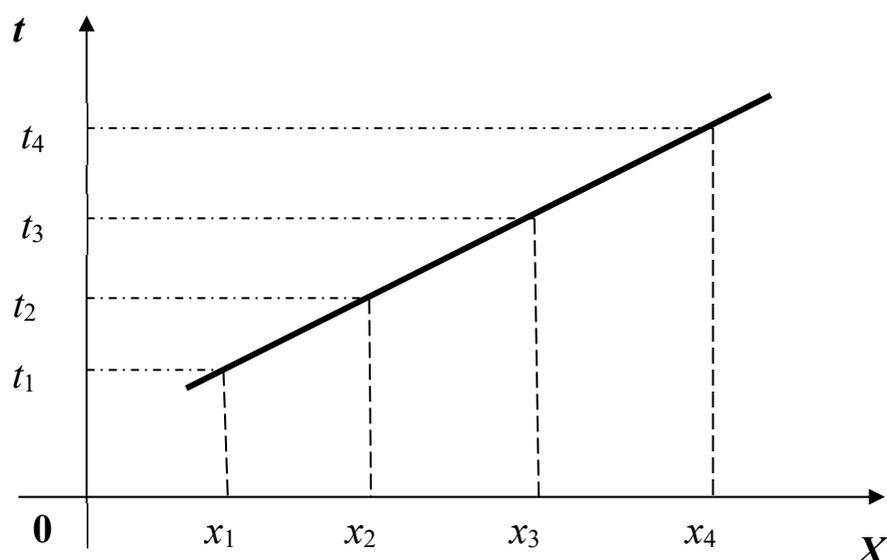


Рис. 3. Монотонно изменяющаяся по времени измеряемая величина

Убедившись, что переменная систематическая погрешность подчиняется линейному закону, результат измерения вычисляют по формуле

$$x = \frac{x_1 t_2 - x_2 t_1}{t_2 - t_1}. \quad (12)$$

Этот метод рекомендуют применять при выполнении точных измерений и тогда, когда не очевидна возможность существования переменной систематической погрешности.

На вычислительном этапе (после измерений) осуществляют следующее:

- вводят поправки в результаты наблюдений;
- выполняют оценку границ неисключенной систематической погрешности;
- производят оценку возможности существования переменных систематических погрешностей в ряду многократных измерений.

Если достаточно хорошо изучены влияния или известен из теории метода измерения характер влияния систематической погрешности, то вводят поправки в результаты измерений. Поправки  $v$  могут задаваться в виде числа, например, поправка за компарирование, поправка на отражатель.

Также поправка может вычисляться по формуле либо представлена в виде таблицы или графика.

В качестве примера можно привести штриховую меру и светодалномер. После измерений величины штриховой меры вводят поправку за влияние температуры на длину этого СИ. Определение длины светодалномером осуществляется по формуле

$$L = V \cdot \frac{\Delta t}{2}, \quad (13)$$

где  $V$  – рабочая скорость электромагнитных волн оптического диапазона, т. е.  $V = \frac{c}{n}$ . Здесь  $c$  – скорость света в вакууме;  $n = f(T, P)$  – интегральный показатель преломления света вдоль измеряемой длины стороны, который зависит от температуры  $T$  и давления  $P$  окружающего воздуха;  $\Delta t$  – время прохождения двойного пути электромагнитной волны оптического диапазона от прибора до отражателя.

Поправка  $v$  имеет противоположный знак систематической погрешности, поэтому ее прибавляют к неисправленному результату измерений, т. е. получают исправленный результат измерения. Тогда среднее квадратическое отклонение исправленного результата измерения будет иметь следующий вид:

$$m_x^2 = m_{x'}^2 + \sum_{i=1}^m m_{v_i}^2, \quad (14)$$

где  $m_{x'}$  – среднее квадратическое отклонение неисправленного результата измерений;  $m_{v_i}$  – среднее квадратическое отклонение определения поправки на  $i$ -ю систематическую погрешность.

Формула (14) позволяет сделать следующие выводы:

– вследствие ограниченной точности при определении поправок происходит накопление случайных погрешностей и увеличивается разброс измеряемой величины;

– при введении поправки следует принимать во внимание ее значение. Если поправка составляет меньше пяти единиц младшего разряда, следую-

щего за последней значащей цифрой оценки погрешности результата измерения, то поправку можно не учитывать;

– вклад суммарного среднего квадратического отклонения поправок не должен превышать минимально значимого значения (не более 33 % от среднего квадратического отклонения неисправленного результата измерений).

Очевидно, полностью исключить систематическую погрешность невозможно, поэтому на практике оценивают остаточную или неисключенную систематическую погрешность. К составляющим этой погрешности относят погрешность вычисления поправки, в том числе погрешности измерения (определения) параметров, входящих в формулу вычисления поправки; остаточное влияние систематической погрешности, на которую была введена поправка; погрешности, влияния которых незначительны. Закон распределения для этих составляющих при  $m \leq 3$  принимают равномерный, а при  $m > 3$  – квазислучайный.

Порядок оценки границ неисключенной систематической погрешности подробно рассмотрен в разд. 5 настоящего учебно-методического пособия.

Для выявления переменной систематической погрешности применяют специальные статистические методы, которые опираются на критерии Аббе, Фишера, Вилкоксона и др. [2, 11, 12, 21, 22, 24].

### **Случайная погрешность**

Случайная погрешность – это составляющая погрешности результатов измерений, изменяющаяся случайным образом как по знаку, так и по значению при измерении одной и той же величины. Она обусловлена воздействием некоторого множества случайных факторов (например, изменением условий проведения измерений, происходящими физическими процессами в СИ и личными причинами наблюдателя, проводящего измерения), причем ни один из них не является доминирующим, т. е. по степени влияния они равнозначны. Поэтому предсказать случайную погрешность невозможно.

Свойства случайных величин и случайных погрешностей рассматриваются в теории вероятностей и математической статистике.

В рамках теории вероятностей рассматривают законы распределения вероятностей случайной величины, которые позволяют получить полную информацию о поведении и параметрах непрерывной (дискретной) случайной величины в предположении, что выполнено бесконечное (конечное) количество наблюдений в эксперименте [18].

Дискретной случайной величиной называют такую величину, возможные значения которой можно отделить друг от друга и они поддаются счету.

Непрерывной случайной величиной называют такую величину, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый промежуток. Значения величины не поддаются счету и нельзя отделить одно от другого.

В рамках теории математической статистики случайные величины характеризуются числовыми значениями, вычисленными по формулам, которые зависят от применяемого закона распределения и выбранного параметра. При этом учитывается тот факт, что наблюдения дискретной случайной величины осуществляют при небольшом объеме экспериментальных данных, вследствие чего информация о случайной величине получается обобщенной и генерализованной [18].

В массе случайные величины и погрешности подчиняются преимущественно нормальному закону распределения. Большой вклад в развитие этого закона и теоретических положений, связанных с ним, внесли П. С. Лаплас и К. Ф. Гаусс [2, 11, 12, 18, 24].

Нормальный закон распределения случайных величин и погрешностей имеет колоколообразную форму (рис. 4). Кривая функции  $f(x)$  является распределением плотности вероятности случайных величин (рис. 4, *a*), а  $f(\Delta)$  – погрешностей (рис. 4, *б*) вокруг соответствующего центра  $M(X)$  и  $M(\Delta)$ , т. е. математического ожидания.

В алгебраической форме нормальный закон распределения плотности вероятности случайной величины имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (15)$$

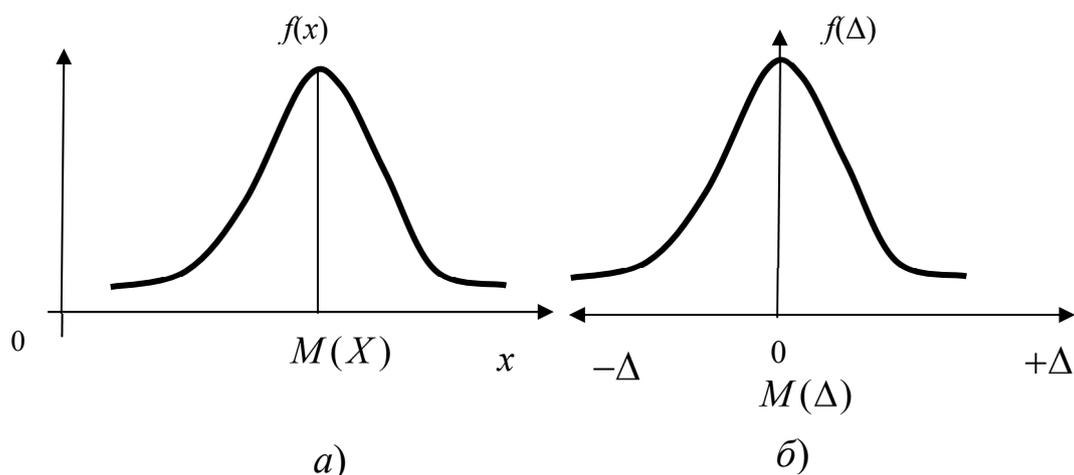


Рис. 4. Нормальный закон распределения в дифференциальной форме:  
 а) случайных величин; б) случайных погрешностей

Если распределение случайной величины перенести в центр распределения, тогда формула (15) примет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M(X))^2}{2\sigma^2}}, \quad (16)$$

где  $x$  – случайная величина;  $M(X)$  – математическое ожидание случайной величины;  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение (стандарт) случайной величины:  $\sigma = \sqrt{D(X)}$ . Здесь  $D(X)$  – дисперсия рассеивания случайной величины;  $\pi$  – число пи, равное 3,141 59;  $e$  – основание натурального логарифма,  $e = 2,718 28$ .

Если принять, что в результатах измерений величины исключены систематические погрешности и математическое ожидание  $M(X)$  – истинное значение величины, то случайную погрешность  $\Delta$  можно определить так:

$$\Delta = x - M(X). \quad (17)$$

Тогда распределения плотности вероятности случайных погрешностей будет описываться функцией

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}. \quad (18)$$

Характер кривых  $f(x)$  и  $f(\Delta)$  распределения для случайной величины и погрешности (см. рис. 4) абсолютно идентичный. Следовательно, распределение плотности вероятности случайной величины, рассматриваемое относительно центра распределения, позволяет характеризовать как случайные величины, так и случайные погрешности.

В этой связи в дальнейшем будем рассматривать распределение плотности вероятности случайной величины относительно центра его распределения (16).

Распределение плотности вероятностей случайной величины  $f(x)$  обладает следующими свойствами:  $f(x) \geq 0$ ;  $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$  (рис. 5).

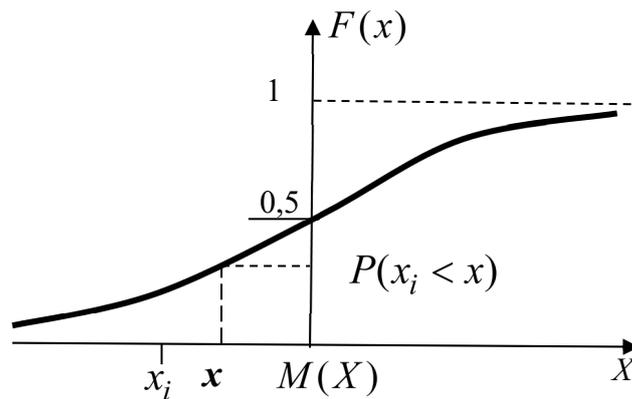


Рис. 5. Нормальный закон распределения случайной величины в интегральной форме

Следовательно, площадь, заключенная между кривой  $f(x)$  и осью абсцисс (см. рис. 4), равна единице. Это показывает, что вероятность попадания величины или погрешности в интервал  $[-\infty; +\infty]$  является действительным событием.

Вероятность появления случайной величины слева или справа относительно центра распределения  $M(X)$  равновозможна и она составляет

$$F(M(X)) = \int_{-\infty}^{M(X)} f(x)dx = \int_{M(X)}^{+\infty} f(x)dx = 0,5. \quad (19)$$

Интеграл распределения  $F(x)$  (см. рис. 5) есть значение вероятности, что случайная величина  $x_i$  не превысит некоторого значения  $x$

$$P(x_i < x) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-M(X))^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (20)$$

Очевидно, вероятность попадания случайной величины в заданный интервал  $[x_1; x_2]$  можно определить через разность интегралов на границах этого интервала  $F(x_1)$  и  $F(x_2)$

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1). \quad (21)$$

Из рис. 6 видно, что значение вероятности  $P(x_1 < x < x_2)$  есть отношение площади под кривой  $f(x)$ , ограниченной слева и справа соответственно пограничными точками на абсциссе  $x_1$  и  $x_2$ , к общей площади (к площади кривой  $f(x)$  и оси абсцисс).

Интеграл (20) не выражается через элементарные функции. В этой связи возникла задача табулирования его значений. Однако это обуславливает для таблицы принять в качестве входных данных  $x$ ,  $M(X)$  и  $\sigma$ . Кроме этого, необходимо учесть размерность величины. По эти причинам ввели новую переменную  $t$

$$t = \frac{x - M(X)}{\sigma}. \quad (22)$$

Отсюда следует, что  $x = t\sigma + M(X)$ , а  $dx = \sigma dt$ . Тогда интеграл (20) будет иметь вид стандартизированный (нормированный) вид

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (23)$$

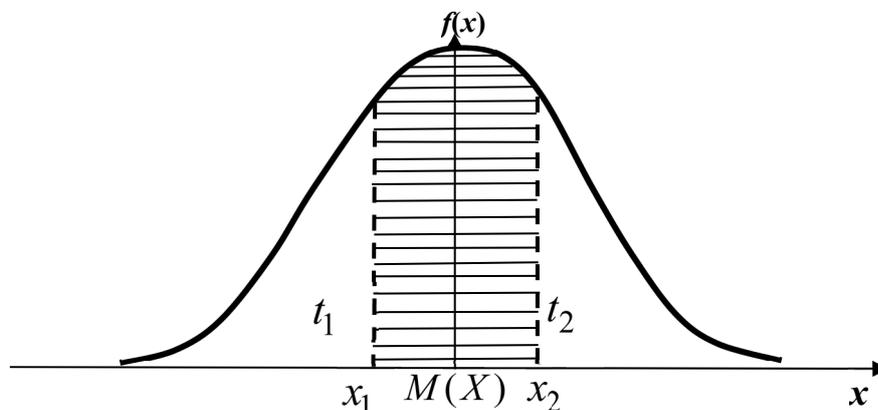


Рис. 6. Вероятность попадания случайной величины в интервал  $[x_1; x_2]$

Нормированная функция  $F(t)$ , которую называют стандартной нормальной функцией Гаусса, обладает свойством  $F(-t) + F(t) = 1$ , а функция

стандартной нормальной плотности  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$  будет иметь следующие

параметры:  $M(\Delta) = 0$  и  $\sigma = 1$ . Это позволяет по одному параметру  $t$  составить таблицу значений  $F(t)$ . Расчет этой функции осуществлен путем

разложения в ряд функции  $e^{-\frac{t^2}{2}}$  для конкретных значений  $t$ .

Для удобства вычислений Лапласом был предложен интеграл вероятностей с переменным верхним пределом

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (24)$$

где  $t$  – коэффициент (квантиль или нормированная случайная величина), способный принимать как отрицательные, так и положительные значения, числовое значение которого зависит от доверительной вероятности  $\beta$ .

Функция  $\Phi(t)$  представляет собой вероятность попадания погрешности в границы интервала  $P(|\Delta| \leq t\sigma)$ , симметричного относительно центра распределения. Следовательно,  $t\sigma$  – это половина интервала и это есть верхняя граница доверительного интервала  $\beta$ . Тогда  $\Phi(t)$  будет определяться в соответствии с уравнением

$$\Phi(t) = 0,5 + \frac{\beta}{2}. \quad (25)$$

Интеграл вероятностей  $\Phi(t)$  обладает следующими свойствами:  $\Phi(-\infty) = -0,5$ ;  $\Phi(+\infty) = 0,5$ ;  $\Phi(0) = 0$ ;  $\Phi(t) = -\Phi(-t)$ .

Из рис. 7 видно, что интеграл распределения  $F(t)$  имеет функциональную связь с интегралом вероятностей  $\Phi(t)$ :

$$F(t) = 0,5 + \Phi(t). \quad (26)$$

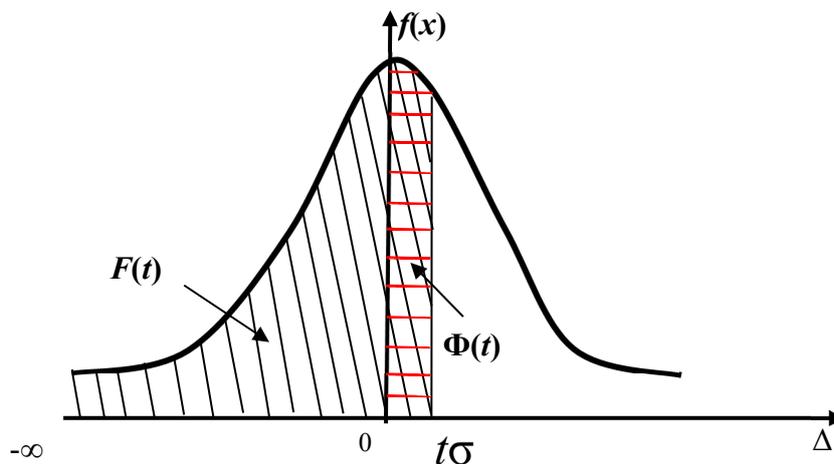


Рис. 7. Функциональная связь интеграла распределения с интегралом вероятностей

Определим с помощью интеграла Лапласа вероятность попадания случайной величины в нормированный и симметричный интервал  $[x_1; x_2]$ , при этом учтем (26) и свойства  $\Phi(t)$ :

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = 2\Phi(t). \quad (27)$$

Перепишем правую часть выражения (27) с учетом формулы (25)

$$2\Phi(t) = 2\left(0,5 + \frac{\beta}{2}\right) = 1 + \beta. \quad (28)$$

Тогда формула (27) примет окончательный вид

$$\beta = P(x_1 < x < x_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = 2\Phi(t) - 1. \quad (29)$$

По формуле (29) можно вычислить симметричные и нормированные доверительные границы случайной погрешности для заданного значения доверительной вероятности  $\beta$  (табл. 1).

Построим графически доверительные границы путем отложения по оси абсцисс  $\pm t\sigma$  (рис. 8).

Таблица 1

Границы интервалов и доверительные вероятности

$t_\beta\sigma$	$\beta$
$\pm 1\sigma$	0,68
$\pm 2\sigma$	0,95
$\pm 3\sigma$	0,997
$\pm 4\sigma$	0,999

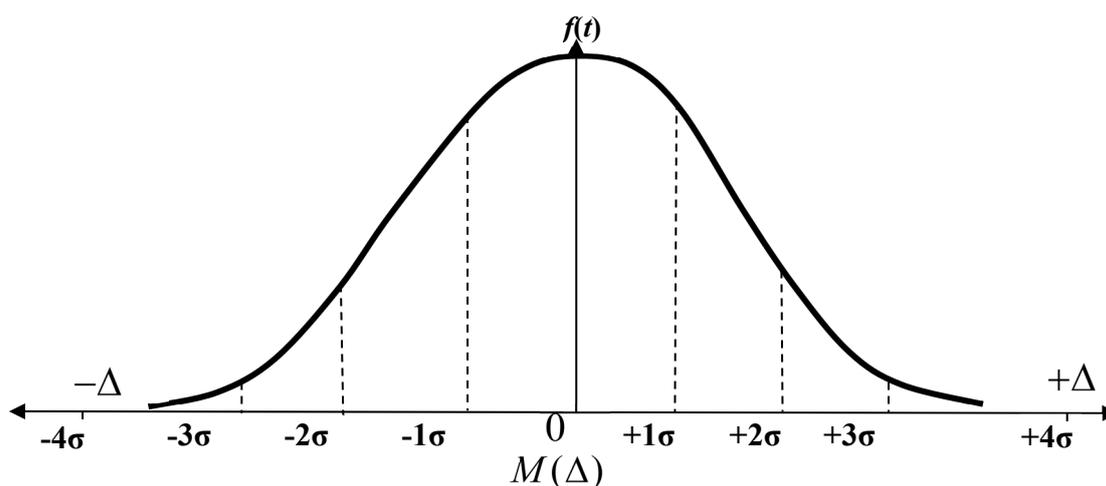


Рис. 8. Доверительные интервалы случайной погрешности

Из расчетов (см. табл. 1) видно, что при доверительной вероятности 0,68 случайные погрешности не превысят значения  $\pm 1\sigma$ , иначе из 100 из-

мерений 32 будут находиться за пределами допустимых значений, а для доверительной вероятности 0,95 – только пять. Случайные погрешности, превышающие  $\pm 3\sigma$ , считаются грубыми (промахами).

Таким образом, при большом количестве измерений случайные погрешности будут обладать следующими свойствами [18, 21, 22, 24]:

1) вероятность  $P$  появления случайных погрешностей в  $[-\infty; +\infty]$  составляет  $0 < P(\Delta) \leq 1$ ;

2) «ограниченности», случайные погрешности по абсолютному значению  $\Delta$  с заданной вероятности  $\beta$  не превосходят определенного предела:  $\Delta \leq t_\beta \sigma$  (см. табл. 1 и рис. 8);

3) «симметричности», появления положительных и отрицательных случайных погрешностей равновозможны, т. е.  $P(\Delta < 0) = P(\Delta > 0) = 0,5$  (см. рис. 8);

4) «компенсации», математическое ожидание случайных погрешностей (среднее арифметическое значение погрешностей) стремится к нулю с увеличением количества измерений  $n$ , т. е.  $M(\Delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} \rightarrow 0$ ;

5) «уни-modalности», малые по абсолютному значению случайные погрешности встречаются чаще, чем большие:  $P(|\Delta| < \sigma) = 0,68$ ;  $P(|\Delta| \leq 2\sigma) = 0,27$ ;  $P(|\Delta| \leq 3\sigma) = 0,04$  (см. рис. 8).

Также случайные величины и погрешности можно охарактеризовать с помощью специальных параметров – моментов. Моменты представляют собой среднее значение в  $k$ -й степени ( $k$ -го порядка). Если усредняются значения измеряемой величины, то эти моменты называют *начальными*

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, \quad (30)$$

а если усредняются погрешности, то *центральными моментами*:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x) dx. \quad (31)$$

Основным начальным моментом случайной величины является момент первого порядка и его называют «математическое ожидание»  $M(X)$

$$\alpha_1 = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \quad (32)$$

Это центр тяжести распределения случайной величины, числовое значение которого по оси абсцисс принимают за истинное (опорное) значение измеряемой величины.

Из центральных моментов важную роль играет момент второго порядка, который называют дисперсией  $D(X)$

$$\mu_2 = D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx. \quad (33)$$

Дисперсия является характеристикой рассеивания случайной величины, в том числе случайной погрешности, относительно математического ожидания  $M(X)$ . Дисперсия имеет размерность квадрат случайной погрешности. Для удобства оценки результатов измерений пользуются положительным значением квадратного корня из дисперсии  $\sigma = \sqrt{D(X)}$ . Его называют средним квадратическим отклонением, имеющим ту же размерность, что и измеряемая величина [2, 11, 18, 21, 22, 24].

Кроме рассмотренных моментов иногда определяют центральные моменты третьего и четвертого порядка. Центральный момент третьего порядка – «асимметрия» – является критерием «скошенности», а четвертого порядка – критерий формы вершины функции  $f(t)$ , и его называют «эксцесс».

В практике выполнения измерений имеют дело только с дискретными случайными величинами и, как правило, выполняют ограниченное их количество. Следовательно, из всех возможных значений измеряемой случайной величины используют только некоторые из них.

Совокупность всевозможных значений случайной величины в математической статистике называют *генеральной совокупностью*. Некоторое количество экспериментальных данных о дискретной величине является ко-

нечным подмножеством генеральной совокупности, называемое *выборкой*, и она должна быть представительной и случайной. Представительность заключается в том, что в выборке должен быть отражен весь спектр свойств генеральной совокупности. Случайность заключается в том, что при измерении все возможные значения величины генеральной совокупности должны иметь равные возможности быть выбранными [2, 11, 18, 21, 22, 24].

Так как числовые характеристики случайной величины определяются на основании выборки, то при обработке результатов измерений осуществляют только оценку специальных параметров нормального закона распределения  $\mathcal{A}$  (*математическое ожидание*  $M(X)$  и *среднее квадратическое отклонение*  $\sigma$ ). Оценка, представленная одним числовым значением, называется точечной оценкой  $\tilde{A}$ .

Точечные оценки являются случайными величинами и они должны быть *состоятельными, несмещенными* и иметь *минимальную дисперсию* [2, 11, 18].

**Состоятельность.** Оценка  $\tilde{A}$  приближается к истинному значению  $\mathcal{A}$  при увеличении объема выборки  $n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{A} = \mathcal{A}) = 1. \quad (34)$$

**Несмещенность.** Математическое ожидание оценки должно равняться оцениваемому параметру  $\mathcal{A}$

$$M(\tilde{A}) = \mathcal{A}. \quad (35)$$

Следовательно, оценка  $\tilde{A}$  не должна содержать систематического искажения.

**Минимальная дисперсия.** Оценка  $\tilde{A}$ , выбранная из некоторого конечного множества несмещенных оценок параметра  $\mathcal{A}$ , должна обладать минимальной дисперсией

$$D(\tilde{A}) = \min. \quad (36)$$

Результаты исследования точечных оценок ( $M(X)$  и  $\sigma$ ) методом максимального подобия, моментов и наименьших квадратов, представленные

ниже, показывают, что эти оценки состоятельные, несмещенные, имеют минимальную дисперсию и применимы независимо от закона распределения случайной величины [2, 11, 18, 21, 22, 24].

Точечную оценку математического ожидания  $M(X)$  вычисляют как среднее арифметическое значение измеряемой величины

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (37)$$

где  $x_i$  – значение  $i$ -го измерения величины;  $n$  – объем выборки (количество измерений или наблюдений).

Оценку среднего квадратического отклонения  $\sigma$  вычисляют по формуле, приведенной ниже, и называют средней квадратической погрешностью измерения величины

$$m_x = \tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{D}(X)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}}. \quad (38)$$

Если выполнять повторные измерения величины с одной и той же точностью и в одинаковых условиях, то каждый раз будут получаться различные значения  $\bar{X}$  и  $m_x$ . Рассеивание этих значений оценивают с помощью средней квадратической погрешности среднего арифметического значения измеряемой величины

$$m_{\bar{X}} = \frac{m_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(x_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}. \quad (39)$$

Из формулы (39) видно, что при увеличении количества измерений можно уменьшить случайную погрешность в  $\sqrt{n}$  раз, т. е. повысить точность результата измерения можно путем увеличения количества измерений.

Вычисленные точечные оценки позволяют представить результат измерения в виде

$$\bar{X} \pm m_{\bar{X}}; n. \quad (40)$$

Здесь объем выборки  $n$  показывает надежность определения точечных оценок  $\bar{X}$  и  $m_x$ . Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического значения измеряемой величины  $\pm m_{\bar{X}}$ , с одной стороны, указывает на близость  $\bar{X}$  к истинному значению, а с другой, является интервалом, который «накрывает» с некоторой вероятностью истинное значение, причем значение вероятности неизвестно. С теоретической точки зрения вероятность появления точечных оценок равна нулю, при этом оставаясь возможными событиями. Для устранения этой неопределенности и теоретического «недостатка» вместе с точечными оценками выполняют интервальную [2, 11, 18].

Интервальная оценка результата измерения представляет собой доверительный интервал, ограниченный нижней  $t_H$  и верхней  $t_B$  границами, где с доверительной вероятностью  $\beta$  (уровнем значимости  $\alpha = 1 - \beta$ ) находится истинное значение величины

$$\bar{X} - t_H m_{\bar{X}} < X \leq \bar{X} + t_B m_{\bar{X}}. \quad (41)$$

Нормированные квантильные множители для нижней  $t_H$  и верхней  $t_B$  границ интервала определяют следующим образом:

$$\begin{aligned} t_H &= \Phi\left(\frac{1-\beta}{2}\right) = \Phi\left(\frac{\alpha}{2}\right); \\ t_B &= \Phi\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = \Phi\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned} \quad (42)$$

В качестве функции в формуле (42) применяют табличные данные интеграла распределения  $F(t)$  или функции Лапласа  $\Phi(t)$ . При количестве измерений меньше тридцати ( $n < 30$ ) применяют распределения Стьюдента. Они описывают плотность распределения вероятности среднего арифметического, вычисленного по выборке из  $n$  наблюдений величины.

В центрированном и нормированном виде распределения Стьюдента представляют так:

$$S(t, k) = \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)!}{\sqrt{k\pi}\left(\frac{k}{2}\right)!} \left(\frac{1+t_{\beta}^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad (43)$$

где  $k$  – число степеней свободы  $k = n - 1$ ;  $t_{\beta}$  – коэффициент Стьюдента.

Распределение коэффициента Стьюдента  $t_{\beta}$  табулировано (см. прил. 3). Входными данными являются число степеней свободы и доверительная вероятность  $\beta$ .

Доверительные границы отклонения среднего арифметического  $\Delta_S$  от истинного значения измеряемой величины с доверительной вероятностью  $\beta$  вычисляют по формуле

$$\Delta_S = \pm t_{\beta} m_{\bar{X}}. \quad (44)$$

Результат измерения записывают в следующем виде:

$$\bar{X} \pm \Delta_S; \beta. \quad (45)$$

Следовательно, результат измерения не является одним числом, а представляет собой интервал, внутри которого с доверительной вероятностью  $\beta$  находится истинное значение измеряемой величины, причем необязательно, что истинное значение будет находиться ближе к среднему арифметическому либо к одной из границ. Оно может располагаться внутри интервала в любом месте и с вероятностью  $\alpha$  даже вне этого интервала.

### **Грубая погрешность**

Грубой погрешностью (промахом) считается такая случайная погрешность, числовое значение которой существенно отличается от допустимого значения для данных СИ и условий или резко отличается от остальных в ряду измерений [6, 22].

Грубые погрешности (промахи) возникают при использовании неисправленного или неподготовленного СИ к измерениям (не выполнена технологическая поверка и юстировка основных осей прибора), при резком из-

менении внешних условий измерений либо из-за невнимательности наблюдателя [3].

Во всех случаях грубая погрешность существенно искажает результат измерений и она должна быть исключена. Для этого применяют различные критерии: «трех сигм», Граббса; Романовского, Шовене и др. [21, 22].

Самым популярным критерием на практике является критерий «трех сигм», так как он более простой и удобный, не требующий дополнительных статистических таблиц и достаточно надежный. По этому критерию измерение  $x_i$  считается маловероятным и его нужно исключить из ряда измерений величины, если выполняется следующее условие:

$$|x_i - \bar{X}| > 3\sigma_x, \quad (46)$$

где  $\bar{X}$  – среднее арифметическое значение ряда измерений;  $\sigma_x$  – среднее квадратическое отклонение измерений, представленное в составе метрологических характеристик СИ.

Таким образом, случайная погрешность характеризует точность, а систематическая – правильность измерения.

Перед оценкой результата измерений грубая и систематическая погрешности должны быть исключены.

### **Контрольные вопросы**

1. Что понимают под погрешностью?
2. Что общего и в чем различия систематической, случайно и грубой погрешностей?
3. Какие меры и способы применяют для исключения систематической и грубой погрешностей?
4. Какими свойствами обладает случайная погрешность?
5. С помощью каких специальных параметров можно охарактеризовать случайную величину и погрешности?

## 5. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Прежде чем раскрыть алгоритм математической обработки прямых многократных равноточных измерений, рассмотрим правила и рекомендации ведения журнала и представления промежуточных и окончательных вычислений.

Для регистрации измерений ведут специальные журналы, а на этапе математической обработки промежуточные и окончательные вычисления заносят в ведомости (таблицы). Ведение этих документов осуществляют с учетом следующих правил [20]:

1) журналы и ведомости следует заполнять аккуратно, все цифры и буквы должны быть записаны четко и разборчиво, т. е. журналы и ведомости заполняют так, чтобы другой исполнитель, не участвовавший в измерениях, мог безошибочно выполнить последующую обработку;

– числа в столбцах записываются так, чтобы все цифры соответствующих разрядов располагались одна под другой без смещения:

*Пример*

<b>Правильно</b>	<b>Неправильно</b>
12,06	1 234,33
113,35	24,56

– все результаты измерений, выполненных с одинаковой точностью, записывают с равным числом знаков после запятой:

*Пример*

<b>Правильно</b>	<b>Неправильно</b>
23,006	23,005
23,350	23,35

– значения минут и секунд при угловых измерениях записывают двузначным числом:

### Пример

**Правильно**

123° 05' 09"

**Неправильно**

123° 5' 9"

– числовые значения в результатах измерений должны быть согласованы с точностью отсчитывания по шкале СИ.

### Примеры

1. Длину стороны измерили стальной рулеткой с миллиметровыми делениями. Получился результат: 10 м, 35 см и 0 мм. Запись в журнале:

**Правильно**

10,350 м

**Неправильно**

10,35 м

2. Горизонтальный угол измерили теодолитом, отсчетное устройство которого позволяет взять отсчет до целых минут. Получился результат: 34 градуса. Запись в журнале:

**Правильно**

34° 00'

**Неправильно**

34°

2) исправление цифр, их подчистка и написание цифры по цифре не допускается;

3) ошибочная запись зачеркивается одной чертой, справа указывается правильное значение;

4) все записи ведутся шариковой ручкой;

5) на титульном листе журнала и/или над таблицей заполняют сведения о СИ (марка, тип прибора), об образцовом средстве измерения (марка, тип, метрологические характеристики), дату, время выполнения измерений, фамилии исполнителей, при необходимости приводят схему и рабочие формулы.

Единицы результата измерения приводят с учетом правил обозначения единиц измерения величин [1, 13, 17].

В научно-технической документации можно применять как международные, так и российские условные обозначения единиц, но недопустимо использовать оба обозначения одновременно.

Для отображения национальных условных обозначений единиц применяются буквы русского алфавита (табл. 2), а для отдельных единиц, напри-

мер, плоский угол (...°..'...',..."), процент (%), промилле (‰) – специальные символы.

Таблица 2

Международные единицы измерения

Наименование единицы измерения	Условное обозначение	
	русское	международное
Единицы длины		
Миллиметр	мм	mm
Сантиметр	см	cm
Дециметр	дм	dm
Метр	м	m
Километр	км	km
Дюйм (25,4 мм)	дюйм	in
Фут (0,304 8 м)	фут	ft
Единицы площади		
Квадратный метр	м <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>
Квадратный километр	км <sup>2</sup>	km <sup>2</sup>
Гектар	га	ha

Буквенные обозначения единиц печатаются прямым шрифтом и располагаются через пробел после числового значения величины без переноса на другую строку. После буквенного обозначения единицы точка как сокращение не ставится. Если используется надстрочный специальный символ (градуса, минуты и секунды), тогда между ним и значением величины пробел не ставится.

Числовое значение величины, представленное в виде дроби с косой чертой либо диапазона числовых значений, заключается в скобках. Примеры правильной записи:  $(1/4) \text{ с}^{-1}$ ;  $(1\,000,00 \pm 0,05) \text{ мм}$ .

Выполнение промежуточных вычислений, представление окончательного результата и оценка погрешностей измерения осуществляют с требуемым количеством значащих цифр. Если в числовом значении больше значащих цифр, чем требуется, производят округления этого значения [2, 5, 6, 22].

*Округлить* число до  $n$  знаков – это сохранить в нем  $n$  значащих цифр.

*Значащие цифры числа* – это все его цифры от первой слева, отличной от нуля, до последней записанной цифры справа, причем нули справа

не считаются таковыми цифрами, если они заменяют неизвестные цифры или поставлены в процессе округления. Например, число 0,035 4 мм имеет три значащие цифры, а число 122,020 м – шесть значащих цифр. Здесь последняя цифра была получена по шкале отсчетного устройства СИ. В случае если бы она была получена в результате округления или добавлена до нужного разряда, количество значащих цифр составило бы пять.

Правила округления при обработке результатов измерений:

1) в промежуточных вычислениях результата измерения удерживают на одну-две цифры больше, чем в исходных измерениях. Например, в результате измерения длины стороны в прямом и обратном направлениях получили следующие значения: 123,456 и 123,497 м. Тогда среднее значение длины стороны должно быть на один порядок точнее измерений: 123,476 5 м;

2) окончательный результат измерения должен быть согласован со значением погрешности.

### *Примеры*

1. Значение погрешности  $\pm 0,02$  мм. Вычисленное значение результата измерения составило 99,354 мм. Окончательное значение результата измерения:

**Правильно**

99,35

**Неправильно**

99,354

2. Значение погрешности  $\pm 0,5''$ . Вычисленный результат измерения горизонтального угла составил  $88^{\circ} 07' 12,60''$ .

Окончательное значение результата измерения:

**Правильно**

$88^{\circ} 07' 12,6''$

**Неправильно**

$88^{\circ} 07' 12,60''$

3. Значение погрешности  $\pm 100$  м. Вычисленное среднее значение измеренной длины составило 23 738 м.

Окончательное значение результата измерения:

**Правильно**

23 700

**Неправильно**

23 738

3) в промежуточных вычислениях погрешности оценки результата измерения (средней квадратической погрешности одного измерения, средней

квадратической погрешности среднего значения и доверительной границы погрешности) должно быть не более трех значащих цифр;

4) окончательное значение погрешности оценки результата измерения следует выражать двумя значащими цифрами при проведении высокоточных наблюдений и если первая значащая цифра не более трех. Если первая значащая цифра равна и более трех, то погрешность оценки результата измерения следует представлять одной цифрой;

#### *Примеры*

1. Погрешность равна  $\pm 0,0123$  м.

**Правильно**

$\pm 0,012$

**Неправильно**

$\pm 0,01$  или  $\pm 0,0123$

2. Погрешность равна  $\pm 10,0123$  м.

**Правильно**

$\pm 10$

**Неправильно**

$\pm 10,01$  или  $\pm 10,0$

3. Погрешность равна  $\pm 30,3''$ .

**Правильно**

$\pm 30''$

**Неправильно**

$\pm 0,5'$  или  $\pm 30,3''$

5) сохраняемую цифру при округлении увеличивают на единицу, если отбрасываемая цифра больше или равна пяти и после пяти есть цифра, и не изменяют, если отбрасываемая цифра меньше пяти;

#### *Примеры*

1. Округлить значение длины до четвертой значащей цифры включительно: 99,356 м.

**Правильно**

99,36

**Неправильно**

99,35

2. Округлить значение превышения до третьего знака после запятой: +0,561523.

**Правильно**

+0,562

**Неправильно**

+0,561

3. Округлить до третьего знака после запятой значение превышения: -9,561433.

**Правильно**

-9,561

**Неправильно**

-9,562

б) нечетную сохраняемую цифру увеличивают на единицу, если отбрасываемая цифра равна пяти и после нее нет других цифр в числе. В ином случае ее не изменяют.

### *Примеры*

1. Значение результата измерения составило 99,35 мм. Округлить это значение до трех значащих цифр.

**Правильно**

99,4

**Неправильно**

99,3

2. Значение измеренного горизонтального угла составило  $88^{\circ} 07' 12,5''$ . Округлить это значение до целых секунд.

**Правильно**

$88^{\circ} 07' 12''$

**Неправильно**

$88^{\circ} 07' 13''$

Из первой аксиомы теории измерения (см. разд. 3) следует, что результаты измерений являются приближенными числами, и чтобы удержать  $n$  верных значащих цифр в таких числах при выполнении арифметических операций, необходимо придерживаться следующих рекомендаций [20].

При сложении, вычитании, умножении и делении приближенных чисел в результате должно быть столько десятичных знаков, сколько у числа с наименьшим их числом. И чтобы удержать  $n$  верных десятичных знаков, предварительно числа с большим количеством десятичных знаков округляют до  $n + 1$  десятичного знака.

В результате возведения в степень или извлечения корня приближенного числа следует оставлять столько значащих цифр, сколько их было у этого числа.

Выше было указано, что целью математической обработки является вычисление окончательного результата измерения (чаще всего это арифметическое среднее значение) и доверительного интервала (оценки погрешности измерения), в пределах которого может находиться истинное значение измеряемой величины.

Если выполнены однократные измерения, то оценка доверительного интервала выполняется одним из трех способов: на основании погрешностей СИ, расчета априорной оценки точности, специально поставленного аналогичного эксперимента.

Для обработки результатов многократных измерений, в том числе для оценки погрешности измерений, применяют вероятностно-статистические методы.

По точности измерения могут быть неравноточными или равноточными. Неравноточными измерениями называют такие измерения, которые различаются по точности и/или условиям измерений. Равноточные измерения выполнены в одинаковых условиях и с одной и той же точностью.

В метрологии и в геодезии наиболее широко применяют прямой способ представления значения измеряемой величины.

Обработка прямых равноточных, в том числе независимых, многократных измерений подробно рассмотрена в нормативно-техническом документе [5] и учебных изданиях [6, 16, 19, 21, 22] и включает следующие этапы.

*1. Устранение из ряда измерений очевидных грубых технических ошибок.*

На этом этапе просматривают записи в журнале и устраняют очевидные технические ошибки: описки и промахи, совершенные исполнителем в журнале и вычислениях. Если обнаружены грубые ошибки в отсчетах по шкале СИ, эти отсчеты исключают из ряда измерений и выполняют повторные измерения.

*2. Исключение известных систематических ошибок в результатах наблюдений.*

В результат  $i$ -го измерения  $x'_i$  вводят поправку на известные систематические погрешности  $v_i$  и получают исправленное значение измеряемой величины  $x_i$

$$x_i = x'_i + v_i. \quad (47)$$

Для иллюстрации этого этапа рассмотрим в общем виде следующий пример. Допустим, что выполнены измерения метрового интервала трехметровой металлической рулетки  $l'_i$  с помощью штриховой меры, уравнение длины которой представлено как

$$L = l_{\text{н}} + \Delta_k + \beta(t - t^0), \quad (48)$$

где  $l_n$  – номинальная длина штриховой меры,  $\Delta_k$  – поправка за компарирование штриховой меры, определенная на эталоне;  $\beta$  – коэффициент температурного расширения меры;  $t^0$  и  $t$  – температура окружающего воздуха по Цельсию в момент сличения меры с эталоном и в момент измерения метрового интервала трехметровой рулетки соответственно.

Из уравнения (48) видно, что поправка за компарирование и изменение длины меры из-за отклонения температуры окружающего воздуха в момент измерения от температуры при сличении длины меры с эталоном являются известными систематическими погрешностями. Для исключения этих погрешностей вычисляют поправку и исправляют результат измерения  $l'_i$

$$v_{o,i} = \frac{\Delta_k}{l_n} l'_i + \beta(t - t^0). \quad (49)$$

3. *Определение среднего арифметического значения измеряемой величины и среднего квадратического отклонения.*

3.1. Среднее арифметическое значение величины  $\bar{x}$  вычисляют по исправленным результатам измерений  $x_i$  и принимают его за окончательный результат измерений

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (50)$$

где  $n$  – количество измерений или объем выборки.

3.2. Среднее квадратическое отклонение измерения вычисляют по формуле

$$m_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (51)$$

3.3. Для исключения грубых погрешностей в результатах измерений вычисляют критерии Граббса  $G_1$  и  $G_2$  по формуле

$$G_1 = \frac{|x_{\max} - \bar{x}|}{m_x}, \quad G_2 = \frac{|\bar{x} - x_{\min}|}{m_x}. \quad (52)$$

Здесь предполагается, что наибольший  $x_{\max}$  или наименьший  $x_{\min}$  результат измерения отягощены грубой погрешностью.

Выявление и исключение грубой погрешности осуществляют путем сравнения теоретического значения критерия Граббса  $G_T$ , определенного по количеству измерений  $n$  и уровню значимости  $\alpha$  (см. прил. 2), с вычисленными критериями Граббса  $G_1$  и  $G_2$

$$\left. \begin{array}{l} x_{\max} \text{ исключить, когда } G_1 > G_T; \\ x_{\min} \text{ исключить, когда } G_2 > G_T; \\ x_{\max} \text{ не исключать, когда } G_1 \leq G_T; \\ x_{\min} \text{ не исключать, когда } G_2 \leq G_T. \end{array} \right\} \quad (53)$$

После исключения соответствующего значения результата измерения в ряду многократных измерений переходят к первому этапу.

В иных случаях вычисляют среднее квадратическое отклонение среднего арифметического по формуле

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_x}{\sqrt{n}}. \quad (54)$$

*4. Проверка гипотезы о принадлежности результатов и погрешностей измерений нормальному закону распределения.*

В зависимости от объема выборки для проверки гипотезы о принадлежности результатов и погрешностей измерений нормальному закону распределения применяют различные критерии. Если объем выборки  $n \geq 50$ , то применяют критерий Пирсона или Мизеса – Смирнова либо эту проверку гипотезы выполняют по коэффициентам асимметрии и эксцесса. При объеме выборке  $15 < n \leq 50$  применяют составной критерий, а если  $n \leq 15$ , проверку гипотезы на нормальный закон не проводят [5, 6, 22, 24].

*5. Определение доверительных границ погрешности результата измерения.*

Формула вычисления доверительных границ погрешности результата измерения зависит от значения соотношения границ неисключенных погрешностей  $\Theta_{\Sigma}$  со средним квадратическим отклонением среднего арифметического  $m_{\bar{X}}$

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \pm t_{\beta} m_{\bar{X}}, \text{ когда } \frac{\Theta_{\Sigma}}{m_{\bar{X}}} < 0,8; \\ \Delta &= \pm \Theta_{\Sigma}, \text{ когда } \frac{\Theta_{\Sigma}}{m_{\bar{X}}} > 8; \\ \Delta &= \pm \eta \sqrt{m_{\bar{X}}^2 + m_{\Theta}^2}, \text{ когда } 0,8 \leq \frac{\Theta_{\Sigma}}{m_{\bar{X}}} \leq 8. \end{aligned} \right\}, \quad (55)$$

где  $t$  – коэффициент Стьюдента, определяемый по величинам доверительной вероятности  $\beta = 0,95$  (уровень значимости  $\alpha = 0,05$ ) и объему выборки  $n$  (см. прил. 3);  $\eta = \frac{\delta + \Theta_{\Sigma}}{m_{\bar{X}} + m_{\Theta}^2}$ ;  $\delta$  – доверительные границы случайных

погрешностей,  $\delta = \pm t_{\beta} m_{\bar{X}}$ ;  $\Theta_{\Sigma}$  – границы неисключенных систематических погрешностей;  $m_{\Theta}$  – среднее квадратическое отклонение неисключенных систематических погрешностей.

Определение границ неисключенной систематической погрешности (НСП) опирается на равномерный закон распределения погрешностей. Если количество составляющих неисключенной систематической погрешности  $\tau_i$  не более двух, то надежной оценкой границ НСП является арифметическая сумма

$$\Theta_{\Sigma} = \pm \sum_{i=1}^2 |\tau_i|. \quad (56)$$

Если количество составляющих НСП  $m \geq 3$ , то применяют квазистатистический способ (геометрический)

$$\Theta_{\Sigma} = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \tau_i^2}, \quad (57)$$

где  $k$  – коэффициент, значение которого зависит от доверительной вероятности  $\beta$ , количества составляющих НСП  $m$  и их соотношением между собой;  $\tau_i$  – граница  $i$ -й составляющей НСП.

Для доверительной вероятности  $\beta = 0,95$  значение коэффициента  $k$  равно 1,1.

Переход от границ НСП к средней квадратической погрешности неисключенной систематической погрешности зависит от способа вычисления этих границ:

1) арифметическая сумма –  $m_{\Theta} = \frac{\Theta_{\Sigma}}{\sqrt{3}}$ ;

2) геометрическая сумма –  $m_{\Theta} = \frac{\Theta_{\Sigma}}{k\sqrt{3}}$ .

*б. Запись результат измерения.*

Результат измерения записывают в следующем виде:  $X = \bar{X} \pm \Delta, \beta$ . Если предполагается в дальнейшем обработка или анализ, то результат измерения представляют в форме  $\bar{X}; m_{\bar{X}}; n; \Theta_{\Sigma}; \beta$ .

Среднее арифметическое значение измеряемой величины  $\bar{X}$  должно оканчиваться цифрой того разряда, что и значения оценок погрешности  $\Delta$  и среднего квадратического отклонения  $m_{\bar{X}}$ .

### Контрольные вопросы

1. Какими правилами следует руководствоваться при внесении в журнал и/или ведомость результатов измерений?

2. Какими правилами следует руководствоваться при округлении числовых значений?

3. В каком порядке выполняют обработку прямых многократных равноточных измерений величины?

4. Что понимают под неисключенной систематической погрешностью?

5. В каком случае учитывают границы неисключенной систематической погрешности?

## 6. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

**Целью индивидуального задания** является овладение обучающимися практическими навыками обработки прямых многократных равноточных измерений одной величины.

### Содержание

Перед выполнением индивидуального задания обучающиеся изучают разд. 5 и 6 настоящего учебно-методического пособия. Преподаватель выдает каждому обучающемуся вариант прямых многократных равноточных измерений метрового интервала металлической рулетки с помощью штриховой меры (эталон 3-го класса точности). Варианты результата измерений представлены в прил. 1.

Обучающиеся выполняют расчеты в Excel в соответствии с установленной формой, представленной ниже. Также можно использовать иное подобное прикладное программное обеспечение либо выполнить с помощью калькулятора, а сами результаты обработки оформить на бумажном носителе информации.

### Последовательность выполнения задания

1. Изучить разд. 5, 6 и записать в рабочую тетрадь основные формулы математической обработки прямых многократных равноточных измерений.
2. Подготовить табл. 3, 4 и 5 в Excel. Внести результаты измерения в табл. 3.
3. Определить максимальное  $l_{\max}$  и  $l_{\min}$  минимальные значения в ряду измерений (вторая колонка, табл. 3) и записать их значения в табл. 4.

## Результат прямых многократных равноточных измерений

Номер	Длина метрового интервала $l$ в мм	
	до исключения грубых погрешностей	после исключения грубых погрешностей
1	1 000,00	1 000,00
2	999,87	999,87
3	1 000,01	1 000,01
4	999,91	999,91
5	1 000,11	1 000,11
6	1 000,04	1 000,04
7	1 000,31	999,98
8	999,98	1 000,03
9	1 000,03	999,95
10	999,95	999,95
11	999,94	1 000,05
12	1 000,05	1 000,00
13	1 000,00	1 000,01
14	1 000,01	-

4. Вычислить среднее арифметическое значение метрового интервала по формуле

$$l_{\text{ср.}} = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n} = \frac{14\,000,21}{14} = 1\,000,015 \text{ мм.} \quad (58)$$

5. Вычислить среднюю квадратическую погрешность одного измерения метрового интервала по формуле

$$m_l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - l_{\text{ср.}})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,1418}{13}} = 0,104 \text{ мм.} \quad (59)$$

Результаты вычислений по формулам (58) и (59) внести в табл. 4.

Вычисления среднего арифметического значения длины метрового интервала и средних квадратических погрешностей

Наименование	Значения до исключения грубых погрешностей	Значения после исключения грубых погрешностей
$l_{\max}$	1 000,31	1 000,11
$l_{\min}$	999,87	999,87
$l_{\text{ср.}}$	1 000,015	999,992
$m_l$	0,104	0,062 8
$G_1$	2,833	1,879
$G_2$	1,398	1,943
$G_T$	2,507	2,462
$m_{l\text{ср.}}$	-	0,017

6. Исключить грубые погрешности в ряду многократных измерений в следующем порядке:

– вычислить критерии Граббса  $G_1$  и  $G_2$  по формуле

$$G_1 = \frac{|l_{\max} - l_{\text{ср.}}|}{m_l} = \frac{|1\,000,31 - 1\,000,015|}{0,104} = 2,833;$$

$$G_2 = \frac{|l_{\text{ср.}} - l_{\min}|}{m_l} = \frac{|1\,000,015 - 999,87|}{0,104} = 1,398.$$
(60)

– определить теоретическое критическое значение критерия Граббса  $G_T$  для количества измерения  $n$  и уровня значимости  $\alpha$  – свыше 5 %. Значение  $G_T$  находится на пересечении двух линий: горизонтальной линии по  $n = 14$  и линией по третьей колонке (свыше 5 %) таблицы в прил. 2.

Итак, значение  $G_T$  для принятого объема выборки и уровня значимости, составляет 2,507;

– сравнить вычисленные критерии Граббса  $G_1$  и  $G_2$  с  $G_T$  и в соответствии с правилами, представленными в формуле (53), выявить и исключить грубые погрешности в ряду многократных измерений.

В рассматриваемом примере сравнение  $G_1$  и  $G_2$  с  $G_T$  показало, что  $G_1 > G_T$ , а  $G_2 < G_T$ . Следовательно, грубая погрешность наблюдается в  $l_{\max}$  и это измерение следует исключить из ряда многократных измерений, внести значения измерений в третью колонку табл. 2, но без  $l_{\max}$ . Затем повторить действия, изложенные в пп. 3–6, при этом принять, что объем выборки равен 13, т. е.  $n = 13$ .

Приведем повторные определения  $l_{\max}$ ,  $l_{\min}$  и вычисления по формуле (58), (59) и (60):

$$l_{\max} = 1\,000,11 \text{ мм}; \quad l_{\min} = 999,87 \text{ мм};$$

$$l_{\text{ср.}} = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n} = \frac{12\,999,90}{13} = 999,992 \text{ мм};$$

$$m_l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - l_{\text{ср.}})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,0473}{12}} = 0,0628 \text{ мм};$$

$$G_1 = \frac{|l_{\max} - l_{\text{ср.}}|}{m_l} = \frac{|1\,000,11 - 999,992|}{0,0628} = 1,879;$$

$$G_2 = \frac{|l_{\text{ср.}} - l_{\min}|}{m_l} = \frac{|999,992 - 999,87|}{0,0628} = 1,943;$$

для  $n=13$  и  $\alpha > 5\%$   $G_T = 2,462$ .

Сравнение  $G_1$  и  $G_2$  с  $G_T$  показало, что в ряду многократных измерений грубых погрешностей не выявлено. Поэтому можно переходить к завершающим действиям математической обработки.

7. Вычислить среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического значения метрового интервала (СКП) по формуле

$$m_{l_{\text{ср.}}} = \frac{m_l}{\sqrt{13}} = \frac{0,0628}{\sqrt{13}} = 0,0174 \text{ мм.} \quad (61)$$

Значение СКП округлить до двух значащих цифр и записать в табл. 4.

8. Определить доверительные границы погрешности.

В индивидуальном задании принято, что при измерении метрового интервала металлической рулетки применяется штриховая мера 3-го класса точности; она была изготовлена год назад. Тогда в соответствии с ГОСТ 12069–90 в качестве составляющих НСП  $\tau_i$  будем учитывать следующее:

- 1) изменение длины вследствие нестабильности материала штриховых мер на 1 м длины в течение 1 года – 2,0 мкм;
- 2) допускаемое отклонение меры – 10,0 мкм.

Применяя формулу (56), определим границы НСП

$$\Theta_{\Sigma} = \pm(2,0 + 10,0) = \pm 12,0 \text{ мкм или } \pm 0,012 \text{ мм.}$$

Значение соотношения  $\frac{\Theta_{\Sigma}}{m_{l_{\text{ср.}}}} = 0,7$ , т. е. меньше 0,8 (55), поэтому дове-

рительные границы погрешностей необходимо определять по формуле

$$\Delta = \pm t_{\beta} \cdot m_{l_{\text{ср.}}} \quad (62)$$

Коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности 0,95 и степени свободы  $n - 1 = 12$  (см. прил. 3) составит  $t_{\beta} = 2,179$ . Подставив в формулу (62)  $t_{\beta}$  и  $m_{l_{\text{ср.}}}$ , получим доверительные границы погрешности среднего арифметического значения метрового интервала металлической рулетки

$$\Delta = \pm 2,179 \cdot 0,017 = \pm 0,038 \text{ мм.}$$

9. Записать оценки результата и погрешности измерения ( $\beta = 0,95$ ) в табл. 5, предварительно выполнив округления среднего арифметического значения метрового интервала металлической рулетки и оценку погрешности.

Таблица 5

Оценка результата измерения и погрешности

$l_{\text{ср}}$	$\Delta$	$\beta$
999,99	$\pm 0,04$	0,95

**Содержание отчета и контрольные вопросы**

По завершении выполнения индивидуального задания обучающийся представляет промежуточные и окончательные результаты математической обработки в формате Excel и ответы на контрольные вопросы, представленные в рабочей тетради.

**Контрольные вопросы**

1. Как выявить грубые измерения с помощью критерия Граббса?
2. Сколько значащих цифр должно быть в промежуточных вычислениях?
3. Приведите оценки: среднего арифметического значения величины, средней квадратической погрешности измерения, средней квадратической погрешности среднего арифметического значения величины.
4. Как определить доверительный интервал среднего арифметического значения измеряемой величины?
5. Как представляют результат измерения?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данном учебно-методическом пособии представлена теоретическая и практическая части для выполнения индивидуального задания по обработке прямых многократных равноточных измерений величины.

Теоретическая часть формирует у обучающихся общее представление о метрологии как науке, системе единиц SI, теории измерения (этапах измерений, погрешностях измерений и методике математической обработки результатов измерений величины).

Практическая часть создает условия для получения практических навыков обработки результатов прямых равноточных измерений. Подробность и доступность изложения этой части позволяет обучающимся самостоятельно выполнить индивидуальное задание.

В итоге обучающиеся будут способны обрабатывать и представлять полученные результаты измерений с применением информационных технологий и прикладного программного обеспечения.

Учебно-методическое пособие содержит материалы, необходимые обучающимся при выполнении индивидуального задания, контрольной работы и тестовых заданий по дисциплине «Метрология, стандартизация и сертификация в геодезии и кадастре».

Полученные теоретические знания и практические навыки будут востребованы при изучении обучающимися дисциплин профессионального цикла.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анисимов Г. Н. Основы метрологии. Ч. 1 : учеб. пособие. – СПб. : ПГУПС, 2019. – 47 с.
2. Анисимов Г. Н., Ткачук А. А. Основы метрологии. Ч. 2 : учеб. пособие. – СПб. : ПГУПС, 2021. – 84 с.
3. Большаков В. Д., Гайдаев П. А. Теория математической обработки геодезических измерений. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Недра, 1977. – 307 с.
4. Бородина Е. А. Лабораторные работы по метрологии. – СПб. : Лань, 2023. – 40 с.
5. ГОСТ Р 8.736–2011. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения. – Введ. 2013–01–01. – М. : Стандартиформ, 2013. – 20 с.
6. Грибанов Д. Д. Основы метрологии и стандартизации : учеб. пособие. – М. : ИНФРА-М, 2018. – 127 с.
7. Дегтяренко Г. П., Дудкин Е. Н., Мельников Г. А. Концепция метрологии в 21 веке [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.informio.ru/publications/id4102/Koncepcija-razvitija-metrologii-v-21-veke> (дата обращения: 16.01.2023).
8. Задачи системы обеспечения единства измерений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.rostest.ru/services/metrology/obespechenie-edinstva-izmereniy.php> (дата обращения: 16.01.2023).
9. Катков А. С. Пути реализации новой международной системы единиц // Мир измерений. – 2021. – № 2. – С. 16–21.
10. Красавин И. В. Вторая очередь Федеральной государственной информационной системы Росстандарт «Аршин»: от «Эксплуататора» – к разработчику // Мир измерений. – 2021. – № 2. – С. 10–14.
11. Леонов О. А., Шкаруба Н. Ж., Карпузов В. В. Метрология, стандартизация и сертификация : учеб. для вузов. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2022. – 196 с.

12. Основы метрологии, стандартизации и сертификации : учеб. пособие / М. Я. Марусина, В. Л. Ткалич, Е. А. Воронцов, Н. Д. Скалецкая. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2009. – 164 с.
13. Международная система единиц (SI). – Изд. 9-е. – М. : Росстандарт, 2019. – 96 с.
14. Метрология, стандартизация и сертификация : учеб. для вузов / И. А. Иванов, С. В. Урушев, Д. П. Кононов [и др.] ; под ред. И. А. Иванова, С. В. Урушева. – 4-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2022. – 356 с.
15. Метрология [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%B%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%8F> (дата обращения: 16.01.2023).
16. Основы метрологии : учебник / В. В. Окрепилов, Ю. А. Антохина, А. А. Оводенко [и др.] ; под ред. В. В. Окрепилова, Ю. А. Антохиной. – СПб. : ГУАП, 2020. – 479 с.
17. Общероссийский классификатор единиц измерений ОК 015–94 (МК 002–97). – М. : Стандартиформ, 2013. – 20 с.
18. Падве В. А. Элементы теории вероятностей и математической статистики : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2013. – 209 с.
19. Метрология, стандартизация и сертификация : учеб. пособие / Н. П. Пикула, А. А. Бакибаев, О. А. Замараева, Е. В. Михеева, Н. Н. Чернышова. – Томск : ТПУ, 2010. – 185 с.
20. Поклад Г. Г., Гриднев С. П. Геодезия : учеб. пособие для вузов. – М. : Академический Проект, 2007. – 592 с.
21. Пухаренко Ю. В., Норин В. А. Метрология, стандартизация и сертификация. Интернет-тестирование базовых знаний : учеб. пособие. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2022. – 308 с.
22. Пухаренко Ю. В., Норин В. А. Статистическая обработка результатов измерений. – 2-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2022. – 236 с.
23. Рекомендации по межгосударственной стандартизации. РМГ «ГСИ. Метрология. Основные термины и определения». – М. : Стандартиформ, 2014. – 60 с.
24. Сергеев А. Г., Крохин В. В. Метрология : учеб. пособие. – М. : Логос, 2002. – 408 с.

25. Тетерин Г. Н. История геодезии (до XX в.). – Новосибирск : Альяна-Регион. – 304 с.

26. Об обеспечении единства измерений : федер. закон от 26.06.2008 № 102-ФЗ (последняя редакция) [Электронный ресурс]. – Доступ из справ.-правовой системы «КонсультантПлюс».

27. Хохлов А. В. Метрология XXI века. Радиотехнические величины и эталоны в единицах SI // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Физика. – 2022. – Т. 22, вып. 1. – С. 72–81.

28. Цифровая трансформация метрологии – пять задач Росстандарта [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://www.gost.ru/portal/gost//home/presscenter/news?portal:componentId=88beae40-0e16-414c-b176-d0ab5de82e16&navigationalstate=JBPNS\\_rO0ABXczAAZhY3Rpb24AAAABAA5zaW5nbGVVOZXdzVmlldwACaWQAAAABAAQ2NzM1AAdfX0VPR19f](https://www.gost.ru/portal/gost//home/presscenter/news?portal:componentId=88beae40-0e16-414c-b176-d0ab5de82e16&navigationalstate=JBPNS_rO0ABXczAAZhY3Rpb24AAAABAA5zaW5nbGVVOZXdzVmlldwACaWQAAAABAAQ2NzM1AAdfX0VPR19f) (дата обращения: 28.01.2023).

№/n	Вариант													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	999,89	999,93	1000,07	1000,17	1000,02	1000,06	1000,05	999,94	999,89	1000,10	1000,10	999,95	999,98	999,86
2	999,98	1000,04	1000,09	1000,02	1000,09	999,88	999,94	999,90	999,95	999,96	999,96	1000,05	1000,37	1000,08
3	999,96	999,95	999,97	1000,14	999,92	999,96	1000,12	999,96	999,90	1000,08	1000,08	999,90	999,84	999,93
4	999,93	999,95	999,92	1000,14	999,96	1000,32	999,88	1000,08	1000,09	999,59	999,59	999,98	999,92	999,87
5	999,82	1000,12	1000,49	1000,14	1000,15	999,87	1000,10	1000,16	999,96	999,90	999,90	1000,30	1000,16	1000,02
6	1000,37	999,78	1000,04	1000,03	1000,06	999,86	999,81	999,62	1000,06	1000,05	1000,05	1000,07	999,97	1000,09
7	999,99	999,96	1000,12	999,97	999,79	1000,09	999,87	1000,10	999,96	999,98	999,98	1000,04	999,94	1000,44
8	1000,15	999,97	999,88	1000,17	1000,01	1000,05	1000,01	999,94	999,63	999,80	999,80	1000,02	1000,01	1000,12
9	999,95	999,96	1000,08	999,85	999,96	1000,00	999,90	1000,07	1000,07	1000,06	1000,06	999,84	999,99	999,99
10	1000,15	1000,12	999,74	999,89	999,94	1000,00	1000,10	999,98	999,94	999,99	999,99	1000,01	1000,03	1000,12
11	999,92	1000,03	1000,06	999,91	1000,12	999,91	1000,35	1000,09	1000,08	1000,15	1000,15	999,94	999,87	1000,11
12	999,99	999,93	1000,15	999,89	999,97	1000,00	999,92	1000,10	999,95	999,93	999,93	999,92	1000,14	999,97
13	1000,04	1000,12	999,95	1000,16	1000,44	999,85	999,95	999,94	1000,06	1000,03	1000,03	1000,07	1000,04	1000,06
14	999,86	1000,38	999,83	999,56	1000,04	999,89	1000,01	999,98	999,94	999,94	999,94	999,92	999,99	999,89
№/n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	999,92	1000,09	999,94	999,99	1000,38	1000,05	1000,04	999,94	999,97	1000,04	1000,11	1000,06	999,99	1000,02
2	999,94	999,90	999,92	999,96	999,96	1000,39	999,77	1000,30	999,94	999,90	999,91	999,60	1000,07	999,85
3	999,84	1000,05	1000,01	1000,02	1000,09	999,94	999,94	999,97	999,89	1000,04	999,99	999,87	1000,09	1000,17
4	1000,00	999,93	999,99	1000,04	999,89	999,88	1000,41	999,95	999,93	1000,01	999,91	1000,16	1000,00	1000,10
5	1000,11	999,91	999,99	1000,07	999,95	1000,03	1000,03	999,92	999,96	999,98	1000,43	999,90	1000,01	999,89
6	1000,39	1000,05	1000,11	999,93	999,88	999,96	1000,07	999,93	999,91	999,93	1000,03	1000,04	999,95	1000,42
7	1000,08	999,95	999,96	999,91	1000,01	999,91	1000,06	1000,01	999,99	999,98	999,85	1000,02	999,64	1000,04
8	999,95	999,96	1000,05	999,93	999,96	999,91	999,83	1000,06	1000,11	1000,26	999,90	999,91	1000,06	999,94
9	999,92	1000,36	999,97	1000,13	999,92	1000,10	999,94	999,77	1000,02	999,91	999,91	999,95	1000,11	1000,03
10	999,95	999,93	1000,17	1000,05	999,97	999,93	1000,04	1000,07	999,98	1000,10	1000,16	1000,05	1000,01	1000,05
11	999,85	1000,09	1000,02	1000,04	999,99	999,91	999,87	999,97	1000,09	999,88	999,85	1000,00	999,94	999,93
12	1000,06	999,97	1000,02	1000,01	1000,00	1000,17	1000,04	1000,10	1000,30	999,95	1000,03	999,91	999,85	1000,05
13	1000,04	1000,03	1000,02	999,75	1000,02	1000,02	999,96	999,97	1000,06	1000,03	1000,09	1000,03	1000,11	1000,07
14	999,89	999,86	999,74	1000,04	1000,16	999,93	1000,09	999,92	1000,02	999,94	999,89	1000,12	999,99	999,86

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Приложение 1

№/n	Вариант													
	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
1	999,95	999,80	999,95	999,95	1000,13	1000,06	999,98	999,98	999,76	1000,08	1000,19	1000,19	1000,11	999,99
2	1000,14	1000,11	999,87	999,87	1000,04	1000,08	1000,06	999,98	1000,04	1000,01	1000,07	1000,07	1000,05	1000,10
3	999,99	999,95	1000,10	1000,10	1000,01	1000,17	1000,08	999,97	1000,23	999,90	999,92	999,92	1000,03	1000,13
4	999,89	999,90	1000,42	1000,42	1000,04	1000,00	999,94	999,99	1000,00	1000,01	1000,09	1000,09	999,93	999,96
5	999,94	1000,03	999,86	999,86	1000,07	1000,10	1000,06	999,95	999,94	999,91	1000,05	1000,05	999,97	999,97
6	1000,10	999,96	999,97	999,97	1000,03	999,95	1000,08	999,91	1000,06	1000,39	1000,10	1000,10	1000,04	1000,04
7	999,86	1000,45	999,96	999,96	1000,11	999,92	999,97	1000,18	1000,16	999,93	1000,39	1000,39	1000,08	999,97
8	999,96	1000,03	999,91	999,91	1000,00	1000,12	999,75	1000,07	1000,09	1000,17	1000,08	1000,08	1000,26	999,62
9	1000,08	999,90	999,84	999,84	1000,37	1000,10	999,97	1000,40	1000,09	1000,13	999,96	999,96	1000,06	1000,09
10	1000,38	1000,09	999,96	999,96	1000,00	1000,04	1000,16	1000,14	1000,18	1000,04	999,95	999,95	999,88	999,86
11	1000,04	999,84	1000,04	1000,04	999,99	999,93	1000,12	1000,00	999,48	1000,02	999,92	999,92	999,95	999,99
12	999,98	999,99	1000,04	1000,04	1000,04	1000,05	999,96	1000,00	999,94	999,88	999,99	999,99	1000,00	999,87
13	999,98	999,89	999,89	999,89	999,84	999,64	1000,01	1000,09	999,89	1000,12	1000,01	1000,01	999,97	1000,08
14	999,97	999,97	1000,22	1000,22	999,94	999,85	1000,00	999,83	999,89	1000,07	999,91	999,91	999,99	999,96
№/n	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
1	999,65	1000,03	999,88	999,98	1000,01	999,99	999,92	1000,14	1000,09	1000,09	1000,02	999,86	999,86	1000,07
2	999,99	999,98	999,93	999,91	1000,11	1000,06	1000,00	1000,13	1000,17	1000,01	999,94	1000,39	999,87	1000,08
3	1000,16	999,97	1000,05	1000,31	999,84	999,95	999,89	1000,09	1000,03	1000,06	1000,14	1000,08	999,88	999,97
4	999,89	1000,10	1000,04	1000,09	1000,37	1000,05	999,84	999,94	999,95	1000,11	1000,45	1000,07	999,95	999,97
5	1000,09	999,83	1000,04	999,98	1000,04	1000,04	1000,08	999,93	1000,04	1000,18	999,86	1000,04	999,89	1000,02
6	1000,05	1000,01	999,90	999,91	999,89	999,90	1000,12	999,54	999,85	999,93	999,94	1000,01	1000,10	999,93
7	1000,04	999,97	999,90	1000,12	1000,03	1000,36	1000,13	1000,08	1000,05	999,87	999,88	999,99	1000,07	999,86
8	1000,02	999,93	1000,30	999,97	999,91	999,99	999,96	999,93	999,64	999,84	999,94	999,94	999,88	1000,00
9	999,85	1000,02	999,81	999,94	999,98	999,93	1000,02	1000,17	1000,12	999,99	999,91	1000,05	1000,37	999,83
10	999,97	999,96	999,97	1000,01	999,98	1000,04	999,96	1000,04	999,94	999,86	1000,17	999,81	999,95	999,98
11	999,94	1000,12	999,96	999,98	999,91	1000,13	1000,05	999,92	999,98	999,85	1000,11	999,81	1000,07	1000,16
12	999,96	999,97	1000,05	1000,00	1000,09	1000,03	1000,42	999,86	1000,03	1000,04	1000,02	1000,03	1000,09	999,93
13	1000,05	999,69	1000,09	999,92	1000,02	999,91	999,79	999,90	999,97	1000,43	1000,12	1000,15	1000,11	999,90
14	1000,13	999,97	999,98	999,93	1000,10	999,86	1000,15	1000,07	1000,09	999,93	999,93	1000,00	1000,08	1000,34

№/n	Вариант													
	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
1	999,93	1000,06	1000,04	1000,12	1000,15	1000,06	999,92	1000,03	1000,09	999,89	1000,17	999,95	1000,04	999,98
2	1000,03	1000,07	999,92	1000,05	1000,06	1000,00	1000,02	1000,16	999,94	999,61	999,99	1000,02	999,96	999,97
3	999,97	1000,01	1000,00	1000,11	1000,11	1000,03	1000,01	1000,03	1000,07	1000,10	1000,06	999,70	1000,07	1000,35
4	1000,00	1000,03	999,60	1000,02	999,56	999,97	1000,04	999,99	1000,00	999,97	999,99	999,95	999,91	1000,18
5	999,89	999,87	1000,05	1000,15	1000,25	1000,17	999,70	1000,17	999,97	999,89	1000,16	1000,12	1000,36	999,99
6	1000,04	999,90	999,85	1000,09	999,94	1000,03	999,98	1000,01	1000,12	1000,08	999,70	1000,12	1000,00	999,99
7	999,99	999,91	1000,16	1000,00	999,88	999,89	1000,00	999,87	1000,34	1000,09	999,97	1000,05	1000,09	999,87
8	1000,10	1000,05	1000,17	999,98	999,89	999,87	1000,16	1000,17	999,95	1000,12	1000,11	999,91	999,91	999,85
9	999,98	1000,08	999,91	999,94	1000,16	999,82	1000,10	999,95	999,86	999,88	999,88	1000,05	1000,05	999,92
10	999,94	1000,34	999,94	999,99	1000,02	1000,04	999,96	999,99	999,95	999,88	999,97	1000,03	999,96	1000,08
11	999,85	1000,07	1000,07	999,85	1000,04	1000,34	999,92	999,91	999,85	999,93	1000,04	1000,00	1000,11	999,97
12	1000,18	999,89	1000,05	999,93	999,89	999,90	999,98	999,64	999,83	1000,10	1000,00	999,83	999,90	1000,11
13	1000,37	1000,08	1000,14	999,63	999,89	999,97	999,95	1000,12	999,93	1000,05	999,99	1000,02	999,99	999,97
14	999,92	1000,02	1000,06	999,91	1000,01	1000,04	1000,07	1000,06	999,97	1000,07	999,97	1000,05	1000,11	1000,08
№/n	71	72	73	74	75									
1	999,97	1000,01	1000,00	999,57	1000,00									
2	999,96	1000,16	999,87	999,99	1000,06									
3	999,93	999,94	1000,08	999,94	1000,07									
4	1000,10	1000,07	999,94	999,84	999,68									
5	1000,35	999,75	999,96	1000,03	999,91									
6	999,90	1000,06	1000,00	999,81	1000,10									
7	1000,11	1000,09	999,87	999,96	1000,06									
8	999,91	999,96	999,89	999,93	1000,00									
9	999,98	1000,04	999,88	1000,14	999,86									
10	999,93	999,90	1000,12	1000,06	1000,17									
11	999,97	999,97	1000,04	1000,04	999,99									
12	1000,14	1000,08	1000,05	1000,13	999,98									
13	1000,12	999,99	1000,12	999,98	1000,11									
14	1000,03	999,99	999,59	1000,12	999,90									

**КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ  $G_t$  ДЛЯ КРИТЕРИЯ ГРАББСА**

$n$	Одно наибольшее или одно наименьшее значение при уровне значимости $\alpha$	
	Свыше 1 %	Свыше 5 %
3	1,155	1,155
4	1,496	1,481
5	1,764	1,715
6	1,973	1,887
7	2,139	2,020
8	2,274	2,126
9	2,387	2,215
10	2,482	2,290
11	2,564	2,355
12	2,636	2,412
13	2,699	<b>2,462</b>
14	2,755	<b>2,507</b>
15	2,806	2,549
16	2,852	2,585

**ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТЬЮДЕНТА  $t$** 

$n - 1$	$\beta = 0,95$	$\beta = 0,99$	$n - 1$	$\beta = 0,95$	$\beta = 0,99$
3	3,182	5,841	10	2,228	3,169
4	2,776	4,604	12	<b>2,179</b>	3,055
5	2,571	4,032	14	2,145	2,977
6	2,447	3,707	16	2,120	2,921
7	2,365	3,498	18	2,101	2,878
8	2,306	3,355	20	2,066	2,845
9	2,262	3,250	22	2,074	2,819

*Учебное издание*

**Калюжин Виктор Анатольевич**

**МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ  
И СЕРТИФИКАЦИЯ В ГЕОДЕЗИИ И КАДАСТРЕ  
ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ МНОГОКРАТНЫХ РАВНОТОЧНЫХ  
ИЗМЕРЕНИЙ**

Редактор *О. В. Георгиевская*

Компьютерная верстка *О. И. Голиков*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 03.11.2023. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 4,41. Тираж 120 экз. Заказ 150.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ  
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ  
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.