Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

В. А. Ащеулов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия для обучающихся по направлению подготовки
21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2023

УДК 521.1:[629.783:523.4(075.8)]
А989

Рецензенты: кандидат технических наук, профессор, президент ассоциации строительных организаций Новосибирской области *В. А. Середович*
кандидат технических наук, доцент, СГУГиТ *Е. Г. Гиенко*

Ащеулов, В. А.
А989 Основы теории движения искусственных спутников Земли : учебное пособие / В. А. Ащеулов. – Новосибирск : СГУГиТ, 2023. – 148 с. – Текст : непосредственный.
ISBN 978-5-907711-30-3

Учебное пособие подготовлено кандидатом технических наук, доцентом В. А. Ащеуловым на кафедре космической и физической геодезии СГУГиТ.

Приведены основы теории невозмущенного и возмущенного движения искусственных спутников Земли, изложен ряд методов предварительного определения орбит спутников. Рассмотрены аналитические и численные методы интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения спутников, методика уточнения орбит, вопросы вычисления эфемериды спутников.

Учебное пособие по дисциплине «Основы теории движения искусственных спутников Земли» предназначено для обучающихся по направлению подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата), профиль «Геодезия», и может быть полезным для обучающихся по специальности 21.05.01 Прикладная геодезия.

Рекомендовано к изданию кафедрой космической и физической геодезии, Ученым советом Института геодезии и менеджмента СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 521.1:[629.783:523.4(075.8)]

ISBN 978-5-907711-30-3

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

До 4 октября 1957 г. у Земли был только один спутник – Луна, существовавшая миллиарды лет. Благодаря своей огромной массе, около $7{,}35 \cdot 10^{21}$ кг, и шарообразной форме ее орбита имеет стабильный характер и практически не меняется последние миллионы лет. С запуском в СССР 4 октября 1957 г. первого *искусственного спутника Земли* (ИСЗ) для человечества открылись огромные перспективы по многим направлениям его деятельности. Например, к их числу можно отнести такие виды деятельности, как: создание единого коммуникационного пространства; изучение недр Земли и поиск полезных ископаемых; дистанционное зондирование всей земной поверхности; использование спутников для 3D-навигации и управления движением; использование спутников в целях спасения людей, выявления и ликвидации чрезвычайных ситуаций, прогнозирования и моделирования опасных явлений; обеспечение глобальной и локальной экологической безопасности; использование спутников для познания космического пространства и т. д.

Искусственные спутники Земли предоставили и нам, геодезистам, возможность решать различные задачи в масштабах и уровне точности, о которых раньше можно было только мечтать. Приведем перечень основных таких задач.

1. Обеспечение пользователей в любой точке Земли единой координатной основой, создание опорных геодезических сетей как на территории отдельных государств, так и на поверхности всей Земли.

2. Определение координат пунктов земной поверхности по измерениям параметров, характеризующих положение ИСЗ относительно этих пунктов.

Для менее точных определений в качестве таких параметров могут быть использованы топоцентрические экваториальные координаты (прямое восхождение и склонение), получаемые из фотографических наблюдений, или топоцентрические горизонтные координаты (азимут и высота спутника над горизонтом наблюдателя), получаемые из фиксации положения спутника угломерным прибором. Для точных определений используются лазерные или радиотехнические измерения топоцентрического расстояния до спутника. Наиболее распространенным в наше время видом измерения топоцентрического расстояния до спутников является измерение псевдодальности по сигналам, которые передают спутники глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС): ГЛОНАСС, GPS, «Бэйдоу» и «Галилео» [1, 2].

3. Уточнение параметров гравитационного поля Земли.

4. Уточнение фигуры геоида по альтиметрическим измерениям.

5. Картографирование поверхности Земли по космическим снимкам.

6. Решение геодинамических задач и т. д.

Без преувеличения можно утверждать, что применение ИСЗ для целей геодезии явилось технологической революцией в нашей отрасли. Для решения вышеперечисленных задач используются спутники разной конструкции, оснащенные различной аппаратурой, имеющие различные параметры движения. Но при этом объединяющим фактором для всех задач является необходимость знания положения и скорости движения ИСЗ на момент наблюдения, то есть знание законов движения спутников и умение использовать эти законы на практике.

Но, в отличие от Луны, ИСЗ имеют относительно небольшую массу, а значит, испытывают значительно большее влияние под воздействием возмущающих сил, имеющих гравитационную природу. Самый тяжелый на сегодняшний день искусственный объект на орбите Земли – Международная космическая станция – имеет массу около $4 \cdot 10^5$ кг. Кроме того, ИСЗ, за исключением небольшого количества специальных спутников, имеет далеко отличную от шарообразной форму. Эти обстоятельства требуют для изучения движения ИСЗ специальных подходов. Рассмотрение основ теории движения искусственных спутников Земли, а также решение сопутствующих задач, и является целью учебного пособия.

В учебное пособие включено несколько разделов:

– основы теории невозмущенного движения спутников;

– определение предварительной орбиты спутников;

– основы теории возмущенного движения спутников;

– основные принципы уточнения орбиты спутников;

– расчет эфемериды спутников.

Выражаю надежду, что изложенный в учебном пособии материал поможет выпускникам нашего вуза геодезического профиля в их будущей профессиональной деятельности.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКОВ

1.1. Основные свойства невозмущенного движения

Реальная траектория движения спутника вокруг Земли очень близка к эллипсу, поэтому именно эта фигура используется в небесной механике в качестве первого приближения для прогнозирования движения ИСЗ. Движение спутника по эллипсу предполагает, что на него не действуют никакие силы, кроме притяжения спутника Землей, при этом физическое строение Земли принимается в виде концентрических слоев с равномерным распределением плотности внутри каждого слоя. При таком строении Земли вся сила притяжения спутника Землей сосредоточена в одной точке – центре масс Земли. Такое модельное движение спутника получило название *невозмущенное* движение [4, 9, 11, 14, 17, 21].

Невозмущенное движение спутников Земли подчиняется трем законам, которые вывел датский астроном Иоганн Кеплер (1571–1630) на основании изучения движения планет Солнечной системы по орбитам вокруг Солнца, и которые имеют универсальный характер для всех спутников, вращающихся вокруг какого-либо притягивающего их тела [4, 9, 11]. Приведем формулировки *законов Кеплера*.

Первый закон Кеплера: *орбита спутника* представляет собой *эллипс*, один из фокусов которого совпадает с центром масс Земли. Этот фокус называется главным фокусом.

Второй закон Кеплера: геоцентрический радиус-вектор спутника за равные промежутки времени «заметывает» равные площади. Этот закон имеет также другую формулировку: секториальная скорость спутника есть величина постоянная.

Третий закон Кеплера: отношение квадратов периодов обращения двух спутников пропорционально отношениям кубов больших полуосей их орбит. Этот закон также имеет другую формулировку: произведение квадратов периодов обращения спутников на кубы больших полуосей их орбит есть величина постоянная. Очевидно, что речь идет об орбитах спутников, вращающихся вокруг одного и того же притягивающего тела. В нашем случае, это наша планета – Земля.

В приведенных выше законах Кеплера содержатся некоторые понятия, которые требуют пояснения.

Геоцентрический радиус-вектор спутника – вектор, показывающий текущее положение спутника относительно центра масс Земли.

Период обращения спутника – промежуток времени, за которое спутник совершит ровно один оборот вокруг Земли, при этом неважно, в какой точке орбитального эллипса он начнет и закончит свое движение.

Большая полуось орбиты спутника – величина, характеризующая размер орбитального эллипса по линии его продольной оси симметрии.

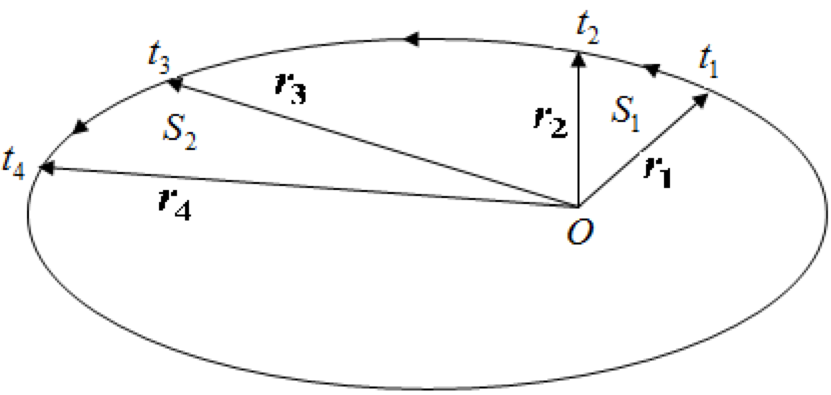


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация второго закона Кеплера

Геометрический смысл второго закона Кеплера хорошо иллюстрирует рис. 1 и комментарии к нему.

На рис. 1 приведены обозначения:

O – центр масс Земли;

$t_1, t_{2,} t_3, t_4$ – моменты времени положения спутника на орбите, отсчитываемые в направлении его движения;

$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4$ – геоцентрические радиус-векторы положения спутника, соответствующие моментам времени $t_1, t_{2,} t_3, t_4$;

S_1 – площадь сектора Ot_1t_2 ,заметанная геоцентрическим радиус-вектором спутника между моментами времени t_1 и t_2;

S_2 – площадь сектора Ot_3t_4 , заметанная геоцентрическим радиус-вектором спутника между моментами времени t_3 и t_4 .

Стрелками на рис. 1 показано направление движения спутника.

На рис. 2 покажем основные линии и точки орбитального эллипса.

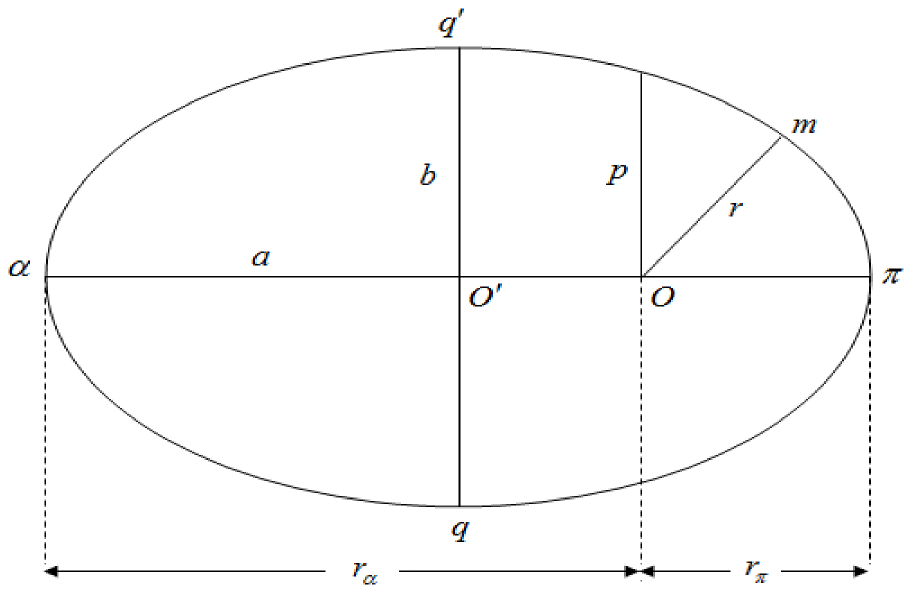


Рис. 2. Основные точки и линии орбитального эллипса

На рис. 2 приведены обозначения:

O – центр масс Земли;

O' – геометрический центр орбитального эллипса;

π – перигей орбиты (точка орбиты, наименее удаленная от центра масс Земли);

α – апогей орбиты (точка орбиты, наиболее удаленная от центра масс Земли);

$\alpha O\pi$ – продольная ось симметрии орбитального эллипса, в небесной механике она называется *линией апсид*;

$qO'q'$ – поперечная ось симметрии орбитального эллипса;

a – большая полуось орбиты (половина линии апсид), равная длине отрезков O'π или O'α;

b – малая полуось орбиты (половина поперечной оси орбиты);

p – фокальный параметр (длина перпендикуляра, проведенного из центра масс Земли до пересечения с орбитой);

r_π – перигейное расстояние;

r_α – апогейное расстояние;

m – положение спутника.

Для невозмущенного движения спутника характерны следующие свойства. Плоскость движения спутника проходит через центр масс Земли O, а ее ориентировка относительно окружающего Землю космического пространства остается неизменной. Это означает, что движение спутника удобно изучать в системе координат, неподвижной относительно звезд и других удаленных космических объектов. Такая система координат получила название *небесной системы координат* (рис. 3) [1, 4, 5, 11, 15].

По форме небесная система координат представляет собой трехмерную декартову систему координат. Оси этой системы традиционно обозначаются буквами латинского алфавита x, y, z. Начало системы совпадает с центром масс Земли O.

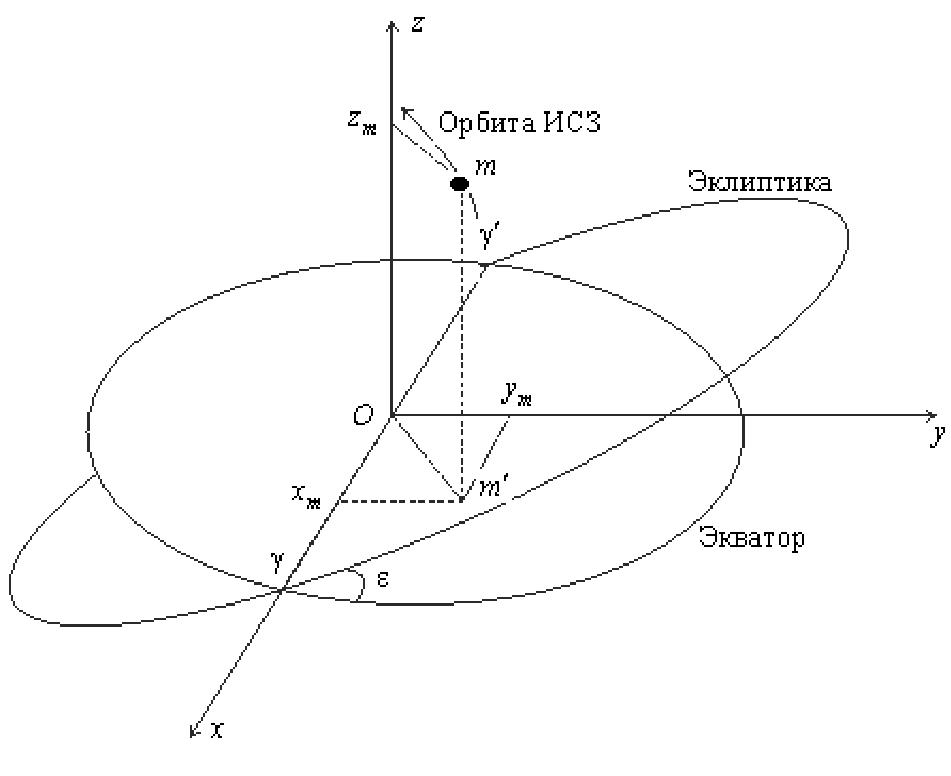


Рис. 3. Небесная система координат

Основная плоскость небесной системы координат xOy совпадает с плоскостью небесного экватора. Ось z направлена перпендикулярно этой плоскости в точку северного полюса небесной сферы. Ось x направлена в точку весеннего равноденствия γ. Ось y дополняет систему до правой. На рис. 3 буквой ε обозначен угол между плоскостями эклиптики и небесного экватора, равный около $23{,}5^{\circ}$. Вследствие таких явлений как *прецессия* и *нутация*, изучаемых в астрономии, точка γ и плоскость небесного экватора, а следовательно, и оси небесной системы координат изменяют свое положение в пространстве [6, 18]. По этой причине для практического использования небесной системы координат ее фиксируют на определенную дату, как правило, совпадающую с эпохой соответствующего звездного фундаментального каталога *FK*.

Координатами текущего положения спутника в небесной системе координат, обозначенного на рис. 3 буквой m, являются его проекции на оси системы x_m, y_m, z_m. В небесной механике и космической геодезии помимо небесной системы координат для решения различных задач используется множество систем координат. Эти системы координат и их связь с небесной системой координат будут вводиться по мере необходимости.

1.2. Кеплеровы элементы орбиты

Размер орбиты, ее форму, ориентировку орбиты относительно окружающего Землю космического пространства, положение спутника на орбите в момент времени t в невозмущенном движении удобно определять шестью величинами a, e, i, Ω, ω, $M(t)$, получившими название *кеплеровы элементы орбиты*:

a – большая полуось, характеризует размер орбиты;

e – эксцентриситет, характеризует форму орбиты;

i – наклонение орбиты, характеризует наклонение плоскости орбиты к плоскости земного экватора, изменяется в пределах от 0 до 180°;

Ω – *долгота восходящего узла*, характеризует разворот плоскости орбиты спутника относительно направления на точку весеннего равноденствия γ, изменяется в пределах от 0 до 360°;

ω – *аргумент перигея*, характеризует ориентировку орбиты в плоскости движения спутника; значение аргумента перигея равно значению угла, в вершине которого находится центр масс Земли, а сторонами являются часть *линии апсид* в направлении на перигей и часть *линии узлов* в направлении на *восходящий узел орбиты*; отсчитывается угол ω от восходящего узла орбиты Ω в сторону движения спутника, изменяется в пределах от 0 до 360°;

$M(t)$ – *средняя аномалия*, характеризует угловое отстояние спутника относительно направления на перигей орбиты, отсчитывается от точки перигея π в сторону движения спутника, изменяется в пределах от 0 до 360°. Обращаем внимание, что в невозмущенном движении все витки орбиты спутника копируют друг друга, повторяются от оборота к обороту, поэтому значения средней аномалии не накапливаются, а на следующем витке отсчет средней аномалии начинается с 0° по новой.

Геометрический смысл *большой полуоси а показан на рис. 2.* Значение *эксцентриситета е* может меняться от 0 до 1, оно показывает степень сжатия орбиты вдоль поперечной оси орбитального эллипса. Значение эксцентриситета, равное 0, соответствует круговой орбите. Чем больше значение эксцентриситета отличается от нуля, тем более сжата орбита.

Геометрический смысл угловых элементов *i*, Ω и ω показан на рис. 4, заимствованным автором из работ [1, 4].

На рис. 4 приняты следующие обозначения:

x, y, z – оси *инерциальной небесной системы координат*, начало которой совпадает с центром масс Земли, ось *x* направлена в точку весеннего равноденствия γ, ось *z* направлена в северный полюс мира, ось *y* дополняет систему до правой;

☋Ω – линия пересечения плоскости орбиты и плоскости небесного экватора, она получила в небесной механике название *линии узлов*, проходит через центр масс Земли, ее крайние точки получили названия: Ω – *восходящий узел орбиты*, в этой точке орбиты спутник пересекает плоскость небесного экватора в направлении из южного полушария небесной сферы в направление северного полушария;

☋ – *нисходящий узел орбиты.* В этой точке, наоборот, спутник пересекает небесный экватор из северного полушария небесной сферы в южное; плоскость небесного экватора на рис. 4 выделена светло-серым цветом, а северное полушарие Земли показано темно-серым цветом;

πα – *линия апсид*;

S – в отличие от предыдущего рисунка, на рис. 4 этой буквой обозначено положение спутника.

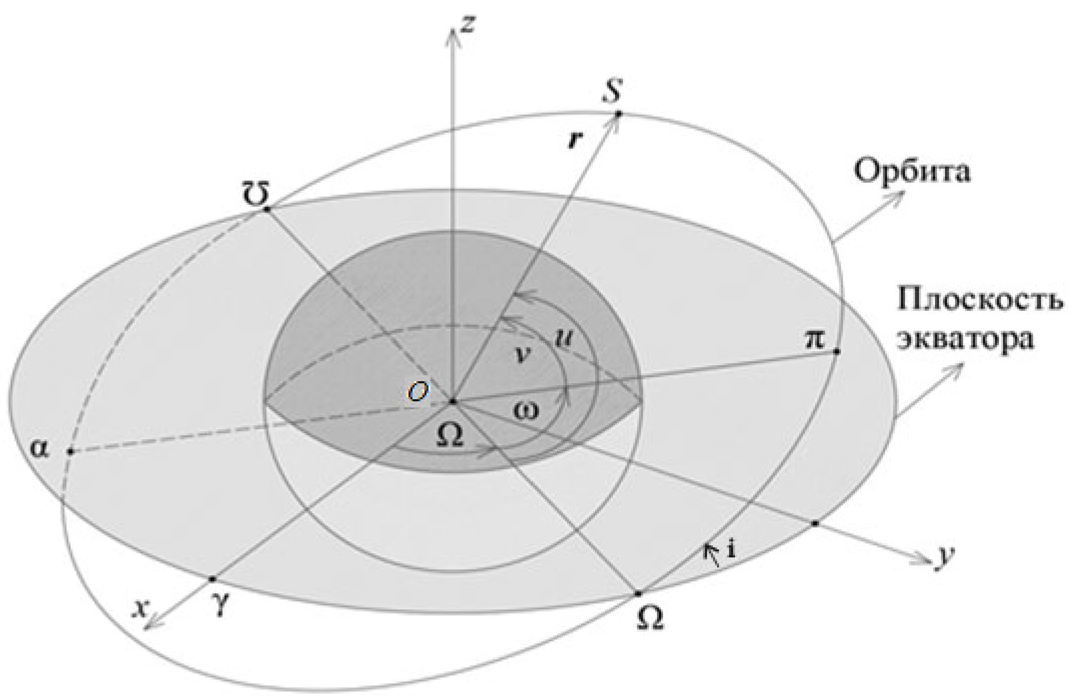


Рис. 4. Геометрический смысл угловых элементов *i*, Ω и ω

На рис. 4 показаны два новых угла, имеющих следующее назначение:

v – угол между направлением на перигей орбиты π и направлением на спутник *S,* называемый *истинной аномалией*;

u – угол между направлением на восходящий узел орбиты Ω и направлением на спутник *S,* называемый *аргументом широты*. Как видно из рис. 4, *аргумент широты u* равен сумме *аргумента перигея* ω и *истинной аномалии v*.

В невозмущенном движении пять кеплеровых элементов орбиты – *a*, *e*, *i*, Ω, ω – не изменяют своих значений. Переменной величиной является только *средняя аномалия* $M(t)$. Она связана математической зависимостью с двумя другими угловыми параметрами, характеризующими положение спутника на орбите на момент времени *t* – *эксцентрической аномалией E* и *истинной аномалией ν*. Геометрический смысл этих аномалий иллюстрируется на рис. 5.

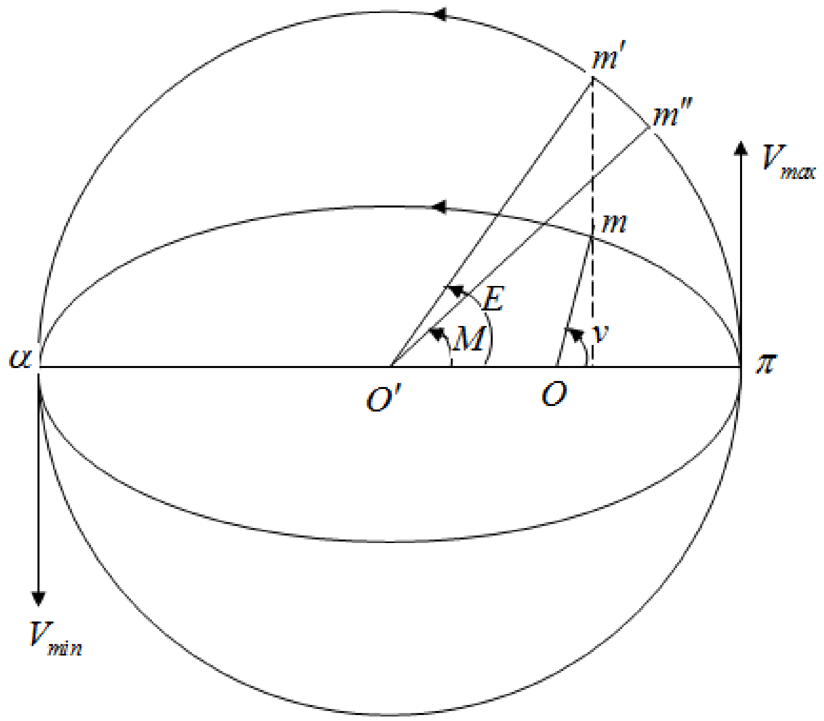


Рис. 5. Геометрический смысл аномалий *ν, E, M*

На рис. 5 вокруг орбитального эллипса проведена окружность радиусом, равным значению большой полуоси *a,* которая касается орбиты спутника в точках перигея π и апогея α. Буквой *m* показано положение спутника на орбите. Если перпендикуляр, опущенный из точки спутника *m* на линию апсид, продолжить до пересечения с окружностью, то получим точку m'. *Истинная аномалия ν* представляет собой угол π*Om*, отсчитываемый от точки перигея в направлении движения спутника.

Эксцентрической аномалией E называется угол $\pi O'm'$, также отсчитываемый от перигея в направлении движения спутника. Характерной особенностью этих двух углов (истинной и эксцентрической аномалий) является неравномерность их изменений с течением времени как следствие неравномерности движения спутника, что усложняет определение положения спутника на орбите. При этом скорость движения спутника в точке перигея имеет максимальное значение $V_{\max}$, затем она постепенно убывает и достигает своего минимального значения в точке апогея $V_{\min}$. После пролета спутником точки апогея его движение, наоборот, начинает ускоряться и опять достигает своего максимального значения в точке перигея. На следующем витке все повторяется и т. д.

Задача определения положения спутника на орбите при невозмущенном движении значительно упрощается, если ввести еще один угловой параметр – *среднюю аномалию М.* Она представляет собой угол $\pi O'm''$, в котором точка m'' движется по окружности с равномерной скоростью n, называемой *средним движением* спутника по орбите. Это означает, что средняя аномалия M, в отличие от соответствующих ей значений эксцентрической E и истинной v аномалий, изменяется прямо пропорционально времени движения спутника по орбите. Формула вычисления средней аномалии спутника как функция времени имеет вид

$$M = n(t - t_{\pi}). \tag{1}$$

В формуле (1) символом t_{π} обозначено время пролета спутником перигея орбиты π. Это особая точка орбиты, с нее начинается отсчет угловых параметров M, E и v на конкретном обороте (витке) спутника. *Среднее движение спутника* по орбите n определяется по формуле

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \tag{2}$$

Входяшие в правую часть формулы (2) величины имеют следующий смысл:

a – *большая полуось орбиты спутника*;

μ – *гравитационный параметр Земли*, определяемый по формуле

$$\mu = f \cdot M,$$

где f – *всемирная гравитационная постоянная*; ее значение равно 6,672 $10^{-11} H \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$; M – *масса Земли,* равная $5,973 \cdot 10^{24}$ кг.

С точностью до восьми значащих цифр значение μ принимается равным $398600,44 \, \text{км}^3 / \text{с}^2$. Из формулы (2) видно, что значение n зависит от величины большой полуоси. Чем больше a, тем меньше его средняя скорость полета по орбите.

Значение средней аномалии M показывает смоделированное положение спутника на окружности. Реальное же положение спутника на орбите дает соответствующее значение истинной аномалии v. Переход от средней аномалии M к истинной v осуществляется посредством эксцентрической аномалии E, которая играет вспомогательную роль. Для этого используют *уравнение Кеплера* [11, 19, 21]

$$E - e\sin E = M, \tag{3}$$

где e – эксцентриситет орбиты.

Уравнение Кеплера преобразуют относительно эксцентрической аномалии следующим образом:

$$E = M + e\sin E. \tag{4}$$

Уравнения вида (4), в которых отыскиваемая величина находится как в явном виде, так и под знаком какой-либо функции (в нашем случае это функция синуса), называются *трансцендентными* и решаются методом итераций. Для этого уравнение (4) перепишем в виде

$$E_{i+1} = M + e\sin E_i. \tag{5}$$

С учетом того, что оба сомножителя во втором слагаемом в правой части уравнения априорно меньше единицы, процесс сходимости обеспечен. При этом количество итераций в первую очередь зависит от величины эксцентриситета e. В качестве начального значения E_0 берут значение средней аномалии M. Процесс итерации продолжается до достижения заданной точности ε. Буквой i в подстрочных индексах при E обозначен номер итерации.

Переход от эксцентрической аномалии E к истинной v выполняется по формуле

$$v = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}\right). \tag{6}$$

И, наконец, приведем обобщенный рис. 6, заимствованный автором из работы [1], на котором покажем уже известные нам точки, линии и некоторые параметры орбиты спутника в плоскости его движения.

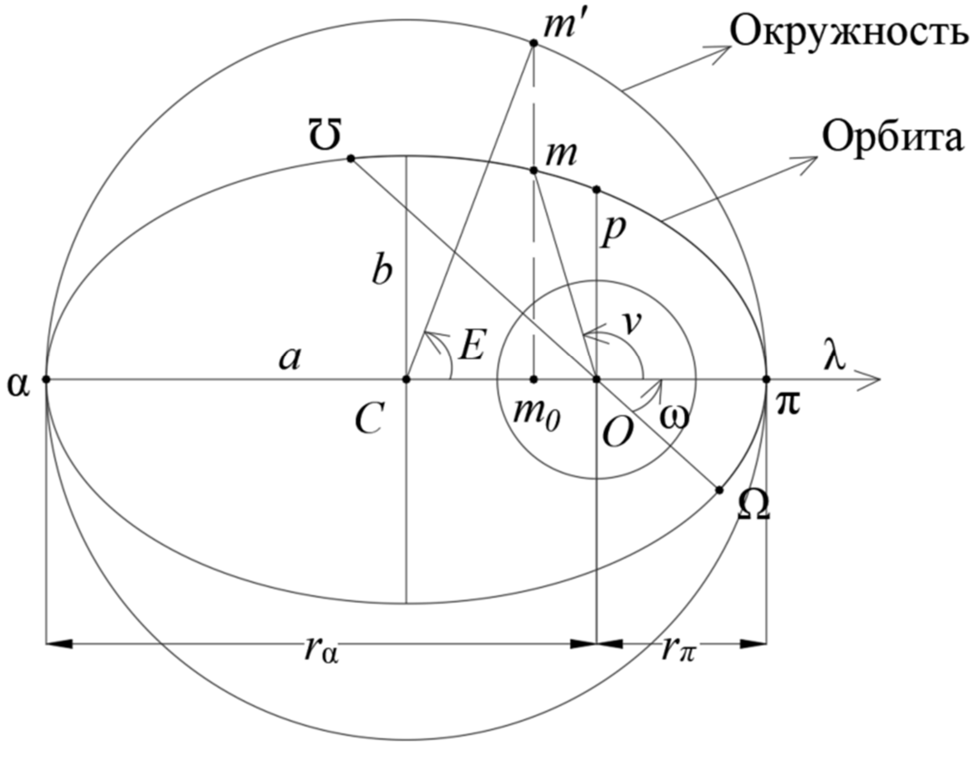


Рис. 6. Точки, линии и угловые элементы орбиты спутника в плоскости его движения

1.3. Типы орбит искусственных спутников Земли

В зависимости от значений кеплеровых элементов орбиты различают несколько типов орбит [15, 16, 17, 19]:

1. *Круговые орбиты*. Это орбиты, у которых эксцентриситет e равен нулю. Практически добиться этого невозможно, так как вследствие влияния

возмущающих факторов форма орбиты постоянно претерпевает изменения, поэтому правильнее говорить о *квазигруговых* (почти круговых) орбитах. К ним можно отнести орбиты со значениями эксцентриситета в пределах 0,01. К этому типу относят орбиты геостационарных спутников, спутников ГНСС второго поколения (ГЛОНАСС, GPS, «Бэйдоу», «Галилео»), большинства спутников дистанционного зондирования Земли.

2. *Экваториальные орбиты*. Это орбиты, у которых наклонение i равно 0°. К этому типу в первую очередь следует отнести орбиты геостационарных спутников.

3. *Полярные орбиты*. Это орбиты, у которых наклонение i равно 90°. К этому типу относятся орбиты некоторых спутников дистанционного зондирования Земли; спутников, изучающих гравитационное поле Земли.

4. *Геостационарные орбиты*. Это орбиты, которые характеризуются следующими свойствами. В первую очередь, период обращения этих спутников равен звездным суткам $23^h 56^m 04^s$, т. е. одному обороту Земли относительно окружающего космического пространства. Кроме этого, наклонение i должно быть равным 0°. Это означает, что спутники такого типа постоянно «висят» над одной и той же точкой земного экватора. К этому типу относятся так называемые спутники-шпионы, а также спутники связи, спутники – ретрансляторы телевизионного сигнала. Из-за влияния возмущающих факторов геостационарные спутники постоянно смещаются с установленной для них точкой экватора, поэтому они, как правило, оборудованы корректирующими двигателями, позволяющими возвращать их в заданную точку пространства. Следует отметить также, что из-за особенности своей орбиты эксцентриситет таких орбит следует считать равным нулю, а среднее значение большой полуоси a равно 42 163 км.

5. *Синхронные орбиты*. Это орбиты, периоды обращения которых кратны значению звездных суток $23^h 56^m 04^s$. При этом наклонения орбит i могут принимать любые значения. Синхронные спутники периодически появляются над одними и теми же точками земной поверхности. Среди семейства синхронных спутников выделяют *солнечно-синхронные* орбиты. Такие спутники появляются над точками земной поверхности в одно и то же время суток. Для этих спутников характерно значение наклонения

орбиты i больше 90°. Меняя значение долготы восходящего узла орбиты Ω, можно добиться для синхронных спутников пролета над земной поверхностью во время рассвета Солнца или, наоборот, во время заката, т. е. по так называемой линии терминатора.

Встречается также классификация орбит спутников Земли в зависимости от высоты полета h над земной поверхностью: *низколетящие* (от 200 до 1 500 км), *средневысокие* (до 30 000 км), *высоколетящие* (выше 30 000 км) [5].

Отметим, что параметры орбиты зависят от назначения спутников: геодезические, навигационные, дистанционного зондирования Земли, метеорологические, связи, астрономические, военные, для проведения различных исследований.

1.4. Дифференциальные уравнения невозмущенного движения

В предыдущем подразделе отмечалось, что если для описания движения спутника использовать физическую модель Земли с равномерным распределением масс в виде сферических слоев, то в этом случае Земля будет влиять на спутник как материальная точка, имеющая массу, равную массе реальной Земли. Движение спутника под влиянием такой модельной Земли получило название *невозмущенного движения*. Невозмущенное движение является значительным приближением к реальной траектории спутника и подчиняется *трем законам Кеплера*. Напомним, что движение спутника изучается в *небесной системе координат*.

Отметим также следующие отличительные особенности невозмущенного движения [1, 4, 11, 21].

1. Ориентировка плоскости орбиты спутника в пространстве и расположение самой орбиты в плоскости его движения не изменяются с течением времени.

2. Спутник за время, равное периоду его обращения, прилетает в одну и ту же точку пространства.

3. Формулы, описывающие движение спутника по орбите, имеют конечный вид.

Как уже отмечалось выше, положение спутника и скорость его движения в заданный момент времени в невозмущенном движении описывается шестью параметрами $a, e, i, \Omega, \omega, M(t)$, получившими название *кеплеровы элементы* орбиты. Назначение кеплеровых элементов также подробно рассмотрено в подразд. 1.2.

В основе движения любого спутника лежат три закона [11, 21]:

– закон всемирного тяготения;

– закон инерции (второй закон Ньютоновой механики);

– закон равенства действия противодействию.

В первую очередь следует отметить закон всемирного тяготения, обнародованный Исааком Ньютоном в 1687 г. в книге «Математические начала натуральной философии», и который можно сформулировать в следующей редакции: *два тела, обладающие массой, притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними*.

Этот закон является величайшим открытием человечества и вне всякого сомнения имеет всемирный характер. Каждое из бесчисленных тел нашей Вселенной создает в окружающем пространстве гравитационное поле, которое взаимодействует с гравитационными полями остальных тел. При этом все тела космического пространства вращаются вокруг другого тела или совокупности тел, гравитационные поля которых в данной точке пространства являются превалирующими по сравнению с гравитационными полями остальных тел. Такие тела или совокупность тел называются *притягивающими центрами*. Звезды вращаются вокруг центров Галактик, планеты вращаются вокруг своих звезд, вокруг планет вращаются их спутники. Не являются исключением и искусственные спутники Земли. Но прежде чем оказаться на земной орбите, они должны преодолеть притяжение Земли. Для этого необходимо, чтобы проекция силы ракеты-носителя $\boldsymbol{F}_{\text{нос}}$ на геоцентрический радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ в точке вывода спутника на орбиту $\boldsymbol{F}_{\text{выв}}$ была бы по крайней мере не меньше силы притяжения спутника Землей $\boldsymbol{F}_{\text{прит}}$ (рис. 7).

Сила ракеты-носителя $\boldsymbol{F}_{\text{нос}}$ является реализацией закона инерции, а ее проекция $\boldsymbol{F}_{\text{выв}}$ на продолжение геоцентрического радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ противодействует силе $\boldsymbol{F}_{\text{прит}}$ притяжения спутника Землей.

Отметим, что сила, под действием которой тело массой m начинает свое движение в качестве спутника Земли, является равнодействующей сил $\boldsymbol{F}_{\text{прит}}$ и $\boldsymbol{F}_{\text{нос}}$. Направление силы $\boldsymbol{F}_{\text{нос}}$ не совпадает с направлением геоцентрического радиус-вектора $\boldsymbol{r}$. В зависимости от того, в какой точке околоземного пространства произошел вывод тела на орбиту спутника и в какую сторону направлена сила $\boldsymbol{F}_{\text{нос}}$, мы получим тот или иной набор кеплеровых элементов орбиты. Отметим также, что вектор скорости V и равнодействующая сил $\boldsymbol{F}_{\text{прит}}$ и $\boldsymbol{F}_{\text{нос}}$ направлены по касательной к орбите.

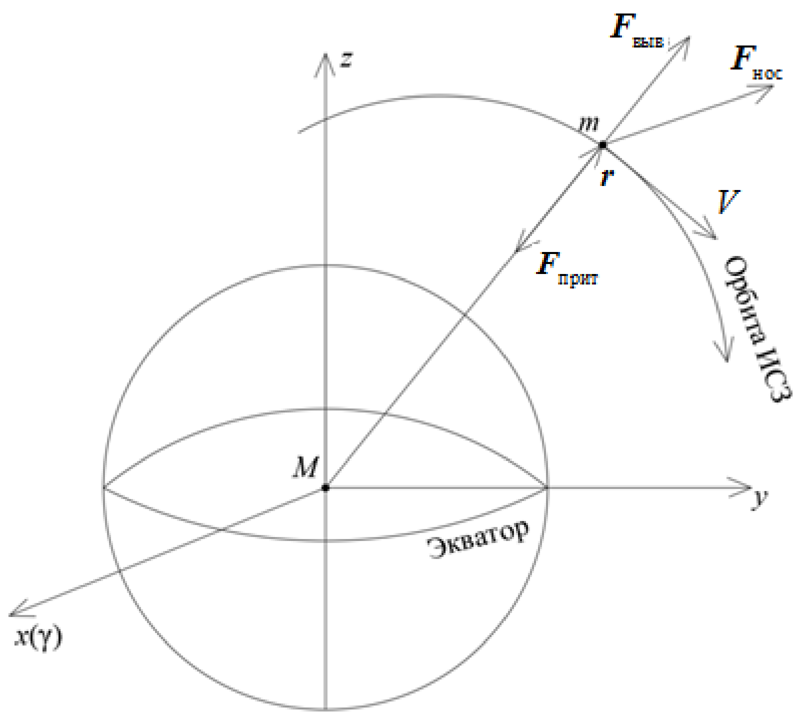


Рис. 7. Вывод спутника на орбиту

Спутники Земли при невозмущенном движении летят по криволинейной траектории – по эллипсу, поэтому движение ИСЗ описывается дифференциальными уравнениями. Математической основой для получения дифференциальных уравнений невозмущенного движения спутников является равенство

$$\boldsymbol{F}_{\text{прит}} = \boldsymbol{F}_{\text{выв}}. \tag{7}$$

Силу взаимного притяжения Земли и спутника согласно закону всемирного тяготения запишем в виде

$$F = f\frac{M_З m}{r^2}, \quad (8)$$

где обозначены: f – постоянная всемирного тяготения, ее значение принимают равным $6{,}69437999 \cdot 10^{-3}\, м^3 кг^{-1} с^{-2}$; $M_З$ – масса Земли, равная $5{,}973 \cdot 10^{24}$ кг; m – масса искусственного спутника Земли; r – геоцентрическое расстояние спутника.

Выше уже отмечалось, что в настоящее время масса самого большого искусственного объекта, выведенного на орбиту вокруг Земли – Международной космической станции (МКС), – равна около $4 \cdot 10^5$ кг, т. е. примерно в 10^{19} раз меньше массы Земли. Это означает, что гравитационное влияние современных ИСЗ на Землю ничтожно мало и преобладающий вклад в суммарную силу F в формуле (8) вносит наша планета. Отметим следующее допущение относительно массы спутника m. Учитывая относительно небольшую массу спутника и значительное расстояние спутника до притягивающего центра, неправильностью формы спутников Земли пренебрегают и считают, что вся масса спутника сосредоточена в его центре масс. Таким образом, и масса Земли, и масса спутника сосредоточены в соответствующих их центрах – точках. Взаимодействие таких точечных масс получило в небесной механике название *задачи двух тел.* Поскольку при выводе формул невозмущенного движения притяжение Земли спутником не учитывается, то рассматриваемое ниже гравитационное взаимодействие нашей планеты и спутника получило название *ограниченной задачи двух тел* [4, 11, 21].

Силу вывода спутника на орбиту $\boldsymbol{F}_{выв}$ можно записать согласно второму закону Ньютона в виде

$$\boldsymbol{F}_{выв} = m\boldsymbol{a}, \quad (9)$$

где $\boldsymbol{a}$ – вектор ускорения движения вдоль геоцентрического радиус-вектора спутника $\boldsymbol{r}$.

Из силы взаимного притяжения Земли и спутника по формуле (8) выделим составляющую силу притяжения спутника Землей $\boldsymbol{F}_{прит}$. Она направлена в центр масс Земли, т. е. противоположно направлению на спутник $\boldsymbol{r}$ и имеет вид

$$F_{\text{прит}} = -f\frac{M_З m}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{10}$$

Множитель $\boldsymbol{r}/r$ в формуле (10) показывает направление геоцентрического радиус-вектора $\boldsymbol{r}$.

На основании формулы (7) приравняем правые части формул (9) и (10), при этом учтем разнонаправленность этих сил. Ускорение $\boldsymbol{a}$ в формуле (9) заменим на его математическую трактовку как вторую производную от геоцентрического радиус-вектора по времени. На основании вышеизложенного получим

$$-f\frac{M_З m}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{11}$$

Введем обозначения: $\mu = fM_З$ – гравиметрический параметр Земли, равный значению $398\,600{,}44\,\text{км}^3/\text{с}^2$; $\ddot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ – это общепринятое в небесной механике обозначение ускорения, две точки обозначают второй порядок производной по времени.

Кроме того, сократим между собой массу спутника m, стоящую в левой и правой частях формулы (11).

С учетом сделанных обозначений формула (11) преобразуется к виду

$$-\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \ddot{\boldsymbol{r}}. \tag{12}$$

Отсутствие массы спутника в формуле (12) является математическим доказательством невесомости на борту космического аппарата, находящегося на орбите искусственного спутника Земли.

Перенесем все члены формулы (12) по одну сторону равенства, окончательно получим

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \mu \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0. \tag{13}$$

Равенство (13) представляет собой *уравнение невозмущенного движения* спутника Земли, записанное в *векторной форме*. После вывода спутника на орбиту вокруг Земли он становится членом окружающего Землю космического сообщества и его движение происходит в системе координат, связанной с этим сообществом и называемой, как уже отмечалось выше, *небесной системой координат.* Начало этой системы совпадает с центром масс Земли, ось $\boldsymbol{x}$ направлена в точку весеннего равноденствия γ, ось $\boldsymbol{z}$ направлена в северный полюс мира, ось $\boldsymbol{y}$ дополняет систему до правой (см. рис. 3). Земля вращается вокруг своей оси внутри орбиты своего спутника и относительно небесной системы координат. Наличие нуля в правой части равенства (13) является характерным признаком невозмущенного движения.

Согласно правилам векторной алгебры любой вектор можно представить в виде его разложения по координатным осям. Проекции геоцентрического радиус-вектора спутника $\boldsymbol{r}$ на оси инерциальной системы координат являются координатами спутника *x, y, z*, поэтому вектор $\boldsymbol{r}$ иногда записывают в виде $\boldsymbol{r}(x, y, z)$. Вектор скорости спутника $\boldsymbol{V}$ по аналогии можно записать в виде $\dot{\boldsymbol{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, где $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – проекции вектора скорости на оси небесной системы координат, полученные после параллельного переноса начала вектора $\boldsymbol{V}$ в начало инерциальной небесной системы координат. Заметим, что фактичекое начало вектора скорости V находится в точке спутника. Но нас интересует только его длина и направление, поэтому параллельный перенос вектора скорости спутника для получения этих величин вполне правомочен. Аналогично вектор ускорения движения спутника по орбите можно записать в виде $\ddot{\boldsymbol{r}}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$. Таким образом, векторы $\boldsymbol{r}$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}$ можно представить в виде их разложения по осям небесной системы координат следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}; \tag{14}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}. \tag{15}$$

В этих равенствах векторами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ обозначены единичные орты.

Заменим значения $\boldsymbol{r}$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}$ в равенстве (13) их выражениями из правых частей равенств (14) и (15). Если сгруппировать члены полученного векторного равенства при одинаковых ортах, то в итоге получим систему трех равенств:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x} + \mu\frac{x}{r^3} = 0; \\ &\ddot{y} + \mu\frac{y}{r^3} = 0; \\ &\ddot{z} + \mu\frac{z}{r^3} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Система (16) представляет собой *систему дифференциальных уравнений второго порядка невозмущенного движения спутника, записанную в координатной форме*. Характеристики невозмущенного движения получаются путем двойного интегрирования этой системы. В случае невозмущенного движения интегралы получаются из уравнений (16) путем их комбинирования и простых преобразований и имеют достаточно простой вид. Можно получать интегралы невозмущенного движения путем простых преобразований векторного равенства (13) с использованием правил векторной алгебры и проецирования полученных векторных выражений на оси небесной системы координат, приравнивая к нулю коэффициенты при соответствующих единичных ортах. В результате все равно получаются те же формулы интегралов невозмущенного движения, полученные непосредственно из уравнений (16).

Интегралы невозмущенного движения представляют собой алгебраические выражения, решаемые относительно *постоянных интегрирования*. Они имеют специфические названия: *интегралы площадей, интегралы Лапласа, интеграл энергии, уравнение Кеплера* и независимы между собой. Последний интеграл называют также *динамическим интегралом*, поскольку он характеризует движение спутника по орбите. Постоянные интегрирования, как правило, имеют названия, одноименные с интегралом, из которого они получены. Например, постоянные, полученные из *интеграла площадей*, имеют названия *постоянных площадей*. Исключение составляет постоянная интегрирования, полученная из уравнения Кеплера. Получение этой постоянной интегрирования рассмотрено в подразд. 1.5.5. Постоянные интегрирования имеют определенный геометрический и физический смысл, связанный с ориентировкой плоскости орбиты спутника в пространстве, ориентировкой орбиты в плоскости движения, размером и формой орбиты, положением спутника на орбите.

В качестве аргументов для вычисления постоянных интегрирования используются значения x_0, y_0, z_0 в небесной системе координат и составляющие скорости $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ на определенный момент времени t_0, называемый *начальной эпохой*. Совокупность аргументов x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, t_0 получила название *начальные условия движения* спутника. В этом качестве могут быть взяты момент вывода спутника на орбиту, координаты точки вывода и составляющие скорости ракеты-носителя в момент вывода или их значения в точке орбиты, от которой прогнозируется движения спутника. В формулах вычисления постоянных интегрирования, приводимых в следующем разделе пособия, ноль в подстрочных индексах начальных условий движения для упрощения написания формул не приводится, но подразумевается.

Постоянные интегрирования играют вспомогательную роль. С их помощью вычисляются кеплеровы элементы невозмущенной орбиты спутника.

1.5. Интегралы невозмущенного движения спутников

1.5.1. Интеграл площадей

В качестве исходной для получения интеграла площадей возьмем уравнение (12) невозмущенного движения спутника Земли, записанное в *векторной форме*

$$-\mu \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \ddot{\boldsymbol{r}}. \tag{12}$$

Поменяем местами левую и правую части дифференциального уравнения (12) и умножим его векторно слева на вектор $\boldsymbol{r}$, получим векторное выражение

$$\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \mu \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{17}$$

Согласно правилам векторной алгебры, произведение $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}$ равно нулю, следовательно, имеем

$$\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = 0. \tag{18}$$

Выражение (18) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}\right) = 0. \tag{19}$$

Проинтегрировав (19), получим

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{C}. \tag{20}$$

Выражение (20) является *интегралом площадей*, записанным в векторном виде. Вектор $\boldsymbol{C}$, стоящий в правой части выражения, получил название *вектора кинетического момента*. Векторы $\boldsymbol{r}$ и $\dot{\boldsymbol{r}}$ лежат в плоскости орбиты, следовательно, вектор кинетического момента $\boldsymbol{C}$ как результат векторного произведения этих векторов перпендикулярен плоскости орбиты. Таким образом, вектор $\boldsymbol{C}$ определяет ориентировку плоскости орбиты в пространстве (рис. 8).

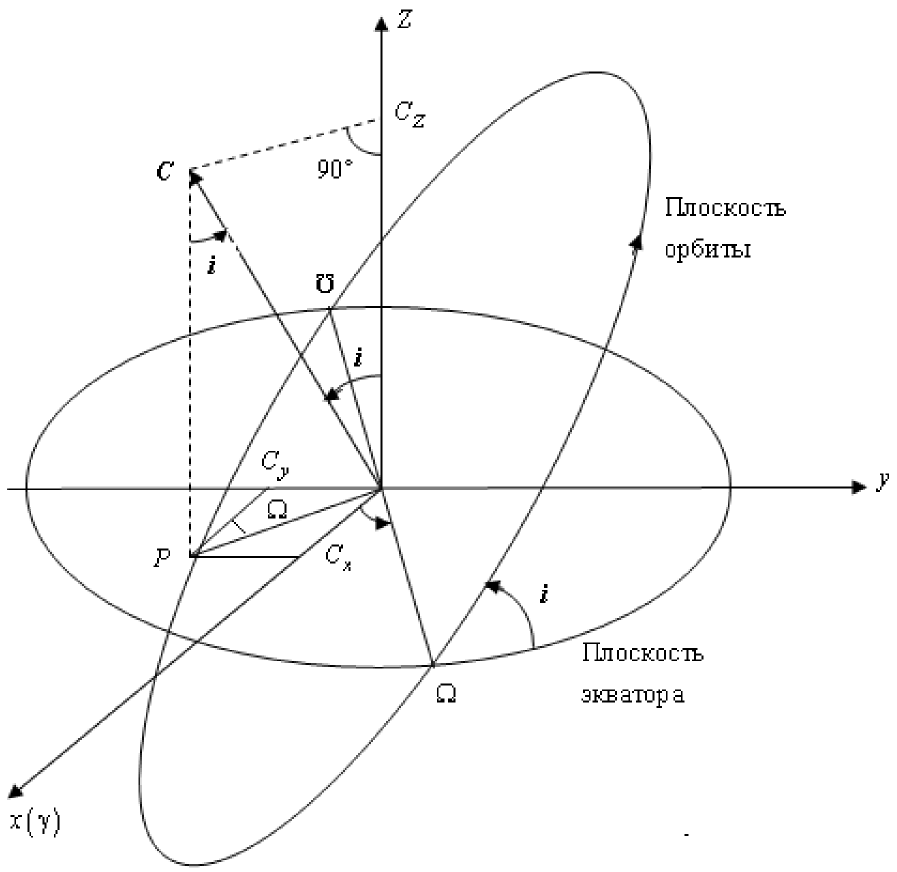


Рис. 8. Ориентировка плоскости орбиты спутника в пространстве

Начало вектора ***C*** находится в начале небесной системы координат. Для определения направления вектора ***C*** воспользуемся следующим правилом:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=A\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=C=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Подставляя вместо векторов ***a*** и ***b*** соответственно векторы ***r*** и $\dot{\boldsymbol{r}}$, будем иметь

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}0 & -z & y\\ z & 0 & -x\\ -y & x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}C_x\\ C_y\\ C_z\end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Из выражения (22) выделим интересующие нас части:

$$\begin{pmatrix}0 & -z & y\\ z & 0 & -x\\ -y & x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_x\\ c_y\\ c_z\end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Выполнив перемножение матрицы на вектор-столбец в левой части выражения (23), окончательно получаем:

$$\begin{aligned}y\dot{z}-z\dot{y}&=C_x;\\ z\dot{x}-x\dot{z}&=C_y;\\ x\dot{y}-y\dot{x}&=C_z.\end{aligned} \qquad (24)$$

Выражения (24) получили название *интегралов площадей* в *координатной форме*. Стоящие в правой части величины C_x, C_y, C_z называются *постоянными площадей*. Они представляют собой проекции вектора кинетического момента ***C*** на оси небесной системы координат.

Эти же формулы можно получить, используя в качестве исходных уравнения (16) невозмущенного движения спутника, записанные в координатной форме:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} = 0; \\ \ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} = 0; \\ \ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

С этими уравнениями поступают следующим образом. Объединяют их попарно: первое со вторым, первое с третьим, второе с третьим. Затем в каждой паре уравнений ставят задачу избавиться от членов, не содержащих вторые производные. Например, первое уравнение умножают на координату y, а второе – на координату x, взятую с минусом, и складывают полученные выражения. В результате для первой пары уравнений получается дифференциальное уравнение

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0.$$

Интегрируя его, получим один из трех интегралов площадей в координатной форме, а именно:

$$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \;\; x\dot{y} - y\dot{x} = C_z .$$

Аналогично получаются и два остальных интеграла площадей:

$$y\dot{z} - z\dot{y} = C_x;$$
$$z\dot{x} - x\dot{z} = C_y.$$

Для вычисления постоянных площадей поменяем местами правые и левые части формул (24), получим:

$$\begin{aligned} C_x &= y\dot{z} - z\dot{y}; \\ C_y &= z\dot{x} - x\dot{z}; \\ C_z &= x\dot{y} - y\dot{x}. \end{aligned} \tag{25}$$

Длина вектора ***C*** определяется по формуле

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}. \qquad (26)$$

Обращаем внимание, что постоянные площадей C_x, C_y, C_z, как результат интегрирования дифференциальных уравнений движения, вычисляются по начальным условиям движения $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. Но, как это было обусловлено выше, подстрочные ноли в формулах не приводятся.

Основываясь на перпендикулярности вектора ***C*** относительно плоскости орбиты спутника, можно получить формулы вычисления кеплеровых элементов ***i*** и Ω, характеризующих ориентировку орбиты в пространстве в небесной системе координат. Рассмотрим рис. 8.

В дополнение к рис. 4 на нем изображен вектор кинетического момента ***C*,** а также его проекции на оси небесной системы координат (*постоянные площадей*) C_x, C_y, C_z. Точкой *P* изображена проекция вектора ***C*** на плоскость небесного экватора.

Из прямоугольного треугольника *O**C**P*, в котором сторона *PC* равна постоянной площадей C_z , а сторона *OP* есть проекция вектора ***C*** на плоскость небесного экватора (плоскость *Oxy*), имеем

$$\mathrm{tg} i = \frac{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}{C_z}.$$

Окончательно для вычисления наклонения орбиты *i* получаем формулу

$$i = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}{C_z}\right). \qquad (27)$$

Напомним, что угол *i* изменяется в пределах от 0 до 180°. Четверть угла определяется по знаку постоянной площадей C_z, которая играет роль косинуса угла *i*.

Значение долготы восходящего узла Ω можно получить из прямоугольных треугольников OPC_x или OPC_y, в которых катеты есть постоянные площадей C_x и C_y. Итак, имеем

$$\mathrm{tg}\Omega = \frac{C_x}{-C_y}.$$

Окончательно для вычисления долготы восходящего узла Ω получаем формулу

$$\Omega = \mathrm{arctg}\left(\frac{C_x}{-C_y}\right). \tag{28}$$

Угол Ω изменяется в пределах от 0 до 360°, четверть угла определяется по знаку постоянных площадей C_x и C_y. Здесь постоянная C_x, стоящая в числителе, играет роль синуса, а постоянная площадей C_y, стоящая в знаменателе, играет роль косинуса угла Ω.

Интеграл площадей (20) справедлив в любой инерциальной системе координат. Введем инерциальную систему координат ξης, называемую *орбитальной*, связанную с плоскостью орбиты спутника (рис. 9).

На рис. 9 основная плоскость этой системы координат Oξη совпадает с плоскостью орбиты, а направление третьей оси ς совпадает с направлением вектора кинетического момента ***C***. Проекции вектора ***C*** на плоскость орбиты спутника C_x и C_y равны нулю. Координатная форма интеграла площадей в орбитальной системе координат примет вид

$$\left.\begin{aligned} C_\xi &= 0; \\ C_\eta &= 0; \\ C_\zeta &= \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}. \end{aligned}\right\}$$

С учетом того, что проекция вектора ***C*** на ось ς-C_ς в орбитальной системе координат равна его длине C, окончательно будем иметь

$$\left.\begin{aligned} C_\xi &= 0; \\ C_\eta &= 0; \\ C &= \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

В плоской прямоугольной системе координат $O\xi\eta$, построенной в плоскости орбиты (рис. 10), у которой начало системы помещено в главный фокус орбиты O, ось ξ, как и в орбитальной системе координат, направлена в перигей орбиты π, ось η дополняет систему до правой, интеграл площадей вырождается до одного выражения

$$C = \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}. \qquad (30)$$

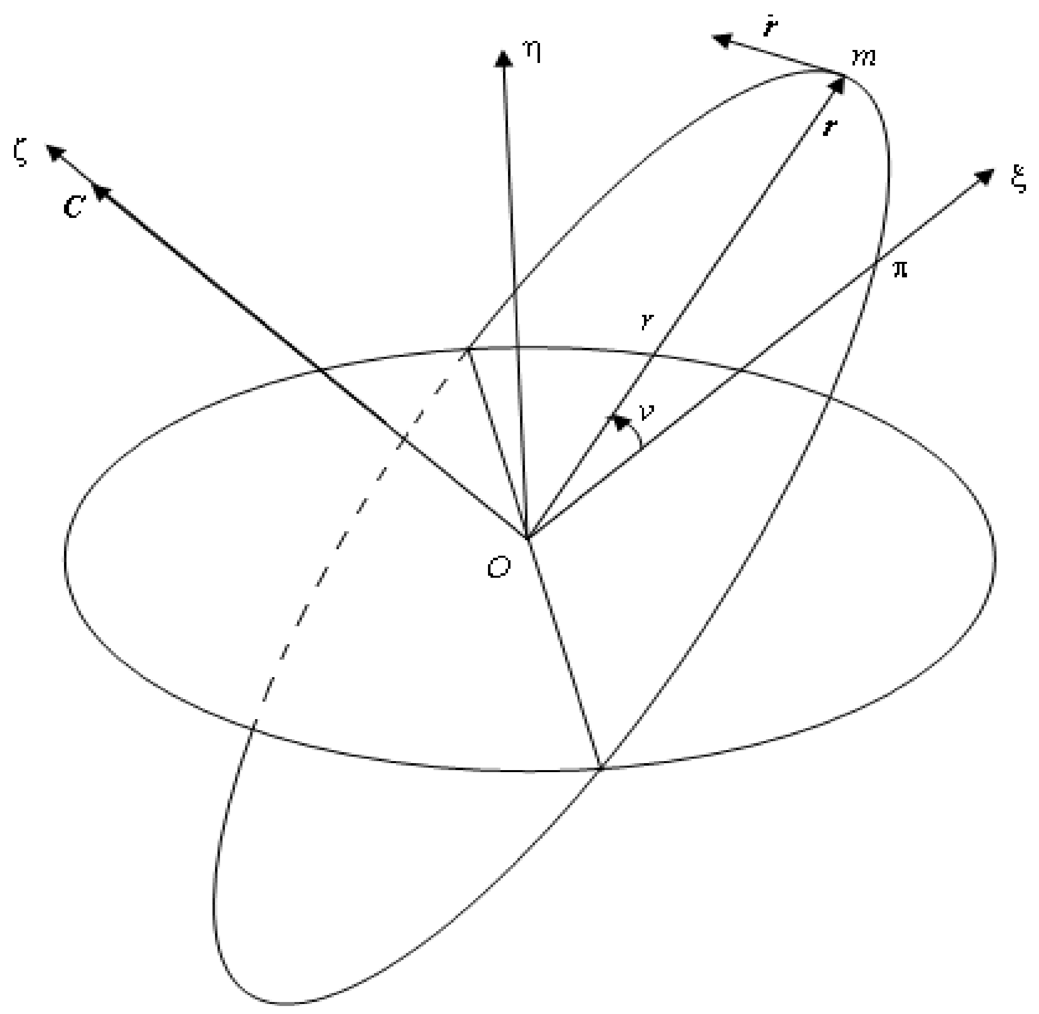


Рис. 9. Интеграл площадей в орбитальной системе координат

Введем *полярную систему координат Orv*, связанную с введенными выше орбитальными системами (см. рис. 10). *Полярный угол v* отсчитывается вдоль линии апсид от направления на перигей орбиты в сторону движения спутника. Как уже отмечалось выше, этот угол называется *истинной аномалией*. Полярное расстояние *r* представляет собой геоцентрическое расстояние до спутника, обозначенное на рисунке буквой *m*.

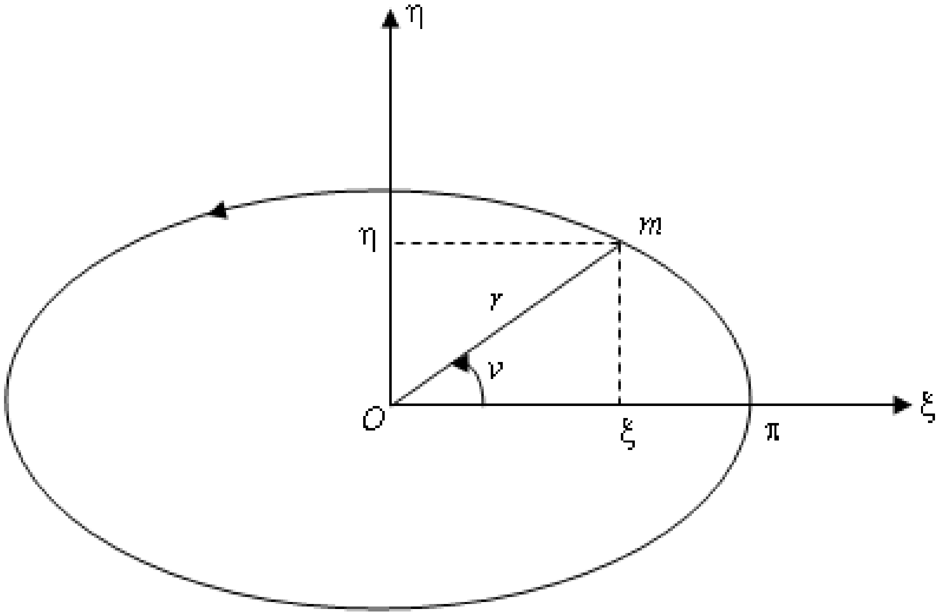


Рис. 10. Полярная система координат в плоскости орбиты

Связь прямоугольных координат ξ, η и полярных координат *r*, *v* вытекает из рис. 10:

$$\xi = r\cos v, \eta = r\sin v. \tag{31}$$

Связь скоростей изменения прямоугольных координат ξ, η и скоростей изменения полярных координат *r*, *v* получается путем дифференцирования формулы (31)

$$\dot{\xi} = \dot{r}\cos v - r\sin v\dot{v},\ \dot{\eta} = \dot{r}\sin v + r\cos v\dot{v}. \tag{32}$$

Подставив (31) и (32) в интеграл площадей (30), получим

$$C = r\cos v(\dot{r}\sin v + r\cos v\dot{v}) - r\sin v(\dot{r}\cos v - r\sin v\dot{v}). \qquad (33)$$

Выполнив перемножение в правой части формулы (33) и сгруппировав члены с одинаковыми сомножителями, окончательно получим

$$C = r^2\dot{v}. \qquad (34)$$

Выражение (34) носит название *полярной формы интеграла площадей.*

Выясним, почему рассматриваемый нами интеграл получил название *интеграла площадей.* Величина $\dot{v}$ имеет физический смысл угловой скорости движения спутника. Модуль вектора кинетического момента $\boldsymbol{C}$ связан с величиной S, называемой *секториальной скоростью движения спутника* и определяемой по формуле

$$S = r^2\dot{v} / 2. \qquad (35)$$

Сравнивая с формулой (34), получаем

$$C = 2S. \qquad (36)$$

Величина S, а следовательно, и C, с точки зрения физики есть величина постоянная. Таким образом, формулировка *второго закона Кеплера*: «*За равные промежутки времени радиус-вектор спутника заметывает равные площади*» (подразд. 1.1 учебного пособия, см. рис. 1) имеет вторую редакцию: «*Удвоенная секториальная скорость движения спутника есть величина постоянная*».

1.5.2. Интеграл Лапласа

В качестве исходных для получения интеграла Лапласа используем две формулы:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0. \qquad (13)$$

и

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{C}. \qquad (20)$$

Векторное уравнение невозмущенного движения спутника (13) умножим слева векторно на вектор кинетического момента $\boldsymbol{C}$, при этом при умножении вектора $\boldsymbol{C}$ на второе слагаемое в формуле (13) заменим его на векторное произведение векторов $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ из формулы (20). Получим

$$\boldsymbol{C} \times \ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{\mu}{r^3}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{C} \times 0 = 0. \tag{37}$$

Выражение (37) представим в виде производных его слагаемых по времени. Первое слагаемое примет следующий вид:

$$\boldsymbol{C} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d(\boldsymbol{C} \times \dot{\boldsymbol{r}})}{dt}. \tag{38}$$

Второе слагаемое предварительно преобразуем, используя следующее правило векторной алгебры:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}). \tag{39}$$

Применяя правило (39) ко второму слагаемому выражения (37), получим:

$$\frac{\mu}{r^3}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{r} = \frac{\mu}{r^3}\left[\dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})\right] = \frac{\mu}{r^3}\left(\dot{\boldsymbol{r}} r^2 - \boldsymbol{r} r \dot{r}\right). \tag{40}$$

В формуле (40) вынесем за круглые скобки величину r и представим полученное выражение в виде производной по времени:

$$\frac{\mu}{r^3}\left(\dot{\boldsymbol{r}} r^2 - \boldsymbol{r} r \dot{r}\right) = \frac{\mu r}{r^3}\left(\dot{\boldsymbol{r}} r - \boldsymbol{r} \dot{r}\right) = \mu \frac{\dot{\boldsymbol{r}} r - \boldsymbol{r} \dot{r}}{r^2} = \mu \frac{d\left(\boldsymbol{r}/r\right)}{dt}. \tag{41}$$

Подставим (38) и (41) в формулу (37), получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \mu \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = 0. \tag{42}$$

Интегрируя (42), получим:

$$\boldsymbol{C} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \mu \frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\boldsymbol{\lambda}. \quad (43)$$

В правой части формулы (43) буквой $\boldsymbol{\lambda}$ обозначена векторная константа, которая направлена в точку перигея орбиты и получившая название *интеграл Лапласа* (рис. 11). Знак минус означает, что в точке перигея вектор $\boldsymbol{\lambda}$ направлен в противоположную сторону от геоцентрического радиус-вектора $\boldsymbol{r}$. Поменяем местами левую и правую части формулы (43), получим выражение, которое получило название *интеграла Лапласа*:

$$\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{C} \times \dot{\boldsymbol{r}} - \mu \frac{\boldsymbol{r}}{r}. \quad (44)$$

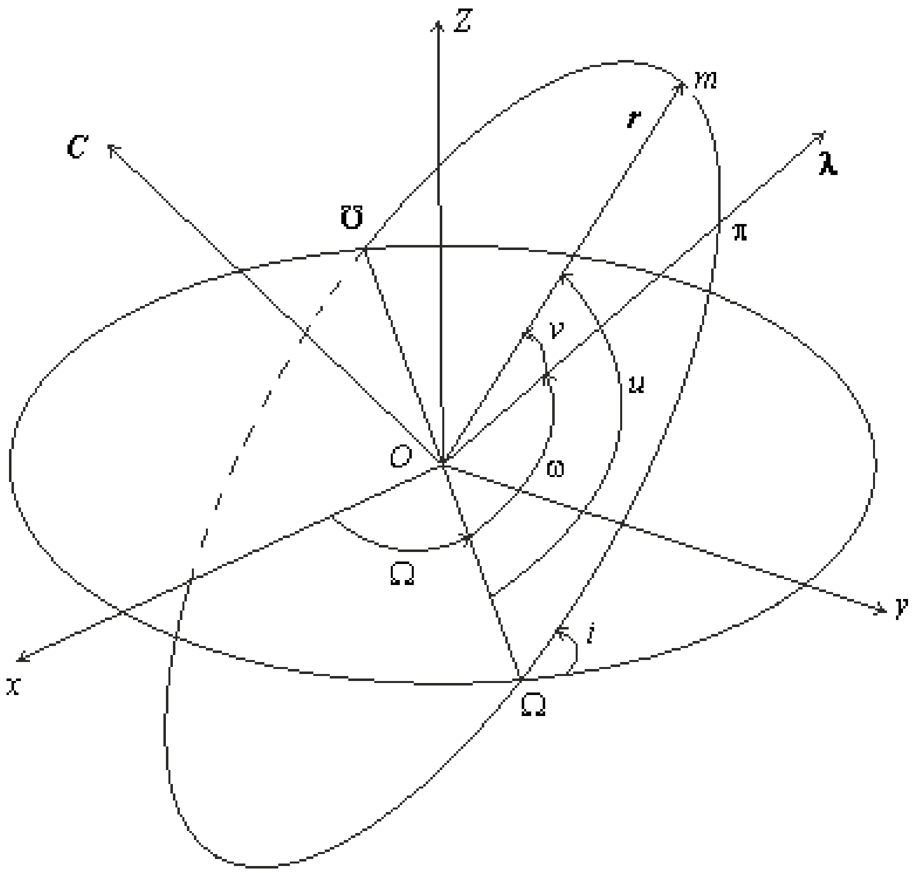


Рис. 11. Положение вектора Лапласа в плоскости орбиты спутника

Проекция выражения (44) на оси небесной системы координат дает три выражения, называемые *интегралом Лапласа в координатной форме*:

$$\lambda_x = \dot{y}C_z - \dot{z}C_y - \mu\frac{x}{r};$$
$$\lambda_y = \dot{z}C_x - \dot{x}C_z - \mu\frac{y}{r}; \tag{45}$$
$$\lambda_z = \dot{x}C_y - \dot{y}C_x - \mu\frac{z}{r}.$$

Входящие в формулы (45) постоянные интегрирования $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ получили название *постоянных Лапласа* и являются в небесной системе координат составляющими *вектора Лапласа* **λ.** Длина вектора **λ** определяется по формуле

$$\lambda = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}. \tag{46}$$

Начало вектора Лапласа расположено в начале небесной системы координат, направлен он в точку *перигея орбиты π.* Перигей орбиты π соединен с противоположной точкой орбиты, получившей название *апогея орбиты α*, прямой линией, называемой *линией апсид*. Линия апсид является осью симметрии орбиты и, таким образом, постоянные Лапласа определяют ориентировку орбитального эллипса в плоскости орбиты относительно направления на восходящий узел орбиты. Эта ориентировка характеризуется значением *аргумента перигея* ω (см. рис. 11), вычисляемым по формуле

$$\omega = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_z C}{C_x\lambda_y - C_y\lambda_x}\right). \tag{47}$$

Значения угла ω изменяются в пределах от 0 до 360°. Формула (47) дает главное значение угла, четверть угла ω определяется знаком числителя и знаменателя выражения в скобках, являющегося аргументом функции арктангенса этого угла.

Так как вектор Лапласа **λ** лежит в плоскости орбиты, а вектор кинетического момента ***C*** перпендикулярен плоскости орбиты, между ними существует математическая зависимость – их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$\lambda \cdot \boldsymbol{C} = 0. \tag{48}$$

Формула (48) используется как контрольная для проверки правильности вычисления постоянных площадей и Лапласа.

1.5.3. Связь интегралов площадей и Лапласа с формой и размером орбиты

Умножим интеграл Лапласа (44) скалярно справа на геоцентрический радиус-вектор спутника $\boldsymbol{r}$:

$$\lambda \cdot \boldsymbol{r} = -(\boldsymbol{C} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \cdot \boldsymbol{r} - \mu \frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{r}. \tag{49}$$

Преобразуем (49) с учетом правил векторной алгебры, получим

$$\lambda \cdot \boldsymbol{r} = C^2 - \mu r. \tag{50}$$

Скалярное произведение в левой части выражения (50) преобразуем следующим образом:

$$\lambda \cdot \boldsymbol{r} = \lambda r \cos(\lambda \hat{\ } \boldsymbol{r}). \tag{51}$$

Угол v между вектором Лапласа $\boldsymbol{\lambda}$ и геоцентрическим радиус-вектором спутника $\boldsymbol{r}$, показанный на рис. 11, называется *истинной аномалией*. Заменим в правой части формулы (51) аргумент косинуса на угол v и полученным выражением заменим произведение векторов $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{r}$ в левой части формулы (50), получим

$$\lambda r \cos v = C^2 - \mu r. \tag{52}$$

Разрешим выражение (52) относительно r:

$$r = \frac{C^2}{\mu + \lambda \cos v}. \tag{53}$$

Выражение (53) преобразуют следующим образом: числитель и знаменатель в правой части делят на гравитационный параметр Земли μ, в итоге получим

$$r = \frac{\dfrac{C^2}{\mu}}{1 + \dfrac{\lambda}{\mu}\cos v}. \tag{54}$$

Выражение (54) называется *уравнением орбиты* в полярных координатах. Введем обозначения:

$$p = \frac{C^2}{\mu}; \tag{55}$$

$$e = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{56}$$

Величина *p* получила название *фокальный параметр*. Его геометрический смысл показан на рис. 5. Значение фокального параметра определяет размер орбиты. Величина *e* получила название *эксцентриситет орбиты*. Это один из шести кеплеровых элементов, его значение определяет форму орбиты. Фокальный параметр *p* и эксцентриситет *e* определяют еще один кеплеров элемент – *большую полуось a*, значение которой определяет размер орбиты спутника:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}. \tag{57}$$

С учетом обозначений (55) и (56) уравнение орбиты (54) примет вид

$$r = \frac{p}{1 - e\cos v}. \tag{58}$$

Именно формула (58), как правило, используется для записи уравнения орбиты спутника. С точки зрения аналитической геометрии оно представляет собой уравнение конического сечения (окружность, эллипс, парабола, гипербола). При этом притягивающий центр должен находиться в одном из фокусов конического сечения, а вектор Лапласа направлен по оси симметрии конического сечения в ближайшую точку орбиты. Таким образом, из уравнения орбиты вытекает геометрический смысл постоянной Лапласа λ [11]:

– если $\lambda = 0$, то $e = 0$, орбита имеет форму окружности;

– если $\lambda \neq 0$, а $0 < e < 1$, орбита имеет форму эллипса;

– если $\lambda \neq 0$, $e = 1$, орбита разрывается, превращается в параболу.

Таким образом, *уравнение орбиты* является математическим доказательством *первого закона* Кеплера: *орбита спутника представляет собой эллипс, один из фокусов которого совпадает с центром масс Земли*. Этот фокус называется главным фокусом.

1.5.4. Интеграл энергии

За основу для получения этого интеграла также возьмем уравнение невозмущенного движения в векторной форме (12)

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}. \tag{12}$$

Умножим уравнение (12) скалярно на $2\dot{\boldsymbol{r}}$, получим

$$2\ddot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}} = -\frac{2\mu}{r^3}\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}}. \tag{59}$$

Обе части равенства (59) представим в виде производных по времени. Для левой части имеем

$$2\ddot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}(\dot{r})^2. \tag{60}$$

При преобразовании правой части учтем следующее правило векторной алгебры:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = r\dot{r}. \tag{61}$$

С учетом (61) будем иметь

$$-\frac{2\mu}{r^3}\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}} = -\frac{2\mu}{r^2}\dot{r} = 2\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{62}$$

Заменяя правыми частями формул (60) и (62) соответствующие места в формуле (59) и интегрируя полученное выражение, окончательно получим

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \tag{63}$$

Заметим, что в формуле (63) произошла замена обозначения скорости спутника с $\dot{r}$ на V.

Выражение (63) получило название *интеграла энергии*, а постоянная интегрирования h – *постоянная энергия*. Чтобы понять, почему этот интеграл получил такое специфическое название, нужно обе части интеграла умножить на $m/2$. В результате получим

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{\mu m}{r} + h'. \tag{64}$$

Здесь h' обозначена постоянная

$$h' = \frac{hm}{2} = \text{const}. \tag{65}$$

В левой части (64) имеем не что иное, как формулу *кинетической энергии* спутника E

$$E = \frac{mV^2}{2}. \tag{66}$$

В правой части (64) выделим *потенциальную энергию гравитационного поля Земли* в текущей точке положения спутника на орбите U

$$U = \frac{\mu m}{r}. \tag{67}$$

Интеграл энергии подтверждает *закон сохранения энергии* при невозмущенном движении спутника, т. е. *алгебраическая сумма кинетической и потенциальной энергии спутника в каждой точке его орбиты есть величина постоянная*. При ускорении движения спутника потенциальная энергия в текущей точке орбиты убывает, и наоборот. Знак постоянной энергии h указывает на вид орбиты. В частности, для искусственного спутника Земли, траектория движения которого есть эллипс, знак постоянной h должен быть отрицательным.

Между длиной вектора кинетического момента C, длиной вектора Лапласа λ и постоянной энергии h имеется математическая зависимость

$$\lambda^2 = \mu^2 + hC^2. \tag{68}$$

Длины векторов кинетического момента и Лапласа вычисляются по формулам

$$\lambda = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}; \tag{46}$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}. \tag{26}$$

Формула для вычисления постоянной энергии h вытекает из интеграла энергии (63):

$$h = V^2 - \frac{2\mu}{r}. \tag{69}$$

1.5.5. Динамический интеграл

Выше были получены *семь интегралов невозмущенного движения* в координатной форме (три интеграла площадей, три интеграла Лапласа, интеграл энергии), получившие название *классических*. Из семи классических интегралов только пять являются независимыми. Классические интегралы позволяют получить пять кеплеровых элементов (a – *большая полуось*, e – *эксцентриситет*, i – *наклонение орбиты*, Ω – *долгота восходящего узла*, ω – *аргумент перигея*). Для получения последнего кеплерова элемента ($M(t)$ – *средняя* *аномалия*) необходимо получить еще один интеграл, независимый от остальных интегралов и характеризующий угловое расстояние спутника от перигея орбиты в своем орбитальном полете, т. е. в процессе движения. Исходя из этой своей особенности этот интеграл получил название *динамического интеграла* [21]. Математическая запись динамического интеграла представлена *уравнением Кеплера*, что является вторым названием этого интеграла.

В качестве исходной для получения динамического интеграла возьмем формулу интеграла площадей, записанную в полярной системе координат

$$C = r^2 \dot{v}. \tag{34}$$

Поменяем местами левую и правую части формулы (34) и заменим постоянную площадей C и геоцентрическое расстояние спутника r на основании формул (55) и (58), получим

$$\frac{p^2 dv}{(1 + e\cos v)^2} = \sqrt{\mu p}\, dt. \tag{70}$$

Перенеся p^2 в правую часть, будем иметь

$$\frac{dv}{(1 + e\cos v)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\, dt. \tag{71}$$

Интегрируя, получим

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2} = \int_{t_\pi}^{t} \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\, dt = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\,(t - t_\pi). \tag{72}$$

Динамический интеграл получен, он связывает угловое расстояние спутника от перигея орбиты в виде истинной аномалии v со временем t. Левая часть выражения (72) представляет собой определенный интеграл, который берется стандартной подстановкой тангенса половинного угла, т. е. используется зависимость истинной аномалии v от эксцентрической E по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{73}$$

С использованием формулы (73) заменим в числителе интеграла (72) dv на dE и $(1+e\cos v)$ в знаменателе на функцию E. Для получения выражения для dv продифференцируем выражение (73), получим

$$dv\sec^2\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\sec^2\frac{E}{2}dE. \tag{74}$$

Выполнив преобразования формулы (74), получим

$$dv=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}dE. \tag{75}$$

Теперь преобразуем $1+e\cos v$. Для преобразования используем следующие формулы тригонометрии:

$$\cos v=2\cos\frac{v}{2}-1,\ \cos^2 v=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 v}. \tag{76}$$

В результате преобразования получим

$$1+e\cos v=\frac{1-e^2}{1-e\cos E}. \tag{77}$$

Подставим полученные выражения в (72) и после сокращений и несложных преобразований получаем

$$\int_0^E(1-e\cos E)dE=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t-t_\pi). \tag{78}$$

Взяв интеграл, окончательно имеем

$$E-e\sin E=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t-t_\pi). \tag{79}$$

Эта форма динамического интеграла для практического использования получила название *уравнение Кеплера*. Постоянной интегрирования в динамическом интеграле является *время* t_π *пересечения спутником точки перигея орбиты*. Уравнение Кеплера обычно приводят в виде

$$E - e\sin E = M. \tag{3}$$

Угловая величина *M*, стоящая в правой части уравнения Кеплера, называется *средней аномалией*. Ее назначение описано в подразд. 1.2 учебного пособия, а геометрический смысл показан на рис. 5. Откладывается средняя аномалия от точки перигея π в направлении движения спутника по окружности радиусом, равным значению большой полуоси орбиты, со средней угловой скоростью *n*, получившей название *среднего движения*. Формулы вычисления средней аномалии *M* и среднего движения *n* были приведены ранее:

$$M = n(t - t_\pi); \tag{1}$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \tag{2}$$

Для связи с начальными условиями движения формулу (1) преобразуют следующим образом:

$$M(t) = n\left[(t - t_0) + (t_0 - t_\pi)\right].$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} M_0 = M(t_0) &= n(t_0 - t_\pi); \\ \Delta M &= n(t - t_0). \end{aligned} \tag{80}$$

С учетом этих обозначений формула (1) примет вид

$$M(t) = M_0 + \Delta M. \tag{81}$$

Смысл трансформации формулы (1) к данному виду заключается в следующем. Момент времени t_π на каждом витке орбиты свой, т. е. он привязан к конкретному обороту спутника, в то время как момент t_0 не привязан к конкретному витку и может быть выбран произвольно.

Кроме средней угловой скорости движения спутника *n*, в небесной механике используется также средняя линейная скорость движения спутника по круговой орбите $v_{кр}$, определяемая по формуле

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}.$$

В формуле (80) *r* обозначено расстояние от центра притяжения спутника. Если в формуле средней круговой линейной скорости принять значение *r* равным среднему радиусу Земли *R* = 6 370 км, то получим *первую космическую скорость* 7,905 км/с, т. е. скорость вывода спутника на орбиту вокруг Земли [13, 16]

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{R}}.$$

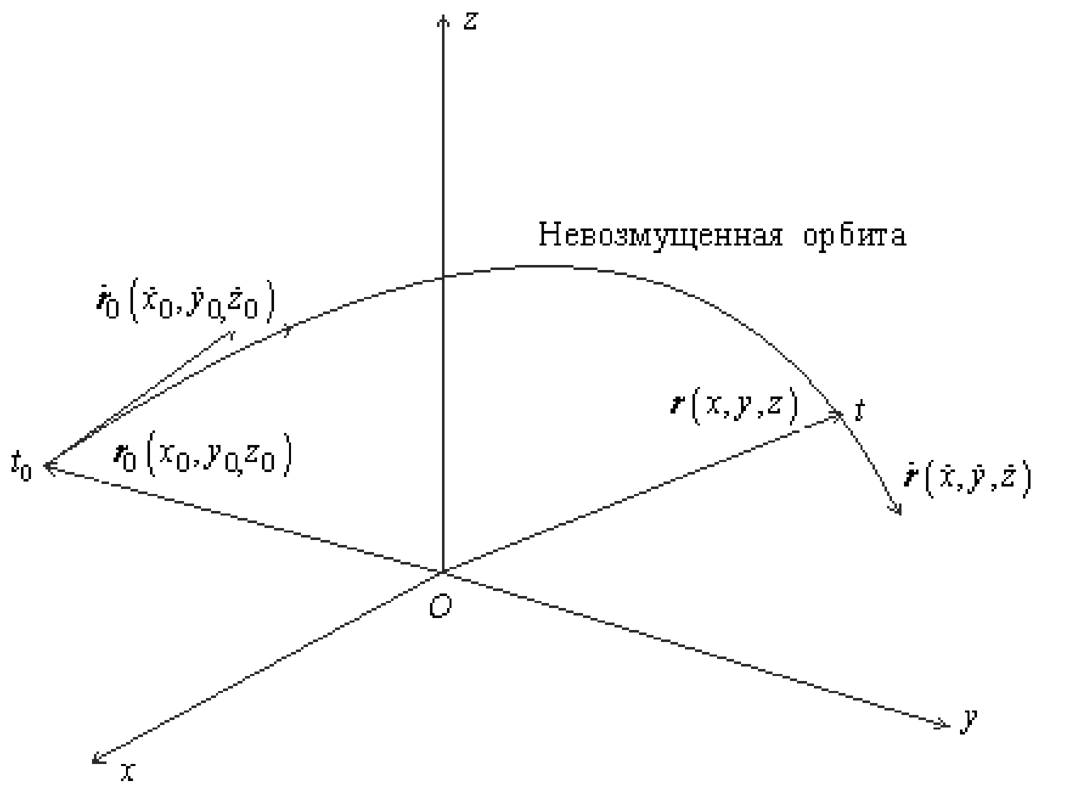
Приведем также формулу получения *второй космической скорости*, равной 11,179 км/с, при которой спутник преодолевает притяжение Земли и в качестве космического аппарата по параболической траектории продолжает движение внутри Солнечной системы [13, 16]

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{R}}.$$

1.5.6. Прогнозирование невозмущенного движения спутника

Формулы невозмущенного движения применяются на начальном этапе его полета с целью определения прогнозного появления спутника на небосводе станций наземного контрольно-измерительного комплекса на заданный момент времени *t*. В качестве начальных условий для этой задачи берутся: время t_0 вывода спутника на расчетную орбиту, координаты x_0, y_0, z_0 расчетной точки пространства в небесной системе координат, составляющие $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ направления скорости спутника в момент вывода его на орбиту. Геометрическая схема прогнозирования невозмущенного движения спутника приведена на рис. 12.

Порядок решения задачи передачи координат и скорости спутника следующий. По начальным условиям движения сначала вычисляются постоянные интегрирования невозмущенного движения спутника, затем по ним вычисляются кеплеровы элементы орбиты, а также другие параметры движения. Напомним, что пять кеплеровых элементов орбиты: a, e, i, Ω, ω, а также связанные с ними параметры орбиты не изменяют своих значений при прогнозировании невозмущенного движения спутника.



$$t_0, \boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0 \to \boldsymbol{C}, \boldsymbol{\lambda}, h, t_\pi \to a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0 \to a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M \to t, \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}$$

Рис. 12. Прогнозирование невозмущенного движения спутника

С течением времени t полета спутника меняются только значения аномалий v, E и M. Математическая последовательность выполнения задачи передачи координат будет следующей:

$$\boldsymbol{r}_0\left(x_0, y_0, z_0\right), \dot{\boldsymbol{r}}_0\left(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\right) \to \left(C_x, C_y, C_z, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, h, t_\pi,\right) \to$$
$$\to \boldsymbol{E}_0\left(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0\right) \to \boldsymbol{E}\left(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M\left(t\right)\right) \to \boldsymbol{r}\left(x, y, z\right), \dot{r}\left(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right).$$

Приведем сводку формул по реализации вышеприведенной схемы прогнозирования невозмущенного движения спутника.

1.5.6.1. Вычисление постоянных интегрирования и элементов орбиты, характеризующих ее размеры и форму

Заметим, что подстрочные ноли в координатах и составляющих скорости в формулах вычисления постоянных интегрирования упущены, но подразумеваются.

Вычисление постоянных площадей:

$$\begin{aligned} C_x &= y\dot{z} - z\dot{y}; \\ C_y &= z\dot{x} - x\dot{z}; \\ C_z &= x\dot{y} - y\dot{x}. \end{aligned} \tag{25}$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}. \tag{26}$$

Вычисление постоянных Лапласа*:*

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \dot{y}C_z - \dot{z}C_y - \mu\frac{x}{r}; \\ \lambda_y &= \dot{z}C_x - \dot{x}C_z - \mu\frac{y}{r}; \\ \lambda_z &= \dot{x}C_y - \dot{y}C_x - \mu\frac{z}{r}. \end{aligned} \tag{45}$$

$$\lambda = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}. \tag{46}$$

Контрольная формула вычисления постоянных площадей и Лапласа

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{C} = 0. \tag{48}$$

Вычисление постоянной энергии

$$V=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}.$$

$$h=V^2-\frac{2\mu}{r}. \quad (69)$$

Контрольная формула вычисления постоянных площадей, Лапласа и энергии

$$\lambda^2=\mu^2+hC^2. \quad (68)$$

Вычисление времени пересечения спутником перигея орбиты:

$$p=\frac{C^2}{\mu}; \quad (55)$$

$$e=\frac{\lambda}{\mu}; \quad (56)$$

$$a=\frac{p}{1-e^2}; \quad (57)$$

.

$$n=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\ ; \quad (2)$$

$$v_0=\operatorname{arctg}\left(\frac{C\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}}}{x\lambda_x+y\lambda_y+z\lambda_z}\right); \quad (82)$$

$$E_0=2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}\right). \quad (83)$$

По формулам (82) и (83) получаем главное значение углов, четверть определяется в соответствии с правилами тригонометрии по знаку числителя и знаменателя аргумента арктангенса углов

$$M_0=E_0-e\sin E_0. \quad (84)$$

Для грубого контроля вычисления аномалий v, E и M можно использовать следующее обстоятельство: в большинстве случаев их значения близки и лежат в одной четверти.

$$t_\pi = t_0 - \frac{M_0}{n}. \tag{85}$$

1.5.6.2. Вычисление элементов орбиты, характеризующих ее ориентировку в пространстве

Вычисление долготы восходящего узла:

$$\Omega = \operatorname{arctg}\left(\frac{C_x}{-C_y}\right). \tag{28}$$

Вычисление наклонения орбиты:

$$i = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}{C_z}\right). \tag{86}$$

Вычисление аргумента перигея:

$$\omega = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_z C}{C_x\lambda_y - C_y\lambda_x}\right). \tag{87}$$

По формулам (28), (86) и (87) получаем главное значение углов, четверть определяется в соответствии с правилами тригонометрии по знаку числителя и знаменателя аргумента арктангенса углов.

1.5.6.3. Вычисление положения и скорости спутника на заданный момент времени

Данная задача решается в несколько этапов.

1. Вычисление средней аномалии на момент t:

$$
\begin{aligned}
&M = M_0 + \Delta M;\\
&\Delta M = n(t - t_0),
\end{aligned}
\tag{88}
$$

где среднее движение n вычисляется по формуле (2). Учитывая пределы изменения M от 0 до 2π в полученном ее значении по формуле (88), убирается целое число оборотов.

2. Вычисление эксцентрической аномалии по итерационной формуле, полученной из уравнения Кеплера:

$$E_{i+1} = M + e\sin E_i, \tag{89}$$

где i – номер итерации. В качестве начального значения эксцентрической аномалии берется значение средней аномалии, т. е. $E_0 = M$.

Итерации выполняются до достижения заданной точности вычислений ε, вычисляемой по формуле

$$\left|E_{i+1} - E_i\right| \le \varepsilon. \tag{90}$$

Для получения дециметровой точности вычисления координат спутника необходимо задавать значение ε, равное $0{,}01''$.

3. Вычисление геоцентрического расстояния до спутника:

$$r = a\left(1 - \cos E\right). \tag{91}$$

4. Вычисление истинной аномалии:

$$v = 2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\frac{E}{2}\right). \tag{92}$$

Геометрический смысл истинной аномалии v приведен на рис. 5. Свое название – *истинная* – этот угловой параметр получил оттого, что он действительно показывает истинное положение спутника на орбитальном эллипсе, в отличие от эксцентрической и *средней* аномалий, которые имеют вспомогательный характер и показывают положение фиктивного спутника на круговой орбите, опоясывающей орбитальный эллипс.

5. Контроль вычисления геоцентрического расстояния:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{93}$$

где фокальный параметр p может быть вычислен по формуле

$$p = a\left(1 - e^2\right). \tag{94}$$

6. Вычисление аргумента широты:

$$u = \omega + v. \tag{95}$$

7. Контрольная формула для вычисления аргумента широты:

$$u = \operatorname{arctg}\frac{Cz}{\mathrm{C}_x y - C_y x}. \tag{96}$$

8. Вспомогательные вычисления направляющих косинусов радиус-вектора спутника относительно осей инерциальной системы координат:

$$\alpha_x = \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i;$$
$$\alpha_y = \sin\Omega\cos u - \cos\Omega\sin u\cos i;$$
$$\alpha_z = \sin u\sin i.$$

9. Вычисление координат спутника на момент времени t:

$$\begin{aligned} x &= r\alpha_x; \\ y &= r\alpha_y; \\ z &= r\alpha_z. \end{aligned} \tag{97}$$

10. Вычисление вспомогательных величин – производных по времени от направляющих косинусов геоцентрического радиус-вектора спутника:

$$\dot{\alpha}_x = -\cos\Omega\sin u - \sin\Omega\cos u\cos i;$$
$$\dot{\alpha}_y = -\sin\Omega\sin u + \sin\Omega\cos u\cos i;$$
$$\dot{\alpha}_z = \cos u\sin i.$$

11. Вычисление производной по времени от геоцентрического расстояния r:

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v.$$

12. Вычисление производной по времени от скорости спутника:

$$\dot{v} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}.$$

13. Вычисление составляющих скорости спутника на момент времени t:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\alpha_x + r\dot{\alpha}_x \dot{v}; \\ \dot{y} &= \dot{r}\alpha_y + r\dot{\alpha}_y \dot{v}; \\ \dot{z} &= \dot{r}\alpha_z + r\dot{\alpha}_z \dot{v}. \end{aligned} \tag{98}$$

14. И, в заключении, вычисление геоцентрического расстояния спутника и его скорости в момент времени t:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \tag{99}$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{100}$$

1.6. Контрольные вопросы

1. Основные характеристики невозмущенного движения спутника Земли.
2. На каких законах основан вывод дифференциальных уравнений движения спутника?
3. Сформулируйте закон всемирного тяготения.
4. Интеграл площадей в векторной и координатной формах.
5. Полярная форма интеграла площадей. Второй закон Кеплера.
6. Физический смысл векторной константы площадей.
7. Интеграл энергии. Определение константы энергии спутника по начальным условиям.

8. Связь константы энергии с величиной большой полуоси орбиты спутника. Физический смысл константы энергии.

9. Интеграл Лапласа. Физический смысл вектора Лапласа.

10. Уравнение орбиты спутника в полярных координатах. Связь параметров уравнения с константами интегрирования.

11. Понятие конического сечения. Первый закон Кеплера. Точки и линии орбиты.

12. Эксцентрическая аномалия спутника. Связь эксцентрической и истинной аномалий.

13. Средняя аномалия, ее геометрический смысл.

14. Уравнение Кеплера. Итерационный метод решения уравнения Кеплера относительно эксцентрической аномалии.

15. Период обращения спутника. Среднее движение спутника и его физический смысл. Третий закон Кеплера. Связь большой полуоси орбиты спутника с периодом обращения.

16. Три аномалии спутника и их связь. Определение момента прохождения спутника через восходящий узел орбиты.

17. Что такое линия апсид и линия узлов орбиты спутника?

18. Кеплеровы элементы орбиты, их назначение.

19. На какие группы по их назначению подразделяются кеплеровы элементы орбиты?

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОРБИТЫ СПУТНИКОВ

2.1. Назначение предварительного определения орбиты

После доставки космического аппарата ракетой-носителем в заданную точку околоземного пространства с заданным вектором скорости он продолжает свое движение по орбите вокруг Земли и сразу же с наземных пунктов наблюдения начинается слежение за ним с целью определения соответствия его траектории движения расчетной орбите. Эта задача решается в два этапа. Оперативно, по минимуму наблюдений, определяется предварительная орбита спутника. Затем, по максимально возможному числу наблюдений, охватывающих как можно большее число участков орбиты, выполняется ее уточнение, после чего следует заключение о выводе спутника на расчетную орбиту, о точности вывода, о необходимости корректировки орбиты или признание запуска неудачным.

Способов определения предварительной орбиты искусственного спутника Земли существует несколько. Их содержание зависит от вида измерений, на основании которых определяется положение спутника относительно наземных станций с известными координатами, и от количества этих станций. При этом для определения шести параметров, полностью определяющих орбиту и положение спутника на ней, для реализации методов предварительного определения орбиты необходимо иметь не менее шести измерений. К настоящему времени, как в международном масштабе, так и в странах с развитой космической отраслью, созданы наземные комплексы мониторинга ближайшего космоса, оснащенные соответствующей измерительной аппаратурой [8].

В России также имеется наземный комплекс, оснащенный модульной квантово-оптической системой «Сажень-ТМ» [22] (рис. 13). Эти приборы позволяют определять угловые координаты космических объектов с яркостью до 12–14 звездных величин видеотеодолитом, в зависимости от скорости их перемещения на небесной сфере, от 1 до 40 угловых секунд, а также измерять топоцентрическую дальность до 36 000 км с использованием лазерного локатора с точностью до 0,5–1 см.

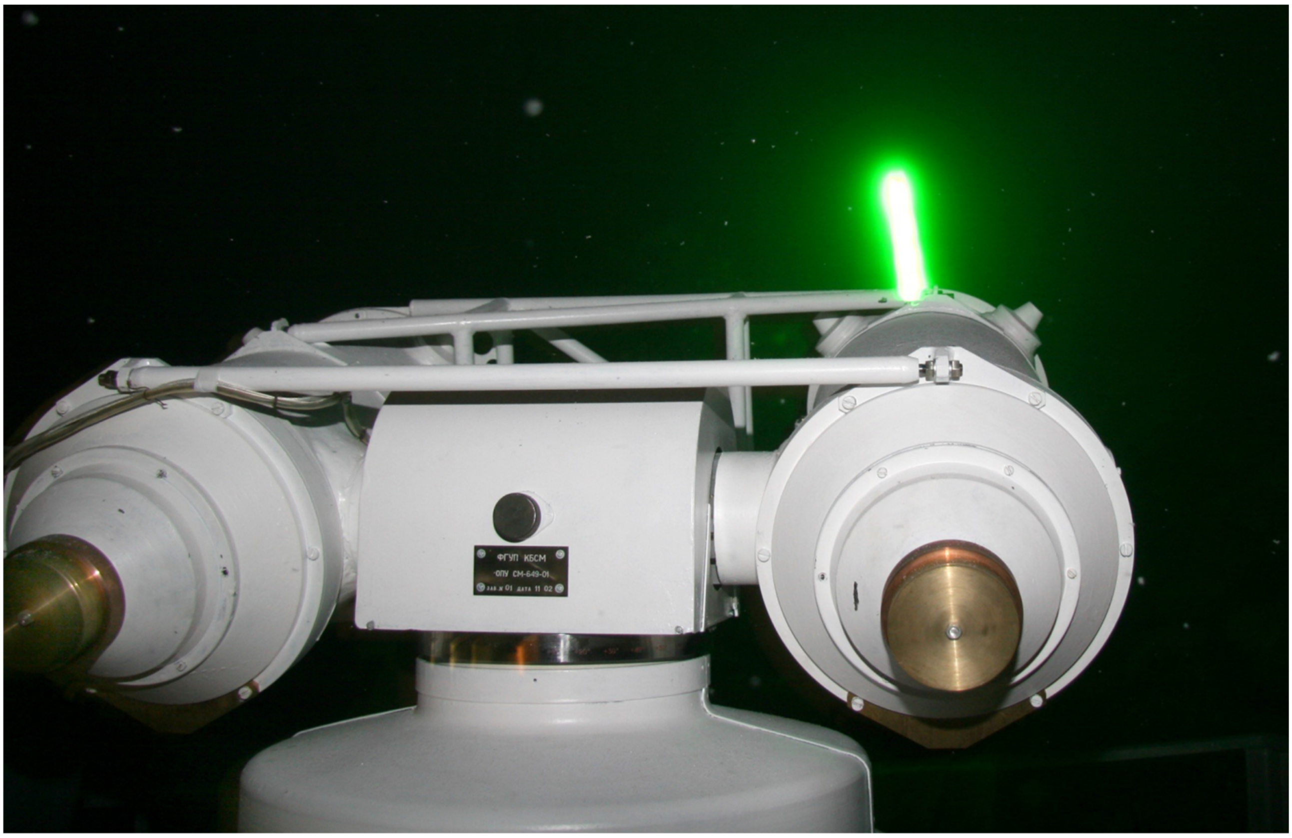


Рис. 13. Модульная квантово-оптическая система «Сажень-ТМ»

На территории нашей страны развернуто два десятка станций, оснащенных аппаратурой «Сажень-ТМ» [22] (рис. 14).

По межгосударственным соглашениям подобные станции развернуты также в ряде других стран. Аппаратура «Сажень-ТМ» успешно применяется для уточнения орбит спутников ГНСС ГЛОНАСС. Для этой цели на навигационных искусственных спутниках Земли (НИСЗ) ГЛОНАСС устанавливаются уголковые лазерные отражатели.

Рассмотрим два способа предварительного определения орбиты спутника. Первый способ – способ Гаусса – предполагает измерение как направления на спутник, так и измерение топоцентрической дальности [21]. Второй способ – способ Бриггса – Слоуэла – предполагает измерение только направления на спутник [21].

Для предварительного определения орбит спутников по измерениям с наземных станций только топоцентрических расстояний применяется метод, аналогичный методу дифференциального улучшения орбит.

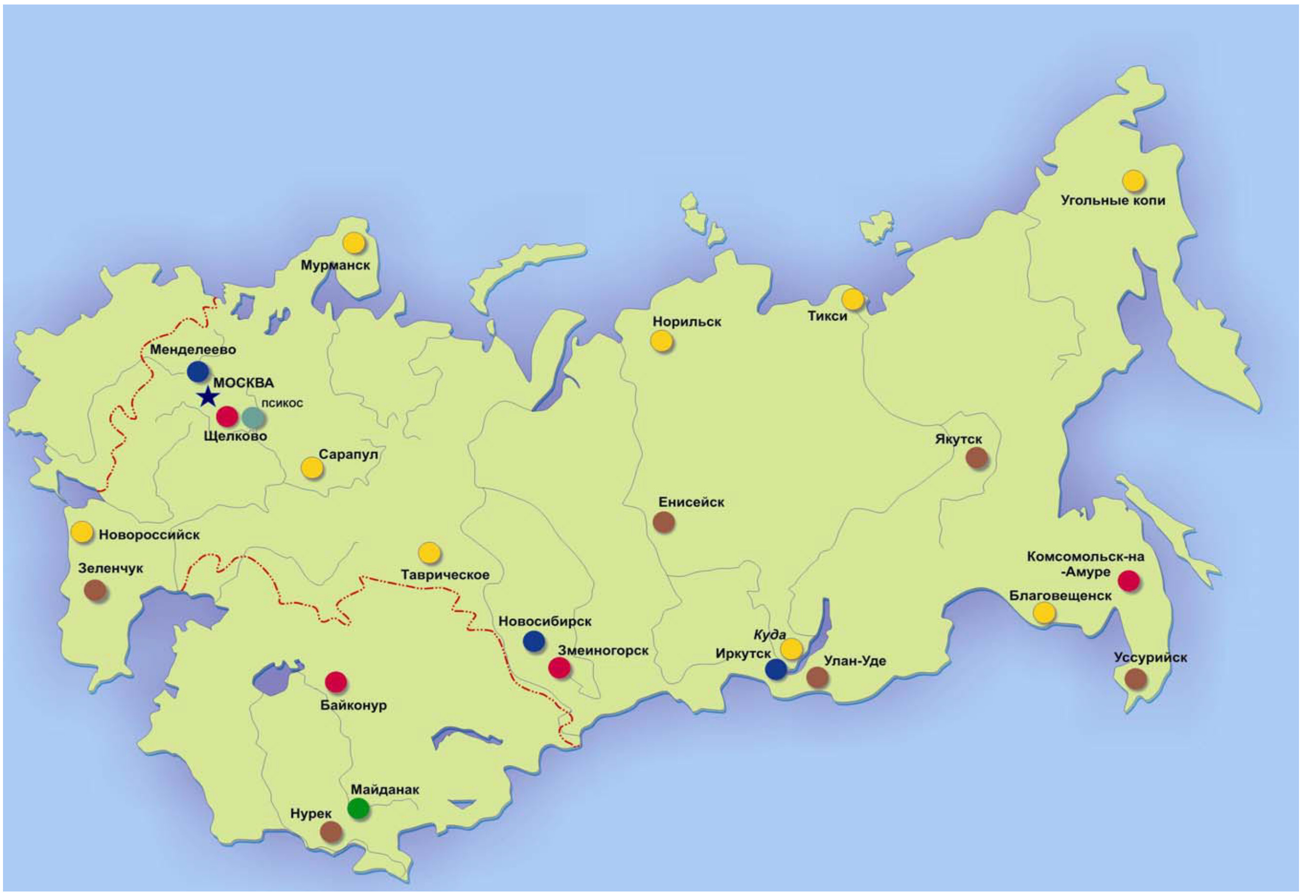


Рис. 14. Карта размещения приборов «Сажень-ТМ»

Заметим, что при определении предварительной орбиты, как правило, не используют избыточные измерения.

2.2. Способ Гаусса

Для этого способа необходимо наличие двух наблюдений спутника с одного наземного пункта (НП) при полном составе топоцентрических векторов наблюдения $\rho_1\left(\rho'_1,\alpha'_1,\delta'_1\right)$ и $\rho_2\left(\rho'_2,\alpha'_2,\delta'_2\right)$, полученных в моменты времени t_1 и t_2 соответственно в дату наблюдения d (рис. 15). Заметим, что направления векторов в методе Гаусса задаются во второй экваториальной системе координат, относящейся к группе инерциальных систем координат [7]. Направления векторов ρ_1 и ρ_2 могут быть заданы и в горизонтной системе координат (A, h), основные линии и точки которой жестко связаны с Землей.

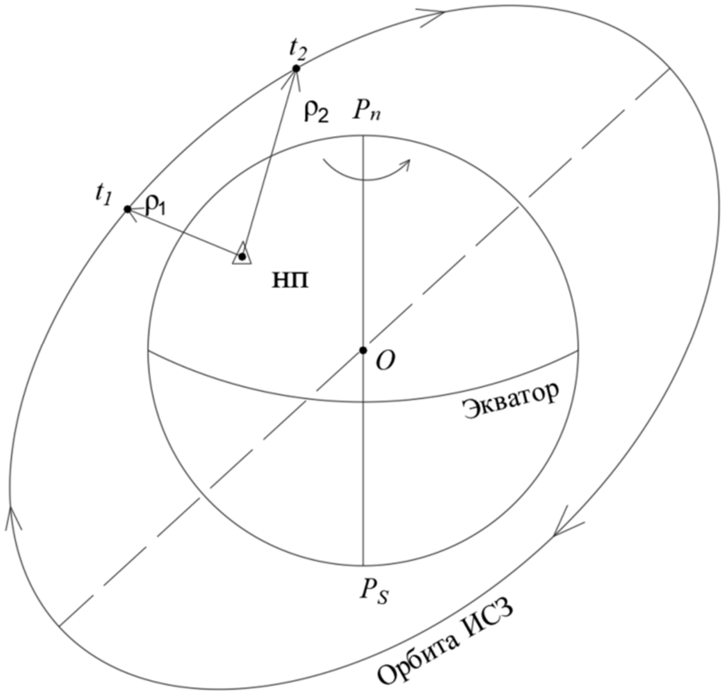


Рис. 15. Геометрия наблюдений ИСЗ с НП в методе Гаусса

В этом случае топоцентрические векторы наблюдений ИСЗ будут иметь вид $\rho_1\left(\rho'_1, A'_1, h'_1\right)$ и $\rho_2\left(\rho'_2, A'_2, h'_2\right)$.

Координаты наземного пункта наблюдения могут быть также заданы двояко – в виде геодезических координат B, L, H или в виде прямоугольных координат X, Y, Z. Перевычисление геодезических координат НП в прямоугольные выполняется по формулам высшей геодезии [3]:

$$X_G = \left(N + H\right)\cos B \cos L;$$
$$Y_G = \left(N + H\right)\cos B \sin L; \qquad (101)$$
$$Z_G = \left[N\left(1 - e^2\right) + H\right]\sin B,$$

где N – радиус кривизны первого вертикала в точке НП; e^2 – квадрат эксцентриситета эллипсоида вращения.

Радиус кривизны первого вертикала N вычисляется по формуле

$$N = \frac{a_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \tag{102}$$

где a_e – большая полуось эллипсоида вращения.

Исходной формулой определения предварительной орбиты ИСЗ в методе Гаусса является фундаментальное уравнение космической геодезии [4, 9, 18]

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\rho}, \tag{103}$$

где $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ – геоцентрический радиус-вектор спутника; $\boldsymbol{R}(X, Y, Z)$ – геоцентрический радиус-вектор наземного пункта; $\boldsymbol{\rho}(x', y', z')$ – топоцентрический радиус-вектор спутника. Все они должны быть заданы в небесной системе координат.

Приведенные в скобках при векторах $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{\rho}$ величины представляют собой проекции соответствующих векторов на оси небесной системы координат.

Прямоугольные составляющие топоцентрических радиус-векторов $\boldsymbol{\rho}_i$ на моменты наблюдений t_i в случае измерения направления векторов в виде прямого восхождения α_i и склонения δ_i вычисляются в небесной системе координат по формулам:

$$\begin{aligned} x_i' &= \rho_i \cos\delta_i \cos\alpha_i; \\ y_i' &= \rho_i \cos\delta_i \sin\alpha_i; \\ z_i' &= \rho_i \sin\delta_i. \end{aligned} \tag{104}$$

Подстрочный индекс i обозначает номер наблюдения и принимает значения 1 или 2.

В случае измерения направления топоцентрических радиус-векторов ρ_i в виде горизонтных координат A_i и h_i прямоугольные составляющие векторов задаются в горизонтной системе координат и вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} hx_i' &= \rho_i \cos h_i \sin A_i; \\ hy_i' &= \rho_i \cos h_i \cos A_i; \\ hz_i' &= \rho_i \sin h_i. \end{aligned} \tag{105}$$

Затем они должны быть преобразованы сначала в земную систему координат по формуле

$$\begin{pmatrix} gx_i' \\ gy_i' \\ gz_i' \end{pmatrix} = R_1\left(90^{\circ} - B\right) R_3\left[-\left(90^{\circ} + L\right)\right] \begin{pmatrix} hx_i' \\ hy_i' \\ hz_i' \end{pmatrix}, \tag{106}$$

а затем преобразованы в небесную систему координат по формуле

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{pmatrix} = R_3\left(-S_i\right) \begin{pmatrix} gx_i' \\ gy_i' \\ gz_i' \end{pmatrix}. \tag{107}$$

В формулах (106) и (107) символами $R_j\left(\alpha\right)$ обозначены матрицы вращения вокруг оси с номером j (j = 1, 2, 3) на угол α, применяемые при преобразовании прямоугольных координат. Под S_i понимается гринвичское звездное время, соответствующее моменту наблюдения спутника t_i. Если моменты наблюдения ИСЗ фиксируются по времени часового пояса Москвы, то время S_i может быть вычислено по формуле

$$S_i = S_0 + \left(t_i - 3^h\right)\left(1 + \mu\right), \tag{108}$$

где S_0 – звездное время в гринвичскую полночь на дату d; μ – коэффициент перехода от шкалы солнечного времени к шкале звездного времени, имеющий значение 0,002 737 909 3 [2].

По аналогии с формулой (107) получается формула преобразования координат НП из земной системы координат в небесную:

$$\begin{pmatrix} X_\gamma \\ Y_\gamma \\ Z_\gamma \end{pmatrix} = R_3\left(-S_i\right)\begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix}. \qquad (109)$$

Таким образом, для t_i (i = 1, 2) момента наблюдения векторное равенство (103) можно раскрыть в координатной форме

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_\gamma \\ Y_\gamma \\ Z_\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{pmatrix}. \qquad (110)$$

Далее, по прямоугольным геоцентрическим координатам спутника x_i, y_i, z_i на моменты t_i (i = 1, 2) получим его геоцентрические координаты α_i, δ_i, r_i во второй экваториальной системе координат:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= \operatorname{arctg}\frac{y_i}{x_i}; \\ \delta_i &= \operatorname{arctg}\frac{z_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}; \\ r_i &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (111)$$

Теперь можно приступать к получению формул вычисления кеплеровых элементов предварительной орбиты спутника. Начнем с элементов, характеризующих ориентировку орбиты в пространстве.

Для этого воспользуемся рис. 16 [4], на котором:

γ – положение точки весеннего равноденствия;

Ω – восходящий узел орбиты, долгота восходящего узла орбиты;

i – наклонение орбиты;

m_1, m_2 – положение ИСЗ на орбите в моменты t_1, t_2 соответственно;

m_1', m_2' – проекции положений ИСЗ на орбите в моменты t_1, t_2 на экватор вдоль соответствующих кругов склонений;

δ_1, δ_2 – склонение ИСЗ в моменты t_1, t_2 соответственно;

α_1, α_2 – прямое восхождение ИСЗ в моменты t_1, t_2 соответственно.

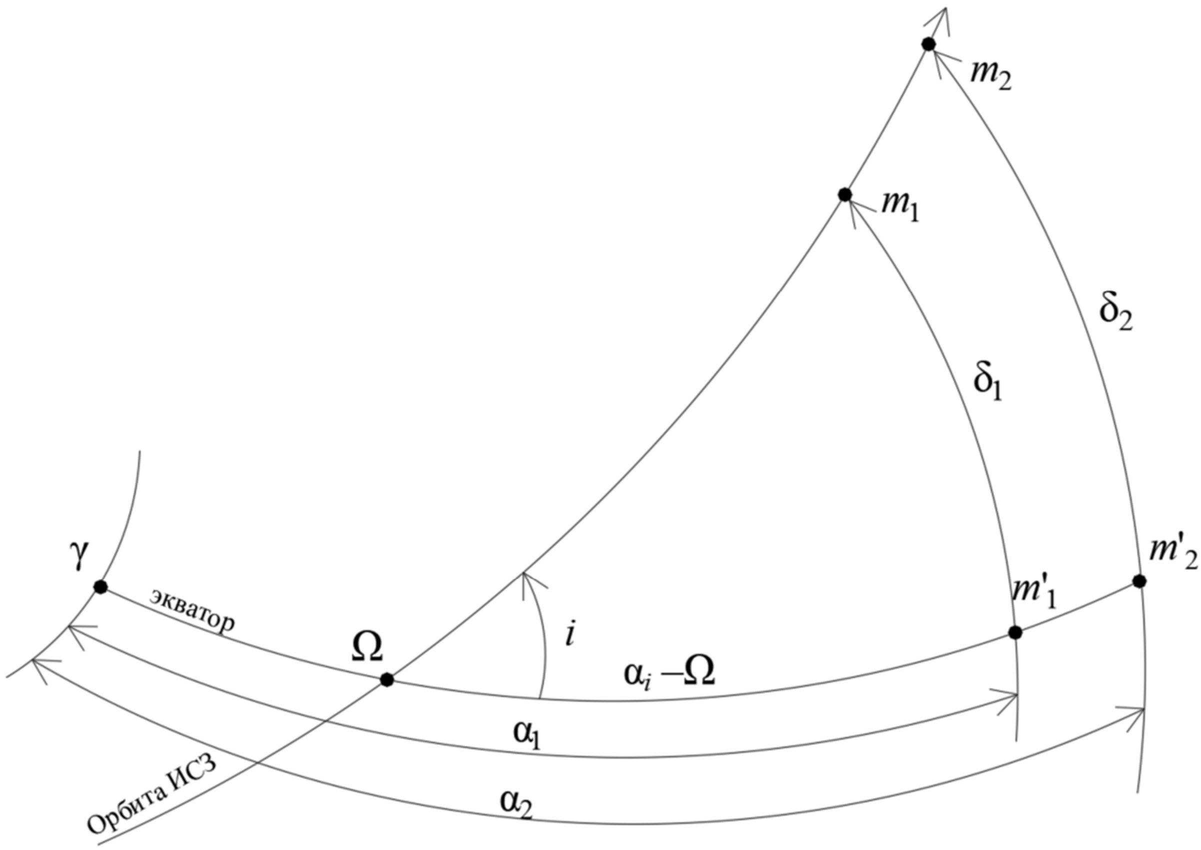


Рис. 16. Связь экваториальных координат ИСЗ и элементов ориентирования орбиты в пространстве на моменты наблюдений t_i

Из прямоугольных сферических треугольников $\Omega m_i m_i'$, изображенных на рис. 16, по формулам сферической тригонометрии получаем угловые параметры орбиты, характеризующие ее ориентировку в пространстве.

Формула для вычисления долготы восходящего узла орбита Ω:

$$\Omega = \alpha_1 - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\delta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\operatorname{tg}\delta_2 - \operatorname{tg}\delta_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \qquad (112)$$

Согласно правилу Непера из рис. 16 имеем

$$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{cosec}\left(\alpha_1 - \Omega\right), \tag{113}$$

откуда получаем рабочую формулу для вычисления наклонения орбиты i:

$$i = \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{cos}ec\left(\alpha_1 - \Omega\right)\right]. \tag{114}$$

Контрольная формула для вычисления наклонения орбиты i имеет вид

$$i = \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\delta_2 - \operatorname{tg}\delta_1 \cos\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)}{\cos\left(\alpha_2 - \Omega\right)\sin\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)}\right]. \tag{115}$$

Аргументы широты u_i на моменты наблюдений t_i (i = 1, 2) вычисляются по формуле

$$u_i = \arccos\left[\cos\delta_i \cos\left(\alpha_i - \Omega\right)\right]. \tag{116}$$

Определение фокального параметра орбиты p с учетом эллиптичного характера орбиты выполняется в три этапа.

I этап. Вычисление вспомогательных величин:

а) вычисление вспомогательной величины l:

$$l = \frac{1}{2}\left[\frac{r_1 - r_2}{2\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right)} - 1\right]; \tag{117}$$

б) вычисление вспомогательной величины m:

$$m = \frac{\mu\left(t_2 - t_1\right)}{8\left(r_1 r_2\right)^{3/2} \cos\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right)}, \tag{118}$$

где μ – гравитационный параметр Земли (μ = 398 600,44 км^3/с^2);

в) вычисление вспомогательной величины X:

$$X = \frac{m}{\eta_0^2} - l, \tag{119}$$

где

$$\eta_0 \approx 1+\frac{4}{3}m\left[1-1{,}1\left(\frac{4}{3}m\right)-1{,}2l\right]. \qquad (120)$$

Формула (120) является приближенным отношением площади эллиптического треугольника, образованного радиус-векторами r_1, r_2, и дугой орбиты m_1, m_2 к площади обычного плоского треугольника Om_1m_2 (рис. 17). На рис. 17 m_1 и m_2 обозначают положения спутника на орбите в моменты наблюдений t_1 и t_2;

г) вычисление вспомогательной разности $E_2 - E_1$:

$$E_2 - E_1 = \frac{1}{4}\arcsin\sqrt{X}\,; \qquad (121)$$

д) вычисление вспомогательной величины $E(X)$:

$$E(X) = \frac{(E_2 - E_1) - \sin(E_2 - E_1)}{\sin^3\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)}. \qquad (122)$$

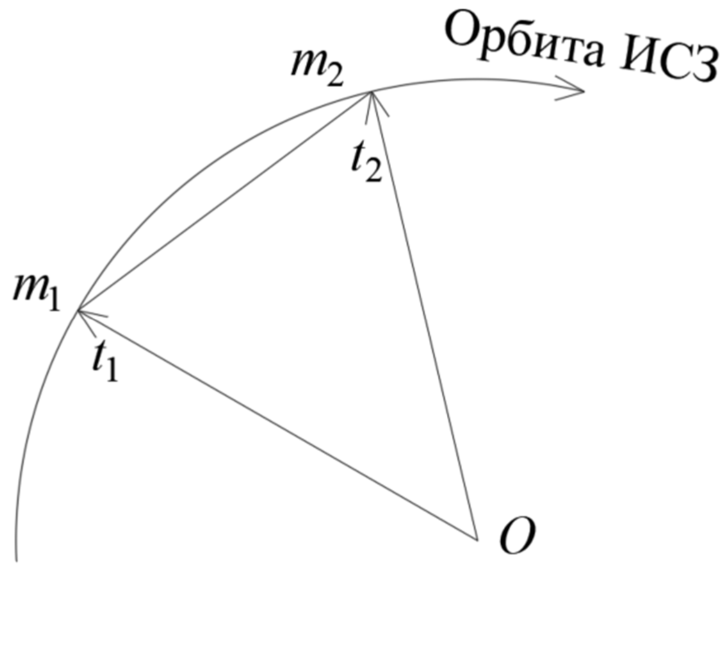


Рис. 17. Геометрическая интерпретация формулы (120)

II этап. Вычисление отношения площади эллиптического треугольника, образованного геоцентрическими расстояниями r_1, r_2, и дугой орбиты $m_1 m_2$ к площади обычного треугольника $Om_1 m_2$ по уточненной формуле

$$\eta^3(X) - \eta^2(X) = mE(X). \tag{123}$$

Уравнение (123) решается методом последовательных приближений относительно η(X) по итерационной формуле

$$\eta_n(X) = \eta_{n-1}(X) - \frac{\eta_{n-1}^3(X) - \eta_{n-1}^2(X) - mE(X)}{3\eta_{n-1}^2(X) - 2\eta_{n-1}(X)}. \tag{124}$$

В качестве нулевого приближения берут значение η, вычисленное по формуле (120). Итерации по формуле (124) прекращают до достижения заданной точности вычислений ε.

III этап. С окончательным значением η, полученным по итерационной формуле (124), вычисляют значение фокального параметра орбиты p по формуле

$$p = \eta^2 \frac{\left[r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)\right]^2}{\mu(t_2 - t_1)^2}. \tag{125}$$

Затем переходим к вычислению остальных кеплеровых элементов орбиты.

Вычисление истинной аномалии v_i на моменты наблюдений:

$$\mathrm{tg} v_1 = \frac{\dfrac{p - r_1}{r_1}\cos(u_2 - u_1) - \dfrac{p - r_2}{r_2}}{\dfrac{p - r_1}{r_1}\sin(u_2 - u_1)}; \tag{126}$$

$$v_2 = v_1 - (u_2 - u_1). \tag{127}$$

Вычисление эксцентриситета орбиты e.

В качестве исходной для получения формулы вычисления эксцентриситета орбиты используется формула уравнения орбиты, записанная для t_i-го момента наблюдения (i = 1,2)

$$r_i = \frac{p}{1 + e\cos v_i}. \tag{128}$$

Из формулы (128) для каждого из двух моментов наблюдения спутника получаем два значения эксцентриситета, вычисляемых по формулам:

$$e_1 = \frac{p - r_1}{r_1 \cos v_1}; \tag{129}$$

$$e_2 = \frac{p - r_2}{r_2 \cos v_2}. \tag{130}$$

Оба значения эксцентриситета, полученные по формулам (129) и (130), должны быть близки. Различие между этими значениями может быть обусловлено погрешностями при вычислении величин, стоящих в правых частях этих формул.

Для дальнейшего использования можно взять среднее из двух полученных значений эксцентриситета:

$$e = \frac{e_1 + e_2}{2}. \tag{131}$$

Вычисление аргумента перигея орбиты ω. Как и для эксцентриситета, аргумент перигея может быть получен по данным, относящимся к двум наблюденным положениям ИСЗ:

$$\omega_1 = u_1 - v_1; \tag{132}$$

$$\omega_2 = u_2 - v_2. \tag{133}$$

Для дальнейшего использования можно взять среднее из двух полученных значений аргумента перигея

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \tag{134}$$

Вычисление большой полуоси орбиты и среднего движения:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}; \tag{135}$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \tag{136}$$

Вычисление эксцентрической аномалии на моменты наблюдений t_i:

$$E_i = 2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\mathrm{tg}\frac{v_i}{2}\right), \ (i = 1, 2). \tag{137}$$

По формуле (137) вычисляется главное значение обратной тригонометрической функции. Для получения действительного значения эксцентрической аномалии E_i следует принимать во внимание близкое к ней значение истинной аномалии v_i.

Вычисление момента прохождения спутника через перигей орбиты t_π по двум наблюдениям (i = 1, 2):

$$t_\pi^i = t_i - \frac{1}{n}\left(E_i - e\sin E_i\right), \ (i = 1, 2). \tag{138}$$

В дальнейшем за момент прохождения спутником перигея орбиты принимают среднее из моментов, вычисленных по формуле (138):

$$t_\pi = \frac{t_\pi^1 + t_\pi^2}{2}. \tag{139}$$

Вычисление средней аномалии M_0 на средний момент времени t_0:

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}; \tag{140}$$

$$M_0 = n\left(t_0 - t_\pi\right). \quad (141)$$

Таким образом, на средний момент наблюдения t_0 получены все шесть кеплеровых элементов a, e, i, Ω, ω, M_0 предварительной орбиты спутника.

2.3. Способ Бриггса – Слоуэла

Этот метод основан на следующих предположениях. Даны три станции наблюдения S_1, S_2, S_3 с известными координатами в геоцентрической системе координат $\boldsymbol{R}_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $\boldsymbol{R}_2(X_2, Y_2, Z_2)$, $\boldsymbol{R}_3(X_3, Y_3, Z_3)$ (рис. 18). В дальнейшем номер станции и относящиеся к ней данные будем обозначать буквой i (i = 1, 2, 3). Таким образом, для станции с номером i соответствующий геоцентрический радиус-вектор ее положения будет обозначен как $\boldsymbol{R}_i(X_i, Y_i, Z_i)$. В моменты t_i для i-й станции наблюдения получены направляющие косинусы топоцентрического направления на спутник l_i, m_i, n_i, при этом топоцентрическая система координат может быть как горизонтной (A, h), так и экваториальной (α, δ). Для получения направляющих косинусов по измеренным A, h или α, δ можно применить формулы (104) и (105). Координаты станций наблюдения и направляющие косинусы должны быть преобразованы в небесную систему координат. Для этого можно воспользоваться формулами (106)–(109).

Метод Бриггса – Слоуэла предполагает решение задачи в векторном виде. Геоцентрические радиусы – векторы $\boldsymbol{R}_i$ станций S_i задаются в виде

$$\boldsymbol{R}_i = X_i \boldsymbol{i} + Y_i \boldsymbol{j} + Z_i \boldsymbol{k}, \quad (142)$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – единичные векторы небесной системы координат.

Топоцентрические радиусы – векторы $\boldsymbol{\rho}_i$ спутника определяются как

$$\rho_i = \rho_i\left(l_i \boldsymbol{i} + m_i \boldsymbol{j} + n_i \boldsymbol{k}\right). \quad (143)$$

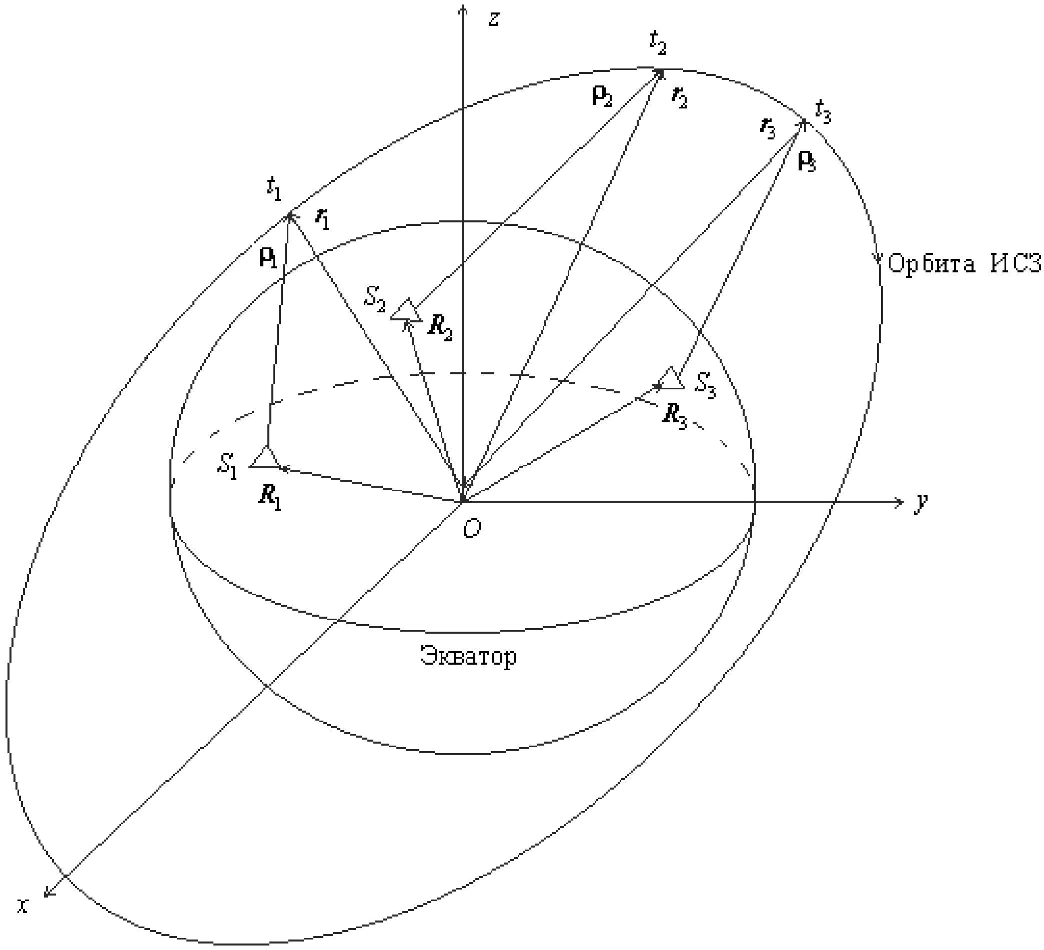


Рис. 18. Геометрия наблюдений в способе Бриггса – Слоуэла

При этом топоцентрические расстояния ρ_i в моменты наблюдения t_i являются неизвестными. Вследствие этого геоцентрические радиусы – векторы r_i спутников в моменты t_i

$$\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k} \tag{144}$$

также являются неизвестными, так как являются функцией топоцентрических радиусов – векторов ρ_i:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}_i + \rho_i. \tag{145}$$

Для невозмущенного движения векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ являются компланарными, т. е. для них справедливо равенство

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \cdot r_3 = 0. \qquad (146)$$

Применим к (146) правила линейной алгебры:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\boldsymbol{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\boldsymbol{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{k}, \qquad (147)$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \qquad (148)$$

С учетом (142), (143) и (145) левую часть формулы (146) можно записать в виде определителя следующей матрицы, приравняв его к нулю:

$$\begin{vmatrix} X_1 + \rho_1 l_1 & X_2 + \rho_2 l_2 & X_3 + \rho_3 l_3 \\ Y_1 + \rho_1 m_1 & Y_2 + \rho_2 m_2 & Y_3 + \rho_3 m_3 \\ Z_1 + \rho_1 n_1 & Z_2 + \rho_2 n_2 & Z_3 + \rho_3 n_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (149)$$

В равенстве (149) неизвестными являются все три топоцентрических расстояния ρ_1 , ρ_2 и ρ_3. Задача предварительного определения элементов орбиты решается методом итерации следующим образом. Для топоцентрических расстояний ρ_1 и ρ_2 выбирают приближенные значения, по которым по формуле (145) вычисляют соответствующие им значения r_1 и r_2, которые, в свою очередь, также будут приближенными.

Затем составляют векторное равенство:

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = L\boldsymbol{i} + M\boldsymbol{j} + N\boldsymbol{k}. \qquad (150)$$

Левую часть формулы (150) представляют по правилу (147) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых ортах определяют коэффициенты *L*, *M* и *N*. Затем находят приближенное значение топоцентрического расстояния ρ_3 по формуле

$$\rho_3 = -\frac{LX_3 + MY_3 + NZ_3}{Ll_3 + Mm_3 + Nn_3}. \qquad (151)$$

Далее вычисляют приближенное геоцентрическое расстояние r_3:

$$r_3 = R_3 + \rho_3. \qquad (152)$$

После этого необходимо вычислить разности истинной аномалии для точки орбиты в момент t_3 и истинных аномалий в точках орбиты, соответствующих моментам t_1 и t_2.

$$\sin(v_3 - v_i) = \pm\frac{|\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_3|}{r_3 r_i}; \tag{153}$$

$$\cos(v_3 - v_i) = \frac{\boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_i}{r_3 r_i}, \tag{154}$$

где i = 1,2.

Для орбит с прямым движением $(0^\circ \le i < 90^\circ)\sin(v_3 - v_1)$ имеет тот же знак, что и z – компонента векторного произведения $\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_3$, определяемого по формуле (147).

Используя уравнение орбиты

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \tag{155}$$

и раскрывая функции синуса и косинуса разности истинных аномалий в формулах (153), (154), получаем

$$\mathrm{tg}v_3 = -\frac{r_1(r_2-r_3)\cos(v_3-v_1)+r_2(r_3-r_1)\cos(v_3-v_2)+r_3(r_1-r_2)}{r_1(r_2-r_3)\sin(v_3-v_1)+r_2(r_3-r_1)\sin(v_3-v_2)}. \tag{156}$$

Далее для любых точек орбиты с номерами i и j, для которых справедливо неравенство $\cos v_i \ne \cos v_j$, будем иметь:

$$e = \frac{r_i - r_j}{r_j \cos v_j - r_i \cos v_j}; \tag{157}$$

$$a = \frac{r_i(1+e\cos v_i)}{1-e^2}. \tag{158}$$

Из уравнения (156) получаем значение v_3. Из двух возможных вариантов, полученных из функции arctg, выбирается тот, при котором e в (157) имеет положительное значение. После этого из соотношений (153), (154) находят v_1 и v_2. Далее по любому значению истинной аномалии v_i (i =1,2) из (158) можно найти соответствующее значение большой полуоси a_i.

Моменты t_π прохождения спутником перигея орбиты получают из следующих формул

$$E_i = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v_i}{2}\right); \tag{159}$$

$$M_i = E_i - e\sin E_i; \tag{160}$$

$$t_\pi = t_i - \frac{M_i}{n_i}. \tag{161}$$

Здесь n_i – среднее движение спутника, вычисляемое по формуле

$$n_i = \sqrt{\frac{\mu}{a_i^3}}. \tag{162}$$

Таким образом, по формуле (161) получаем три значения t_π. Поскольку они получены по оценочным значениям топоцентрических расстояний ρ_1 и ρ_2, то между ними обнаружатся рассогласования, что в итоге приведет к расхождению вычисленных и наблюдаемых интервалов времени между моментами t_i .

Численные значения ρ_1 и ρ_2 исправляются методом итерации до тех пор, пока значения t_π, вычисленные по формуле (161), значит, и вычисленные и наблюденные интервалы времени не совпадут между собой. В качестве итерационной процедуры используется метод Ньютона – Рафсона, в котором движение к новому приближению делается по касательной к графику функции. В сочетании с возможностями современных ЭВМ процесс сходимости при использовании этого метода значительно убыстряется.

После завершения процесса итерации и получения уточненных значений большой полуоси a и эксцентриситета e приступают к определению элементов ориентировки орбиты в пространстве по формулам:

$$i = \arccos\left(\frac{|N|}{L^2 + M^2 + N^2}\right); \tag{163}$$

$$\Omega = \operatorname{arctg}\left(\frac{M}{L}\right) \pm 90^\circ, \tag{164}$$

где знак выбирается таким же, как у произведения LN.

Аргумент перигея ω находят по данным любого наблюдения:

$$\omega = \pm u_i - v_i, \tag{165}$$

где

$$u_i = \arccos\left(\frac{x_i \cos\Omega + y_i \sin\Omega}{r_i}\right). \tag{166}$$

2.4. Контрольные вопросы

1. В связи с чем возникает необходимость определения предварительной орбиты спутника? Приведите известные способы определения предварительной орбиты ИСЗ.

2. Перечислите виды наблюдений спутника с наземного пункта.

3. Дайте определение второй экваториальной системы координат.

4. Дайте определение горизонтной системы координат.

5. Объясните принципиальную разницу между геоцентрическим и топоцентрическим векторами положения спутника.

6. Объясните назначение кеплеровых элементов орбиты: a – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклонение орбиты, Ω – долгота восходящего узла, ω – аргумент перицентра, $M(t)$ – средняя аномалия.

7. Поясните разницу между истинной, эксцентрической и средней аномалиями спутника.

8. Укажите направление осей земной системы координат.

9. Укажите направление осей небесной системы координат.

10. Поясните принципиальную разницу между небесной и земной системами координат.

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКОВ

3.1. Возмущающие силы, действующие на спутник

В отличие от невозмущенного движения в реальном полете на ИСЗ, помимо центральной силы тяготения Земли, действуют также силы, обусловленные [4, 12, 14, 21]:

– нецентральным полем тяготения, вызванным несферичностью Земли и неправильным распределением масс внутри нее;

– лунно-солнечными приливами в теле Земли;

– влиянием гравитационных полей Солнца, Луны, планет и других небесных тел;

– давлением прямой и отраженной солнечной радиации;

– давлением инфракрасного излучения Земли;

– сопротивлением атмосферы;

– релятивистскими эффектами и др.

У спутников, имеющих на борту запасы топлива, ускорения могут возникать из-за утечки газов из топливных контейнеров.

Из вышеперечисленных возмущающих сил первые три имеют гравитационную природу, остальные имеют физическую природу, не подчиняющуюся закону всемирного тяготения.

Все эти силы называются *возмущающими силами*, движение спутника под действием этих сил – *возмущенным движением*, а вызываемые этими силами ускорения в движении спутника – *возмущающими ускорениями.* Конкретный набор возмущающих сил, их количество для данного спутника зависит от точности прогнозирования его движения. Отдельную i-ю возмущающую силу обозначим $\boldsymbol{F}_i$. Каждая возмущающая сила имеет свою величину и направление (рис. 19).

Например, силы $\boldsymbol{F}_1$ или $\boldsymbol{F}_3$ характеризуют притяжение спутника более плотными массами внутри Земли или приливным «горбом» от гравитационного воздействия на нашу планету Луны и Солнца. Вследствие этих возмущающих сил орбита спутника приближается к Земле, и наоборот, сила $\boldsymbol{F}_2$ характеризует притяжение спутника Луной или Солнцем, в результате орбита спутника смещается в сторону этих небесных тел. Сила $\boldsymbol{F}_4$ может характеризовать давление на спутник инфракрасного поля Земли или отраженного от земной поверхности солнечного света. Сила $\boldsymbol{F}_5$ отражает внешнее давление на спутник прямого солнечного излучения и т. д.

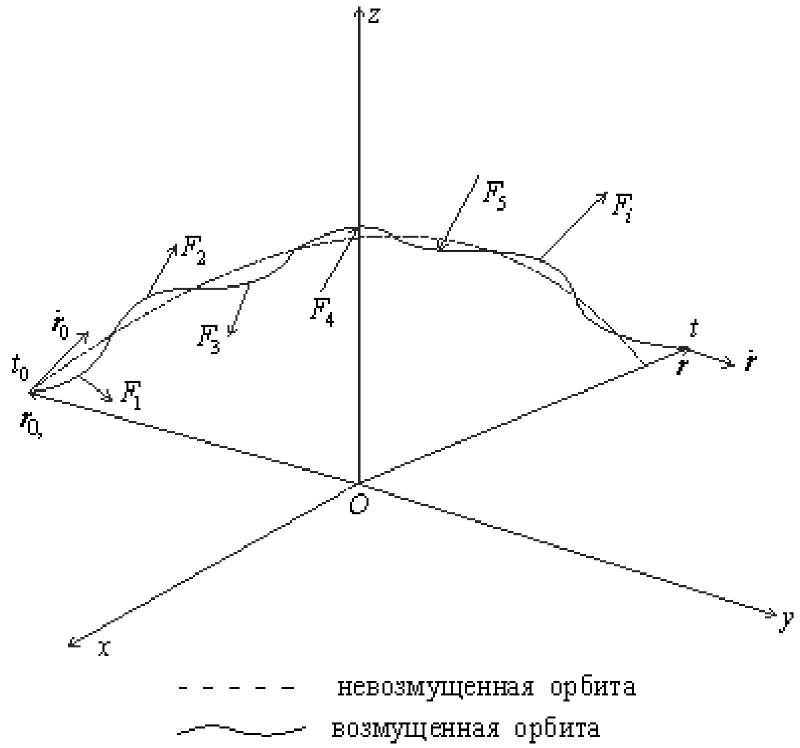


Рис. 19. Действие возмущающих сил на движение спутника

Реальная орбита спутника в результате действия возмущающих сил отличается от невозмущенной орбиты. Спутник в своем реальном движении за время, равное периоду обращения, каждый раз прилетает в другую точку пространства, элементы его текущей орбиты постоянно изменяются во времени. Теоретически число возмущающих сил, действующих на спутник, бесконечно, хотя бы потому, что в окружающей нас Вселенной имеется бесконечное количество тел, обладающих массой и притягивающих спутник. К счастью, расстояния до них настолько далеки, что в соответствии с законом всемирного тяготения их гравитационное влияние на спутник ничтожно мало. Реальное гравитационное воздействие на спутник оказывает Солнце, вследствие его огромной массы – $1,99 \cdot 10^{30}$ кг, а также Луна, имеющая массу $7,35 \cdot 10^{22}$ кг и относительно близко расположенная к Земле, в среднем, около 370 000 км. Что касается гравитационного воздействия планет Солнечной системы, то даже влияние таких гигантов, как Юпитер и Сатурн, вследствие их огромного расстояния от Земли, не превышает требований к точности определения орбит спутников Земли для решения геодезических задач.

Таким образом, перечень возмущающих сил, учитываемых при прогнозировании движения спутников Земли, ограничен и составляет несколько единиц. При этом действие каждой возмущающей силы представляется математической моделью, имеющей ту или иную степень приближения к реальности. Поэтому, говоря о возмущенном движении, мы должны понимать, что оно также является смоделированным и отличается от реального в зависимости от количества учтенных возмущающих сил и точности математических моделей, характеризующих их действие.

От модели возмущающих сил зависит характер возмущений по времени действия, в связи с чем они подразделяются на *вековые, долгопериодические, короткопериодические* и *резонансные.*

В зависимости от целевого назначения спутника и точности прогнозирования траектории его движения применяется тот или иной набор возмущающих сил. Например, для спутников глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) ГЛОНАСС, GPS, Galileo и Beidou, орбиты которых расположены на значительном расстоянии от Земли, в этот набор входит учет возмущений от аномалий гравитационного поля Земли, притяжения спутника Луной и Солнцем, давления солнечной радиации. Рассмотрим принципиальные подходы по используемым моделям этих возмущающих сил.

3.1.1. Возмущающий гравитационный потенциал Земли

Гравитационный потенциал Земли U на внешнюю точку можно представить в виде

$$U = \frac{\mu}{r} + R_{\oplus}, \tag{167}$$

где $\mu = fM_{\oplus}$ – гравитационная постоянная Земли; r – геоцентрическое расстояние для внешней точки; $R_{\oplus}$ – *возмущающая часть геопотенциала Земли*, играющая роль возмущающей силы.

Первый член в (167) определяет невозмущенное движение (потенциал шара или точки), второй член определяет возмущающее влияние аномалий гравитационного поля Земли на движение спутника.

Возмущающий потенциал обычно задается в виде разложения в ряд по сферическим функциям [1, 4, 9, 12, 21]:

$$R_{\oplus} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{a_E}{r} \right)^n \left[C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda \right] P_{nm}(\sin\varphi), \tag{168}$$

где a_E – большая полуось Земли; r – геоцентрическое расстояние спутника; φ, λ – его широта и долгота; величины C_{nm}, S_{nm} – безразмерные коэффициенты, характеризующие внешнее гравитационное поле Земли. Наконец, $P_{nm}(\sin\varphi)$ – функции Лежандра (сферические функции), которые делятся на два типа: при $m = 0$ – полиномы Лежандра, а при $0 < m \le n$ – присоединенные функции Лежандра. Целые числа n и m являются степенью и порядком разложения. Разложение (168) по сути представляет собой распределение действия аномалий гравитационного поля Земли на поверхности сферы радиусом, равным значению большой полуоси эллипсоида вращения. Каждый отдельный член бесконечного ряда (168) из-за входящих в его структуру тригонометрических функций синуса и косинуса получил название *гармоники*.

Полиномы Лежандра определяются на основании формулы Родрига

$$P_{n0}(\sin\varphi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n \left(\sin^2(\varphi) - 1 \right)^n}{d(\sin\varphi)^n}, \tag{169}$$

для них справедливо рекуррентное соотношение

$$P_{n+1,\,0}(\sin\varphi) = \frac{2n+1}{n+1}\sin\varphi\, P_{n0}(\sin\varphi) - \frac{n}{n+1} P_{n-1,0}(\sin\varphi). \qquad (170)$$

Приведем выражения для первых двух полиномов:

$$P_{10} = \sin\varphi; \quad P_{20} = \frac{1}{2}(3\sin^2\varphi - 1). \qquad (171)$$

Выражение для присоединенных функций Лежандра имеет вид

$$P_{nm}(\sin\varphi) = (1 - \sin^2\varphi)^{m/2} \frac{d^m P_{n0}(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)^m}. \qquad (172)$$

Сферические функции подразделяются на *зональные*, *секториальные* и *тессеральные* (мозаичные) *гармоники* в зависимости от линий на сфере, которыми разграничены области с различными знаками гармоник. Геометрическая сущность гармоник приведена на рис. 20 [1, 12, 21].

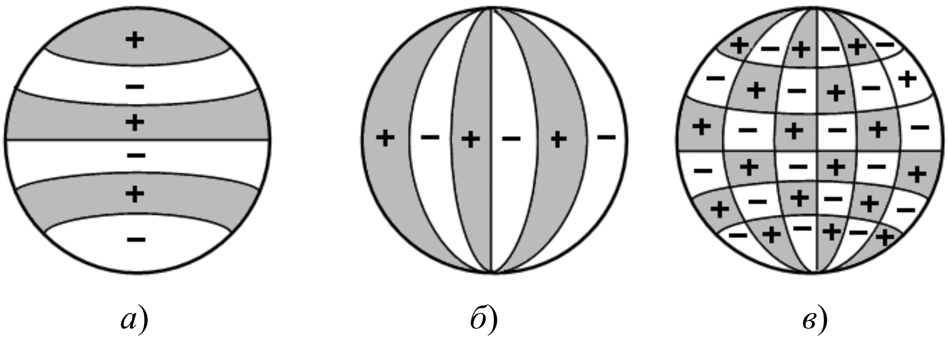


Рис. 20. Области положительных и отрицательных значений:
а) зональных; *б*) секториальных; *в*) тессеральных гармоник потенциала

Вышеприведенная классификация гармоник зависит от значения степени n и порядка m разложения при коэффициентах C_{nm} и S_{nm}, относящихся к конкретной гармонике:

– при $n \neq 0$, $m = 0$ имеем *зональные* гармоники;

– при $n = m$ имеем *секториальные* гармоники;

– при $n \neq m$, $m > 0$ имеем *тессеральные* гармоники.

Все *четные* по n зональные гармоники представляют собой гравитационное влияние на околоземное пространство тел вращения, симметричных относительно земного экватора. Все *нечетные* по n зональные гармоники, являясь телами вращения, имеют симметрию относительно оси вращения Земли, но асимметрию относительно экватора. Широтные зоны, где зональные гармоники имеют положительный знак, соответствуют избытку массы, и наоборот, широтные зоны с отрицательными знаками зональных гармоник соответствуют недостатку массы.

Аналогичное влияние на деформацию гравитационного поля идеальной шарообразной Земли оказывают *секториальные* гармоники, но только их действие происходит в долготном направлении, не меняя при этом полюсов земного шара.

У тессеральных гармоник недостатки (знак «–») и избытки (знак «+») масс от сектора к сектору меняются в шахматном порядке. Отсюда они и получили название *тессеральные*, что по-латыни значит «мозаичные».

Коэффициенты гармонического разложения C_{nm}, S_{nm} различаются в зависимости от модели геопотенциала. Наибольшее влияние на движение спутников оказывает связанный с экваториальным сжатием Земли коэффициент второй зональной гармоники $C_{20} \approx -0{,}001082627$. Максимальное значение возмущающего ускорения от сжатия равно $\ddot{r}_{C_{20}} \approx 5 \cdot 10^{-5}\, \text{см} \cdot \text{с}^{-2}$. Остальные коэффициенты гармоник геопотенциала в тысячи раз меньше и, соответственно, меньше оказываемое ими влияние. Для практического применения гармонические коэффициенты обычно нормируют, увязывая процедуру нормирования с формой присоединенных функций Лежандра [12, 21].

Землю можно представить также в форме совокупности точечных масс. В этом случае ее гравитационный потенциал будет выглядеть следующим образом:

$$U = f \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta m_i}{r_i'}, \tag{173}$$

где δm_i – точечная масса с номером i, r_i' – расстояние от i-й точечной массы до текущего положения спутника, определяемое по формуле

$$r_i' = \sqrt{\left(x_i - x\right)^2 + \left(y_i - y\right)^2 + \left(z_i - z\right)^2}. \tag{174}$$

Координаты точечной массы необходимо будет преобразовать из земной системы координат в небесную.

3.1.2. Влияние лунно-солнечных приливов

В результате притяжения Луны и Солнца на каждый элемент массы Земли действует приливообразующая сила. Эта сила вызывает приливную деформацию в теле Земли, которая в свою очередь приводит к появлению дополнительного возмущающего потенциала. Если пренебречь вращением Земли, то потенциал во внешнем пространстве, вызванный приливом в твердом теле, можно описать формулой [18]:

$$\widehat{R} = \frac{f\mathrm{m}_j}{r_j} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{R_e}{r_j}\right)^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^{n+1} P_n\left(\cos\psi\right), \tag{175}$$

где μ_j, r_j – масса и геоцентрический вектор внешнего j-го тела (Луна или Солнце); f – всемирная гравитационная постоянная; R_e – экваториальный радиус Земли; ψ – угол между направлением на внешнее тело и на точку спутника, в которой вычисляется возмущающий потенциал; k_n – числа Лява, характеризующие упругие свойства Земли. Если учесть вращение Земли и сложность ее строения, то выражение, описывающее приливной потенциал, значительно усложнится.

Влияние приливного потенциала на движение космических аппаратов (КА), описываемое формулой (175), на практике учитывается путем введения поправок в коэффициенты разложения геопотенциала по шаровым функциям [18]. Учет влияния лунно-солнечных приливов в твердом теле Земли производится в два этапа. Сначала в коэффициенты геопотенциала вводятся поправки за статический прилив (поправки «первого шага» [18]):

$$\Delta\overline{C}_{nm} - i\Delta\overline{S}_{nm} = \frac{k_{nm}}{2n+1} \sum_{j=2}^{3} \frac{GM_j}{GM_e} \left(\frac{R_e}{r_j}\right)^{n+1} P_{nm}\left(\sin\Phi_j\right) e^{-im\lambda_j}, \tag{176}$$

где $\Delta\bar{C}_{nm}$ и $\Delta\bar{S}_{nm}$ – поправки в нормированные коэффициенты геопотенциала $\bar{C}_{nm}$ и $\bar{S}_{nm}$.

Здесь

$$\Delta\bar{C}_{nm} = \frac{k_{nm}}{2n+1}\sum_{j=2}^{3}\frac{GM_j}{GM_e}\left(\frac{R_e}{r_j}\right)^{n+1} P_{nm}\left(\sin\Phi_j\right)\cos\left(m\lambda_j\right); \tag{177}$$

$$\Delta\bar{S}_{nm} = \frac{k_{nm}}{2n+1}\sum_{j=2}^{3}\frac{GM_j}{GM_e}\left(\frac{R_e}{r_j}\right)^{n+1} P_{nm}\left(\sin\Phi_j\right)\sin\left(m\lambda_j\right), \tag{178}$$

где k_{nm} – частотно-независимые числа Лява для степени n и порядка m; R_e – экваториальный радиус Земли; GM_e – гравитационный параметр Земли; GM_j – гравитационный параметр Луны (j = 2) или Солнца (j = 3); r_j – геоцентрическое расстояние до Луны или Солнца; Φ_j, λ_j – геоцентрическая широта и восточная долгота Луны или Солнца соответственно. Связь между нормированными и ненормированными коэффициентами геопотенциала осуществляется по формулам:

$$C_{nm} = N_{nm}\bar{C}_{nm}; \qquad S_{nm} = N_{nm}\bar{S}_{nm}; \qquad \bar{P}_{nm} = N_{nm}P_{nm}; \tag{179}$$

где $N_{nm} = \sqrt{\dfrac{(n-m)(2n+1)(2-\delta_{0m})}{(n+m)!}}$; $\quad \delta_{0m} = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 0 & m\neq 0 \end{cases}$.

Расчет поправок по формуле (179) осуществляется для n = 2, 3.

Числа Лява k_{nm} для различных моделей приливов приводятся в бюллетенях IERS (Международная служба вращения Земли и референцных систем) [23].

Поправки «второго шага» определяются (в комплексной форме) следующими соотношениями:

$$\Delta\bar{C}_{2m} - i\Delta\bar{S}_{2m} = \eta_m \sum_{f(2,m)}\left(A_m\delta k_f H_f\right)e^{i\theta_f}; \quad \left(m=1,2\right), \tag{180}$$

где $\eta_1 = -i$, $\eta_2 = 1$.

Выражение (180) в действительной форме имеет вид:

$$\Delta\overline{C}_{2m} = \eta_m \sum_{f(2,m)} \left(A_m \delta k_f H_f\right) \cos\left(\theta_f\right); \tag{181}$$

$$\Delta\overline{S}_{2m} = \eta_m \sum_{f(2,m)} \left(A_m \delta k_f H_f\right) \sin\left(\theta_f\right), \tag{182}$$

где $A_0 = \dfrac{1}{R_e\sqrt{4\pi}}$; $A_m = \dfrac{\left(-1\right)^m}{R_e\sqrt{8\pi}}$, $\left(m \neq 0\right)$; δk_f – разность между числом Лява k_f, соответствующим частоте *f*, и номинальной его величиной; H_f – амплитуда волны с частотой *f* из гармонического разложения приливного потенциала;

$$\theta_f = \overline{n} \cdot \overline{\beta} = \sum_{i=1}^{6} n_i \beta_i ,$$

где $\overline{n}$ – шестимерный вектор множителей переменных Дудсона; $\overline{\beta}$ – шестимерный вектор переменных Дудсона.

Методика учета влияния приливов в твердой коре на положение КА зависит от модели приливов, т. е. в конечном счете от состава учитываемых «волн». Одним из вариантов является следующий: поправки «первого шага» вычисляются по формулам (177), (178) для коэффициентов $C_{20}, C_{21}, C_{22}, S_{21}, S_{22}$.

Поправки «второго шага» в коэффициенты C_{21} и S_{21} вводятся с использованием шести суточных волн ($Q_1, O_1, P_1, K_1, \Psi_1, 165545$), а в коэффициенты C_{22} и S_{22} – с использованием двух полусуточных волн (M_2 и S_2). Здесь числом 165 545 обозначено «число-аргумент» разложения потенциала приливообразующей силы Луны и Солнца в форме гармонического ряда по А. Дудсону.

Влияние океанических приливов на движение КА учитывается посредством введения поправок в коэффициенты геопотенциала согласно следующим соотношениям:

$$\Delta\overline{C}_{nm} - i\Delta\overline{S}_{nm} = F_{nm} \sum_{s(n,m)} \sum_{+}^{-} \left(C_{snm}^{\pm} \mp iS_{snm}^{\pm} \right) e^{\pm i\theta_f} , \tag{183}$$

где

$$F_{nm} = \frac{4\pi G \rho_{\omega}}{g} \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0m})}} \left(\frac{1+k'_n}{2n+1} \right), \tag{184}$$

ρ_{ω}=1025кг $\cdot$ м$^{-3}$ – плотность морской воды; k'_n – коэффициенты деформации нагрузки ($k'_2 = -0,3075$, $k'_3 = -0,195$, $k'_4 = -0,132$, $k'_5 = -0,1032$, $k'_6 = -0,0892$); $C_{snm}^{\pm}$, $S_{snm}^{\pm}$ – коэффициенты разложения для океанического прилива (модель Швидерски [23]).

Формулу (182) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta\overline{C}_{nm} &= F_{nm} \sum_{s(n,m)} \left[\left(C_{snm}^{+} + C_{snm}^{-} \right) \cos\theta_f + \left(S_{snm}^{+} + S_{snm}^{-} \right) \sin\theta_f \right]; \\ \Delta\overline{S}_{nm} &= F_{nm} \sum_{s(n,m)} \left[\left(S_{snm}^{+} + S_{snm}^{-} \right) \cos\theta_f + \left(C_{snm}^{+} - C_{snm}^{-} \right) \sin\theta_f \right]. \end{aligned} \tag{185}$$

Количество исправляемых коэффициентов геопотенциала, а также число учитываемых волн зависит от выбранной модели приливов.

Например, поправки за влияние океанического прилива вводятся в коэффициенты геопотенциала C_{nm} (n = 2, .., 6; m = 0, 1, 2) и S_{nm}(n = 2, .., 6; m = 1, 2). При этом учитывается влияние одиннадцати волн (S_{sa}, M_m, M_f , Q_1, O_1, P_1, K_1, N_2, M_2, S_2, K_2).

Влияние приливных факторов убывает с высотой полета ИСЗ.

В табл. 1 приведены результаты исследования влияния приливов на ИСЗ для трех различных классов орбит [18].

Значения Δr, приведенные в табл. 1, есть модули разностей двух геоцентрических векторов ИСЗ, рассчитанных на один и тот же момент времени, один из которых получен при учете возмущающего фактора, а другой – без его учета, т. е.: $\Delta \mathrm{r} = \left| \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \right|$, где r_2 – геоцентрический вектор ИСЗ, вычисленный без учета возмущения; r_1 – тот же вектор, вычисленный с учетом возмущений. Величины a, e, i есть номинальные значения большой полуоси, эксцентриситета и наклонения орбиты соответственно.

Таблица 1

Влияние приливов на положение искусственного спутника Земли

ИСЗ системы GPS a = 26 560 км; e = 0,013; i = 55°					
Интервал интегрирования Δt, ч	12	36	60	84	120
Количество оборотов КА за Δt	1	3	5	7	10
Влияние прилива в твердой коре $\Delta r1$, м	0,288	0,297	0,543	0,214	0,578
Влияние океанического прилива $\Delta r2$, м	0,048	0,224	0,378	0,486	0,446
Совместное влияние $\Delta r3$, м	0,233	0,354	0,335	0,366	0,958
ИСЗ системы ГЛОНАСС a = 25 510 км; e = 0,000 2; i = 64,7°					
Интервал интегрирования Δt, ч	11,3	33,9	56,5	79,1	113
Количество оборотов КА за Δt	1	3	5	7	10
Влияние прилива в твердой коре $\Delta r1$, м	0,139	0,315	0,413	0,672	1,519
Влияние океанического прилива $\Delta r2$, м	0,115	0,254	0,344	0,431	0,824
Совместное влияние $\Delta r3$, м	0,201	0,363	0,245	0,373	1,069
ИСЗ LAGEOS a = 12 200 км; e = 0,005; i = 109,8°					
Интервал интегрирования Δt, ч	3,8	11,4	57	95	133
Количество оборотов КА за Δt	1	3	15	25	35
Влияние прилива в твердой коре $\Delta r1$, м	0,428	1,693	3,962	5,692	7,931
Влияние океанического прилива $\Delta r2$, м	0,037	0,102	0,153	0,260	0,414
Совместное влияние $\Delta r3$, м	0,407	1,660	3,999	6,524	8,136

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что хотя воздействие приливов на движение КА ослабевает с высотой, все же приливные факторы оказывают достаточно существенное влияние даже на «высокие» орбиты (GPS, ГЛОНАСС). Поэтому их обязательно нужно учитывать при обработке высокоточных траекторных измерений спутников ГЛОНАСС и GPS.

3.1.3. Притяжение спутника Луной и Солнцем

При учете возмущений от Луны и Солнца считают, что спутник не оказывает гравитационного воздействия на другие небесные тела, т. е. имеет нулевую массу. Отдельно рассматривают две системы трех материальных точек: «спутник – Земля – Луна» и «спутник – Земля – Солнце» (рис. 21).

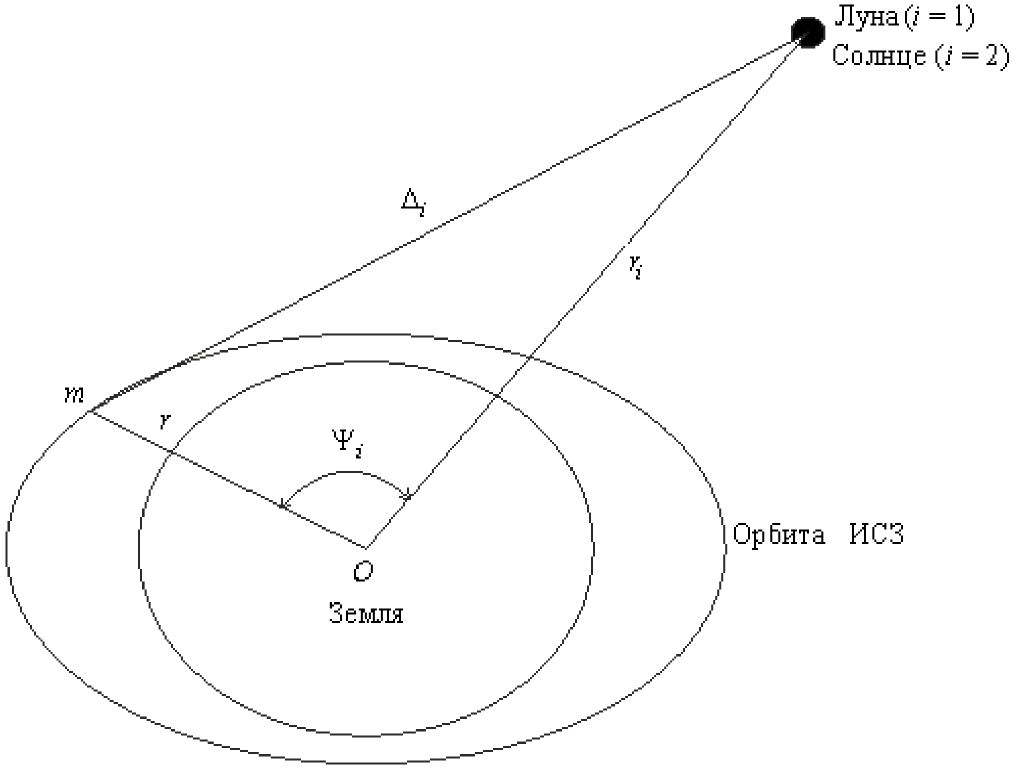


Рис. 21. Геометрия ограниченной задачи трех тел

При таком ограничении на массу спутника в каждой из приведенных систем «спутник – Земля – Луна» и «спутник – Земля – Солнце» движение спутника определяется из решения *ограниченной задачи трех тел.* Возмущающая функция R_i в такой задаче определяет возмущения нулевой массы (спутника) и имеет вид

$$R_i = \mu_i \left(\frac{1}{\Delta_i} - \frac{r}{r_i^2} \cos \Psi_i \right). \tag{186}$$

Здесь индекс i принимает значение 1 для Луны и 2 – для Солнца. Величина μ_i является гравитационным параметром соответствующего небесного тела ($\mu_1 = 4,903 \cdot 10^3 \text{км}^3/\text{с}^2$; $\mu_2 = 1,32718 \cdot 10^{11} \text{км}^3/\text{с}^2$); r – геоцентрическое расстояние спутника; r_i – геоцентрическое расстояние до Солнца или Луны; Δ_i – расстояние между спутником и небесным телом. Величина Ψ_i является углом между геоцентрическими направлениями на спутник и на небесное тело.

Характер возмущающего действия на спутник Луны или Солнца аналогичен действию геопотенциала. Они вызывают вековые возмущения в угловых элементах и долгопериодические во всех элементах, кроме большой полуоси; короткопериодические возмущения имеются во всех элементах. Чем дальше от Земли располагается орбита спутника, тем сильнее гравитационное влияние на него Луны и Солнца. Например, совместное влияние Луны и Солнца на изменение положения спутника LAGEOS (a = 12 200 км) на интервале интегрирования 5 суток равно 844 м, а на таком же интервале интегрирования изменение положения спутников системы ГЛОНАСС (a = 25 510 км) уже равно около 3 500 м [18]. На высотах полета спутника более 30 тыс. км возмущающее влияние Луны и Солнца становится равнозначным суммарному влиянию аномалий гравитационного поля Земли, а начиная с 50 тыс. км, действие Луны и Солнца однозначно превосходит влияние всех остальных возмущающих сил.

Вектор возмущающего ускорения от гравитационного влияния на спутник Луны или Солнца $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ в небесной системе координат имеет вид

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \begin{pmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{z}_i \end{pmatrix} = \mu_i \begin{pmatrix} \dfrac{X_i - x}{\Delta_i^3} - \dfrac{X_i}{r_i^3} \\ \dfrac{Y_i - y}{\Delta_i^3} - \dfrac{Y_i}{r_i^3} \\ \dfrac{Z_i - z}{\Delta_i^3} - \dfrac{Z_i}{r_i^3} \end{pmatrix}, \qquad (187)$$

где X_i, Y_i, Z_i – координаты Луны или Солнца; *x, y, z* – координаты спутника;

$$r_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2};$$

$$\Delta_i = \sqrt{\left(x - X_i\right)^2 + \left(y - Y_i\right)^2 + \left(z - Z_i\right)^2}.$$

Как видно из формулы (187), точность расчета возмущающих ускорений зависит от точности вычисления координат векторов $\boldsymbol{R_i}$ (координат Луны, Солнца, планет), которые в свою очередь могут быть получены с использованием различных эфемерид.

До 1984 г. эфемериды были основаны на аналитических теориях. К таким относятся, например, эфемериды Ньюкома – Брауна – Эккерта, использующие тригонометрические разложения Брауна – Эккерта для Луны и Ньюкома для Солнца. Начиная с 2003 г. для расчета положений планет и Луны в «Астрономическом альманахе» (The Astronomical Almanac) применяются численные эфемериды DE405/LE405, созданные в Лаборатории реактивного движения (JPL) Калифорнийского технологического института (Caltech) США. Модель DE405/LE405 является результатом улучшения предыдущих эфемерид по методу наименьших квадратов с помощью различных данных наблюдений (измерений) с последующим численным интегрированием дифференциальных уравнений движения. Системой отсчета для эфемерид DE405/LE405 является Международная небесная отсчетная основа ICRF.

В свою очередь, в России, в Институте прикладной астрономии РАН, была создана и поддерживается серия эфемерид планет и Луны EPM (Ephemerides of Planets and the Moon). Эти эфемериды получены численным интегрированием в барицентрической системе координат на интервале

1880–2020 гг. В динамической модели эфемерид EPM 2004 учитываются взаимные возмущения движения больших планет и Луны в рамках общей теории относительности (ОТО), эффекты, связанные с физической либрацией Луны, возмущения от 301 крупнейшего астероида, а также динамические возмущения от сжатия Солнца и массивного астероидного кольца с однородным распределением массы в плоскости эклиптики. Эфемериды EPM 2004 были улучшены по результатам более чем 317 000 позиционных наблюдений (1913–2003 гг.) разных типов, включая радиометрические измерения положений планет и космических аппаратов, астрометрические наблюдения внешних планет и их спутников, меридианные и фотографические наблюдения. Последняя версия эфемерид – EPM 2006 – получена по данным почти полумиллиона различных наблюдений, проведенных в 1913–2005 гг. Эфемериды серии EPM, как и DE405/LE405, отнесены к системе ICRS и представлены с помощью полиномов Чебышева. Аргументом эфемерид EPM является барицентрическое динамическое время TDB. В настоящее время эфемериды EPM и DE/LE являются наиболее завершенными динамическими моделями планетного движения.

При практическом использовании эфемерид Луны и Солнца возникает проблема выбора оптимальной модели учета гравитационного влияния Луны и Солнца на движение космического аппарата в зависимости от точности вычислений и типа орбиты КА.

Результаты экспериментов, приведенные в работе [18], показывают, что различия в положении КА, обусловленные использованием различных эфемерид Луны и Солнца, невелики. Поэтому аналитические эфемериды Ньюкома – Брауна – Эккерта вполне можно использовать при обработке измерений относительно невысокой точности, характеризующейся погрешностью порядка 2–5 м (например, кодовых псевдодальностей). Для обработки измерений высокой точности, например, фазовых ГНСС-измерений, следует использовать современные численные эфемериды Луны и Солнца.

3.1.4. Влияние прямого солнечного излучения

Возмущающее ускорение спутника, вызываемое давлением солнечной радиации, может быть описано формулой [12]

$$\ddot{\mathbf{r}}_{SRP} = \nu \cdot k \frac{C_R \cdot a}{m} \left[\frac{A_\upsilon}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R_S}|} \right]^2 \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R_S}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R_S}|}, \qquad (188)$$

где ν – функция тени Земли ($\nu = 1$, если спутник освещен; $\nu = 0$, когда спутник находится в тени Земли; $0<\nu<1$, когда спутник находится в полутени); k – солнечная постоянная; C_R – коэффициент отражения поверхности спутника, a – миделево сечение; m – масса спутника; A_υ – астрономическая единица; $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{R_S}$ – геоцентрические радиус-векторы спутника и Солнца соответственно.

Теоретически возможны три случая воздействия световой энергии на спутник: поверхность спутника полностью поглощает световую энергию; часть фотонов зеркально отражается от поверхности спутника; солнечная энергия диффузно отражается от поверхности спутника. В реальности всё намного сложнее.

Моделирование этих возмущений чрезвычайно трудное, поскольку солнечная радиация изменяется непредсказуемо в течение года, а коэффициент отражения неодинаков для разных участков поверхности спутника. Хотя масса спутника на орбите обычно хорошо известна, неправильная форма спутника не позволяет точно определять отношение массы к площади. Другая проблема – это моделирование полутени Земли и назначение теневой функции, особенно в зоне перехода от освещенности к тени.

Главная трудность при моделировании эффекта радиационного давления для спутников связана с вычислением величины $C_R \cdot a$, которая сложным образом зависит от формы спутника, его солнечных батарей, используемых внешних покрытий и его положения в пространстве. Так, для спутников системы GPS в центре Rockwel были разработаны стандартные модели, известные как ROCK41 и ROCK42.

В данных моделях детально учитывались конструктивные особенности спутников. Способ учета заключался в том, что поверхность спутника разбивалась на множество кусочных элементов, по которым производилось суммирование. Модели, полученные таким образом, представляют собой компоненты силы в системе координат, связанной с корпусом ИСЗ.

Позднее модели совершенствовались, но все равно для достижения высокой точности прогнозирования орбит приходилось применять эмпирические методы, связанные с оцениванием коэффициентов моделей по результатам траекторных измерений. Недостатком эмпирических методов является то, что эмпирические коэффициенты имеют тенденцию поглощать любые немоделируемые эффекты, влияющие на орбиту ИСЗ. Данное обстоятельство затрудняет понимание физических механизмов, влияющих на определение истинной траектории. В целом, задача создания адекватных моделей учета давления солнечной радиации до конца не решена.

3.1.5. Влияние отраженного солнечного и инфракрасного излучения Земли

Вектор возмущающего ускорения от давления отраженного солнечного и инфракрасного излучения Земли осуществляется в соответствии с формулами [12]:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \frac{1}{r^3}\left[\theta_1 \cos^2\varphi + \nu_2\theta_2 \sin\left(100^\circ - \psi\right)\right]\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{189}$$

где $\theta_1 = k'\dfrac{A}{m}q_2$; $\theta_2 = k''\dfrac{A}{m}q_2$; $\nu_2 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \psi \ge 100^\circ, \\ 1, & \text{если} \quad \psi < 100^\circ, \end{cases}$

где k', k'' – коэффициенты инфракрасного излучения и радиального диффузного отражения Земли (альбедо Земли); φ – геоцентрическая широта КА; ψ – угол между геоцентрическими направлениями на КА и источник излучения; ν_2 – функция тени; q_2 – световое давление в окрестности земной орбиты. Представленная модель является крайне упрощенной.

3.1.6. Влияние сопротивления атмосферы Земли

Применяют следующую формулу возмущающего ускорения спутника из-за влияния сопротивления атмосферы Земли:

$$\ddot{R}_A = \frac{C_D \cdot S}{2m} \rho \vec{\dot{r}} \dot{r}, \tag{190}$$

где C_D – безразмерный аэродинамический коэффициент лобового сопротивления, зависящий от размеров и формы спутника, в среднем его значения принимают равным 2,2; S – площадь поперечного (миделевого) сечения спутника; m – масса спутника; ρ – плотность атмосферы; $\vec{\dot{r}}$ и $\dot{r}$ – вектор скорости спутника относительно атмосферы и его модуль.

Главную сложность при использовании формулы (190) представляет определение плотности атмосферы ρ в каждой точке траектории полета спутника. Она зависит от многих факторов: от неравномерности слоев атмосферы, от временных вариаций плотности (полугодичные, годичные), изменения солнечной активности, влияния магнитных бурь и т. д. В первом приближении изменение плотности атмосферы с высотой можно вычислять по экспоненциальному закону по формуле

$$\rho_1 = \rho_\pi \exp\left(-\frac{h_\pi}{H}\right), \tag{191}$$

где ρ_π – плотность атмосферы в точке перигея; h_π – высота перигея относительно земной поверхности; H – постоянная Больцмана.

Полное выражение для плотности воздуха можно представить так [5, 18]:

$$\rho = \rho_1 + \Delta\rho_\varphi + \Delta\rho_{1/2s} + \Delta\rho_s + \Delta_{1/2g} + \Delta\rho_g + \Delta\rho_{11g} + \Delta\rho_{samb} + \Delta\rho_{hsa}, \tag{192}$$

где $\Delta\rho_\varphi$ – поправка за эллиптичность атмосферных слоев; $\Delta\rho_{1/s}$ и $\Delta\rho_s$ – поправки за полусуточные и суточные вариации плотности; $\Delta\rho_{1/2g}$ и $\Delta\rho_g$ – поправки за полугодичные и годичные вариации плотности; $\Delta\rho_{11g}$ – 11-летние вариации плотности; $\Delta\rho_{samb}$ – поправка, вызванная вариациями солнечной активности и влиянием магнитных бурь; $\Delta\rho_{hsa}$ – поправка за изменение химического состава атмосферы.

На основании общей формулы (192) разработано несколько моделей плотности атмосферы для их практического применения. Среди них отметим: модель Яккиа, учитывающую основные вариации плотности воздуха со временем; модель Барлье, предназначенную для вычисления значений плотности воздуха на высотах 120–1 200 км; модель Хариса – Прейстера, созданную в НАСА и предназначенную для диапазона высот 120–800 км. Из отечественных моделей отметим модель ГОСТ 22721–77, разработанную в ИКИ АН СССР на основании наблюдений спутников серии «Космос» и предназначенную для использования на высотах 140–500 км. На базе модели Хариса – Прейстера в НАСА затем была разработана модель NRLMSISE-00 для применения на высотах 120–1 500 км [5].

Учет влияния сопротивления атмосферы особенно важен для низкоорбитальных спутников, например, для спутников дистанционного зондирования земной поверхности. Под влиянием фактора сопротивления атмосферы большая полуось орбиты постоянно уменьшается, форма орбиты округляется. Этот фактор влияет на продолжительность жизни спутников. Из-за сопротивления атмосферы энергия спутника уменьшается, он снижается и на высотах 110–120 км входит в достаточно плотные слои атмосферы и прекращает свое существование.

Сложность учета возмущения орбиты спутника от сопротивления атмосферы явилась одной из причин проектирования орбит спутников ГНСС второго поколения на такой высоте полета, на которой атмосфера не оказывает никакого влияния на их орбиты [8].

3.1.7. Влияние релятивистских эффектов

Влияние релятивистских эффектов обусловлено относительно высокой скоростью движения спутников по орбитам, порядка нескольких километров в секунду. В векторном виде релятивистское возмущающее ускорение записывается так [18]:

$$\ddot{R}_{rel} = \frac{\mu}{c^2 r^3}\left[\left(4\frac{\mu}{r} - V^2\right)\boldsymbol{r} + 4r\dot{r}\dot{\boldsymbol{r}}\right], \tag{193}$$

где c – скорость света; V – скорость спутника; r – геоцентрическое расстояние; $\dot{r}$ – радиальная скорость; $\dot{\boldsymbol{r}}$ – вектор радиальной скорости; $\ddot{\boldsymbol{r}}$ – вектор радиального ускорения.

3.1.8. Учет активных сил

Под активными силами обычно подразумеваются реактивные силы, возникающие при работе корректирующих двигателей спутника. Активные силы относятся к возмущающим факторам, регулируемым человеком, их влияние можно предсказать. Возмущающие ускорения, возникающие при действии активных сил, представляют в виде проекций на оси системы координат, используемой в дифференциальных уравнениях возмущенного движения спутника. Включение компонент активных сил в состав оцениваемых параметров позволяет компенсировать некоторые эффекты, связанные с неадекватностью модели движения спутника [18].

3.1.9. Сравнительное влияние некоторых возмущающих сил

В заключение данного подраздела приведем сводную таблицу возмущающего влияния на спутники «Ларец», LAGEOS и ГЛОНАСС некоторых возмущающих сил [12] на интервале за один виток. Характерной особенностью этих спутников является разная высота полета, что позволяет оценить влияние возмущающих факторов в зависимости от удаления от земной поверхности.

Таблица 2

Сравнительное влияние некоторых возмущающих сил (в метрах)

Спутники	«Ларец» a = 782 2 км e = 0,001 1	LAGEOS a = 122 71 км e = 0,013 8	ГЛОНАСС a = 255 08 км e = 0,000 6
Вторая зональная гармоника	40 035	23 467	13 184
Притяжение Луны	8,4	50,9	1 044
Притяжение Солнца	4,1	21,8	496,5
Лунный прилив	1,4	0,15	0,20
Солнечный прилив	0,27	0,08	0,21
Световое давление	0,04	0,51	7,50
Релятивистское ускорение	0,17	0,16	0,17

3.2. Дифференциальные уравнения возмущенного движения спутников

Суммарное влияние на движение спутника учтенных возмущающих сил $\boldsymbol{F}_{\text{возм}}$ определяется по формуле

$$\boldsymbol{F}_{\text{возм}} = \sum\nolimits_1^n \boldsymbol{F}_i, \tag{194}$$

где n – число всех учтенных возмущающих сил.

В соответствии со вторым законом динамики

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\text{возм}} = \boldsymbol{F}_{\text{возм}} / m, \tag{195}$$

где m – масса спутника; $\ddot{\boldsymbol{r}}_{\text{возм}}$ – суммарное возмущающее ускорение, которое с учетом его проекций $\ddot{x}_{\text{возм}}, \ddot{y}_{\text{возм}}, \ddot{z}_{\text{возм}}$ на оси инерциальной системы координат можно записать в виде $\ddot{\boldsymbol{r}}_{\text{возм}}\left(\ddot{x}_{\text{возм}}, \ddot{y}_{\text{возм}}, \ddot{z}_{\text{возм}}\right)$.

Тогда дифференциальные уравнения возмущенного движения спутника в векторной форме могут быть получены из формулы (13), а в координатной форме – из формулы (16), и будут иметь вид

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \ddot{\boldsymbol{r}}_{\text{возм}} \tag{196}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu\frac{x}{r^3} &= \ddot{x}_{\text{возм}}; \\ \ddot{y} + \mu\frac{y}{r^3} &= \ddot{y}_{\text{возм}}; \\ \ddot{z} + \mu\frac{z}{r^3} &= \ddot{z}_{\text{возм}}. \end{aligned} \tag{197}$$

При изучении возмущенного движения используется *принцип Лагранжа*, согласно которому возмущенное движение спутника происходит по орбите, элементы которой изменяются со временем. Это означает, что в каждый момент времени возмущенная орбита совпадает с некоторой невозмущенной орбитой, имеющей с ней общие радиус-вектор спутника $\boldsymbol{r}$ и вектор скорости $\boldsymbol{V}$. Такие орбиты называют *оскулирующими орбитами*, а элементы орбит – *оскулирующими элементами.*

Вектор возмущающего ускорения $\ddot{\boldsymbol{r}}_{\text{возм}}$ может быть представлен в виде суммы векторов ускорений от сил, имеющих потенциал U, и не имеющих его $\ddot{\boldsymbol{r}}'_{\text{возм}}$:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\text{возм}} = \ddot{\boldsymbol{r}}'_{\text{возм}} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{198}$$

Функция U называется *возмущающим потенциалом*, или пертурбационной (возмущающей) функцией. К потенциальным силам относятся силы, имеющие гравитационную природу, например, притяжение спутника Землей, Луной, Солнцем, планетами; влияние лунно-солнечных приливов. Возмущающие потенциалы, как правило, аппроксимируются в виде разложения в ряды.

Вектор $\ddot{\boldsymbol{r}}'_{\text{возм}}$ является вектором возмущающего ускорения от непотенциальных (или поверхностных) сил. К таким силам относятся сила сопротивления атмосферы, давление прямой и отраженной солнечной радиации, давление инфракрасного излучения и т. д. Для таких сил вектор $\ddot{\boldsymbol{r}}'_{\text{возм}}$ представляется, как правило, в виде конечной формулы.

С учетом (198) уравнение (196) можно записать в виде

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \ddot{\boldsymbol{r}}_{\text{возм}} + \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{199}$$

Если известны элементы орбиты на некоторый начальный момент t_0, которые называют *начальными условиями движения*, и имеется *модель возмущающих сил*, то после определения возмущающих ускорений и подстановки их в уравнение (199) последние можно решить *аналитическим или численным методом* [5, 12, 21].

Подробно методы интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения спутников рассмотрены в следующем разделе учебного пособия.

Система дифференциальных уравнений (197) предполагает получение решения для шести неизвестных – координат спутника x, y, z и составляющих скорости его движения $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, которые являются так называемыми *быстрыми переменными*, что усложняет процесс интегрирования системы (197), поэтому вместо такой системы на практике используют системы дифференциальных уравнений с другим набором переменных. В качестве такого набора хорошо подходят шесть кеплеровых элементов, из которых пять элементов – *большая полуось, эксцентриситет, наклонение орбиты, долгота восходящего узла и аргумент перигея* – с течением времени изменяются медленно, и только *средняя аномалия*, а также связанные с ней *истинная и эксцентрическая аномалии* изменяются быстро.

Такое преобразование системы (197) впервые было получено Лагранжем [12, 21]. Он понизил порядок дифференцирования системы со второго на первый и заменил отыскиваемые величины из координатной формы на кеплеровые элементы орбиты. В итоге Лагранж получил следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{e} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \dfrac{\partial R}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial R}{\partial M} \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{\omega} \\ \dot{M} - n \end{pmatrix} = -L^T \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial a} \\ \dfrac{\partial R}{\partial e} \\ \dfrac{\partial R}{\partial i} \end{pmatrix}. \tag{200}$$

Буквой L обозначена матрица Лагранжа, которая имеет вид

$$L = \frac{1}{\sqrt{\mu a}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2a \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e} & \dfrac{1-e^2}{e} \\ \dfrac{1}{\sin i\sqrt{1-e^2}} & \dfrac{1}{\mathrm{tg} i\sqrt{1-e^2}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{201}$$

Уравнения Лагранжа описывают возмущенное движение спутника для случая, когда возмущающая функция имеет потенциальную природу. Для того чтобы учитывать также возмущения от других сил, например, от солнечного излучения или сопротивления атмосферы, нужен был другой путь. Для этого в системе (199) частные производные от потенциальной функции U или R (как обозначено в системе Лагранжа) по координатам заменяют на частные производные от составляющих возмущающего ускорения $\ddot{R}_x$, $\ddot{R}_y$, $\ddot{R}_z$ по осям небесной системы координат и решают систему уравнений (199) относительно производных $\dfrac{dE_j}{dt}$, где j – порядковый номер кеплерова элемента орбиты. Затем от составляющих возмущающего ускорения $\ddot{R}_x, \ddot{R}_y, \ddot{R}_z$ по осям небесной системы координат переходят к составляющим ускорения *S, T, W* орбитальной системы координат (рис. 22).

Ось S орбитальной системы координат направлена по геоцентрическому радиусу-вектору спутника (*радиальная* составляющая), ось T лежит в плоскости орбиты и направлена перпендикулярно оси в сторону движения спутника (*трансверсальная* составляющая), ось W дополняет систему до правой и направлена перпендикулярно плоскости орбиты (*тангенциальная* составляющая). Орбитальная система координат *S, T, W* является подвижной, ее начало находится в центре масс спутника.

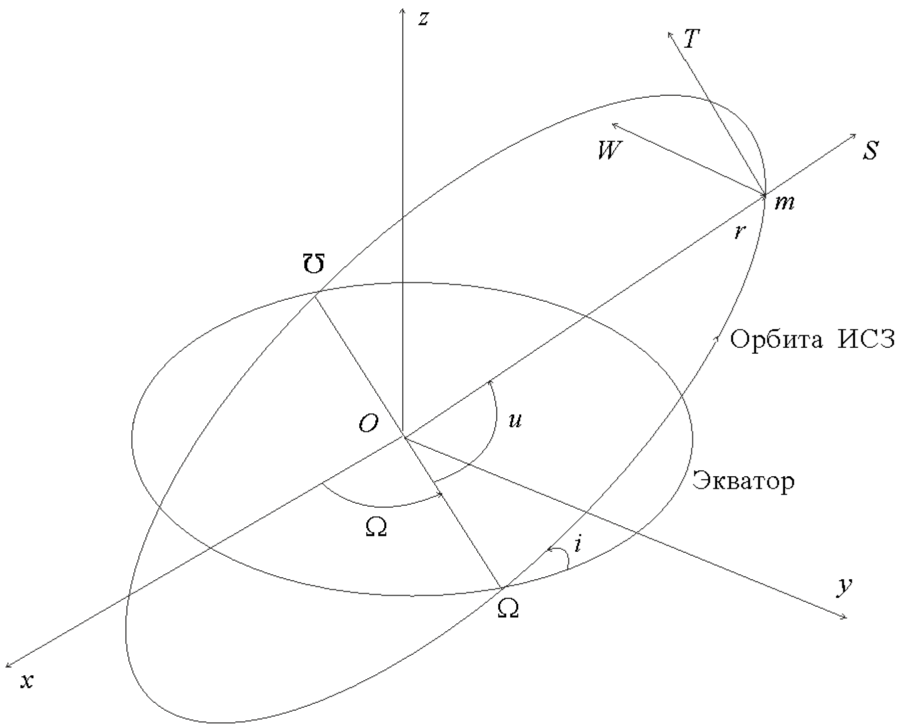


Рис. 22. Подвижная орбитальная система координат *S*, *T*, *W*

Переход от небесной системы системы координат x, y, z к подвижной орбитальной системе координат S, T, W осуществляется тремя матрицами вращения

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = R_3(u)R_1(i)R_3(\Omega)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{202}$$

обратный переход осуществляется по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-u)\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix}. \tag{203}$$

Связь между составляющими возмущающего ускорения $\ddot{R}_x, \ddot{R}_y, \ddot{R}_z$ по осям небесной системы координат и составляющими возмущающего ускорения по осям орбитальной системы координат S, T, W определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} & \dfrac{\partial\beta}{\partial u} & \dfrac{\partial\gamma}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\alpha}{\sin u \partial i} & \dfrac{\partial\beta}{\sin u \partial i} & \dfrac{\partial\gamma}{\sin u \partial i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{R}_x \\ \ddot{R}_y \\ \ddot{R}_z \end{pmatrix}, \tag{204}$$

где направляющие косинусы α, β, γ вычисляются по формулам:

$$\alpha = \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i;$$
$$\beta = \sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i;$$
$$\gamma = \sin u\sin i.$$

В результате была получена система *уравнений Ньютона – Эйлера*, где в качестве определяемых используются кеплеровы элементы орбиты и их простые функции [12]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Omega}{dt} = W\frac{r}{\sqrt{\mu p}}\cdot\frac{\sin u}{\sin i};\\
&\frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}}rT;\\
&\frac{di}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}}W\cos u;\\
&\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin v + \left(1+\frac{r}{p}\right)T\cos v + e\frac{r}{p}T\right];\\
&\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-\frac{1}{e}S\cos v + \frac{1}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)T\cos v + \frac{r}{p}W\operatorname{ctg} i\sin u\right];\\
&\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[\frac{S}{e}\cos v - \left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{T}{e}\sin v\right],
\end{aligned}\right\}\tag{205}$$

где S, T, W – проекции вектора возмущающего ускорения $\ddot{\boldsymbol{r}} = \{S, T, W\}$ на оси орбитальной системы координат, в которой ось S направлена по радиус-вектору, ось T – по трансверсали и ось W – по бинормали к орбите; μ – гравитационный параметр Земли.

Рассмотрим простой пример использования орбитальной системы координат в случае возмущающего воздействия на спутник только второй зональной гармоники разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям (168). Возмущающая функция от сжатия Земли, соответствующая второй зональной гармонике C_{20}, записывается в виде

$$U_{20} = \mu\, C_{20}\frac{a_E^2}{2r^3}\left(3\sin^2\varphi - 1\right).\tag{206}$$

Возмущающие ускорения S, T, W от сжатия Земли представляются выражениями:

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{3\,C_{20}\mu\, a_E^2}{2r^4}\left(3\sin^2 u\sin^2 i - 1\right);\\
T &= \frac{3\,C_{20}\mu\, a_E^2}{2r^4}\sin u\cos u\sin^2 i;\\
W &= \frac{3\,C_{20}\mu\, a_E^2}{2r^4}\sin 2u\sin^2 i.
\end{aligned}\tag{207}$$

После подстановки S, T, W в систему уравнений Ньютона – Эйлера (205) и интегрирования ее в первом приближении при условии, что все элементы постоянны за исключением рассматриваемого, в трех элементах получаем возмущения, связанные со временем или аргументом широты u:

$$\delta\Omega = \frac{3}{2} C_{20} \cos i \left(\frac{a_E}{p}\right)^2 \left\{ u - \frac{1}{2}\sin 2u + e\left[\sin(u-) - \frac{1}{2}\sin(u+\omega) - \frac{1}{6}\sin(3u-\omega)\right]\right\}; \quad (208)$$

$$\delta p = -\frac{3C_{20}a_E^2 \sin^2 i}{2p}\left\{\cos 2u + e\left[\cos(u+\omega) + \frac{1}{3}\cos(3u-\omega)\right]\right\}; \quad (209)$$

$$\delta i = -\frac{3C_{20}\sin 2i}{8}\left(\frac{a_E}{p}\right)^2\left\{\cos 2u + e\left[\cos(u+\omega) + \frac{1}{3}\cos(3u-\omega)\right]\right\}; \quad (210)$$

$$\begin{aligned}\delta e = -\frac{3C_{20}}{2}\left(\frac{a_E}{p}\right)^2 \Bigg\{ & -\left(1+\frac{e^2}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\sin^2 i - 1\right)\cos(u-\omega) + \\ & +\frac{1}{4}\left(1+\frac{11}{4}e^2\right)\sin^2 i\cos(u+\omega) + \frac{1}{12}\left(7+\frac{17}{4}e^2\right)\sin^2 i\cos(3u-\omega) + e[\ldots]\Bigg\};\end{aligned} \quad (211)$$

$$\delta\omega = -\frac{3C_{20}}{2}\left(\frac{a_E}{p}\right)^2\left[\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)u + \ldots\right]; \quad (212)$$

$$\delta M_0 = -\frac{3C_{20}}{4}\left(\frac{a_E}{p}\right)^2 \frac{(3\cos^2 i - 1)u}{(1-e^2)^{3/2}} + \ldots. \quad (213)$$

В формулах (208), (212) и (213) имеются возмущения, линейно связанные с аргументом широты u. Такие возмущения называют *вековыми*, а указанные три элемента (долготу Ω, аргумент перигея ω и начальное значение средней аномалии M_0) в теории возмущений называют *угловыми элементами*. Возмущения, вызванные сжатием Земли, приводят к вращению плоскости орбиты относительно оси вращения Земли (прецессия орбиты) и вращению орбитального эллипса в плоскости орбиты. В *позиционных элементах*, к которым относят наклонение i, эксцентриситет e и фокальный параметр p, имеются только короткопериодические возмущения от сжатия.

В первые годы работы GPS в модели Земли набор коэффициентов до 8-го порядка и степени считался достаточным для спутников этой ГНСС на дугах в несколько оборотов. Однако в дальнейшем для определения точных орбит было рекомендовано использование гравитационной модели Земли EGM2008 до 70-го порядка и степени разложения.

Недостатком системы (205) является наличие особенностей для круговых ($e = 0$) и экваториальных ($i = 0^\circ$; $i = 180^\circ$) орбит.

Профессором Ю. В. Сурниным в 1973 г. было предложено использовать вместо кеплеровых элементов другие переменные, получившие название *регулярных элементов* [18]:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(p, g, h, f, q, l), \tag{214}$$

где составляющие вектора $\boldsymbol{Y}$ являются функциями кеплеровых элементов:

$$\left.\begin{aligned}
&p = a\left(1-e^2\right); && f = \left(\operatorname{tg}\frac{i}{2}\right)^{\delta}\sin\Omega;\\
&g = e\cdot\sin(\omega+\delta\Omega); && q = \left(\operatorname{tg}\frac{i}{2}\right)^{\delta}\cos\Omega;\\
&h = e\cdot\cos(\omega+\delta\Omega); && l = \omega+\delta\Omega+\vartheta,
\end{aligned}\right\} \tag{215}$$

где $\delta = \begin{cases} +1, & \text{если } \cos i_0 \ge 0;\\ -1, & \text{если } \cos i_0 \le 0.\end{cases}$

Значение i_0 в формуле (207) соответствует заданным начальным условиям движения спутника в начальный момент t_0.

Система дифференциальных уравнений движения с начальными условиями, записанная в регулярных элементах, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp}{dt} = 2r\tilde{T};\\
&\frac{dq}{dt} = \left[\left(1+H\right)\sin l + gH\right]\tilde{T} - \tilde{S}\cos l + G\tilde{W}h;\\
&\frac{dh}{dt} = \left[\left(1+H\right)\cos l + hH\right]\tilde{T} + \tilde{S}\sin l - G\tilde{W}g;\\
&\frac{df}{dt} = H\chi\tilde{W}\sin l;\\
&\frac{dq}{dt} = H\chi\tilde{W}\delta\cos l;\\
&\frac{dl}{dt} = \frac{\mu}{r^2}K + G\tilde{W};
\end{aligned}\right\} \qquad (216)$$

$$\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0 = (p_0, g_0, h_0, f_0, q_0, l_0)\,,$$

где

$$\tilde{S} = KS\,,\ \tilde{T} = KT\,,\ \tilde{W} = KW;$$

$$K = \sqrt{\frac{p}{\mu}};\ H = \frac{r}{P};\ G = H\left(\delta q\sin l - f\cos l\right); \qquad (217)$$

$$\chi = \frac{1}{2}\left(1 + f^2 + q^2\right);\ r = \frac{p}{1 + h\cos l + g\sin l};$$

угол l берется по модулю 2π.

Очевидно, что система (216) не содержит особенностей для круговых ($e = 0^{\circ}$) и экваториальных орбит с прямым ($i = 0^{\circ}$) и обратным ($i = 180^{\circ}$) движением, присущих системе обыкновенных дифференциальных уравнений (205) для кеплеровых элементов.

Помимо вышеприведенных систем дифференциальных уравнений для прогнозирования возмущенного движения спутников применяются также другие системы.

3.3. Контрольные вопросы

1. Виды возмущений в орбитах ИСЗ.

2. Дифференциальные уравнения (ДУ) возмущенного движения. Отличие от ДУ невозмущенного движения.

3. Возмущения от сжатия Земли: на какие элементы орбиты они влияют и каким образом?

4. Поясните смысл вековых, долгопериодических, короткопериодических и резонансных возмущений от аномалий гравитационного поля Земли.

5. Как можно определить сжатие Земли по возмущениям в орбитах ИСЗ?

6. От каких параметров зависят значения возмущений, разобранных в теоретической части работы? Проанализировать формулы.

7. Чем обусловлен выбор элементов орбиты спутников ГЛОНАСС и GPS?

8. В чем состоит суть метода Лагранжа?

9. Понятие оскулирующих элементов орбиты.

10. В чем состоит особенность системы дифференциальных уравнений Ньютона – Эйлера?

11. В чем основное достоинство регулярных элементов, предложенных Ю. В. Сурниным и системой дифференциальных уравнений, записанной в регулярных элементах?

4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКОВ

4.1. Постановка задачи

Прогнозирование реального движения спутника с учетом действующих на него возмущающих сил осуществляется путем решения дифференциальных уравнений возмущенного движения. Как было показано в разд. 3.2, для практического применения в основном используют системы дифференциальных уравнений первого порядка, при этом набор отыскиваемых параметров орбиты $\boldsymbol{E}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, 6$) может быть различным. Кеплеровы элементы орбиты входят в число отыскиваемых параметров орбиты непосредственно или опосредованно в качестве аргументов вновь вводимых параметров орбиты.

Конечной целью прогнозирования возмущенного движения спутника является определение его координат в заданные моменты времени $\boldsymbol{t_i}$, которые могут быть использованы для решения задач геодезии. Определение же скорости движения спутника является сопутствующей задачей. Примером применения прогнозирования возмущенного движения спутников можно назвать ГНСС 2-го поколения, в которых спутник является носителем координат в режиме реального времени.

Рассмотрим порядок реализации задачи прогнозирования возмущенной орбиты на интервале времени $[t_0, t]$. Пусть начальные условия (НУ) для решения этой задачи в отправной момент времени t_0 заданы в виде набора начальных значений параметров орбиты $E_{i0}(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Начальные условия движения могут быть заданы и в координатной форме $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$. Но, рассматривая *мгновенную* орбиту в момент t_0 как *оскулирующую*, пересчет НУ из координатной формы в параметры орбиты не составит труда.

Представим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения в общем виде формулой

$$\dot{E}_j = f_j(E_1,...,E_6,t),\ j=1,2,...,6) \tag{218}$$

с начальными условиями $E_{10},...,E_{60},t_0$.

Решение системы (218) можно записать так:

$$E_j = E_{j0} + \int\limits_{t_0}^{t} f_j(E_1,...,E_6,t)\,dt,\ j=1,2,...,6. \tag{219}$$

В результате последовательного взятия интегралов в (219) получаем изменения δE_j параметров орбиты на временном интервале $[t_0,t]$. Прибавляя их к начальным значениям, получаем значения параметров на заданный момент времени *t*:

$$E_j = E_{j0} + \delta E_j,\ j=1,2,...,6. \tag{220}$$

По значениям E_j нетрудно получить координаты спутника *x*, *y*, *z*.

Подинтегральные функции в (219) включают в себя формулы моделей возмущающих ускорений, учитываемых при прогнозировании движения спутников, вследстие этого они имеют сложный вид, поэтому интегралы в (219) не берутся. На практике их аппроксимируют в виде бесконечных рядов, длина которых зависит от требуемой точности прогнозирования и от методического подхода. Различают два подхода – *аналитический* и *численный*, принципиальные особенности которых и различия между ними рассмотрим далее.

Как аналитический, так и численный подход к решению дифференциальных уравнений основаны на приближении решений путем усечения каких-либо рядов, однако в построении решений есть принципиальная разница. Аналитический подход позволяет строить ряды, аппроксимирующие решение на значительных интервалах времени, от одного до нескольких тысяч оборотов спутника. В *аналитических* методах решение получается в виде формул, позволяющих найти параметры движения в виде элементов орбиты или координат и скоростей спутника на любой момент времени t. Эти методы применялись для расчета орбит ИСЗ на начальном этапе развития космической геодезии.

Главная трудность при аналитическом подходе состоит в представлении правых частей уравнений движения в виде явных функций времени и элементов орбит. Это достигается путем разложения возмущающей функции в ряд пуассоновского типа. Главным недостатком аналитических методов является их негибкость, жесткая привязка к модели учитываемых возмущающих сил и типам орбит.

При численном подходе к решению уравнений движения аппроксимация ищется в виде различных модификаций отрезка ряда Тейлора на интервале времени, существенно меньшем одного оборота. Коэффициенты разложения вычисляются, исходя из начальных условий уравнений движения, и полученное решение является частным. В численных методах решение отыскивается в виде таблицы значений параметров движения. Преимуществом этих методов является отсутствие каких-либо ограничений на типы орбит и возможность повышения точности расчета траектории движения спутника относительно простыми средствами. Основной же недостаток, связанный с большими временными затратами при вычислении, в настоящее время перестал быть таким актуальным в связи с развитием быстродействующей вычислительной техники.

4.2. Аналитические методы

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x} = f(x,t). \tag{221}$$

В небесной механике его решение выполняют при наличии НУ:

$$t = t_0, \; x = x_0. \tag{222}$$

Получилась так называемая *задача Коши,* записываемая в виде:

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{223}$$

при НУ: (x_0, t_0).

При замене неопределенного интеграла на определенный с нижним пределом t_0 и верхним пределом t получаем в задаче Коши единственное решение:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(x,t\right) dt, \tag{224}$$

где

$$x_0 = \int f\left(x_0, t_0\right). \tag{225}$$

Решение уравнения (225) на практике отыскивается в *виде последовательного приближения*. Одним из таких методов является *метод Пикара*.

4.2.1. Метод Пикара

В методе Пикара в качестве решения однородного дифференциального уравнения (223) используют формулы (224), (225), на основе которых строят последовательность приближений вида [12, 21]:

$$\begin{gathered} x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(x_0, t\right) dt, \\ x_2 = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(x_1, t\right) dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(x_{n-1}, t\right) dt. \end{gathered} \tag{226}$$

Приведем простейший пример применения метода Пикара.

Дано: обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) $\dot{x} = x$ при НУ: $t_0 = 0, x_0 = 1$.

Точное решение получается следующим образом.

$$\frac{dx}{dt} = x,\ \frac{dx}{x} = dt, \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^{t} dt,$$
$$\ln x\left[x_0, x\right] = t\left[t_0, t\right],\ \ \ln x - \ln x_0 = t - t_0.$$

Применим начальные условия: ln x – ln 1 = t – 0, ln 1 = 0, таким образом, имеем ln x = t, что дает решение в виде

$$x = e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots .$$

Теперь получим решение по методу Пикара.
1-е приближение:

$$x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t} x_0 dt = 1 + t.$$

2-е приближение:

$$x_2 = x_0 + \int_{t_0}^{t} x_1 dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} (1+t) dt = 1 + (t + \frac{t^2}{2}) = 1 + t + \frac{t^2}{2}.$$

3-е приближение:

$$x_3 = x_0 + \int_{t_0}^{t} x_2 dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

и т. д.

Как видим, для простейшего ОДУ решение по методу Пикара совпадает с точным решением.

Для сложных ОДУ, например, для систем дифференциальных уравнений Ньютона – Эйлера:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Omega}{dt} = W \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cdot \frac{\sin u}{\sin i}, \\
&\frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} rT, \\
&\frac{di}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} W \cos u, \\
&\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[S \sin v + \left(1 + \frac{r}{p}\right) T \cos v + e \frac{r}{p} T \right], \\
&\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{1}{e} S \cos v + \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) T \cos v + \frac{r}{p} W \operatorname{ctg} i \sin u \right], \\
&\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[\frac{S}{e} \cos v - \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{T}{e} \sin v \right]
\end{aligned}\right\}$$

уже для 2-го приближения получаются громоздкие формулы.

Кроме того, метод Пикара в силу своей универсальности никак не учитывает математические и физические особенности возмущенного движения спутника. Поэтому на практике его можно применять в крайнем случае для предварительного уточнения параметров орбиты.

Эти недостатки метода Пикара в определенной степени учтены в *методе малого параметра*, получившего также название *метода Пуанкаре*.

4.2.2. Метод малого параметра (метод Пуанкаре)

В этом методе правая часть уравнения (221) записывается в виде

$$\dot{x} = \sigma f(x,t) \tag{227}$$

при НУ(t_0, x_0), где σ – так называемый *малый параметр*.

В основе метода малого параметра лежит следующая *теорема Пуанкаре* [21].

Пусть правые части дифференциальных уравнений $\dot{x} = \sigma f(x,t)$ при НУ (x_0, t_0) удовлетворяют всем условиям теоремы существования и единственности решения и, кроме того, правые части уравнения (227) разложимы в сходящийся ряд по степеням σ, т. е.

$$f(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma^m f_m(x,t), \tag{228}$$

тогда решение уравнения (7) может быть найдено в следующем виде:

$$x = x_0 + \sigma\delta x_1 + \sigma^2\delta x_2 + \ldots + \sigma^m \delta x_m, \tag{229}$$

где решение (226) – сходящийся к действительному решению ряд, а $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_m, \ldots$ – суть функции только начальных условий x_0, t_0 и времени *t*, подлежащие определению.

Таким образом, в методе Пуанкаре подынтегральная функция интеграла правой части уравнения (227) заменяется на разложение по степеням

малого параметра σ. Цепочка формул последовательных приближений по методу малого параметра имеет следующий вид.
1-е приближение:

$$x_1 = x_0 + \sigma\int_{t_0}^{t} f(x_0, t)\, dt = \sigma\delta x_1,$$

где введено обозначение

$$\delta x_1 = \int_{t_0}^{t} f(x_0, t)\, dt.$$

2-е приближение:

$$x_2 = x_0 + \sigma\int_{t_0}^{t} f(x_0 + \sigma\delta x_1, t)\, dt = x_0 +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left(\sigma f\left(x_0, t\right) + \sigma^2 \frac{\partial f(x_0, t)}{\partial x}\delta x_1 + \frac{\sigma^3}{2!}\frac{\partial^2 f(x_0, t)}{\partial x^2}\delta x_1^2 + \dots\right)dt.$$

Введем обозначение:

$$\delta x_2 = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(x_0, t)}{\partial x}\delta x_1 dt.$$

Отбрасывая члены разложения, содержащие степени σ 3-го и более высокого порядка, окончательно получим для 2-го приближения формулу

$$x_2 \approx x = x_0 + \sigma\delta x_1 + \sigma^2\delta x_2. \quad (230)$$

Если сравнить 2-е приближения по методу Пикара (226) и методу Пуанкаре, то видно, что они разные. А именно, x_2 по Пикару должно содержать все, в том числе и отброшенные члены. В то же время второе приближение в методе малого параметра не содержит предыдущих приближений в виде слагаемых, как метод Пикара, а оно входит как произведение производной от правой части по искомой переменной на первое приближение. Для дальнейших приближений эта разница только увеличивается.

Из других аналитических методов отметим следующие [5, 21]:

– метод осреднения;

– метод Гамильтона – Якоби;

– метод фон Цейпеля;

– метод канонических преобразований Депри – Хори.

Характерной особенностью всех аналитических методов является громоздкость формул и негибкость к изменениям модели возмущенного движения ИСЗ.

4.3. Численные методы

Методы численного ОДУ появились в небесной механике достаточно давно. Первые численные методы были разработаны А. Клеро еще в XVIII в. и использовались для исследования движения кометы Галлея. В дальнейшем эти методы были усовершенствованы Ж. Даламбером, Л. Эйлером, К. Гауссом и П. Коуэллом [10]. Многошаговые методы Адамса – Коуэлла вместе с одношаговым методом Рунге – Кутты 4-го порядка были основным аппаратом численного решения дифференциальных уравнений в небесной механике в течение длительного времени. Запуски искусственных спутников Земли и необходимость учета возмущающих сил негравитационной природы придали численным методам дополнительный импульс. Развитие вычислительной техники также способствовало появлению более эффективных методов численного интегрирования, использующих высокий порядок аппроксимирующей формулы. Так в период с 1964 по 1978 гг. были построены алгоритмы Рунге – Кутты высоких порядков вплоть до 10-го. Алгоритмы типа Адамса – Мультона – Коуэлла были развиты до 16-го порядка. В этот же период времени появились алгоритмы рациональной экстраполяции Булирша – Штёра, а также гибридные методы, к которым можно отнести метод Эверхарта. В дальнейшем указанные методы развивались в сторону улучшения своих основных свойств. В настоящее время данные методы численного интегрирования с некоторыми модификациями успешно используются для решения дифференциальных уравнений движения ИСЗ. Например, метод Булирша – Штёра успешно использовался в программных комплексах прогнозирования спутников системы ГЛОНАСС [18].

В основе численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений лежит идея разложения правых частей дифференциальных уравнений в ряды, например, в ряды Тейлора.

Методы численного интегрирования ОДУ делятся на две группы – *одношаговые* и *многошаговые* [5]. Принципиальная разница между этими двумя группами методов представлена рис. 23, 24 и заключается в следующем.

4.3.1. Одношаговые методы

В одношаговых методах для прогнозирования параметров орбиты спутника с начального момента t_0 на момент времени t_j интервал времени $[t_j - t_0]$ разбивают на временные шаги *H*, которые могут быть разной длины. Прогнозирование параметров орбиты осуществляется от шага к шагу, при этом для первого шага в качестве начальных значений принимаются их значения в момент t_0, для второго шага в качестве начальных значений принимаются значения, полученные на момент t_1 и т. д. При этом каждый шаг интегрирования *H* в свою очередь разбивается на подшаги *h* (см. рис. 23).

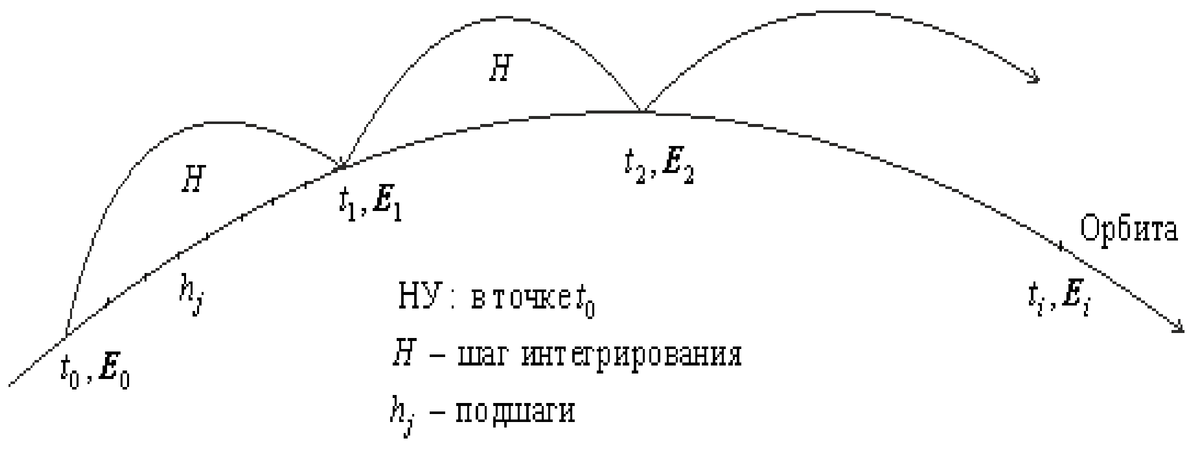


Рис. 23. Одношаговые методы численного интегрирования ОДУ

На рис. 23 векторами $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, ..., \boldsymbol{E}_i$ обозначены векторы, компонентами которых является набор прогнозируемых параметров орбиты.

К одношаговым методам относятся такие методы, как методы Рунге – Кутты – Фельберга, метод Эверхарта, метод Булирша – Штёра. Различие между ними заключается в основном в разных способах аппроксимации правых частей дифференциальных уравнений в ряды, а также в различных способах выбора текущего шага интегрирования и оценке точности вычислений. Рассмотрим два метода: метод Булирша – Штёра и метод Эверхарта.

4.3.1.1. Метод Булирша – Штёра

Метод Булирша – Штёра относится к экстраполяционным методам [5, 18]. Достоинство экстраполяционных методов интегрирования состоит прежде всего в том, что для достижения высокой точности не требуется многократного перевычисления правых частей дифференциальных уравнений движения. Это особенно удобно, когда правые части уравнений сложны, как, например, при интегрировании уравнений движения ИСЗ.

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений $\dot{Y} = f\left(Y, t\right)$ с начальными условиями $Y\left(t_0\right) = Y_0$.

Численное решение данной задачи обозначим $T(h)$. Ряд численных значений $T(h_0), T(h_1), ..., T(h_m)$ при убывающей последовательности подшагов $\left\{h_j\right\}$: $h_0 > h_1 > ... > h_m$ $\left(j \in \left[0, ..., m\right]\right)$ можно экстраполировать в направлении $h = 0$. Для этого по узлам $T(h_j)$ строится интерполирующая функция $\hat{T}_m\left(h\right)$. Экстраполированное значение $\hat{T}_m\left(0\right)$ этой функции может очень точно представить искомое решение $Y(t_k) = T(0)$ на конечный момент t_k текущего шага $H = t_k - t_0$, если глобальная погрешность аппроксимации используемого численного метода имеет асимптотическое разложение по степеням h:

$$\varepsilon = T(h) - Y(t_k) = \eta_1 h^{\gamma_1} + \eta_2 h^{\gamma_2} + \ldots . \qquad (231)$$

В методе *GBS* для получения $T(h_j)$ используется модифицированный У. Грэгом метод прямоугольников (метод Эйлера средней точки), который имеет асимптотическое разложение по четным степеням h и представляется формулами:

$$
\begin{aligned}
& Y_1 = Y_0 + \frac{h_j}{2} f\left(Y_0, t_0\right), \\
& Y_{K+1} = Y_{K-1} + h_j f\left(Y_K, t_K\right), \\
& T\left(h_j\right) = \frac{1}{2}\left[Y_N + Y_{N-1} + \frac{h_j}{2} f\left(Y_N, t_N\right)\right],
\end{aligned} \tag{232}
$$

где $N = \dfrac{2H}{h_j}$, h_j – шаг на этапе j.

В качестве интерполирующей функции $\hat{T}_m\left(h\right)$ Булирш и Штёр предложили дробно-рациональную, которую обозначим

$$
\hat{T}_i\left(h, h_j, h_{j-i}, ..., h_{j-i}\right) = \hat{T}_{ji}\left(h\right), \tag{233}
$$

т. е. функцию аргумента h порядка i, построенную по i + 1 узлу $h_j, h_{j-1}, ..., h_{j-i}$ на этапе j.

Таким образом, $\hat{T}_{ji}\left(h_k\right) = T\left(h_k\right)$, $k = j, j-1, ..., j-i$.

При h = 0 обозначим $\hat{T}_{ji}\left(0\right) = T_{ji}$. Для вычисления величин T_{ji}, представляющих собой экстраполированные значения интерполирующих функций различных порядков, Булирш и Штёр предложили рекуррентные формулы:

$$
\begin{aligned}
& T_{ji} = T_{ji-1} + \Delta T_{ji}, \\
& \Delta T_{ji} = \frac{W_{ji} \cdot C_{ji-1}}{\left(\dfrac{h_{j-i}}{h_j}\right)^2 \cdot \Delta T_{j-1,i-1} - C_{ji-1}}, \\
& C_{ji} = \frac{W_{ji-1} \cdot \Delta T_{j-1,i-1} \cdot \left(\dfrac{h_{j-i}}{h_j}\right)^2}{\left(\dfrac{h_{j-i}}{h_j}\right)^2 \cdot \Delta T_{j-i} - C_{ji-1}}, \\
& W_{ji-1} = C_{ji-1} - \Delta T_{j-1,i-1} = C_{ji} - \Delta T_{ji} = T_{ji-1} - T_{j-1,i-1}, \\
& \Delta T_{j0} = C_{j0} = T_{j0} = T(h_j).
\end{aligned} \tag{234}
$$

Метод *Булирша – Штёра* замечателен тем, что допускает автоматическое изменение шага *H*, порядка *m* и этапа *j* (поскольку при одних и тех же шаге и порядке *m* значения узлов интерполирования могут быть выбраны в различных местах последовательности $\{h_j\}$). Критерий достижения заданной точности основан на оценке относительной локальной погрешности l_j по формуле

$$l_j = \begin{cases} \dfrac{\left|T_{jj} - T_{j-1,j-1}\right|}{S}, & \text{если} \quad j \le 6 \\ \dfrac{\left|T_{j6} - T_{j-16}\right|}{S}, & \text{если} \quad j > 6, \end{cases} \tag{235}$$

где $S \approx \max\limits_{t \in [T_0, t_k]} |Y(t)|$.

Если $l_j \le eps_0$, где eps_0 – заданная относительная погрешность интегрирования, то шаг завершается. Иначе ищется решение более высокого порядка или этапа. Если условие $l_j \le eps_0$ выполнилось при $j \le 6$, то следующий оптимальный шаг увеличивается: $\tilde{H} = 1{,}5H$; если $6 < j \le 9$, то $\tilde{H} = 0{,}9 \cdot (0{,}6)^{j-6} H$. В случае невыполнения условия (144) при *j* = 9 шаг *H* уменьшается вдвое и вычисления повторяются сначала.

Метод Булирша – Штёра успешно использовался в разработанном в НИИГАиК (СГГА, СГУГиТ) программном комплексе ОРБИТА-СГГА, реализующим динамический метод космической геодезии [18]. В этом комплексе используется модифицированная версия описанного выше интегратора. Модификация связана с тем, что был осуществлен переход от критерия (235), связанного с оценкой относительной погрешности к критерию вида $\left|T_{jj} - T_{j-1j-1}\right| \le eps$, где *eps* – заданная абсолютная погрешность решения. Кроме того, было осуществлено совершенствование механизма шаговой коррекции, которое обеспечивает меньшее число вычислений правых частей дифференциальных уравнений возмущенного движения на единицу шага.

4.3.1.2. Метод Эверхарта

Метод Эверхарта относится к неявным одношаговым алгоритмам [5, 18]. Наиболее эффективно метод интегрирует ОДУ второго порядка, и в этом заключается его особенность, так как большинство методов численного интегрирования ориентированы на решение систем ОДУ первого порядка.

Рассмотрим основные принципы построения алгоритмов Эверхарта на примере решения уравнения вида

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, \dot{y}) \tag{236}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 = f_0(t_0, y_0, \dot{y}_0), \\ \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0. \end{aligned} \tag{237}$$

Примем начальный момент t_0 шага интегрирования h равным нулю, $h = [0, T]$. Функцию f представим в виде ряда по степеням t в окрестности $t_0 = 0$:

$$y = f = f_0 + A_1 t + A_2 t^2 + ... + A_n t^N . \tag{238}$$

Интегрируя уравнения (236) по независимой переменной, получим:

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + f_0 t + A_1 \frac{t^2}{2} + ... + A_N \frac{t^{N+1}}{N+1}, \tag{239}$$

$$y = y_0 + y_0 t + f_0 \frac{t^2}{2} + A_1 \frac{t^3}{2 \cdot 3} + ... + A_N \frac{t^{N+2}}{(N+1)(N+2)} . \tag{240}$$

Полином N-й степени, стоящий в правой части (240), не является отрезком ряда Тейлора, поскольку коэффициенты A_i вычисляются не по известным формулам для коэффициентов ряда Тейлора, а определяются из условий наилучшего приближения функций $y,\ \dot{y}$ в момент времени T конечными разложениями (239) и (240).

Выразим коэффициенты A_i через разделенные разности. Для этого представим функцию f в виде

$$f = f_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t - t_1) + \alpha_3 t(t - t_1)(t - t_2) + \ldots . \qquad (241)$$

В каждый момент времени t_i имеем

$$\begin{gathered} f_1 = f_0 + \alpha_1 t_1, \\ f_2 = f_0 + \alpha_1 t_2 + \alpha_2 t_2 (t_2 - t_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

Отсюда получим разделенные разности:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \left(f_1 - f_0\right) / t_1, \\ &\alpha_2 = ((f_2 - f_0) / t_2 - \alpha_1) / \left(t_2 - t_1\right), \\ &\alpha_3 = (((f_3 - f_0) / t_3 - \alpha_1) / (t_3 - t_1) - \alpha_2) / (t_3 - t_2)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{aligned} \qquad (242)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, выразим коэффициенты A_i через α_i:

$$\begin{aligned} &A_1 = \alpha_1 + \left(-t_1\right)\alpha_2 + \left(t_1 t_2\right)\alpha_3 + \ldots = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \ldots, \\ &A_2 = \alpha_2 + \left(-t_1 - t_2\right)\alpha_3 + \ldots = c_{22}\alpha_2 + c_{32}\alpha_3 + \ldots, \\ &A_3 = \alpha_3 + \ldots = c_{33}\alpha_3 + \ldots \ . \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{aligned} \qquad (243)$$

Для коэффициентов c_{ij} справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} &c_{ij} = 1, \qquad i = j, \\ &c_{ij} = -t_i c_{i-1,i}, \qquad i > 1, \\ &c_{ij} = c_{i-1,j-1} - t_i c_{i-1,j}, \qquad 1 < j < i. \end{aligned} \qquad (244)$$

Проиллюстрируем процедуру нахождения узлов разбиения шага $h = [0, T]$ на примере алгоритма интегрирования пятого порядка ($N = 5$).

В начальный момент времени $t_0 = 0$, известны $y_0,\ \dot{y}_0,\ f_0$. Значения y в моменты времени t_1, t_2, t_3 определяются формулами *предиктора*:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \dot{y}_0 t_1 + f_0 t_1^{\,2} / 2 + \left[A_1 t_1^{\,3} / 2\cdot 3 + A_2 t_1^{\,4} / 3\cdot 4 + A_3 t_1^{\,5} / 4\cdot 5 \right],\\
y_2 &= y_0 + \dot{y}_0 t_2 + f_0 t_2^{\,2} / 2 + A_1 t_2^{\,3} / 2\cdot 3 + \left[A_2 t_2^{\,4} / 3\cdot 4 + A_3 t_2^{\,5} / 4\cdot 5 \right],\\
y_3 &= y_0 + \dot{y}_0 t_3 + f_0 t_3^{\,2} / 2 + A_1 t_3^{\,3} / 2\cdot 3 + A_2 t_3^{\,4} / 3\cdot 4 + \left[A_3 t_3^{\,5} / 4\cdot 5 \right].
\end{aligned} \tag{245}
$$

Значения решения на конце шага h получаются по формулам *корректора*:

$$
\begin{aligned}
y(T) &= y_0 + y_0 T + f_0 T^2 / 2 + A_1 T^3 / 2\cdot 3 + A_2 T^4 / 3\cdot 4 + A_3 T^5 / 4\cdot 5,\\
\dot{y}(T) &= \dot{y}_0 + f_0 T + A_1 T^2 / 2 + A_2 T^3 / 3 + A_3 T^4 / 4.
\end{aligned} \tag{246}
$$

Эта схема является неявной, так как коэффициенты, стоящие в квадратных скобках (245), заранее неизвестны, поскольку являются функциями координат y_1, y_2, y_3, стоящих слева.

Значения t_1, t_2, t_3 определяются следующим образом. Ищутся такие значения t_1, t_2, t_3, которые позволили бы, не добавляя членов в разложение (238), получать решения y и $\dot{y}$ с точностью до седьмого порядка. При нахождении таких значений t_1, t_2, t_3, разности Δy, $\Delta \dot{y}$ решений пятого и седьмого порядков обратятся в нуль:

$$
Dy = 0, \qquad D\dot{y} = 0. \tag{247}
$$

Вводя безразмерные величины $h_i = \dfrac{t_i}{T}$, можно получить для определения соответствующих коэффициентов c'_{ij} из условия (247) систему алгебраических уравнений:

$$c'_{41}/2 + c'_{42}/3 + c'_{43}/4 + 1/5 = 0,$$
$$c'_{41}/3 + c'_{42}/4 + c'_{43}/5 + 1/6 = 0, \quad (248)$$
$$c'_{41}/4 + c'_{42}/5 + c'_{43}/6 + 1/7 = 0.$$

Решение этой системы

$$c'_{41} = -4/35 = -h_1 h_2 h_3; c'_{42} = 6/7 = h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_1 h_3, \quad (249)$$
$$c'_{43} = -12/7 = -h_1 - h_2 - h_3$$

показывает, что искомые значения величин h_1, h_2, h_3 являются корнями следующего полинома третьей степени:

$$h^3 + (-12/7)h^2 + (6/7)h - 4/35 = 0. \quad (250)$$

Полученные таким образом узлы разбиения шага h совпадают с узлами квадратурной формулы Гаусса – Радо, а величины h_1, h_2, h_3 совпадают с корнями полинома Лежандра $P_3(2h-1) = 0$.

Отсюда следует, что при построении алгоритма можно пользоваться для отыскания h_i как уравнениями (248), (250), так и соответствующими таблицами математических функций; при этом могут быть использованы не только узлы квадратурных формул Гаусса – Радо, но и узлы квадратурных формул Гаусса – Лобато и Гаусса – Лежандра [18].

4.3.2. Многошаговые методы

Многошаговые методы применяются для прогнозирования движения как небесных тел и космических аппаратов, отправляемых в полет к другим планетам Солнечной системы, так и искусственных спутников Земли. Они ориентированы на решение ОДУ второго порядка. В многошаговых методах начальные условия движения должны быть заданы не только в одной точке t_0, но в нескольких предыдущих моментах времени (не менее двух) $t_{-1}, t_{-2}, \ldots$. Параметры орбиты в точке t_1 на конец первого шага $[t_1 - t_0]$ рассчитываются по начальным условиям движения в точках t_{-2}, t_{-1}, t_0 (рис. 24).

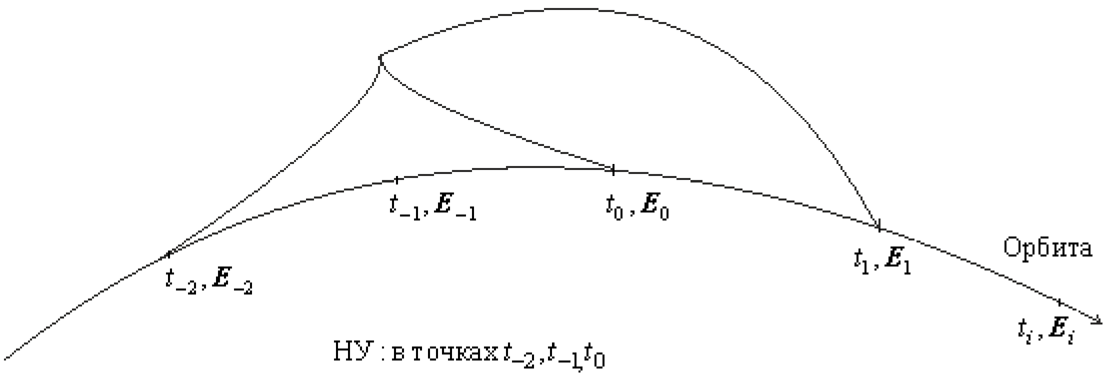


Рис. 24. Многошаговые методы численного интегрирования ОДУ

Для вычисления параметров орбиты в следующей точке в момент времени t_2 начальные условия движения сдвигаются на один шаг, т. е. они задаются теперь в точках t_{-1}, t_0, t_1 и т. д. Из многошаговых методов при прогнозировании движения ИСЗ нашли применение методы *Адамса – Мультона – Коуэлла* [5].

В этом методе шаг численного интегрирования h принимается постоянным от шага к шагу, подбирается эмпирическим путем. Положение и скорость спутника на интервале от a до b вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} y_n &= 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^{c} \alpha^*_j f_{n-j}, \; n = 1, 2, ..., b, \\ y_{n-1} &= 2y_{-n-1} - y_{-n-2} + h^2 \sum_{j=0}^{c} \alpha^*_j f_{-n+j}, \; n = 1, 2, ..., a. \end{aligned} \tag{251}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_n &= \dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^{c} \beta^*_j f_{n-j}, \; n = 1, 2, ..., b, \\ \dot{y}_{-n} &= \dot{y}_{-n-1} - h \sum_{j=0}^{c} \beta^*_j f_{-n+j}, \; n = 1, 2, ..., a. \end{aligned} \tag{252}$$

Совокупность формул (251), (252) позволяет вычислить начальную таблицу интегрирования. Делается это путем последовательных приближений. Дальнейшее решение на конце шага h отыскивается методом приближений. По более простой формуле, получившей название *предиктора*, получают приближенное решение:

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^{m} \alpha'_j f_{n-1-j},$$
$$\dot{y}_n = \dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^{m} \beta'_j f_{n-1-j}. \qquad (253)$$

Затем по точной формуле, получившей название *корректора*, получают уже точное решение:

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^{m} \alpha_j f_{n-j},$$
$$\dot{y}_n = \dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^{m} \beta_j f_{n-j}. \qquad (254)$$

При необходимости для достижения заданной точности прогнозирования параметров орбиты вычисления по формулам *предиктора* и *корректора* повторяют.

4.3.3. Сравнительная характеристика численных методов

Сравнительная характеристика методов численного интегрирования по точности и быстродействию приведена в работе [5].

На основании анализа результатов многочисленных исследований по сопоставлению эффективности различных численных методов в различных задачах динамики небесных тел, как естественных, так и искусственных, были сделаны следующие выводы:

– при соответствующем выборе системы уравнений, порядка метода, шага численного интегрирования, большой длины разрядной сетки ЭВМ, высокой точности прогнозирования орбит можно достичь любым из изложенных в настоящем разделе методов;

– но, если учитывать только скорость вычислений, то наиболее эффективным практически в большинстве задач небесной механике следует считать метод Эверхарта; на второе место следует поставить метод Булирша –

Штёра и метод Адамса – Мультона – Коуэлла; на третьем месте окажется методы Рунге – Кутты – Фельберга.

4.4. Контрольные вопросы

1. В чем состоит принципиальная разница между аналитическим и численным подходами решения дифференциальных уравнений возмущенного движения (ДУ ВД) ИСЗ?

2. Перечислите известные вам аналитические методы решения ОДУ.

3. В чем состоит принципиальная разница между одношаговыми и многошаговыми методами решения ДУ ВД ИСЗ?

4. Перечислите известные вам одношаговые методы численного интегрирования.

5. Перечислите известные вам многошаговые методы численного интегрирования.

6. Основные особенности метода Булирша – Штёра.

7. Основные особенности метода Эверхарта.

8. Дайте сравнительную характеристику методов численного интегрирования на примере ДУ ВД ИСЗ.

5. УТОЧНЕНИЕ ОРБИТЫ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

5.1. Основные положения решения задачи уточнения орбиты

Под воздействием возмущающих сил параметры орбиты спутников изменяются со временем, и их необходимо уточнять. Этот процесс получил название *уточнение орбиты*. К нему также применяют другое наименование – *улучшение орбиты*. Уточнение (улучшение) орбиты осуществляется на определенный момент времени t_0, получивший название *эпоха уточнения*. По своей сути, процесс уточнения орбиты является исправлением ошибок в параметрах орбиты в точке орбиты на момент t_0, накопившихся под воздействием возмущающих сил и погрешностей параметров орбиты, и как результат определения предварительной орбиты спутника.

В отличие от предварительного определения орбиты, в котором используется допустимый минимум наблюдений, для уточнения орбиты используется как можно большее число наблюдений спутника, желательно с нескольких наземных пунктов (НП), охватывающих как можно большую часть орбиты спутника. Идеальным вариантом считается равномерное распределение наблюдений спутника по всему витку, что соответствует хорошей геометрии наблюдений (рис. 25). На рисунке треугольниками на земной поверхности изображены наземные станции M слежения за спутниками. Жирными линиями на орбитальном витке выделены участки орбиты, на которых спутник наблюдался с наземных станций.

Для обеспечения процесса уточнения орбит ИСЗ создаются сети наземных станций слежения за спутниками. В качестве примера подобной сети станций в разд. 2 приводилась сеть станций, оснащенных приборами «Сажень – ТМ» (см. рис. 13, 14). Каждая из ГНСС 2-го поколения – GPS, ГЛОНАСС, «Бэйдоу» и «Галилео» – имеет в своей структуре наземный сегмент, отвечающий за постоянное уточнение орбит НИСЗ и последующее прогнозирование параметров орбит навигационных спутников в режиме реального времени. При этом точные эфемериды сообщаются потребителю по его запросу с временной задержкой, обусловленной временем на уточнение орбиты НИСЗ.

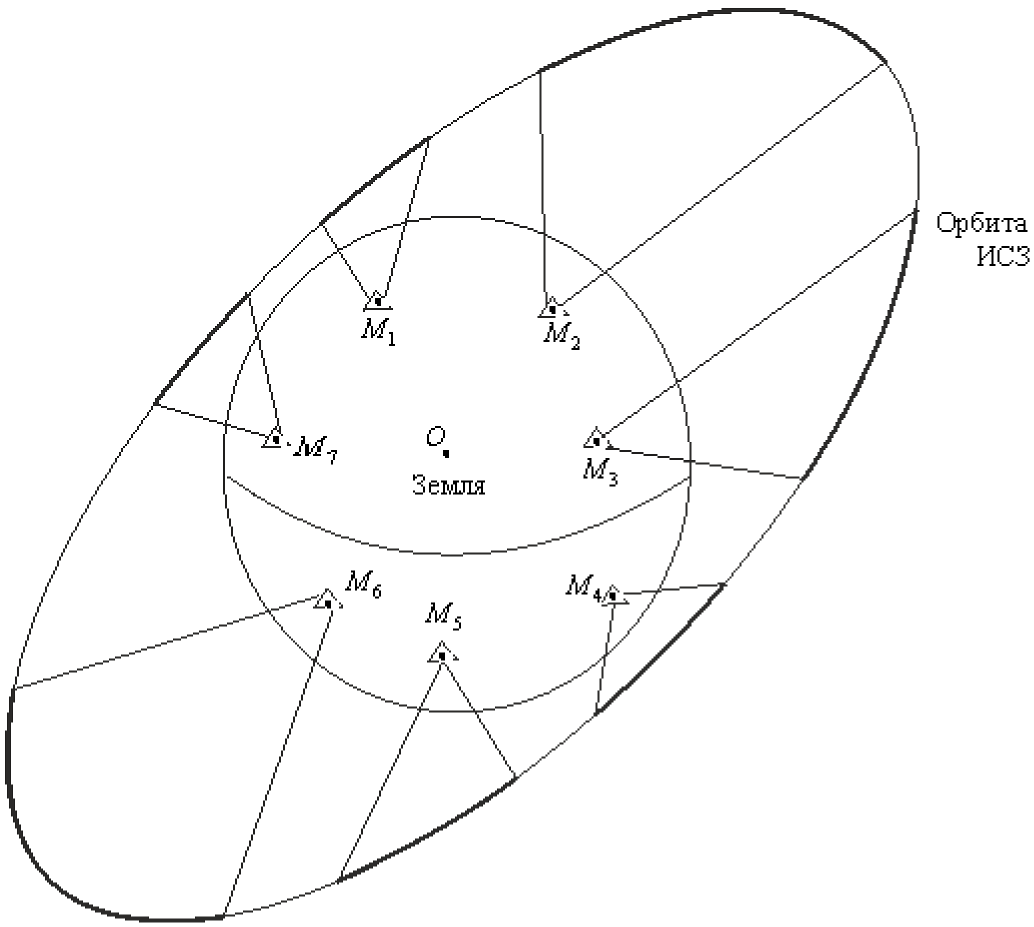


Рис. 25. Пример хорошей геометрия наблюдений спутника при уточнении орбиты

Желательно также иметь полный состав топоцентрического вектора наблюдения **ρ**, т. е. его направление и дальность. Но в последнее время точность линейных измерений (лазерных и радиотехнических) на порядок выше угломерных, поэтому при возможности используются измерения топоцентрического расстояния ρ.

Взаимное положение наземного пункта ***M*** и спутника (космического аппарата) *m* в текущий момент наблюдения t_i показано на рис. 26, на котором обозначены: *O* – центр Земли; ***r*** – геоцентрический вектор положения спутника; $\boldsymbol{R}$ – геоцентрический вектор положения НП; $\boldsymbol{\rho}$ – топоцентрический вектор положения спутника; x, y, z и X, Y, Z – координаты спутника и НП соответственно в какой-либо системе координат (небесной или земной).

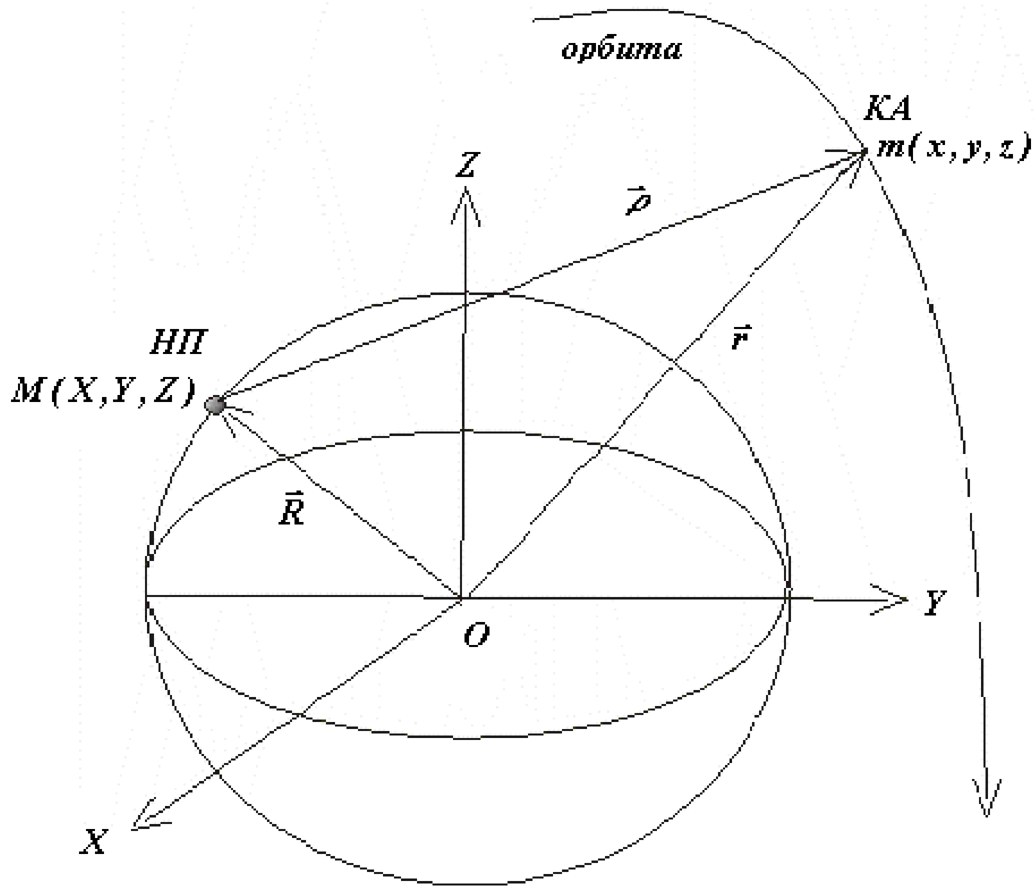


Рис. 26. Взаимное положение НП и спутника

Формулы уточнения орбиты получаются из *фундаментального уравнения космической геодезии*, которое легко получается из рис. 26:

$$\rho = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R} = \rho\left(x - X, y - Y, z - Z\right). \qquad (255)$$

Все векторы, входящие в уравнение (255), должны быть заданы в небесной системе координат. Для связи земной и небесной системы координат можно использовать формулу [18]

$$\boldsymbol{y} = W\boldsymbol{x},$$

где $\boldsymbol{x}$ – произвольный вектор, заданный в общеземной системе координатами x_1, x_2, x_3; $\boldsymbol{y}$ – его преобразованное в небесную систему координат значение, заданное координатами y_1, y_2, y_3; W – матрица преобразования, представляющая собой матрицу направляющих косинусов осей *общеземной системы координат* (ОЗСК) относительно осей *небесной* (*инерциальной*) *системы координат* (НСК).

$_m$ В зависимости от точности решения задачи матрица W может представлять собой произведение того или иного количества матриц поворота. Например, в работе [18] матрица W описана в виде двенадцати элементарных поворотов:

$$\begin{aligned} W = R_1(\varepsilon_{0m} - \Delta\varepsilon)R_3(-\Delta\psi_m)R_1(\varepsilon_{0m})R_3(\zeta_{Am})R_2(-\theta_{Am})\times \\ \times R_3(\mathrm{z_{Am}})R_1(-\varepsilon_0)R_3(\Delta\psi)R_1(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon)R_3(-S)R_2(x_\mathrm{p})R_1(y_\mathrm{p}), \end{aligned} \qquad (256)$$

где $\Delta\psi_m, \Delta\psi, \Delta\varepsilon_m, \Delta\varepsilon$ – компоненты астрономической нутации в долготе и наклоне эклиптики соответственно в эпохи T_m (средняя эпоха наблюдательной кампании) и T (момент наблюдения); $\zeta_{Am}, \theta_{Am}, z_{Am}$ – экваториальные параметры прецессии на интервале $[T_m, T]$; ε_0 и ε_{0m} – средние наклоны эклиптики к экватору в эпохи T и T_m; S – истинное звездное время на меридиане Гринвича на момент времени T; x_p, y_p – координаты полюса Земли в эпоху T; параметр неравномерности вращения Земли $\Delta UT1(T)$ включен в угол S.

Преобразование составляющих топоцентрического вектора $\boldsymbol{\rho}$, полученного в различных системах координат (горизонтной или экваториальной) сначала в земную, а затем в небесную систему координат, выполняется по формулам, приведенным в разд. 2. Можно также воспользоваться формулами из учебного пособия [6].

Аргументы матриц поворота, входящих в формулу (256), обычно представлены в виде полиномиальных и тригонометрических рядов. Представленная таким образом аналитическая модель вращения Земли содержит более двух тысяч членов, при этом входящие в данную модель синусы и косинусы значительно тормозят процесс численного интегрирования уравнений движения искусственных спутников Земли.

Топоцентрическая дальность ρ до спутника может быть получена по формуле

$$\rho = \|\boldsymbol{\rho}\|_E = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}. \tag{257}$$

В формуле (257) топоцентрическая дальность ρ показана как Евклидова норма вектора $\boldsymbol{\rho} - \|\boldsymbol{\rho}\|_E$.

В задачах космической геодезии в число неизвестных могут быть включены следующие величины: координаты наземных пунктов (*X*, *Y*, *Z*); элементы орбит ИСЗ ($a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$ на эпоху уточнения t_0, которые можно объединить под знаком вектора $\boldsymbol{E}_0$); гармонические коэффициенты C_{nm}, S_{nm} разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям; параметры вращения Земли x_p, y_p, ω; параметры связи систем координат $\omega_x, \omega_y, \omega_z, x_0, y_0, z_0, \mu$; поправка часов приемника Δt и другие неизвестные. Эти неизвестные являются составляющими так называемого *вектора состояний* $\boldsymbol{q}$ [18].

Рассмотрим алгоритм решения задачи уточнения орбиты для случая измерения только топоцентрической дальности ρ.

Если мы выполняем дальномерные измерения ρ (по линии $M - m$, см. рис. 26), то для момента времени измерения t_i можно составить следующее уравнение:

$$\rho_i(\boldsymbol{q}) = \tilde{\rho}_i + v_i, \tag{258}$$

где $\rho_i(\boldsymbol{q})$ – функция, при помощи которой измеренная величина $\tilde{\rho}_i$ (дальность НП – КА) выражается через компоненты вектора $\boldsymbol{q}$; v_i – неизвестные погрешности измерений и моделей движения КА и НП; i – номер измерения, число которых определяется конкретной решаемой задачей.

Такие уравнения (258), связывающие измеренные величины $\tilde{\rho}_i$, погрешности измерений и моделей v_i и неизвестные $\boldsymbol{q}$ называются *уравнениями наблюдений*. Они образуют нелинейную по $\boldsymbol{q}$ систему уравнений, так как неизвестные в формуле (258) присутствуют в степени выше первой. Это видно из равенства (257), содержащем координаты наземного пункта X, Y, Z и спутника x, y, z, которые в свою очередь являются функциями уточняемых элементов орбиты и параметров модели движения спутника, например:

$$\begin{cases} x = x\left(\boldsymbol{E}_0, C_{nm}, S_{nm}, \ldots\right), \\ y = y\left(\boldsymbol{E}_0, C_{nm}, S_{nm}, \ldots\right), \\ z = z\left(\boldsymbol{E}_0, C_{nm}, S_{nm}, \ldots\right). \end{cases} \tag{259}$$

В формуле (259) обозначены: C_{nm}, S_{nm} – наборы уточняемых гармонических коэффициентов разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям; $\boldsymbol{E}_0$ – вектор элементов орбиты на эпоху уточнения t_0.

Этот частный случай дальномерных измерений можно распространить на любые другие виды измерений, и все они приводят к решению *системы нелинейных уравнений* (СНАУ). Решение таких СНАУ гораздо более трудоемко и сложно, чем решение системы *линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ), при этом трудно оценить качество (т. е. точность) их решения, достоверность полученного результата и др.

Поэтому наиболее распространенным способом решения СНАУ является *метод Ньютона*, используя который осуществляют переход от СНАУ к СЛАУ путем линеаризации нелинейных уравнений. Этот метод предусматривает априорное знание приближенных значений неизвестных $\boldsymbol{q}_0$, и тогда отыскиваются *малые приращения* неизвестных $\boldsymbol{\Delta q}$, а затем по формуле

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0 + \Delta\boldsymbol{q} \tag{260}$$

вычисляются значения неизвестных.

В задаче уточнения орбиты спутника вектор $\boldsymbol{q}$ имеет следующий состав:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0\left(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0\right).$$

При этом предполагается, что модель возмущенного движения спутника и координаты наземного пункта известны. Это означает, что в формуле (259) коэффициенты разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям C_{nm}, S_{nm} являются константами. Составляющими вектора $\boldsymbol{\Delta q}$ являются поправки к уточняемым параметрам орбиты $\Delta a_0, \Delta e_0, \Delta i_0, \Delta\Omega_0, \Delta\omega_0, \Delta M_0$. Заметим, что в качестве уточняемых параметров орбиты может использоваться любой другой набор элементов.

Суть метода Ньютона состоит в следующем. Левые части уравнений (258) $\rho_i(\boldsymbol{q})$ представляют в виде разложения в ряд Тейлора по степеням $\Delta\boldsymbol{q}$:

$$\rho_i(\boldsymbol{q}) = \rho_i(\boldsymbol{q}_0 + \Delta\boldsymbol{q}) = \rho_i(\boldsymbol{q}_0) + \frac{\partial\rho_i}{\partial q_0}\Delta\boldsymbol{q} + \frac{\partial^2\rho_i}{\partial q_0^2}(\Delta\boldsymbol{q})^2 + \dots \tag{261}$$

Далее, частные производные высоких порядков отбрасываются. Таким образом, в разложении (261) остаются члены, содержащие приращения неизвестных $\Delta\boldsymbol{q}$ в первой степени:

$$\rho_i(\boldsymbol{q}) = \rho_i(\boldsymbol{q}_0) + \frac{\partial\rho_i}{\partial q_0}\Delta\boldsymbol{q}. \tag{262}$$

Подставляя (262) в (258), получим

$$\rho_i(\boldsymbol{q}_0) + \frac{\partial\rho_i}{\partial q_0}\Delta\boldsymbol{q} \approx \tilde{\rho}_i + v_i. \tag{263}$$

Приближенный знак равенства в формуле (263) означает возникшую погрешность за счет отбрасывания в ряде Тейлора членов разложения второго и более высокого порядков. Линеаризованное по методу Ньютона в форме (263) уравнение наблюдений в методе наименьших квадратов получило также название *параметрическое уравнение поправок*. Такие уравнения составляются для каждого измерения. Для отыскания n неизвестных из совместного решения все m уравнений вида (263) объединяются в СЛАУ.

Если в состав погрешности v_i добавить также погрешность, полученную при линеаризации уравнения наблюдения по методу Ньютона, то в результате получим суммарную погрешность, которую обозначим $\tilde{v}_i$. Тогда в формуле (263) знак приближенного равенства можно заменить на знак равенства. Кроме того, преобразуем уравнение (263) следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial q_0}\Delta \boldsymbol{q} = \tilde{\rho}_i - \rho_i\left(\boldsymbol{q}_0\right) + \tilde{v}_i. \tag{264}$$

Обозначим буквой j текущий номер неизвестного ($j = 1, 2, \ldots, n$), а буквой i – текущий номер уравнения ($i = 1, 2, \ldots, m$). Для упрощения записи уравнения (264) переименуем входящие в него величины следующим образом: вектор приращений к неизвестным $\Delta \boldsymbol{q}$ обозначим $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; частные производные при j-м неизвестном в i-м уравнении обозначим a_{ij}; свободные члены уравнений, представляющие собой разность $\tilde{\rho}_i - \rho_i(\boldsymbol{q}_0)$, обозначим b_i. Тогда уравнение (264), соответствующее i-му измерению, запишется в виде

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i + \tilde{v}_i. \tag{265}$$

В уравнении (265) обратим внимание на вычисление свободного члена b_i, соответствующего измерению на момент времени t_i. Величина $\tilde{\rho}_i$ представляет собой измеренное значение топоцентрической дальности. Величина же $\rho_i(\boldsymbol{q}_0)$ получается путем прогнозирования начальных значений параметров орбиты с момента t_0 на момент измерения t_i с учетом возмущающих сил любым из методов решения дифференциальных уравнений возмущенного движения спутников, приведенных в разд. 4.

Коэффициенты при неизвестных $\Delta \boldsymbol{q}$ в (264) представляют собой произведение трех частных производных

$$a_{ij} = \frac{\partial \rho_i}{\partial \boldsymbol{q}_0} = \frac{\partial \rho_i}{\partial(x,y,z)} \cdot \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,e,i,\Omega,\omega,M)} \cdot \frac{\partial(a,e,i,\Omega,\omega,M)}{\partial(a_0,e_0,i_0,\Omega_0,\omega_0,M_0)}. \tag{266}$$

Введем обозначения: $\boldsymbol{A}$ – матрица коэффициентов СЛАУ, $\boldsymbol{x}$ – вектор малых приращений к неизвестным, $\boldsymbol{b}$ – вектор свободных членов. Покажем содержимое введенных векторов и матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (267)$$

Система линейных алгебраических уравнений, сформированная из уравнений (265), с учетом обозначений (266) будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{v}, \qquad (268)$$

где $\boldsymbol{v}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, ..., \tilde{v}_m)$ – вектор суммарных погрешностей измерений и моделей (неточности в учете возмущений в движении КА, преобразованиях координат, неточности учета прецессии и нутации в движении полюса Земли, допущения в линеаризации по методу Ньютона и т. д.).

Так как вектор $\boldsymbol{v}$ также относится к числу определяемых, то его можно перенести в левую часть равенства (268). В этом случае СЛАУ будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{A}_{mn}\boldsymbol{x}_{n1} + \boldsymbol{v}_{m1} = \boldsymbol{b}_{m1}. \qquad (269)$$

Таким образом, происходит преобразование нелинейной задачи уточнения орбиты в линейную. В дальнейшем мы будем рассматривать только систему линейных алгебраических уравнений.

Отметим, что СЛАУ (269) является не доопределенной системой, так как число входящих в нее уравнений m меньше числа неизвестных $m + n$ (погрешности $\tilde{v}_i$ и приращения x_j). Вследствие этого, система (269) не имеет единственного решения. На практике в ней отбрасывают вектор погрешностей $\boldsymbol{v}$, учитывая малые значения входящих в него величин, в результате решают СЛАУ, записанную в виде

$$Ax = b. \qquad (270)$$

Количество уравнений, входящих в систему (270), как правило, очень значительно и может достигать нескольких тысяч. Для уменьшения числа уравнений прибегают к группировке измерений и использованию так называемых *средних мест*. Точность решения СЛАУ (270) зависит от обусловленности матрицы коэффициентов $\boldsymbol{A}$, т. е. от характеристики накопления ошибок исходных данных в процессе решения. Число обусловленности матрицы $\boldsymbol{A}$ напрямую зависит от геометрии наблюдений, поэтому очень важно иметь равномерное распределение измерений на орбитальном витке.

Для решения системы (270) в задаче уточнения орбиты используют специальные методы. Например, в комплексе «ОРБИТА» для решения СЛАУ использован сингулярный метод преобразования матрицы коэффициентов $\boldsymbol{A}$ [18]. С целью использования предыдущих результатов уравнивания применяют рекуррентные методы решения, например, фильтр Калмана [20].

Задача уточнения орбиты, в связи с наличием ошибок измерений и моделей движения спутника и станций наблюдения, а также недостаточной обусловленностью СЛАУ, решается методом приближений. От приближения к приближению значение $\boldsymbol{\Delta q}$ уменьшается до достижения приемлемой точности результата решения СЛАУ. Обычно достаточно 2–3 итерации.

5.2. Контрольные вопросы

1. Необходимость решения задачи уточнения орбиты ИСЗ.
2. Требования к геометрии наблюдений в задаче уточнения орбиты ИСЗ.
3. Что положено в математическую основу решения задачи уточнения орбиты ИСЗ?
4. На каком этапе в задаче уточнения орбиты используется прогнозирование движения спутника?
5. Пояснить значение составных частей уравнения наблюдений.
6. Какой метод решения СЛАУ в задаче уточнения орбиты вы бы применили?
7. Каким образом реализуется задача уточнения орбиты в ГНСС ГЛОНАСС?

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФЕМЕРИДЫ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

6.1. Назначение эфемериды спутника

Необходимость наблюдения положения спутника возникает не только в задачах предварительного определения его орбиты или уточнения орбиты, но и в процессе всего периода его существования. Естественно, вести наблюдения положения спутника возможно только тогда, когда он находится в поле зрения наземного наблюдателя. Для обеспечения этого условия для каждой наземной станции слежения за спутниками выполняется вычисление *эфемериды* спутников.

В классическом понимании под эфемеридой понимаются данные, позволяющие отыскать на небосводе наблюдателя небесный объект в заданный момент времени [7]. Эфемерида оформляется в виде таблицы, в которую включены: столбец времени наблюдения объекта и столбцы его координат, относящихся обычно к горизонтной системе. Для эфемериды искусственного спутника Земли очень важным является включение в эфемериду данных о моменте появления спутника в зоне наблюдения и о моменте выхода из зоны наблюдения, а также о положении спутника на максимальной высоте над горизонтом.

Для ГНСС 2-го поколения содержание эфемериды отличается от классического. Навигационное сообщение, транслируемое НИСЗ, включает в себя орбитальную информацию, используемую для вычисления положения спутника, а также другую информацию. Навигационное сообщение содержит также *альманах*, который позволяет приемником наблюдателя определить, какие спутники можно наблюдать в пределах радиовидимости.

Следует отметить, что точность эфемериды спутника по времени не превышает секунд, а точность определения положения находится в пределах нескольких угловых минут. В данном разделе рассмотрим алгоритм графического построения эфемериды спутника.

6.2. Расчет трассы спутника

Трассой спутника называется геометрическое место точек пересечения геоцентрических радиус-векторов ИСЗ с земной поверхностью [19] (рис. 27).

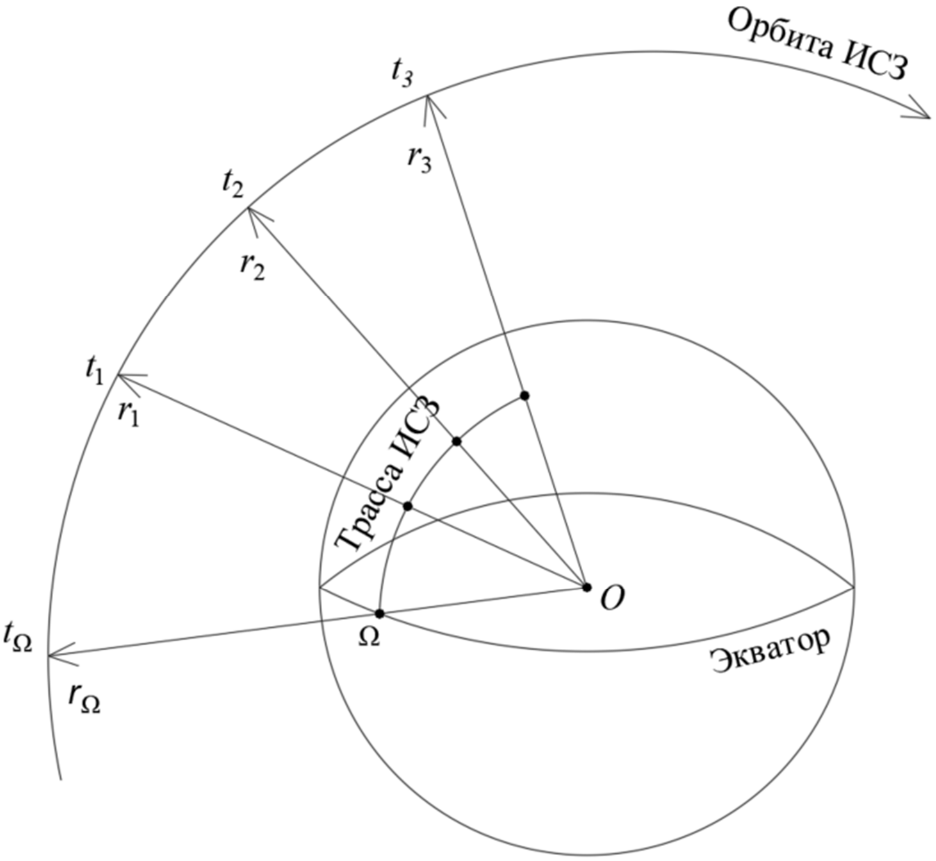


Рис. 27. Трасса спутника

На рис. 27 обозначены:

r_1, r_2, r_3 – положения спутника в моменты времени t_1, t_2, t_3 соответственно;

m_i – положение спутника на орбите в моменты времени t_i, в том числе в точке m_Ω пересечения восходящего узла орбиты;

Ω – подспутниковая точка, соответствующая восходящему узлу орбиты ИСЗ.

Расположение трассы спутника на поверхности Земли позволяет определить границы зоны видимости ИСЗ с наземных пунктов наблюдения. При построении трассы ИСЗ используют форму Земли в виде шара. Координаты точек трассы в таком случае получают в виде геоцентрических широты φ и долготы λ.

Форма трассы определяется главным образом наклонением орбиты i и периодом обращения спутника T. Для спутников с прямым движением $(i < 90^{\circ})$ с низкими орбитами и небольшим эксцентриситетом трасса похожа на синусоиду, многократно опоясывающую земной шар [4, 19] (рис. 28).

На рис. 28 показаны характерные точки трассы такого вида на двух соседних витках орбиты, при этом t_{Ω} обозначает время пролета спутника через восходящий узел орбиты первого витка. Точка трассы в момент времени t_j имеет географические координаты φ_j и λ_j. Угловая скорость вращения Земли обозначена как $\omega_З$. В связи с вращением Земли вокруг своей оси с запада на восток относительно орбиты спутника трасса смещается в обратном направлении на величину $\omega_З T$ за один виток.

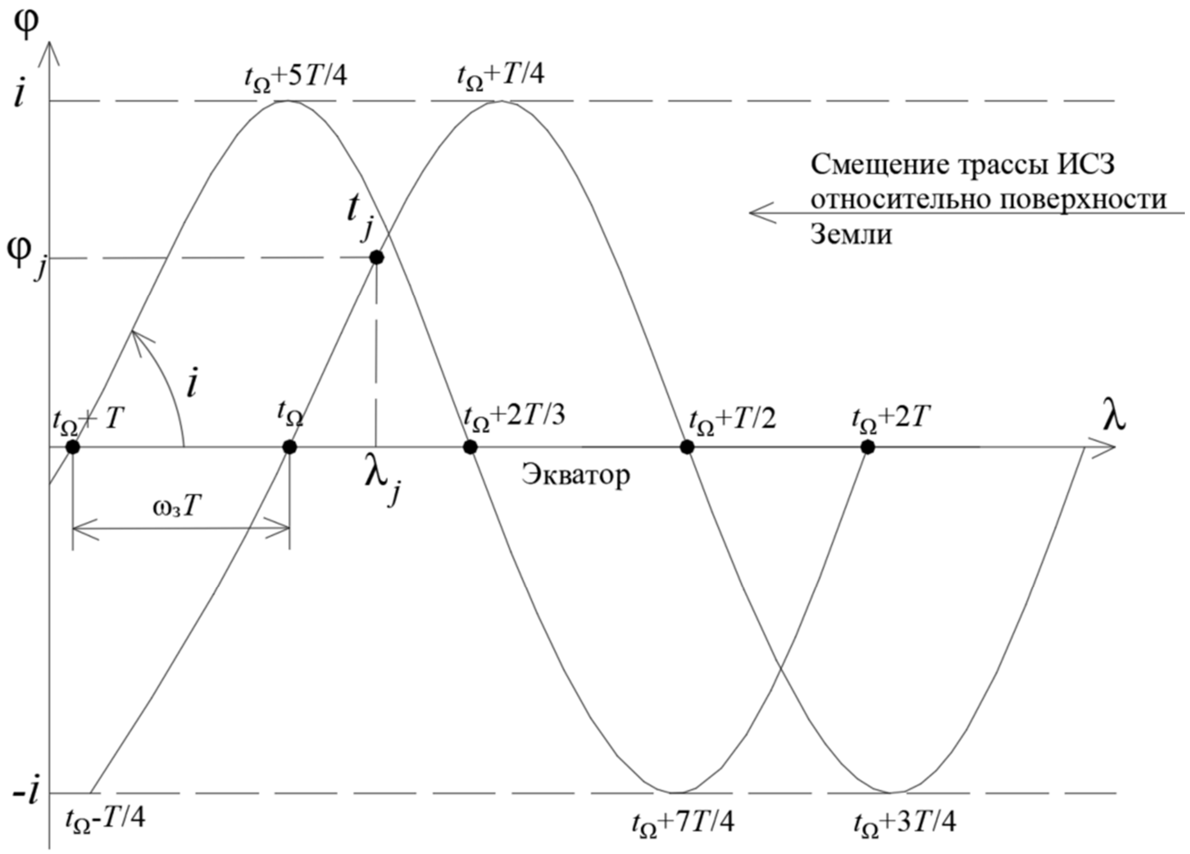


Рис. 28. Изображение трассы спутника на карте в проекции Меркатора

Для орбит с большими периодами обращения и большими значениями эксцентриситета Земля в своем вращении на некоторых широтах (особенно вблизи экватора) будет обгонять спутник и на трассе могут появляться петли.

Для спутников с синхронными орбитами ($T = 23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}04^{\mathrm{s}}$) с наклонением i, отличным от нуля, трасса имеет форму восьмерки, перекрестие которой расположено в некоторой точке экватора. Для стационарного спутника ($i = 0^{\circ}$, $T = 23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}04^{\mathrm{s}}$) трасса спутника вырождается в точку, так как угловые скорости геоцентрического радиус-вектора такого спутника и Земли совпадают.

Отметим, что возмущения в реальном движении спутника вносят свои коррективы в характер трассы спутника.

Построение трассы спутника сводится к определению геоцентрических сферических координат φ и λ подспутниковых точек и нанесению их на карту земной поверхности в какой-либо картографической проекции. Обычно в качестве такой проекции выбирают проекцию Меркатора, главным достоинством которой является изображение параллелей и меридианов в виде параллельных прямых. Но сразу отметим и недостаток этой проекции – искажение масштаба по оси φ по мере удаления от экватора.

Для расчета трассы спутника достаточно получить *географические координаты* подспутниковых точек, соответствующих точкам орбиты спутника, отстоящим друг от друга на угловом расстоянии порядка 30–40 градусов. При этом желательно зафиксировать верхнюю и нижнюю точки трассы, которые на рис. 28 соответствуют моментам $t_{\Omega} + \frac{1}{4}T$ и $t_{\Omega} + \frac{3}{4}T$ соответственно. Значения φ_j и λ_j для точки трассы с номером j можно получить по формулам сферической тригонометрии из решения сферического треугольника $\Omega m_i m'_j$ [4] (рис. 29).

1. Вычисление эксцентрической аномалии E_{Ω} для восходящего узла орбиты Ω

$$E_{\Omega} = 2\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right). \qquad (271)$$

Аргумент перигея ω в формуле (271) играет роль истинной аномалии v_Ω, отсчитываемой от перигея орбиты π в сторону восходящего узла Ω.

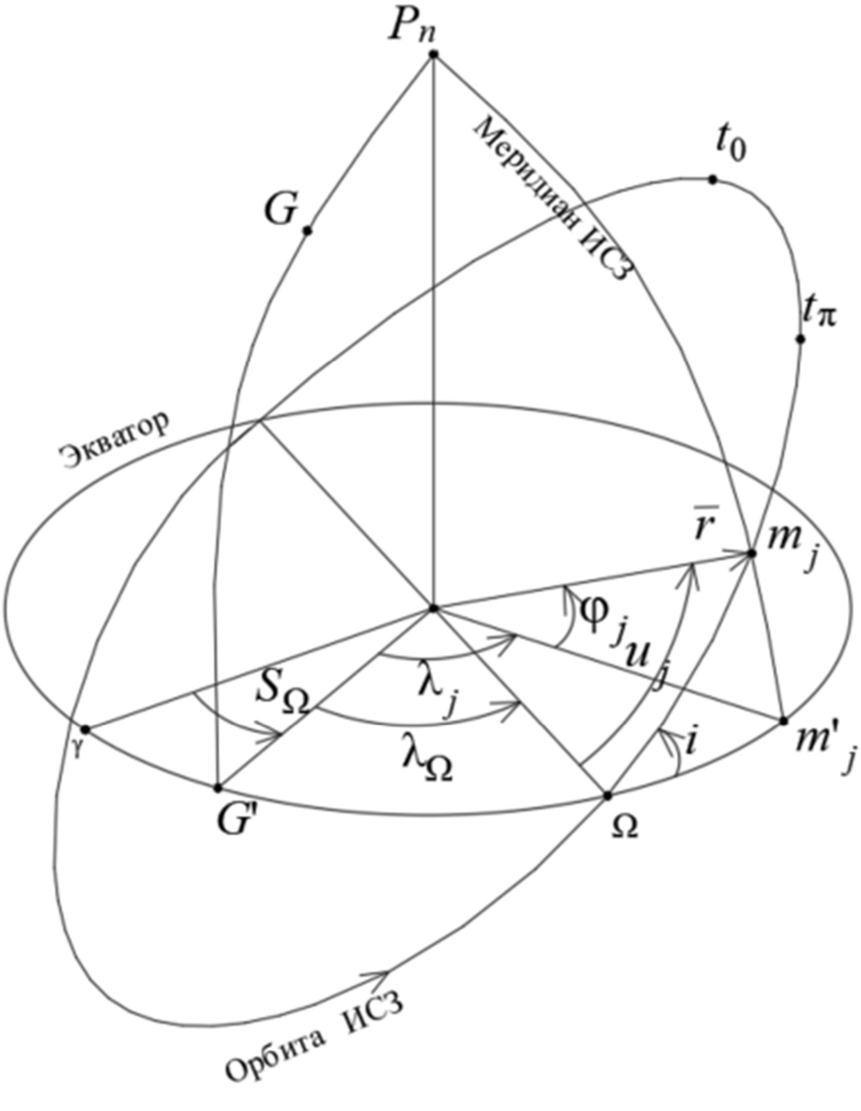


Рис. 29. Положение ИСЗ в географической системе координат

2. Вычисление средней аномалии M_Ω для точки Ω

$$M_\Omega = E_\Omega - e \sin E_\Omega . \tag{272}$$

1. Вычисление времени полета спутника от перигея орбиты до положения спутника в начальный момент времени t_0

$$\Delta t = \frac{M_0}{n}, \qquad (273)$$

где n – среднее движение спутника.

4. Вычисление времени пролета спутника через перигей орбиты

$$t_\pi = t_0 - \Delta t. \qquad (274)$$

5. Вычисление времени пролета спутника через восходящий узел орбиты

$$t_\Omega = t_\pi + \frac{M_\Omega}{n}. \qquad (275)$$

6. Вычисление звездного времени S_Ω, пролета спутника через восходящий узел орбиты

$$S_\Omega = S_0 + t_\Omega (1 + \mu), \qquad (276)$$

где S_0 – звездное время в гринвичскую полночь; μ – коэффициент перехода от шкалы солнечного времени в звездную шкалу, равный 0,002 737 909 3 [7].

7. Вычисление географической широты φ_j подспутниковой точки, соответствующей положению спутника с аргументом широты u_j

$$\varphi_j = \arcsin(\sin i \sin u_j). \qquad (277)$$

Значения аргумента широты u_j при построении трассы задаются. Обычно они представляют собой следующий ряд значений: 0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315 и 360°, т. е. охватывают полностью начальный виток орбиты спутника. При этом значение аргумента широты, равное 0°, соответствует времени t_Ω пролета спутника через восходящий узел орбиты и имеет номер j =1. Для каждого последующего значения аргумента широты из приведенного выше ряда его номер j увеличивается на единицу. Для $u_j = 360^\circ$ номер j равен 9.

8. Для вычисления географической долготы λ_j для точки трассы с номером j необходимо использовать ряд формул:

$$\lambda_\Omega = \Omega - S_\Omega;$$

$$\Delta\lambda_j = \omega_З \left(t_j - t_\Omega \right);$$

$$\Delta\alpha_j = \begin{cases} \arcsin\dfrac{\mathrm{tg}\varphi_j}{\mathrm{tg}i}, \text{ если } 0 \le u_j \le \dfrac{\pi}{2}; \\ \pi - \arcsin\dfrac{\mathrm{tg}\varphi_j}{\mathrm{tg}i}, \text{ если} \dfrac{\pi}{2} < u_j \le \dfrac{3}{2}\pi; \\ 2\pi - \arcsin\dfrac{\mathrm{tg}\varphi_j}{\mathrm{tg}i}, \text{ если} \dfrac{3}{2}\pi < u_j \le 2\pi; \end{cases} \tag{278}$$

$$\lambda_j = \lambda_\Omega + \Delta\alpha_j - \Delta\lambda_j.$$

В формуле (278) величина $\Delta\alpha_j$ представляет собой поправку за перемещение спутника по орбите, которая имеет положительный знак для спутников с прямым движением и отрицательный знак для спутников с обратным движением. Величина $\Delta\lambda_j$ представляет собой смещение трассы спутника по долготе в западном направлении вследствие вращения Земли.

9. Вычисление времени t_j, соответствующему положению спутника с аргументом широты u_j:

$$\begin{aligned} \Delta t_j &= \frac{u_j}{n}; \\ t_j &= t_\Omega + \Delta t_j \end{aligned} \quad . \tag{279}$$

Для построения трассы спутника вычисленные значения φ_j и λ_j наносим на карту в проекции Меркатора и соединяем плавной кривой.

6.3. Вычисление радиуса зоны видимости

Радиус β *зоны видимости спутника* с наземного пункта с географическими координатами φ, λ может быть получен из решения треугольника ОNm (рис. 30)

$$\beta = \arccos\left(\frac{R}{r}\cos h_{\min}\right) - h_{\min}, \tag{280}$$

где R – средний радиус Земли; r – геоцентрическое расстояние до спутника; $h_{\min}$ – минимально допустимый угол наблюдения спутника над горизонтом наблюдателя (*маска спутника*).

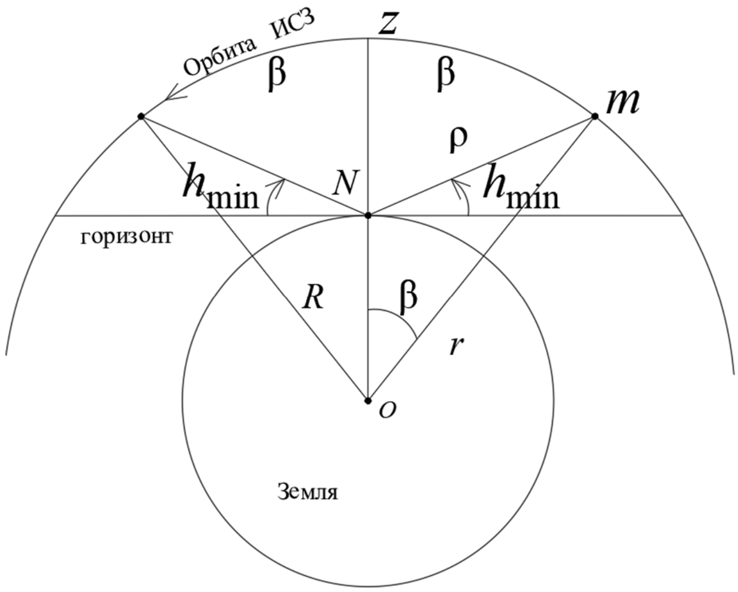


Рис. 30. Радиус зоны видимости ИСЗ

Зона видимости спутника с наземного пункта наносится на карту следующим образом. Сначала на карту наносят положение пункта наблюдения по его координатам φ_j и λ_j. Затем вычисляют координаты четырех точек, отстоящих от положения наблюдателя на угловом расстоянии, равном радиусу зоны видимости β, к северу, востоку, югу и западу: $\varphi+\beta,\lambda$; $\varphi,\lambda+\beta$; $\varphi-\beta,\lambda$; $\varphi,\lambda-\beta$. Наносят координаты этих точек на карту и соединяют их выпуклой кривой, получая тем самым границы зоны видимости (рис. 31).

Если трасса ИСЗ не пересекает зону видимости, то ее смещают по долготе на целое число витков столько раз, чтобы трасса пересекла зону видимости спутника. Затем методом интерполирования определяют моменты входа $t_{\text{вх}}$ и выхода $t_{\text{вых}}$ спутника из поля зрения наблюдателя, а также момент кульминации $t_{кул}$ положения ИСЗ, которое определяют путем опускания перпендикуляра из точки наблюдателя на трассу.

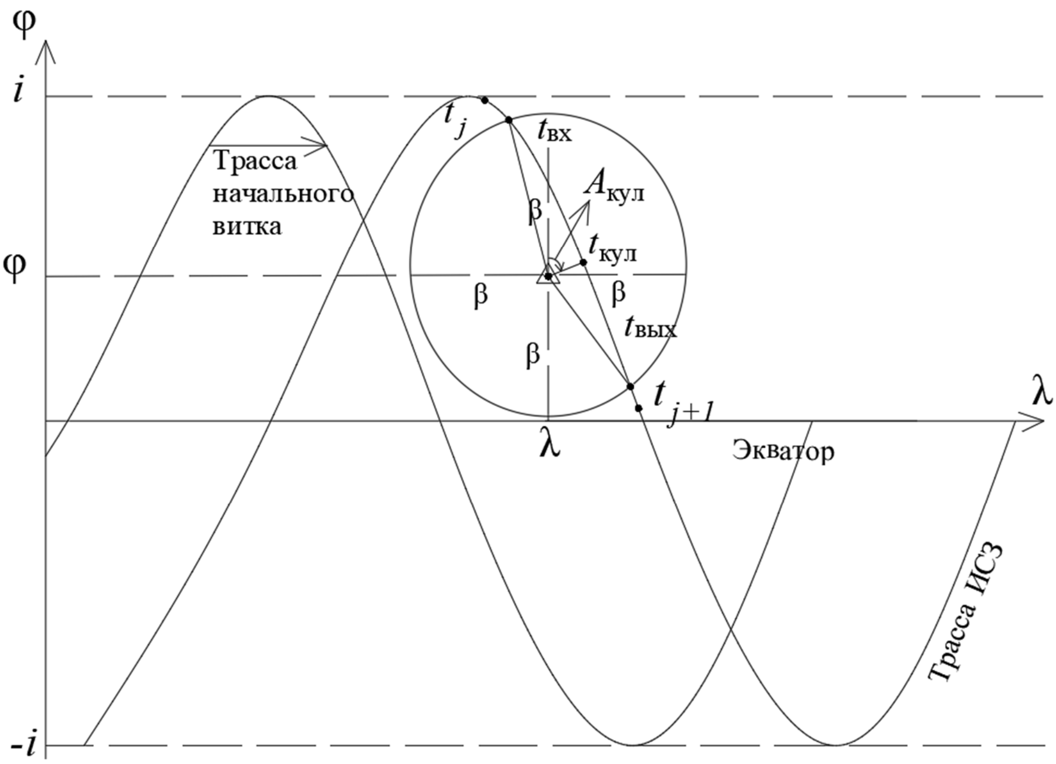


Рис. 31. Прохождение ИСЗ через зону видимости НП

6.4. Определение положения спутника в зоне видимости наблюдателя

Перейдем к составлению *эфемериды спутника*, под которой понимается совокупность положений спутника в пределах времени его пролета в зоне видимости наземного пункта. *Эфемериду спутника* оформляют в виде таблицы, в которой для моментов $t_{вх}$, $t_{вых}$ и $t_{кул}$ приводят соответствующие координаты спутника в горизонтной системе координат A, h. Азимуты точек измеряют относительно направления на север транспортиром, поскольку проекция Меркатора является конформной, т. е. в ней не искажаются углы. Высоты точек над горизонтом наблюдателя вычисляются по формуле

$$h_i = \operatorname{arctg}\left[\left(\cos\zeta_i - \frac{R}{r_i}\right)/\sin\zeta_i\right], \tag{281}$$

где

$$\zeta_i = \sqrt{(\varphi_i - \varphi)^2 + (\lambda_i - \lambda)^2 \cos^2 \varphi_{ср}}; \tag{282}$$

$$r_i = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(u_i - \omega)}. \tag{283}$$

В формулах (281)–(283) подстрочным индексом i обозначены точки трассы спутника, для которых составляется эфемерида: $i = 1$ соответствует точке трассы для момента $t_{вх}$; $i = 2$ соответствует точке трассы для момента $t_{кул}$; $i = 3$ соответствует точке трассы для момента $t_{вых}$.

Значения широты и долготы точек трассы с номерами i =1, 2, 3 снимаются с карты в проекции Меркатора. Значение аргумента широты u_i получают путем интерполирования между точками трассы с номерами j и $j + 1$.

Средняя широта $\varphi_{ср}$ в формуле (282) вычисляется следующим образом:

$$\varphi_{ср} = (\varphi_i + \varphi) / 2. \tag{284}$$

Топоцентрическое расстояние до спутника вычисляется по формуле

$$\rho_i = \sqrt{R^2 + r_i^2 - 2Rr_i \cos h_i}. \tag{285}$$

Вычисление эфемериды спутника удобно представить в виде табл. 3.

Таблица 3

Сводная таблица эфемериды спутника

Номер точки i	$t^{\mathrm{h\,m\,s}}$	A°	h°	r, км	φ°	λ°
1 (вход)						
2 (кульминация)						
3 (выход)						

Входящие в табл. 3 величины φ, λ, r играют вспомогательную роль при вычислении высоты спутника над горизонтом наблюдателя h по формулам (281)–(283).

6.5. Контрольные вопросы

1. Что такое эфемерида спутника? Назовите методы вычисления эфемерид.

2. Зона радиовидимости спутника на небосводе наблюдателя. Основные понятия.

3. Дать определение трассы спутника.

4. Форма трассы спутника, ее изображение на карте поверхности Земли.

5. Что такое кульминация спутника на небосводе наблюдателя?

6. Как по построенному графику трассы спутника определить наклон орбиты?

7. На каких широтах возможно прохождение спутника через зенит?

8. Как по построенному графику можно определить период обращения спутника?

9. Основное содержание эфемериды спутников ГНСС ГЛОНАСС.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие «Основы теории движения искусственных спутников Земли» включает в себя основные разделы рабочей программы одноименной дисциплины и соответствует требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата). Дисциплина «Основы теории движения искусственных спутников Земли» включена в учебный план направления подготовки бакалавров 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (профиль «Геодезия»).

Содержание учебного пособия позволит сформировать у обучающихся компетенции, необходимые для решения следующих задач: изучение движения искусственного спутника Земли от момента запуска до практического использования его наблюдений для решения геодезических задач; обучение основам теории движения, определения и прогнозирования орбит ИСЗ; изучение гравитационного поля Земли на основе анализа движения ИСЗ; обучение основам расчета эфемериды искусственного спутника Земли, построения трассы ИСЗ; применение полученных знаний и умений для внедрения космических технологий при решении задач геодезии.

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность Галине Александровне Нефедовой за помощь в подготовке большинства иллюстраций, наличие которых позволило более полно раскрыть смысл некоторых тем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антонович К. М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии. В 2 т. Т. 1 : монография. – М. : Картгеоцентр, 2005. – 334 с.

2. Антонович К. М. Космическая навигация : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. – 233 с.

3. Афонин К. Ф. Высшая геодезия. Системы координат и преобразования между ними : учеб.-метод. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2011. – 66 с.

4. Ащеулов В. А., Мареев А. В. Основы теории движения космических аппаратов : практикум. – Новосибирск : СГУГиТ, 2021. – 73 с.

5. Бордовицина Т. В., Авдюшев В. А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы : учеб. пособие. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2007. – 178 с.

6. Гиенко Е. Г. Астрометрия и геодезическая астрономия : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2011. – 168 с.

7. Гиенко Е. Г., Ганагина И. Г. Астрономия : сб. описаний практ. работ. – Новосибирск : СГУГиТ, 2017. – 91 с.

8. Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейс. Контрол. Док. (редакция 5.0). – М. : Координац. науч.-информ. Центр ВКС России, 2002. – 57 с.

9. Дементьев Ю. В., Ганагина И. Г. Космическая геодезия : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2017. – 120 с.

10. Каула У. Спутниковая геодезия. Теоретические основы / пер. с англ. П. П. Медведева. – М. : Мир, 1970. – 172 с.

11. Крылов В. И. Основы теории движения ИСЗ. В 2 ч. Ч. 1 : Невозмущенное движение : учеб. пособие. – М. : МИИГАиК, 2015. – 64 с.

12. Крылов В. И. Основы теории движения ИСЗ. В 2 ч. Ч. 2 : Возмущенное движение : учеб. пособие. – М. : МИИГАиК, 2016. – 67 с.

13. Левантовский В. И. Механика космического полета в элементарном изложении. – Изд. 2-е, доп. и перераб. – М. : Наука, 1974. – 488 с.

14. Лукьянов Л. Г., Ширлин Г. И. Лекции по небесной механике : учеб. пособие для вузов. – Алматы : Издат., 2009. – 227 с.

15. Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли / М. К. Тихомиров, И. К. Бажинов, О. В. Гурко и др. – М. : Машиностроение, 1974. – 332 с.

16. Полет космических аппаратов. Примеры и задачи / под ред. Г. С. Титова. – М. : Машиностроение, 1980. – 254 с.

17. Рой А. Движение по орбитам / пер. с англ. С. А. Мирера. – М. : Мир, 1981. – 544 с.

18. Совершенствование и практическая реализация динамического метода космической геодезии : монография / Ю. В. Сурнин, В. А. Ащеулов, С. В. Кужелев, Е. В. Михайлович, Н. К. Шендрик ; под общ. ред. Ю. В. Сурнина. – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. – 193 с.

19. Шалыгин А. С., Санников В. А., Петрова И. Л. Баллистика космических аппаратов : учеб. пособие. – СПб. : Балт. гос. техн. ун-т, 2006. – 131 с.

20. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета ИСЗ. – М. : Наука, 1969. – 355 с.

21. Яшкин С. Н. Небесная механика : учеб. пособие. – М. : МИИГАиК, 2014. – 270 с.

22. Shargorodsky – laser – ranging – 1uas – 2007. Pdf [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https//Infm1.sai.msu.ru.

23. IERS Technical Note 21. IERS Conventions (1996/ D/D/ McCarthy (ed.) – Paris: Central Bureau of IERS. Observatoire de Paris, July 1996. – 95 p.

Учебное издание

Ащеулов Владислав Андреевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Редактор *О. В. Георгиевская*

Компьютерная верстка *Ю. С. Мерзликиной*

Дизайн обложки *А. А. Пантелеев*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.
Подписано в печать 11.12.2023. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 8,60. Тираж 110 экз. Заказ 175.
Гигиеническое заключение
№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.