

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»  
(СГУГиТ)

В. А. Падве, Н. С. Косарев

**СИНТЕЗИРОВАННЫЕ ВАРИАНТЫ  
МНК-ОПТИМИЗАЦИИ ГЕОПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ  
В ГЕОДЕЗИИ, ГНСС-ТЕХНОЛОГИЯХ, МЕТРОЛОГИИ  
И КАДАСТРЕ**

Монография

Новосибирск  
СГУГиТ  
2024

УДК 528.236.4

П127

Рецензенты: доктор технических наук, профессор, СГУПС *В. В. Щербаков*  
кандидат технических наук, доцент, СГУГиТ *А. Г. Барлиани*

Падве, В. А.

П127 Синтезированные варианты МНК-оптимизации геопространственных данных в геодезии, ГНСС-технологиях, метрологии и кадастре : монография / В. А. Падве, Н. С. Косарев. – Новосибирск : СГУГиТ, 2024. – 166 с. – Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-907711-57-0

В монографии рассмотрена технология синтезированных вариантов МНК-оптимизации числовых геопространственных данных с использованием алгебры блочных матриц.

В первом разделе описана теория трех версий синтезированных вариантов МНК-оптимизации геопространственных данных: коррелятной, параметрической и универсальной. Здесь же рассмотрен вопрос о регуляризации по Тихонову систем линейных алгебраических уравнений, являющихся функциональной составляющей каждой версии синтезированных вариантов. Применение регуляризации позволяет использовать каждую версию для обработки «свободных» геодезических построений. Второй раздел посвящен применению синтезированных вариантов МНК-оптимизации данных при обработке измерений на «кусте» опорных реперов, создаваемых для мониторинга строительства и эксплуатации ГЭС, а также рассмотрению примера создания и развития автономного свободного геодезического построения в пространстве  $3d$ , предполагаемого в качестве основы для мониторинга естественного или техногенного объекта. Третий раздел содержит ряд примеров использования синтезированных алгоритмов для обработки и анализа различных видов ГНСС-наблюдений. В нем показана эквивалентность «лучевого» и «сетевое» способов вставки нового пункта в ГНСС-построение. В этом же разделе излагается методика сопоставления результатов обработки ГНСС-наблюдений двумя коммерческими пакетами и принятие решения о различии – идентичности таких пакетов. Дополнительно в третьем разделе решается вопрос об усреднении кратных результатов количественных и качественных данных, относящихся к одним и тем же базовым линиям. Последняя тематика раздела связана с решением задачи пространственно-временного мониторинга стабильности пунктов ГНСС-сетей. В четвертом разделе синтезированные варианты МНК-оптимизации иллюстрируют свой потенциал при анализе метрологических измерений и при сопряжении координат одних и тех же характерных точек кадастровых планов, координированных независимо.

Монография предназначена для научных работников и специалистов в области геопространственного координирования, а также для обучающихся старших курсов геодезических специальностей, магистрантов и аспирантов.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 528.236.4

ISBN 978-5-907711-57-0

© СГУГиТ, 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	5
1. Синтезированные варианты МНК-оптимизации геопространственных данных .....	9
1.1. Общие сведения о синтезированных вариантах МНК-оптимизации геопространственных данных.....	9
1.2. Синтезированный вариант коррелятной версии (СВКВ) МНК-оптимизации и оценки точности геопространственных данных.....	11
1.3. Регуляризация операторных уравнений по Тихонову .....	19
1.4. Синтезированный вариант параметрической версии (СВПВ) МНК-оптимизации и оценки точности геопространственных данных .....	22
1.5. Регуляризация алгоритма СВПВ МНК-оптимизации геопространственных данных.....	33
1.6. Универсальный синтезированный алгоритм (УСА) МНК-оптимизации и оценки точности геопространственных данных.....	39
2. МНК-оптимизация геопространственных данных в свободных геодезических построениях .....	43
2.1. МНК-оптимизация свободного «куста» опорных реперов, создаваемого при наблюдениях за деформациями техногенных объектов .....	43
2.2. МНК-оптимизация автономного свободного геодезического построения (АСГП) в пространстве 3d и его применение при мониторинге инженерного объекта.....	52
2.2.1. Преамбула .....	52
2.2.2. МНК-оптимизация измерений и координирование 3d-АСГП ....	53
2.2.3. Координирование точек объекта с учетом СКП координат пунктов опорного 3d-АСГП .....	63
2.2.4. Совместная одноэтапная обработка измерений по координированию опорных пунктов 3d-АСГП и точек объекта мониторинга ...	78

3. Применение синтезированных вариантов алгоритмов МНК-оптимизации геопространственных данных для обработки и анализа ГНСС-наблюдений.....	86
3.1. Обработка и анализ ГНСС-построений, развиваемых «лучевым» и «сетевым» способами.....	86
3.1.1. Теоретический аспект проблемы .....	86
3.1.2. Результаты сравнений двух способов на фрагменте сети спутниковых дифференциальных станций ГЛОНАСС НСО и на сети регионального геодинамического полигона ООО «ЛУКОЙЛ-Западная Сибирь» .....	94
3.2. Сравнение результатов обработки ГНСС-наблюдений, выполненных на одном объекте, коммерческими пакетами Trimble и CREDO .....	98
3.3. Усреднение значений приращений координат и их ковариационных матриц при повторных ГНСС-измерениях базовых линий .....	107
3.4. Пространственно-временной мониторинг стабильности пунктов геодезических построений .....	115
4. Применение синтезированных алгоритмов МНК-оптимизации геопространственных данных в метрологии и кадастре.....	126
4.1. Анализ результатов многолетних измерений на линейных базисах с помощью алгоритма СВПВ МНК-оптимизации геопространственных данных.....	126
4.2. Применение СВПВ МНК-оптимизации геопространственных данных для оценки точности определения характерных точек объектов недвижимости.....	134
4.3. Сопряжение координат характерных точек смежных границ земельных участков на основе СВПВ МНК-оптимизации геопространственных данных.....	142
Заключение .....	155
Библиографический список.....	158

## ВВЕДЕНИЕ

Метод наименьших квадратов (МНК), первые публикации о котором появились более двухсот лет тому назад, продолжает оставаться наиболее эффективной вычислительной технологией при математической обработке числовых данных, характеризуемых неопределенностями своих значений с помощью ковариационных матриц.

Основоположники теории метода наименьших квадратов, Лежандр [1], Гаусс [2] и Эдрейн [3] применяли этот вычислительный прием с целью устранения противоречий в результатах вычислений одних и тех же параметров по различным данным измерений. При этом *функциональная модель*, связывающая измеряемые величины и параметры в *единую систему*, была известна исследователю с точностью до соответствующих математических выражений. Измерениями исследуемых основоположниками объектов, в которых возникла задача устранения противоречий, были: градусные измерения, определения элементов орбит небесных тел, геодезические построения, обеспечивающие координатизацию пространства [4].

Результаты измерений, уже тогда характеризовались относительными неопределенностями порядка  $10^{-3}$ - $10^{-4}$ , как минимум. Это позволяло выполнять линеаризацию *функциональных моделей* с точностью до линейных членов и решать в дальнейшем системы линейных

алгебраических уравнений (СЛАУ). Количество  $n$  наблюдений, измерений превышало число  $r$  функциональных моделей, отражавших наличие математических связей между измеряемыми величинами, что приводило к возможности получения отличающихся результатов, относящихся к одним и тем же величинам.

Для устранения возникающих противоречий вышеназванные отцы-основатели и использовали *стабилизирующий функционал наименьших квадратов*, который в современной нотации имеет вид  $\Psi = \hat{V}^T K^{-1} \hat{V} = \min$ . Термин «метод наименьших квадратов» (МНК) ввел именно А. Лежандр [1]. Решение СЛАУ под условием наименьших квадратов позволяет получать не только оптимальные по точности результаты, но и строго оценивать их точность.

В России уже в 1836 году военным геодезистом А.П. Болотовым было разработано «Руководство по приложению МНК в геодезических вычислениях». В 1857 году академик А.Н. Савич издал «Приложения теории вероятностей к вычислению наблюдений и геодезических измерений», которая «имела большой успех не только в России, но и в Германии, где она была переведена на немецкий язык» [5]. Исследования ученых XX-го века, таких как С.Н. Бернштейн, А.Н. Колмогоров, Н.В. Смирнов, Ю.В. Линник, К. Пирсон, Р. Фишер, Ю. Нейман, Г. Крамер, А. Эйткен, С. Радхакришна Рао и другие внесли огромный вклад в развитие теории вероятностей и математической статистики, важной частью которых является метод наименьших квадратов.

Библиографический список данной книги включает в себя как имена некоторых из упомянутых ученых, так и фамилии ныне здравствующих наших современников, вносящих свой заметный вклад в развитие методов математической обработки и анализа пространственных данных. Во многом, благодаря этим знаниям, их пониманию и осмыслению, авторам удалось создать данный труд.

В настоящее время МНК находит широкое применение как при оптимизации данных в статических системах, так и в динамических, включая фильтрацию Калмана и все виды ГНСС-определений [6].

С другой стороны, уже первые успехи применения МНК-технологии побудили некоторых исследователей решать свои задачи МНК-оптимизации данных *параллельно с подбором вида функциональной модели*. Особенно этим увлеклись экономисты, имеющие дело с «Его высочеством СЛУЧАЕМ», который не обладает свойством «*статистической устойчивости частот*» [7]. Функциональная модель для МНК – первична!

Синтезированные варианты МНК-оптимизации геопро пространственных данных, теория которых излагается в предлагаемой книге, всегда имеют дело с *известными видами функциональных моделей*. Основным преимуществом синтезированных алгоритмов является та их особенность, что обратная блочная матрица коэффициентов синтезированной системы содержит в себе следующую практически очень важную информацию: априорную ковариационную матрицу уравненных значений измерений, априорную ковариационную матрицу

уравненных значений параметров и блоки псевдообратных матриц  $A^+$  и  $(A^+)^T$ , по которым определяется ранг исходной матрицы плана  $A$  и выполняется построение ковариационной матрицы уравненных параметров для случая, когда матрица плана  $A$  является матрицей неполного столбцового ранга.

Авторы благодарят профессора, доктора технических наук, заведующего кафедрой «Инженерная геодезия» СГУПС В.В. Щербакова и доцента, кандидата технических наук, доцента кафедры прикладной информатики и информационных систем СГУГиТ А. Г. Барлиани за работу по рецензированию данной монографии и полезные замечания и советы, несомненно, улучшившие её содержание.

# 1. СИНТЕЗИРОВАННЫЕ ВАРИАНТЫ МНК-ОПТИМИЗАЦИИ ГЕОПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ

## 1.1. Общие сведения о синтезированных вариантах МНК-оптимизации геопространственных данных

Математическая обработка результатов измерений в геодезии широко использует групповые и комбинированные алгоритмы приближенного и строгого уравнивания геопространственных данных. Приближенные и строгие групповые методы уравнивания использовались с первых лет практического применения МНК-оптимизации геопространственных данных [2, 8-21].

Комбинированные алгоритмы, например, [2, 9, 11, 13-16] и др., также хорошо известны геодезистам. Называя эти алгоритмы *комбинированными*, авторы делают упор на тот факт, что функциональная составляющая математической модели геопространственных данных содержит одновременно как условные ( $B$ ), так и параметрические ( $A$ ) уравнения связи. Тот факт, что математическая модель имеет стохастическое расширение в виде весовой ( $P$ ) или ковариационной ( $K$ ) матрицы, полагается само собой разумеющимся, и внимание на нем не акцентируется. Кроме того, комбинированная система содержит и числовую информацию о результатах измерений в блоке свободных

членов  $L$ , о чем так же нет и намек в названии «комбинированная». Блочные матрицы такого алгоритма названы авторами [14] «гиперматрицами»: гиперматрица коэффициентов  $M$ , гипервектор корней  $U$ , гипервектор свободных членов  $b$ :  $M \cdot U = b$ . Подобная «гиперсистема», которую впредь мы будем называть просто системой, имеет такую блочную структуру:

$$M \cdot U = b \rightarrow \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 & B^T \\ 0 & 0 & A^T \\ B & A & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{X} \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Первая строка системы (1.1)  $K^{-1}\tilde{V} + B^T\Lambda = 0$  является *необходимым условием существования экстремума* сглаживающего функционала  $\Psi = \tilde{V}^T K^{-1}\tilde{V} = \min$ , который вводится в качестве стабилизатора третьей строки этой системы: линейризованной комбинированной функциональной модели  $B\tilde{V} + A\tilde{X} = L$ .

В работах Падве В.А. [22-24] алгоритмы, подобные приведенному примеру (1.1), названы *синтезированными*, так как при их формировании первоначально происходит *синтез* (объединение отдельных частей в некое целое, обладающее новым качеством) всей имеющейся информации: коэффициентов комбинированной функциональной модели  $B$  и  $A$ , ее свободных членов  $L$  (числовой информации о геодезическом построении) и стохастического расширения математической модели в виде обратной ковариационной матрицы данных  $K^{-1}$ ,

характеризующей априори *качество* измерений, по которым вычислены свободные члены  $L$ .

Решение синтезированной системы (1.1) выглядит так:

$$U = M^{-1} \cdot b \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{X} \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\tilde{Y}} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{\tilde{X}} & A^+ \\ K_{31} & (A^+)^T & -K_{\tilde{\Lambda}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Важнейшим достоинством решения (1.2) является тот факт, что обратная матрица коэффициентов системы содержит на главной диагонали блоки, априорных ковариационных матриц МНК-оптимизированных (*уровненных*) значений измеренных данных  $K_{\tilde{Y}}$  и параметров  $K_{\tilde{X}}$ , а также прямую и транспонированную псевдообратную для  $A$  матрицу:  $A^+$  и  $(A^+)^T$ . Обоснование этого факта будет дано при детальном анализе структуры гиперматрицы решения синтезированных алгоритмов.

## 1.2 Синтезированный вариант коррелятной версии (СВКВ) МНК-оптимизации и оценки точности геопространственных данных

МНК-оптимизация геопространственных данных решает три фундаментальные задачи математической обработки их числовых значений:

- нахождение действительных, оптимальных по точности и близости к их абсолютным значениям, или «уровненных», («*adjusted*») данных;
- оценку точности исходных данных измерений;

– оценку точности действительных, уравненных значений данных и функций от них.

Классический алгоритм коррелятной версии МНК-оптимизации данных измерений в обозначениях [25], сопровождаемый статистическими характеристиками векторов, которые реализуют его, представлен в табл. 1.1 [6].

Для решения *первой задачи* в рамках СВКВ алгоритма МНК-оптимизации геопространственных данных используют линеаризованные условные уравнения связи

$$B_{rn}\tilde{V}_{n1} + W_{r1} = 0_{r1} \quad (1.3)$$

и МНК-поправки к данным:

$$\tilde{V}_{n1} = -K_{nn}B_{nr}^T\Lambda_{r1}. \quad (1.4)$$

Особо подчеркнем тот факт, что формула (1.4) выводится с использованием функционала «наименьших квадратов»:

$$\Psi = \tilde{V}^T K^{-1}\tilde{V} = \min . \quad (1.5)$$

Преобразовав уравнение (1.3) к неявному виду и объединив его в общую систему с уравнением (1.4), получим *симметричную синтезированную систему*

$$\left. \begin{aligned} K_{nn}^{-1} \tilde{V}_{n1} + B_{nr}^T \Lambda_{r1} &= 0_{n1} \\ B_{rn} \tilde{V}_{n1} &= -W_{r1} \end{aligned} \right\}, \quad (1.6)$$

блочное представление которой принимает вид:

$$\begin{pmatrix} K^{-1} & B^T \\ B & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -W \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Таблица 1.1

Классический алгоритм коррелятной версии МНК-оптимизации  
данных

<b>Вектор</b>	<b>Математическое ожидание</b>	<b>Ковариационная матрица</b>	<b>Комментарии</b>
Измерения $y_{n1}$	$E(y_{n1}) = \mathcal{Q}_{n1}^{*})$	$K_y = K$	*) Отсутствие систематических ошибок
Истинные погрешности измерений $V_{n1}$	$E(V_{n1}) = 0_{n1}^{*})$	$K_V = K$	*) Случайный характер погрешностей
Свободные члены условных и нормальных, уравнений $W_{r1}$	$E(W_{r1}) = 0_{r1}^{*})$	$K_W = N$	*) Допуски невязок: $W_j^{\text{don}} = t_\alpha \sqrt{N_{jj}}$
Коррелаты условных уравнений $\Lambda_{r1}$	$E(\Lambda_{r1}) = 0_{r1}^{*})$	$K_\Lambda = N^{-1}$	*) Допуски коррелат: $\lambda_j^{\text{don}} = t_\alpha \sqrt{(N^{-1})_{jj}}$

<b>Вектор</b>	<b>Математическое ожидание</b>	<b>Ковариационная матрица</b>	<b>Комментарии</b>
МНК-поправки в измерения $\tilde{V}_{n1}$	$E(\tilde{V}_{n1}) = 0_{n1}$ *)  $E(\tilde{V}_{n1}) \neq V_{n1}$ **)	$K_{\tilde{V}} = KB^T N^{-1} BK$	*) Допуски поправок: $\tilde{V}_i^{con} = t_\alpha \sqrt{(K_{\tilde{V}})_{ii}}$ **) $\tilde{V}_{n1}$ смещённая оценка $V_{n1}$
Уравненные значения измерений $\bar{Y}_{n1}$	$E(\bar{Y}_{n1}) = \mathcal{Y}_{n1}$ *)	$K_{\bar{Y}} = K - K_{\tilde{V}}$	*) $\bar{Y}_{n1}$ является несмещённой оценкой измерений $\mathcal{Y}_{n1}$
<b>Обозначения</b>	$\mathcal{Y}_{n1}$ – вектор ист. знач. измеряемых величин; $B_{rn}$ – коэффициенты условных уравнений; $N_{rr}$ – коэффициенты нормальных уравнений коррелат; $t_\alpha$ – квантиль стандартного нормального распределения; $\alpha$ – уровень значимости; МНК-поправки – оценки погрешностей, найденные по методу наименьших квадратов.		

*Статистические свойства векторов-оценителей классического алгоритма коррелятной версии МНК-оптимизации данных.*

Последовательное, или пошаговое, решение системы (1.7) может быть осуществлено по блочному варианту метода последовательного исключения неизвестных Гаусса. Такое решение является доказательством идентичности результатов, получаемых синтезированным и классическим способами. С ним можно ознакомиться в монографии [25-26].

Блочное решение системы (1.7) позволяет одновременно находить:

- вектор МНК-поправок к данным (блок  $\tilde{v}_{n1}$ ) и неопределенные множители Лагранжа (коррелаты, блок  $\Lambda_{r1}$ );
- априорные ковариационные матрицы оптимизированных значений данных (блок  $K_{\bar{Y}}$ ) и коррелат (блок  $K_{\Lambda} = N_{\Lambda}^{-1}$ )

$$\begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{-1} & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\bar{Y}} & K_{\bar{Y}\Lambda} \\ K_{\Lambda\bar{Y}} & -N_{\Lambda}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -W \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Система (1.8) объемнее системы классических нормальных уравнений коррелат:  $[(n+r) \cdot (n+r)] > (r \cdot r)$ . Однако, больший объем вычислений компенсируется тем фактом, что априорная ковариационная матрица оптимизированных данных  $K_{\bar{Y}}$  получается в виде отдельного блока при обращении гиперматрицы коэффициентов системы (1.7) автоматически, а не путем дополнительных вычислений.

Решение *второй задачи* в рамках алгоритма СВКВ МНК-оптимизации геопространственных данных заключается в нахождении апостериорного значения величины  $\mu^2 = \tilde{\sigma}^2$ , которая оценивает масштабный показатель точности (МПТ) измерений  $\sigma^2$ :

$$\sigma^2 = \frac{v^T K^{-1} v}{n}, \quad (1.9)$$

который *теоретически* является функцией квадратичной формы истинных значений поправок  $v_{n1}$  в измерения  $y_{n1}$  [27].

Ковариационная матрица истинных значений поправок  $K_v$  – это ковариационная матрица измерений  $K_y$ :  $K_v = K_y = K$  (табл. 1.1).

МПТ измерений обладает двумя важными достоинствами:

- он является безразмерной величиной;
- математическое ожидание МПТ (1.9) равно единице.

Безразмерность МПТ особенно важна при уравнивании физически разнородных данных. Она обусловлена тем фактом, что слагаемые квадратичной формы  $v^T K^{-1} v$  содержат в числителе и знаменателе каждого слагаемого величины второй степени одних и тех же единиц измерений. Естественно, что компоненты вектора  $v_{n1}$  и элементы ковариационной матрицы  $K_{nn}$  должны быть согласованы по своим местам и размерностям, с учетом дольности или кратности единиц измерений.

Математическое ожидание МПТ (1.9) равно единице [25]. В связи с этим, априорное значение МПТ полагается равным именно единице:

$$\sigma_0^2 \equiv 1. \quad (1.10)$$

Теоретическое, истинное, числовое значение квадратичной формы  $v^T K^{-1} v$  в (1.9) не известно. Поэтому на практике оно заменяется МНК-оценкой:

$$\tilde{V}_{1n}^T K_{nn}^{-1} \tilde{V}_{n1}, \quad (1.11)$$

математическое ожидание которой равно числу избыточных данных:

$$E(\tilde{V}_{1n}^T K_{nn}^{-1} \tilde{V}_{n1}) = r. \quad (1.12)$$

Апостериорное значение  $\mu^2$  МПТ данных так же будет характеризоваться единичным математическим ожиданием и оцениваться следующим образом:

$$\tilde{\sigma}^2 = \mu^2 = \frac{\tilde{V}^T K^{-1} \tilde{V}}{r}, \quad (1.13)$$

Практически, числовое значение дроби (1.13) будет отличаться от единицы. В этих условиях необходимо проверить нулевую гипотезу о равенстве параметра  $\sigma^2$  его априорному значению

$$H_0 = \{\sigma^2 = \sigma_0^2 = 1\}, \quad (1.14)$$

против альтернативной гипотезы о невыполнении равенства:

$$H_A = \{\sigma^2 \neq \sigma_0^2\}. \quad (1.15)$$

Гипотеза (1.14) проверяется с помощью теста [28]

$$\chi_{\varepsilon}^2 = \frac{\mu^2 \cdot r}{\sigma_0^2} = \tilde{V}_{1n}^T K_{nn}^{-1} \tilde{V}_{n1}, \quad (1.16)$$

значение которого сравнивается с теоретическими границами:

$$\chi_T^2 = [\chi_H^2; \chi_B^2]. \quad (1.17)$$

Границы теста (1.16) – это квантили  $\chi^2$ -распределения с  $r$  степенями свободы на уровне значимости  $\alpha$

$$\chi_H^2 = \chi_{1-\alpha/2; r}^2, \quad (1.18)$$

а

$$\chi_B^2 = \chi_{\alpha/2; r}^2. \quad (1.19)$$

Когда  $\chi_{\varepsilon}^2 \notin \chi_T^2$ , то нулевая гипотеза  $H_0$  – отвергается, то есть отличие значения МПТ  $\mu^2$  от единицы (априорного значения) не случайно: некачественные измерения, неточные исходные данные или другие причины.

Решение *третьей задачи* в рамках алгоритма СВКВ МНК-оптимизации данных заключается в оценке точности уравненных значений измерений и функций от них.

Априорная ковариационная матрица уравненных измерений (табл. 1.1) имеет вид

$$K_{\bar{y}} = K - K_{\tilde{y}}, \quad (1.20)$$

где

$$K_{\tilde{y}} = K B^T N^{-1} B K. \quad (1.21)$$

Апостериорные значения этих матриц равны априорным, умноженным на величину  $\mu^2$ :

$$\bar{K}_{\bar{y}} = \mu^2 \cdot K_{\bar{y}} \quad \text{и} \quad \bar{K}_{\tilde{y}} = \mu^2 \cdot K_{\tilde{y}}. \quad (1.22)$$

Средняя квадратическая погрешность любого уравненного измерения  $\bar{y}_i$  и/или любой МНК-поправки  $\tilde{y}_i$  определяется с помощью диагональных элементов апостериорных значений матриц (1.22):

$$m_{\bar{y}_i} = \sqrt{\{\bar{K}_{\bar{y}}\}_{ii}} \quad \text{и} \quad m_{\tilde{y}_i} = \sqrt{\{\bar{K}_{\tilde{y}}\}_{ii}}. \quad (1.23)$$

### 1.3. Регуляризация операторных уравнений по Тихонову

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A_{n \cdot k} \cdot z_{k \cdot 1} = u_{k \cdot 1}. \quad (1.24)$$

представляет собой частный случай операторного уравнения первого рода [29]. Когда матрица  $A_{n \cdot k}$  и правая часть  $u_{k \cdot 1}$  системы (1.24) известны лишь приближенно, то есть мы имеем в качестве коэффициентов приближенную матрицу  $\tilde{A}_{n \cdot k}$ , а в качестве правой части приближенный вектор  $\tilde{u}_{k \cdot 1}$ , то возникает задача нахождения приближенного решения  $\tilde{z}_{k \cdot 1}$ , которое было бы устойчивым к малым изменениям его правой части  $\tilde{u}_{k \cdot 1}$ .

Предполагается, что коэффициенты и правая часть уравнения (1.24) известны с некоторыми погрешностями  $h > 0$  и  $\delta > 0$ , соответственно:

$$\|\tilde{A} - A\| \leq h \quad \text{и} \quad \|\tilde{u} - u\| \leq \delta. \quad (1.25)$$

Задача нахождения приближенного решения уравнения (1.24) была поставлена и решена *методом регуляризации*, разработанным академиком А.Н. Тихоновым в середине прошлого (XX) века [30-31]. В дальнейшем метод регуляризации стал активно применяться для решения задач МНК-оптимизации результатов геодезических измерений [32-34].

Решение  $z_{k1}$  СЛАУ (1.24) с использованием обратного оператора  $A_{nk}^{-1}$ , то есть

$$z_{k1} = A_{nk}^{-1} u_{k1}, \quad (1.26)$$

возможно лишь при условии, что  $n = k$  и  $\det(A) \neq 0$ . В такой ситуации, при плохой обусловленности матрицы  $A_{kk}$  или её особенности

( $\det(A) = 0$ ), система (1.24) *регуляризуется* путем добавления к матрице  $A_{kk}$  единичной матрицы  $I_{kk}$ , модулированной некоторым числовым параметром  $\alpha = 10^{-m}$ :

$$(A_{k \cdot k} + \alpha \cdot I_{k \cdot k}) \cdot z_{k \cdot 1} = u_{k \cdot 1}. \quad (1.27)$$

Параметр  $\alpha$  называется *параметром регуляризации*.

Модулированная система (1.27) позволяет получить *регуляризованное решение*:

$$\tilde{z}_{k \cdot 1} = (A_{k \cdot k} + \alpha \cdot I_{k \cdot k})^{-1} \cdot u_{k \cdot 1}, \quad (1.28)$$

в котором множитель  $(A_{k \cdot k} + \alpha \cdot I_{k \cdot k})^{-1}$  представляет собой *регуляризующий оператор*.

Величина регуляризующего параметра  $\alpha$  зависит от точности, с которой известны коэффициенты и правая часть уравнения (1.24), определяемая неравенствами (1.25). Известна технология [35], которая позволяет находить эту величину методом итераций, ориентируясь на неравенства (1.25).

В качестве первого шага предлагается определять некоторые значения  $\alpha = 10^{-m} > 0$ , ориентируясь на числа  $h > 0$  и  $\delta > 0$ . Далее, увеличивая показатель степени  $m$ , находим по формуле (1.28) новые значения вектора  $(z_{k1})^\alpha$ , соответствующие новой величине параметра

регуляризации  $\alpha$ . Условием завершения процесса итераций является выполнение равенства

$$\|\tilde{u}_{k-1} - \tilde{A}_{k \cdot k} \cdot z_{k-1}^\alpha\| = \delta + h \|z_{k-1}^\alpha\|. \quad (1.29)$$

#### 1.4. Синтезированный вариант параметрической версии (СВПВ) МНК-оптимизации и оценки точности геопространственных данных

Классический алгоритм параметрической версии МНК-оптимизации геопространственных данных и параметров представлен в табл. 1.2 [25].

*Таблица 1.2*

Классический алгоритм параметрической версии МНК-оптимизации  
геопространственных данных и параметро

<i>Вектор</i>	<i>Математическое ожидание</i>	<i>Ковариационная матрица</i>	<i>Комментарии</i>
Измерения $y_{n1}$	$E(y_{n1}) = \mathcal{O}_{n1}^*)$	$K_y = K$	*) Отсутствие систематики
Приближенные параметры $x_{k1}$	$E(x_{k1}) = x_{k1}^*)$	$K_x^{-1} \equiv 0^*)$	*) $x_{k1}$ – Неслучайный вектор
Истинные поправки $X_{k1}$ к параметрам $x_{k1}$	$E(X_{k1}) = X_{k1}^*)$	$K_X^{-1} \equiv 0^*)$	*) $X_{k1}$ – Неслучайный вектор

<b>Вектор</b>	<b>Математическое ожидание</b>	<b>Ковариационная матрица</b>	<b>Комментарии</b>
Истинные погрешности измерений $V_{n1}$	$E(V_{n1}) = 0_{n1}^*)$	$K_V = K$	*) Малость поправки $ v_i  \ll  y_i $
Свободные члены $L_{n1} = y_{n1} - \mathcal{F}_{n1}(x_{k1})$	$E(L_{n1}) = A_{nk} X_{k1}^*)$	$K_L = K$	*) $A_{nk} X_{k1}$ – неизвестные числа
Свободные члены НУ $G_{k1} = A_{kn}^T K_{nn}^{-1} L_{n1}$	$E(G_{k1}) = N_{kk} X_{k1}^*)$	$K_G = N$	*) $N_{kk} X_{k1}$ – неизвестные числа
МНК-поправки $\tilde{X}_{k1}$ к параметрам $x_{k1}$	$E(\tilde{X}_{k1}) = X_{k1}^*)$	$K_{\tilde{X}} = N^{-1}$	*) $\tilde{X}_{k1}$ – несмещённая оценка вектора $X_{k1}$
МНК-поправки в измерения $\tilde{V}_{n1}$	$E(\tilde{V}_{n1}) = 0_{n1}^*)$ $E(\tilde{V}_{n1}) \neq V_{n1}^{**})$	$K_{\tilde{V}} = K - AN^{-1}A^T$	*) Допуск поправки $\tilde{V}_i^{don} = t_\alpha \sqrt{(K_{\tilde{V}})_{ii}}$ **) $\tilde{V}_{n1}$ это смещённая оценка $V_{n1}$ !
Уравненные параметры $\bar{X}_{k1}$	$E(\bar{X}_{k1}) = \mathcal{X}_{k1}^*)$	$K_{\bar{X}} = N^{-1}$	*) $\bar{X}_{k1}$ несмещённая оценка $\mathcal{X}_{k1}$
Уравненные измерения $\bar{Y}_{n1}$	$E(\bar{Y}_{n1}) = \mathcal{Y}_{n1}^*)$	$K_{\bar{Y}} = AN^{-1}A^T$	*) $\bar{Y}_{n1}$ несмещённая оценка $\mathcal{Y}_{n1}$
<b>Обозначения</b>	$\mathcal{Y}_{n1}$ и $\mathcal{X}_{k1}$ – векторы истинных значений измеряемых величин и параметров; $A_{nk}$ – коэффициенты линеаризованных параметрических уравнений (матрица плана); $N_{kk}$ – коэффициенты параметрических нормальных уравнений (НУ).		

*Статистические свойства векторов-оценителей классического алгоритма параметрической версии МНК-оптимизации данных.*

Алгоритм СВПВ МНК-оптимизации геопространственных данных решает те же фундаментальные задачи по их обработке и анализу, что и классический алгоритм:

- нахождение действительных (оптимальных по точности и близости к их абсолютным значениям, или *уровненных*) значений как самих данных, так и параметров;
- оценку точности исходных данных измерений;
- оценку точности действительных значений данных, параметров и функций от последних.

Для решения в рамках СВПВ *первой задачи* МНК-оптимизации, воспользуемся линеаризованными параметрическими уравнениями поправок, приведенными к неявному виду:

$$-\tilde{V}_{n1} + A_{nk} \cdot \tilde{X}_{k1} - L_{n1} = 0_{n1}, \quad (1.30)$$

которые также стабилизируются МНК-функционалом  $\Psi = \tilde{V}^T K^{-1} \tilde{V} = \min$ .

Представим преобразованные уравнения поправок (1.30) в блочной форме:

$$\left( -I_{nn} \ ; \ A_{nk} \right) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{V}_{n1} \\ \tilde{X}_{k1} \end{pmatrix} + (-L_{n1}) = 0_{n1}. \quad (1.31)$$

Отметим, что блочная запись уравнения (1.31) формально соответствует коррелятному уравнению (1.3), на базе которого и был разработан его синтезированный вариант:

$$\begin{pmatrix} K^{-1} & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -W \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Произведем в данной системе замену блоков матрицы коэффициентов, вектора неизвестных и вектора свободных членов с учетом уравнений (1.31).

Ковариационная матрица измерений  $K^{-1}$  расширится:

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} K_y^{-1} & 0 \\ 0 & K_x^{-1} \equiv 0 \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

где  $K_y^{-1}$  – обратная ковариационная матрица измерений  $y_{n1}$ ;

$K_x^{-1}$  – обратная ковариационная матрица приближенных значений параметров  $x_{k1}$ , тождественно принимаемая равной нулевой матрице, поскольку сами приближенные значения параметров полагаются случайными величинами.

Матрица коэффициентов  $B$  станет объемнее:

$$B = (-I : A), \quad (1.33)$$

где  $I_{nn}$  – единичная матрица (коэффициент при векторе  $\tilde{V}$  в уравнении (1.30)), и  $A_{nk}$  – матрица коэффициентов линеаризованных параметрических уравнений связи (*матрица плана*).

Вектор корней системы (1.30) так же увеличится за счет блока МНК-поправок  $\tilde{X}$  к приближенным значениям параметров:

$$\begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{X} \\ \lambda \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Вектор правой части (1.30) претерпит следующие изменения: отрицательный вектор невязок ( $-W$ ) будет заменен вектором свободных членов  $L$  и добавится ещё один нулевой блок:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

После такой замены синтезированный вариант коррелятной версии (1.7) трансформируется в синтезированный вариант параметрической версии:

$$M \cdot U = b \rightarrow \begin{pmatrix} K_y^{-1} & 0 & -I \\ 0 & K_x^{-1} \equiv 0 & A^T \\ -I & A & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{X} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Решение системы (1.36)

$$U = M^{-1}b \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{X} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\bar{Y}} & K_{\bar{Y}\bar{X}} & K_{\bar{Y}\lambda} \\ K_{\bar{X}\bar{Y}} & K_{\bar{X}} & A^+ \\ K_{\lambda\bar{Y}} & (A^+)^T & -K_{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

позволяет сразу получить:

– *блоки следующих МНК-оценок*: вектор поправок к данным (блок  $\tilde{V}_{nl}$ ), вектор поправок к приближенным значениям параметров (блок  $\tilde{X}_{k1}$ ), вектор неопределенных множителей Лагранжа (блок  $\lambda$ );

– *априорные ковариационные матрицы*: оптимизированных данных (блок  $K_{\bar{Y}}$ ), оптимизированных параметров (блок  $K_{\bar{X}}$ ) и неопределенных множителей Лагранжа (блок  $-K_{\lambda}$ );

– *псевдообратные матрицы*  $A^+$  и  $(A^+)^T$ , с помощью которых определяется ранг матрицы плана  $A_{nk}$ , и может дублироваться вычисление матрицы  $K_{\bar{X}}$ .

Система (1.37) объемнее  $[(2n+k) \cdot (2n+k)]$  системы классических нормальных параметрических уравнений  $(k \cdot k)$ . Однако, при решении этой системы не требуются дополнительно вычислять МНК-поправки  $\tilde{V}_{nl}$  к данным по МНК-поправкам  $\tilde{X}_{k1}$  к приближенным значениям параметров. Оба эти вектора являются искомыми корнями. Автоматически в результате обращения гиперматрицы коэффициентов  $M$  (1.36), вычисляются априорные значения блоков ковариационной матрицы

оптимизированных данных  $K_{\bar{v}}$  и оптимизированных значений параметров  $K_{\bar{x}}$ .

Доказательство идентичности результатов, получаемых синтезированным и классическим вариантами алгоритма параметрической версии, проводится аналогично преобразованиям, выполненным для коррелятной версии. Последовательное решение системы (1.36) осуществляется по блочному варианту метода последовательного исключения неизвестных Гаусса.

Оценка точности измерений, как и прежде, заключается в нахождении апостериорного значения  $\mu^2$  МПТ:

$$\sigma^2 = \frac{v^T K^{-1} v}{n}, \quad (1.38)$$

априорное значение которого  $\sigma_0^2$  полагается равным единице, в связи с тем, что  $E(\sigma^2) \equiv 1$  [25]:

$$\sigma_0^2 = 1. \quad (1.39)$$

Апостериорное значение МПТ измерений будет оцениваться по той же формуле, что и в коррелятной версии, с учетом того, что  $r = n - k$ :

$$\mu^2 = \frac{\tilde{V}^T K^{-1} \tilde{V}}{n - k}. \quad (1.40)$$

Математическое ожидание величины  $\mu^2$  тождественно равно единице:

$$E(\mu^2) = E\left(\frac{\tilde{V}^T K^{-1} \tilde{V}}{n-k}\right) = \frac{n-k}{n-k} \equiv 1. \quad (1.41)$$

Практически, дробь (1.40) будет отличаться от единицы. Вновь, как это было сделано в коррелятной версии, проверяем на уровне значимости  $\alpha$  нулевую гипотезу о равенстве параметра  $\sigma^2$  его априорному значению

$$H_0 = \{\sigma^2 = \sigma_0^2 = 1\} \quad (1.14)$$

против альтернативной гипотезы

$$H_A = \{\sigma^2 \neq \sigma_0^2\}. \quad (1.15)$$

Технология проверки нулевой гипотезы (1.14) реализуется так же, как это было выполнено в случае коррелятной версии, с учетом того, что  $r = n - k$ :

$$\chi_{\varepsilon}^2 = \frac{\mu^2 \cdot (n-k)}{\sigma_0^2 \equiv 1} = \tilde{V}_{1n}^T K_{nn}^{-1} \tilde{V}_{n1}. \quad (1.42)$$

Вновь используем квантили  $\chi^2$ -распределения с  $(n - k)$  степенями свободы:

$$\chi_T^2 = [\chi_H^2; \chi_B^2] \quad (1.17)$$

где

$$\chi_H^2 = \chi_{1-\alpha/2; n-k}^2, \text{ а } \chi_B^2 = \chi_{\alpha/2; n-k}^2. \quad (1.18)$$

Далее, если  $\chi_{\varepsilon}^2 \notin \chi_T^2$ , то нулевая гипотеза (1.14) отвергается.

Оценка точности уравненных значений параметров и функций от них, допускающих оценку, заключается в построении соответствующих ковариационных матриц.

Априорная ковариационная матрица уравненных значений параметров – это обратная матрица коэффициентов нормальных параметрических уравнений (табл. 1.2), которая автоматически образуется в центре (1.37):

$$K_{\bar{X}} = N_{kk}^{-1}. \quad (1.43)$$

Опираясь на этот результат, мы можем построить априорную ковариационную матрицу некоторой вектор-функции  $\mathcal{F}_{S1}$  от параметров  $\mathcal{A}_{1k}^T$ :

$$\mathcal{F}_{S1} = \mathcal{F}_{S1}(\mathcal{A}_{1k}^T), \quad (1.44)$$

Практически, в нашем распоряжении будут не истинные  $\mathcal{G}_{k1}$ , а действительные (уравненные) значения параметров  $\bar{X}_{k1}$ . Следовательно, мы будем располагать уравненными (действительными) значениями этой вектор-функций:

$$\bar{F}_{s1} = \mathcal{T}_{s1}(\bar{X}_{1k}^T). \quad (1.45)$$

Элементами вектор-функции (1.45) могут быть как измерявшиеся величины  $\mathcal{Y}_n$ , так и не измерявшиеся  $\mathcal{T}_{p1}$ . В любом случае, априорная ковариационная матрица уравненных значений функции (1.45) определяется через её частные производные

$$(\partial \mathcal{T}_{s1} / \partial \mathcal{G}_{1k}^T) \quad (1.46)$$

и имеет вид

$$K_{\bar{F}} = (\partial \mathcal{T}_{s1} / \partial \mathcal{G}_{1k}^T) \cdot K_{\bar{X}} \cdot (\partial \mathcal{T}_{s1} / \partial \mathcal{G}_{1k}^T)^T. \quad (1.47)$$

Когда речь идёт об измерявшихся величинах  $\mathcal{Y}_{h1}$ , то их частные производные – это матрица плана  $A_{nk}$ . Если нас интересует лишь некоторая группа измерений,  $\mathcal{Y}_{h1}$ , то можно воспользоваться соответствующим блоком  $A_{hk}$  той же матрицы, сохранив в ней необходимые  $h$  строк.

Ковариационная матрица уравненных измерений имеет вид

$$K_{\bar{Y}} = AN^{-1}A^T. \quad (1.48)$$

Она так же автоматически формируется в (1.37).

Если же необходимо оценить точность некоторой группы не измерявшихся функций  $\mathcal{F}_{s1}$ , то, обозначив частные производные  $\partial \mathcal{F}_{s1} / \partial \mathcal{A}_{1k}^T$  этих функций по параметрам  $\mathcal{A}_{k1}$  через  $f_{sk}$ , мы можем получить априорную ковариационную матрицу уравненных значений таких функций, сделав соответствующие подстановки в формулу (1.47):

$$K_{\bar{F}} = f \cdot N^{-1} \cdot f^T. \quad (1.49)$$

Переход к апостериорным значениям всех трех последних ковариационных матриц выполняется путём умножения каждой из них на апостериорное значение МПТ  $\mu^2$ , вычисленное по формуле (1.40):

$$\bar{K}_{\bar{X}} = \mu^2 \cdot K_{\bar{X}} = \mu^2 \cdot N^{-1}; \quad (1.50)$$

$$\bar{K}_{\bar{Y}} = \mu^2 \cdot K_{\bar{Y}} = \mu^2 \cdot AN^{-1}A^T; \quad (1.51)$$

$$\bar{K}_{\bar{F}} = \mu^2 \cdot K_{\bar{F}} = \mu^2 \cdot f N^{-1} f^T. \quad (1.52)$$

Квадратные корни из диагональных элементов данных ковариационных матриц – это средние квадратические погрешности уравненных значений соответствующих величин:

– параметров:

$$m_{\bar{X}_j} = \sqrt{\{\bar{K}_{\bar{X}}\}_{jj}}; \quad (1.53)$$

– измерений:

$$m_{\bar{Y}_i} = \sqrt{\{\bar{K}_{\bar{Y}}\}_{ii}}; \quad (1.54)$$

– не измерявшихся функций:

$$m_{\bar{F}_p} = \sqrt{\{\bar{K}_{\bar{F}}\}_{pp}}. \quad (1.55)$$

## 1.5. Регуляризация алгоритма СВПВ МНК-оптимизации геопространственных данных

Когда матрица плана  $A_{nk}$  в (1.36) является матрицей неполного столбцового ранга, то есть  $R(A_{nk}) < k$ , что бывает, например, при обработке и анализе «свободных» геодезических построений, то на месте центрального блока  $K_x^{-1} \equiv 0$  синтезированного варианта параметрической версии МНК-оптимизации геопространственных данных может быть использован прием *регуляризации данных*.

Вновь обратимся к алгоритму СВПВ МНК-оптимизации данных (1.36):

$$M \cdot U = b \rightarrow \begin{pmatrix} K_y^{-1} & 0 & -I \\ 0 & K_x^{-1} \equiv 0 & A^T \\ -I & A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{X} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}$$

и внедрим в него на месте центрального блока  $K_x^{-1} \equiv 0$  *параметр регуляризации*  $\alpha = 10^{-m}$ , умноженный на единичную матрицу  $I_{kk}$ :

$$\begin{pmatrix} (K_y^{-1})_{nn} & 0_{nk} & -I_{nn} \\ 0_{kn} & \alpha \cdot I_{kk} & A_{kn}^T \\ -I_{nn} & A_{nk} & 0_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{X} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Назовем блок  $\alpha \cdot I_{kk}$  *регуляризирующим блоком*.

Выполним пошаговое решение системы (1.56) с целью демонстрации того факта, что матрица нормальных уравнений  $N_{kk} = A_{kn}^T (K_y^{-1})_{nn} A_{nk}$ , возникающая в ходе решения, станет матрицей неполного ранга и будет подвергнута *регуляризации*.

Раскрываем первое уравнение системы (1.56):  $K_y^{-1} \tilde{V} = \lambda$ . Из него получаем выражение первого корня этой системы, как функции её третьего корня:

$$\tilde{V} = K_y \cdot \lambda \quad (1.57)$$

Далее, трансформируем по Гауссу систему трёх уравнений (1.56) в систему двух уравнений, опуская детали преобразований:

$$\begin{pmatrix} K_y & -A \\ -A^T & -\alpha \cdot I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

Здесь, как и прежде, раскрываем первое уравнение:  $K_y \cdot \lambda - A \cdot \tilde{X} = -L$ , из которого выражаем корень  $\lambda$  через корень  $\tilde{X}$ :

$$\lambda = K_y^{-1}(A\tilde{X} - L) \quad (1.59)$$

Вновь, опуская детали, ещё раз преобразуем по Гауссу систему двух уравнений (1.58) в одно уравнение:

$$(N + \alpha \cdot I) \cdot \tilde{X} = G, \quad (1.60)$$

где  $N = A^T K_y^{-1} A$ , а  $G = A^T K_y^{-1} L$ .

Именно в (1.60) и демонстрируется *регуляризация* системы (1.56) путем добавления к матрице  $N$  *стабилизирующего слагаемого (регуляризирующего блока)*  $\alpha \cdot I$ :  $(N + \alpha \cdot I)$ . Решение  $\tilde{X}$  уравнения (1.60) получается с использованием *параметра регуляризации*  $\alpha$ :

$$\tilde{X} = (N + \alpha \cdot I)^{-1} \cdot G, \quad (1.61)$$

Регуляризованное решение системы (1.56), выполненное целиком для всей гиперматрицы, имеет такую структуру:

$$\begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{X} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\tilde{Y}} & K_{\tilde{Y}\tilde{X}} & K_{\tilde{Y}\lambda} \\ K_{\tilde{X}\tilde{Y}} & \mathfrak{R} & A^+ \\ K_{\lambda\tilde{Y}} & (A^+)^T & -K_{\lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}, \quad (1.62)$$

где  $K_{\tilde{Y}}$  – априорная ковариационная матрица уравненных данных;

$\mathfrak{R}_{kk}$  – «преобразованное» стабилизирующее слагаемое ( $\alpha \cdot I_{kk}$ );

$A^+$  – регуляризованная псевдообратная матрица, характеризующаяся свойством наименьших квадратов (РП-МНК- матрица).

РП-МНК- матрица обладает следующими свойствами [36, 37]:

$$AA^+A = A; \quad A^+AA^+ = A^+; \quad (K_y^{-1}AA^+)^T = K_y^{-1}AA^+; \quad (A^+A)^T = A^+A \quad (1.63)$$

Третье свойство МНК-РП-матрицы  $(K_y^{-1}AA^+)^T = K_y^{-1}AA^+$  отражает тот факт, что она учитывает *коррелированность* свободных членов  $L$  [26]. В данной ситуации выполнение этого свойства естественно, так как все синтезированные алгоритмы, начиная с (1.4), строятся с использованием стабилизирующего функционала наименьших квадратов  $\Psi = \tilde{V}^T K^{-1} \tilde{V} = \min$ .

Важно отметить одну практическую деталь. Поскольку МНК-РП-матрица вычисляется автоматически в теле синтезированного алгоритма, в котором используется *параметр регуляризации*  $\alpha = 10^{-m}$ , то все

свойства МНК-РП -матрицы будут выполняться *не точнее*, чем этот принятый *параметр регуляризации*  $\alpha$ .

Значения корней решения (1.62) вводятся в данные измерений  $y$  и приближенные величины координат (параметров)  $x$ . После этого выполняется обязательный заключительный контроль всего процесса МНК-оптимизации данных и параметров:

$$\bar{Y} = F(\bar{X}) \quad (1.64)$$

Для перехода к апостериорным значениям ковариационной матрицы  $K_{\bar{y}}$ , полученной в правой части системы (1.62), необходимо оценить точность измеренных данных с помощью масштабного показателя точности (МПТ)  $\mu^2$  [40]:

$$\mu^2 = \frac{\tilde{v}^T K_{\bar{y}}^{-1} \tilde{v}}{n-k+d}. \quad (1.65)$$

Знаменатель формулы (1.65) содержит дополнительное слагаемое  $d$ , которое является *столбцовым дефектом* матрицы плана  $A_{nk}$  свободного геодезического построения. Столбцовый дефект  $d$  определяется как разность между числом  $k$  столбцов матрицы  $A_{nk}$  и её рангом  $R(A)$ :

$$d = k - R(A). \quad (1.66)$$

Известна формула Рао [41], по которой можно вычислить ранг матрицы  $A_{nk}$ :

$$R(A_{nk}) = R(A_{kn}^+ \cdot A_{nk} = H_{kk}) = tr(H_{kk}). \quad (1.67)$$

Формула (1.67) допускает использование *любой* псевдообратной матрицы.

После определения величины МПТ  $\mu^2$  и установления её допустимости по (1.34), можно перейти к вычислениям апостериорных значений ковариационной матрицы уравненных значений измерений  $\bar{K}_{\bar{y}} = \mu^2 K_{\bar{y}}$  и ковариационной матрицы уравненных значений, определяемых параметров, каковыми в свободных сетях выступают координаты геодезического построения:

$$\bar{K}_{\bar{x}} = \mu^2 \cdot A^+ K_y (A^+)^T. \quad (1.68)$$

Вычисления (1.68) производятся дополнительно, так как блок  $\mathfrak{R}$  регуляризованного решения (1.62) не содержит информации об априорной ковариационной матрице параметров-координат  $K_{\bar{x}}$ , когда матрица плана  $A_{nk}$  является матрицей неполного столбцового ранга, что имеет место в свободных геодезических построениях.

Числа в блоке  $\mathfrak{R}$  имеют порядок, обратный *параметру регуляризации*, то есть  $r_{ij} \approx 10^m$ . Они не могут быть использованы для оценки точности уравненных значений параметров.

## 1.6. Универсальный синтезированный алгоритм (УСА) МНК-оптимизации и оценки точности геопространственных данных

Синтезированный вариант алгоритма параметрической версии МНК-оптимизации данных может содержать как определяемые параметры  $\mathcal{A}_{k1}$  (координаты новых пунктов создаваемого геодезического построения или некоторые константы функциональной модели), так и координаты «твердых» пунктов, вектор  $Z_{q1}$ , на которые «опирается» такое построение. Ковариационная матрица  $K_z$  последнего вектора так же предполагается известной.

Функциональная модель расширенного варианта синтезированного алгоритма коррелятной версии, который мы назовем универсальным, имеет следующий вид:

$$\Phi_{n1} = - \mathcal{Y}_{n1} + \mathcal{F}_{n1}(\mathcal{A}_{k1}; Z_{q1}) = 0_{n1}. \quad (1.69)$$

Линеаризованная форма системы (1.69) записывается следующим образом:

$$C_{nq} \tilde{Z} - \tilde{V}_{n1} + A_{nk} \cdot \tilde{X}_{k1} - L_{n1} = 0_{n1}, \quad (1.70)$$

где

$$C_{nq} = \{\partial \mathcal{F}_{n1} / \partial Z_{q1}\}; \quad -I_{nn} = \{\partial \Phi_{n1} / \partial \mathcal{Y}_{n1}\}; \quad A_{nk} = \{\partial \mathcal{F}_{n1} / \partial \mathcal{A}_{k1}\}.$$

Добавим к матрицам синтезированного варианта параметрической версии МНК-оптимизации данных (1.36) блоки, содержащие новую информацию о твердых (опорных) пунктах геодезического построения:

$$M \cdot U = b \rightarrow \begin{pmatrix} K_z^{-1} & 0 & 0 & C^T \\ 0 & K_y^{-1} & 0 & -I \\ 0 & 0 & K_x^{-1} \equiv 0 & A^T \\ C & -I & A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Z} \\ \tilde{V} \\ \tilde{X} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}. \quad (1.71)$$

Стабилизирующий МНК-функционал нового варианта так же расширится:

$$\Psi = \tilde{U}^T K_u^{-1} \tilde{U} = \min, \quad (1.72)$$

где

$$\tilde{U}_{1,n+q+k}^T = \left( \tilde{Z}_{1,q}^T \quad \tilde{V}_{1,n}^T \quad \tilde{X}_{1,k}^T \right), \quad (1.73)$$

а

$$K_u^{-1} = \begin{pmatrix} K_z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & K_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & K_x^{-1} \equiv 0 \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

Наконец, апостериорное значение МПТ будет вычисляться по следующей формуле:

$$\mu^2 = \frac{\tilde{U}^T K_u^{-1} \tilde{U}}{n-k}. \quad (1.75)$$

Обратим внимание на один важный практический аспект использования результатов, получаемых с помощью универсального синтезированного алгоритма. Когда мы работаем в некоторой автономной системе координат, опорные пункты которой мы вправе корректировать по материалам наших данных, то никаких организационных проблем не возникает. Погрешности координат опорных пунктов, находящиеся в ковариационной матрице  $K_z$ , окажут свое влияние на все корни системы (1.71). Поправки координат опорных пунктов  $\tilde{Z}_{q1}$  будут введены в значения самих координат.

Если же мы работаем в системе координат, каталоги которой не доступны для нашей корректировки, то погрешности опорных координат  $K_z$  такой системы, по-прежнему, окажут свое влияние на корни решения (1.71) и оценку точности (1.75), но вводить значения поправок  $\tilde{Z}_{q1}$  в каталоги системы мы по своей воле не сможем. Однако, при выполнении контролей уравнивания, мы будем вынуждены сделать это в своих вычислениях.

Решение системы (1.71)  $U = M^{-1}b$ , представленное ниже в развернутой форме, дает нам следующие МНК-поправки:

$$\begin{pmatrix} \tilde{Z} \\ \tilde{V} \\ \tilde{X} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\bar{Z}} & K_{\bar{Z}\bar{Y}} & K_{\bar{Z}\bar{X}} & K_{\bar{Z}\lambda} \\ K_{\bar{Y}\bar{Z}} & K_{\bar{Y}} & K_{\bar{Y}\bar{X}} & K_{\bar{Y}\lambda} \\ K_{\bar{X}\bar{Z}} & K_{\bar{X}\bar{Y}} & K_{\bar{X}} & K_{\bar{X}\lambda} \\ K_{\lambda\bar{Z}} & K_{\lambda\bar{Y}} & K_{\lambda\bar{X}} & -K_{\lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}, \quad (1.76)$$

где  $\tilde{Z}_{q1}$  к опорным координатам  $Z_{q1}$ ;

$\tilde{V}_{n1}$  к данным измерений  $y_{n1}$ ;

$\tilde{X}_{k1}$  к приближенным значениям параметров  $x_{k1}$ .

На диагонали матрицы коэффициентов системы (1.76) находятся априорные значения следующих ковариационных матриц:

$K_{\bar{Z}}$  – МНК-оптимизированных (уравненных) значений опорных координат  $\bar{Z}$ ;

$K_{\bar{Y}}$  – уравненных значений данных  $\bar{Y}$ ;

$K_{\bar{X}}$  – уравненных значений определяемых параметров, которыми, в первую очередь, будут уравненные значения определяемых координат  $\bar{X}$ , либо оптимизированные значения некоторых констант функциональной модели, если таковые в неё вводились.

В монографии [26] В.А. Падве представил более мощный вариант универсального синтезированного алгоритма, частным случаем которого является его версия, предложенная здесь.

## **2. МНК-ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ В СВОБОДНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ**

### **2.1. МНК-оптимизация свободного «куста» опорных реперов, создаваемого при наблюдениях за деформациями техногенных объектов**

В качестве иллюстрации работы синтезированного варианта параметрической версии (СВПВ) МНК-оптимизации «результатов» нивелирования, сгенерированных для модельной группы реперов, образующих «свободный» опорный куст, который создается для наблюдений за вертикальными деформациями некоторого техногенного объекта (рис. 2.1).

Математическая обработка и анализ материалов модельных «наблюдений» на таком кусте осуществлялись с использованием СВПВ алгоритма МНК-оптимизации результатов «измерений» превышений.

На рис. 2.2 представлена структурная схема алгоритма СВПВ.

На рис. 2.2 обозначено:

$K_h^{-1}$  – обратная ковариационная матрица «измеренных» превышений;

$K_x^{-1} = \alpha \cdot I$  – стабилизирующее слагаемое;

$A$  – матрица плана превышений на кусте реперов;

$I$  – единичные матрицы;

$0$  – нулевые блоки;

$V$  – МНК-поправки к превышениям;

$\delta x$  – МНК-поправки к параметрам;

$\Lambda$  – неопределенные множители Лагранжа;

$L$  – свободные члены.

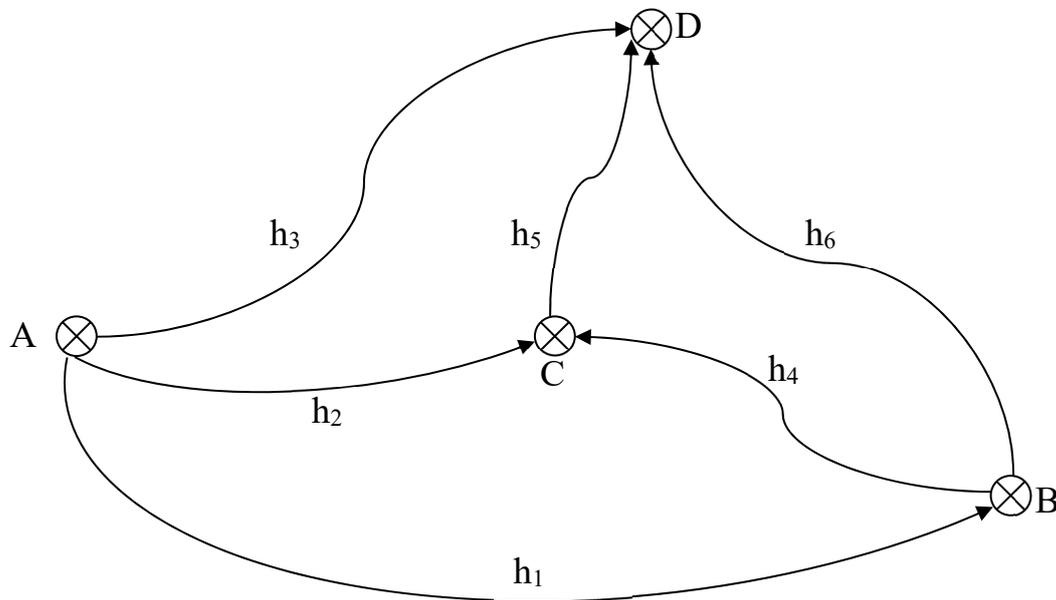


Рис. 2.1. Схема куста опорных реперов

Синтезированная м-ца $M$				Корни		Св. чл.
$K_h^{-1}$	$0$	$-I$		$V$		$0$
$0$	$K_x^{-1} = \alpha \cdot I$	$A^T$	*	$\delta x$	=	$0$
$-I$	$A$	$0$		$\Lambda$		$L$

Рис. 2.2. Структурная схема алгоритма СВПВ

Структурная схема решения алгоритма СВПВ приведена на рис. 2.3.

Значения корней	Обратная м-ца $M^{-1}$				Св. чл.
$V$		$K_{\bar{h}}$	$K_{\bar{h}\delta x}$	$-K_{\bar{h}\Lambda}$	$0$
$\delta x$	=	$K_{\delta x\bar{h}}$	$\mathfrak{R}$	$A^+$	$0$
$\Lambda$		$-K_{\Lambda\bar{h}}$	$(A^+)^T$	$-K_{\Lambda}$	$L$

Рис. 2.3. Структурная схема решения алгоритма СВПВ

На рис. 2.3 обозначено:

$V$  – значения МНК-поправок к превышениям  $h$ ;

$\delta x$  – значения МНК-поправок к параметрам  $x$ ;

$\Lambda$  – значения неопределенных множителей Лагранжа;

$K_{\bar{h}}$  – ковариационная матрица уравненных значений превышений;

блок  $\mathfrak{R}$  – «преобразованное» стабилизирующее слагаемое

$(K_x^{-1} = \alpha \cdot I)$ ;

$A^+$  и  $(A^+)^T$  – прямая и транспонированная МНК-РП-матрица;

$L$  – свободные члены;

$0$  – нулевые блоки;

$K_{\Lambda}$  ковариационная матрица множителей Лагранжа.

В табл. 2.1 приводятся значения «измеренных» и уравненных превышений и СКП всех величин как до МНК-оптимизации, так и после неё.

Измеренные и уравненные значения превышений свободного куста  
реперов

Превышения	Длины	Измеренные и уравненные значения					Контроль по $X_{ур}$ (м)
	ходов (км)	$h^0$ (м)	СКП $h^0$ (мм)	$V$ (м)	$h_{ур}$ (м)	СКП $h_{ур}$ (мм)	
$h_1$	3,0	9,812	3,5	-0,004	9,808	2,1	9,808
$h_2$	1,6	10,378	2,5	-0,002	10,376	1,8	10,376
$h_3$	1,6	20,182	2,5	0,002	20,184	1,9	20,184
$h_4$	3,0	56,547	3,5	0,001	56,548	2,1	56,548
$h_5$	2,0	46,741	2,8	-0,001	46,740	2,0	46,740
$h_6$	1,6	36,363	2,5	0,001	36,364	1,8	36,364

СКП «измеренных» превышений оценивались исходя из предполагаемой точности выполненной нивелировки, которая составляла 2мм/км. Квадраты этих величин заполнили диагональ априорной ковариационной матрицы измеренных превышений:

$$K_u = \text{diag}\{12,0; 6,4; 6,4; 12,0; 8,0; 6,4\} \text{мм}^2. \quad (2.1)$$

МНК-оптимизация (уравнивание) данных «автономного куста» выполнялась как в режиме «свободная сеть», так и в режиме «фиксированная отметка некоторого репера». Выбор соответствующего режима осуществлялся путем воздействия на стабилизирующее слагаемое  $K_x^{-1} = \alpha \cdot I$  (рис. 2.2). Практически, блок  $K_x$  формируется вне структуры гиперматрицы  $M$  (рис. 2.4), в связи с чем, в тело исходной гиперматрицы  $M$  стабилизирующее слагаемое  $\alpha \cdot I$  вводится в степени (-1).

Для свободной сети обратное слагаемое имело структуру, представленную на рис. 2.4, а для варианта «фиксированная отметка репера  $A$ » (рис. 2.5) обратное слагаемое отличалось от предыдущего случая тем, что его первый элемент приравнивался к малой величине  $10^{-8}$ . Фиксировать отметку любого другого репера куста можно выполнять аналогично. Выбор репера влияет на величины МНК-поправок к приближенным значениям остальных реперов. Сумма квадратов таких поправок оказывается минимальной для режима «свободная сеть». В этом же режиме оптимизированные значения отметок реперов характеризуются соответствующими СКП, сумма квадратов которых так же минимальна относительно любого из режимов «фиксированный репер».

Полученные МНК-поправки к данным и приближенным значениям отметок реперов были добавлены к соответствующим величинам, а затем был осуществлен заключительный контроль всего процесса (табл. 2.1).

В каждой из указанных ситуаций дальнейшие действия определялись структурной схемой решения СВПВ (см. рис. 2.3).

После реализации этого этапа было необходимо проконтролировать выполнение необходимого условия существования стабилизирующего функционала  $\Psi = \tilde{V}^T K^{-1} \tilde{V} = \min$ , а именно:

$$A^T K^{-1} \tilde{V} = 0, \quad (2.2)$$

и выполнить оценку точности данных (рис. 2.6). Как видно из рис. 2.6, параметр регуляризации  $\alpha$  был принят равным  $10^{-8}$ , а максимальная

погрешность выполнения необходимого условия существования стабилизирующего функционала  $\Psi$  равнялась  $4,4 \cdot 10^{-8}$ , то есть незначительно превысила  $\alpha$ .

<b>Обратное слагаемое: <math>\alpha^{-1} \cdot I</math></b>			
<b>1E+08</b>	0	0	0
0	<b>1E+08</b>	0	0
0	0	<b>1E+08</b>	0
0	0	0	<b>1E+08</b>
<b>Обратный параметр регуляризации <math>\alpha^{-1} = 10^8</math></b>			

Рис. 2.4. Обратное стабилизирующее слагаемое для «свободной сети»

<b>Обратное слагаемое: <math>\alpha^{-1} \cdot I</math></b>			
<b>1E-08</b>	0	0	0
0	<b>1E+08</b>	0	0
0	0	<b>1E+08</b>	0
0	0	0	<b>1E+08</b>
<b>Обратный параметр регуляризации <math>\alpha^{-1} = 10^8</math></b>			

Рис. 2.5. Обратное стабилизирующее слагаемое для случая «фиксированная отметка репера  $A$ »

Значения оптимизированных отметок реперов, сопровождаемые соответствующими СКП этих значений, приведены в табл. 2.2 (свободная сеть) и табл. 2.3 (фиксированный репер  $A$ ).

<b>Контроль процесса МНК-оптимизации</b>				
$A^T K^{-1} V \equiv 0$				
$MAX(ABS(A^T K^{-1} V)) = 4,4E-08$		$\alpha = 10^{-8}$		
<b>Оценка точности измерений апостериори</b>				
$V^T K^{-1} V =$	<b>2,85</b>	$-V^T K^{-1} L =$	<b>2,85</b>	б/р
$\mu^2 =$	<b>0,95</b>	$\mu =$	<b>0,97</b>	б/р
$H_0 = \{\sigma^2 = \sigma_0^2 = 1\}$		$\chi^2_H =$	<b>0,22</b>	б/р
		$\chi^2_B =$	<b>9,35</b>	б/р
<b>Решение:</b>	<b>гипотеза не отвергается</b>			

Рис. 2.6. Контроль процесса МНК-оптимизации и проверка гипотезы о равенстве МПТ  $\sigma^2$  единице

Оценка точности уравненных значений отметок реперов для варианта «свободная сеть» не реализуется автоматически в центральном блоке гиперматрицы  $M^{-1}$ , как это происходит для варианта

«фиксированный репер» (1.37). В свободной сети апостериорная ковариационная матрица вычисляется отдельно по указанной ранее формуле

$$\bar{K}_{\bar{X}} = \mu^2 \cdot A^+ K_y (A^+)^T \quad (2.3)$$

и располагается на свободном месте (рис. 2.7).

Таблица 2.2

Измеренные и уравненные значения отметок реперов куста для случая «свободная сеть», когда колонка «Фиксированный репер» искажена

<i>Реперы</i>	Параметры (м)			СКП (мм)	
	$X^0$	$\delta X$	$X$	Фикс_репер	Св. сеть
<i>A</i>	100,0000	0,0004	100,0004	4871,0	1,3
<i>B</i>	109,8120	-0,0040	109,8080	4871,0	1,2
<i>C</i>	120,1820	0,0025	120,1845	4871,0	1,1
<i>D</i>	156,5470	0,0010	156,5480	4871,0	1,2

Таблица 2.3

Измеренные и уравненные значения отметок реперов куста для случая «фиксированный репер *A*»

<i>Реперы</i>	Параметры (м)			СКП (мм)	
	$X^0$	$\delta X$	$X$	Фикс_репер	Св. сеть
<i>A</i>	100,0000	0,0000	100,0000	0,0	1,3
<i>B</i>	109,8120	-0,0044	109,8076	2,1	1,2
<i>C</i>	120,1820	0,0021	120,1841	1,9	1,1
<i>D</i>	156,5470	0,0006	156,5476	2,1	1,2

<i>R<sub>p A</sub></i>	<i>R<sub>p B</sub></i>	<i>R<sub>p C</sub></i>	<i>R<sub>p D</sub></i>	
<b>1,68</b>	-0,65	-0,38	-0,65	<b>мм<sup>2</sup></b>
-0,65	<b>1,49</b>	-0,38	-0,45	
-0,38	-0,38	<b>1,14</b>	-0,38	
-0,65	-0,45	-0,38	<b>1,49</b>	

Рис. 2.7. Апостериорная ковариационная матрица уравненных отметок реперов для варианта «свободная сеть»

Для варианта «фиксированный репер» оценка точности уравненных значений отметок реперов реализуется дважды: автоматически в центральном блоке гиперматрицы  $M^{-1}$  (рис. 2.8а) и, параллельно, эта информация дублируется по формуле (2.3) (рис. 2.8б).

<b>0,00</b>	0,00	0,00	0,00
0,00	<b>4,71</b>	2,46	2,67
0,00	2,46	<b>3,77</b>	2,46
0,00	2,67	2,46	<b>4,71</b>

Рис. 2.8а. *Априорная* ковариационная матрица уравненных значений отметок реперов для варианта «фиксированный репер А»  
(центральный блок матрицы  $M^{-1}$ )

0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	4,71	2,46	2,67
0,00	2,46	3,77	2,46
0,00	2,67	2,46	4,71

Рис. 2.8б. *Априорная* ковариационная матрица уравненных отметок реперов для варианта «фиксированный репер А»  
(параллельные вычисления по формуле 2.3)

Приведенные числовые данные, характеризующие точность уравненных значений отметок «куста», подтверждают преимущества «свободного» варианта математической обработки «измеренных» превышений, смоделированных на «кусте» реперов (рис. 2.1).

## **2.2. МНК-оптимизация автономного свободного геодезического построения (АСГП) в пространстве 3d и его применение при мониторинге инженерного объекта**

### **2.2.1. Преамбула**

В ситуации, когда перед исполнителями, во-первых, возникает задача не только по созданию автономного свободного геодезического построения (АСГП), но и, во-вторых, по дальнейшей его эксплуатации

для мониторинга техногенных или природных объектов, можно воспользоваться «тандемом» синтезированных алгоритмов.

Синтезированный вариант параметрической версии (СВПВ) МНК-оптимизации результатов измерений, выполненных в трехмерном построении ( $3d$ -АСГП), которое предполагается к использованию в качестве местной координатной основы, обладает достаточным потенциалом для решения первой из указанных задач.

Вторая задача, естественно, потребует учитывать погрешности координат созданного  $3d$ -АСГП. Для её решения вполне эффективным будет тот же СВПВ, расширенный блоком, который как раз и будет учитывать погрешности опорных координат. Сказанное предполагает разбиение данного раздела на три подраздела.

### **2.2.2. МНК-оптимизация измерений и координирование $3d$ -АСГП**

Предполагается, что на объекте будет выполнено  $n = 3q$  измерений, где  $q$  – это число создаваемых пунктов обоснования в пространстве  $3d$ . Совокупность таких измерений образует вектор  $u$ , в который могут входить линейные величины (горизонтальные проложения  $D$ ) и угловые величины (горизонтальные  $\beta$  и вертикальные  $v$  углы). Обозначим через вектор  $u_{n1}^0$  совокупность всех результатов измерений, выполненных на  $3d$ -АСГП:  $u^0 = (D^0, \beta^0, v^0)$ .

Показатели точности результатов измерений априори считаются известными, во-первых, по совокупности соответствующих средних квадратических погрешностей (СКП)  $m_D$ ,  $m_\beta$ ,  $m_v$ , которые определяются паспортными характеристиками используемой аппаратуры, и, во-вторых, по применяемой технологии измерений. Такая информация позволяет сформировать априори блочную ковариационную матрицу  $K_u$  полученных данных:

$$K_u = \begin{pmatrix} K_D & 0 & 0 \\ 0 & K_\beta & 0 \\ 0 & 0 & K_v \end{pmatrix}_{nn}. \quad (2.4)$$

Обработка и анализ результатов моделируемых измерений в 3d-АСГП (рис. 2.9) выполняется с использованием алгоритма СВПВ.

Потенциал алгоритма СВПВ позволяет выполнять уравнивание и оценку точности измерений, как в свободных, так и в несвободных геодезических построениях. Модель 3d-АСГП выбрана простой по конструкции и состоит из четырех пунктов ( $q = 4$ ), образующих неправильный четырехугольник, что улучшает обусловленность системы линейных алгебраических уравнений.

Общее количество  $n$  сгенерированных псевдоизмерений для 3d-АСГП равнялось 12-ти: четыре наклонные дальности  $S_{ij}$ , по которым автоматически вычислялись горизонтальные проложения  $D_{ij}$ , четыре горизонтальных угла  $\beta_q$  и четыре вертикальных угла  $v_{ij}$ . Число

необходимых измерений в свободной сети ( $k = 3q$ ), также равнялось 12-ти. В данном частном случае

$$n = k = 3q = 12. \quad (2.5)$$

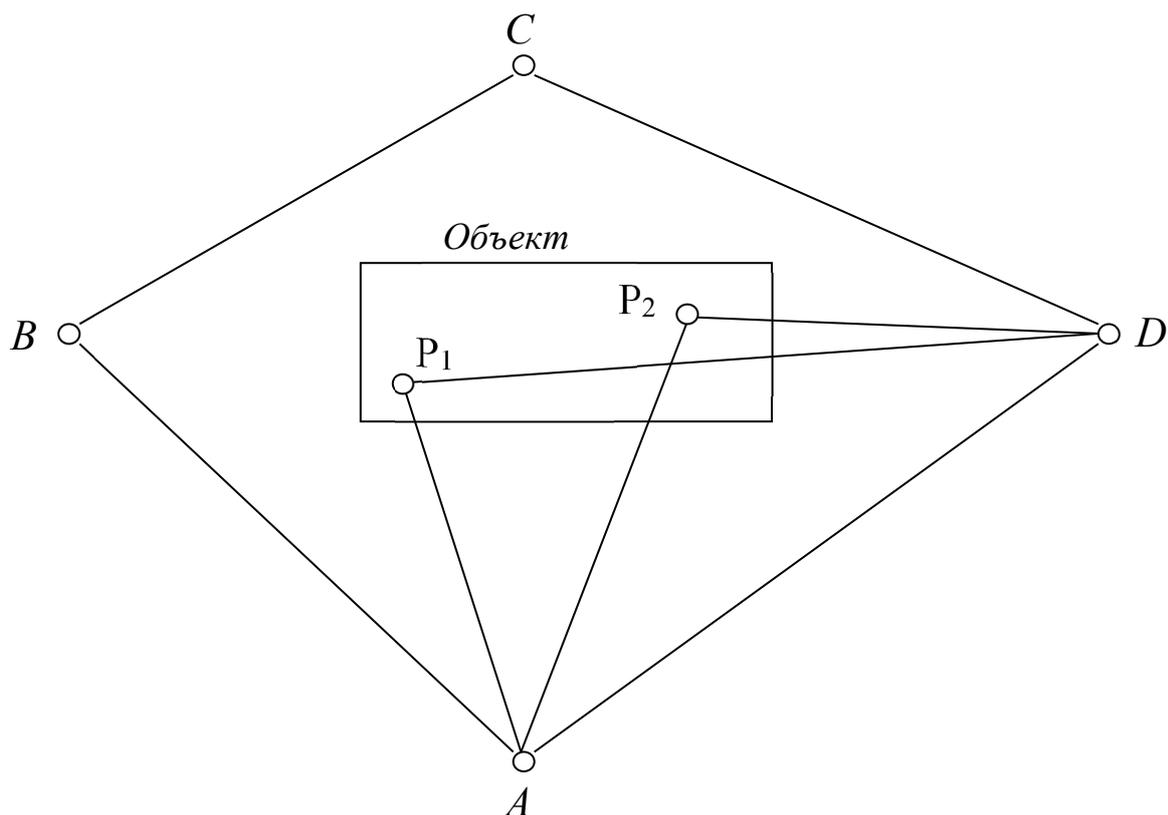


Рис. 2.9. Схема расположения пунктов 3d-АСГП и контрольных точек объекта  $P_1$  и  $P_2$

В используемом алгоритме исходная система параметрических уравнений связи  $U_{n1}$ , содержит три блока измеряемых величин:  $D_{q1}$ ,  $\beta_{q1}$ ,  $\nu_{q1}$ . Все эти величины зависят от тройки параметров  $(x, y, H) = X$ :

$$U_{n1} = \begin{pmatrix} D_{q1} \\ \beta_{q1} \\ \nu_{q1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q1}^D(x_{n1} & y_{n1} & H_{n1}) \\ F_{q1}^\beta(x_{n1} & y_{n1} & H_{n1}) \\ F_{q1}^\nu(x_{n1} & y_{n1} & H_{n1}) \end{pmatrix} = F_{n1}(X_{n\cdot 1}). \quad (2.6)$$

Система (2.6), линеаризованная относительно приближенных значений параметров  $x_{n1}^0 \quad y_{n1}^0 \quad H_{n1}^0$ , принимает следующую форму:

$$-\tilde{V}_{n\cdot 1} + A_{n\cdot n} \delta x_{n\cdot 1} = l_{n\cdot 1}. \quad (2.7)$$

Здесь  $\tilde{V}_{n\cdot 1}$  – вектор МНК-поправок в результаты измерений;

$\delta x_{n\cdot 1}$  – вектор МНК-поправок к приближенным значениям координат пунктов  $x_{n1}^0 \quad y_{n1}^0 \quad H_{n1}^0$ ;

$A_{n\cdot n}$  – это блочная матрица плана, содержащая значения частных производных горизонтальных проложений  $D$ , горизонтальных « $\beta$ » и вертикальных « $\nu$ » углов по всем координатам  $x, y, H$ :

$$A_{n\cdot n} = \begin{pmatrix} A_{nD\cdot n} \\ A_{n\beta\cdot n} \\ A_{n\nu\cdot n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial F_{q1}^D / \partial X_{n\cdot 1} \\ \partial F_{q1}^\beta / \partial X_{n\cdot 1} \\ \partial F_{q1}^\nu / \partial X_{n\cdot 1} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

а  $l_{n\cdot 1}$  – это свободные члены, представляющие собой разности результатов измерений  $u^0$  и значений соответствующих функций, вычисляемых по приближенным значениям параметров  $x_{n1}^0 \quad y_{n1}^0 \quad H_{n1}^0$ :

$$\begin{pmatrix} l_{D1} \\ l_{\beta 1} \\ l_{v1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{q1}^0 - F_{q1}^D(x_{n1}^0) & y_{n1}^0 & H_{n1}^0 \\ \beta_{q1}^0 - F_{q1}^\beta(x_{n1}^0) & y_{n1}^0 & H_{n1}^0 \\ v_{q1}^0 - F_{q1}^v(x_{n1}^0) & y_{n1}^0 & H_{n1}^0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Решение (2.7) под условием

$$\tilde{V}_{1:n}^T K_u^{-1} \tilde{V}_{n:1} = \min, \quad (2.10)$$

где обратная ковариационная матрица  $(K_u^{-1})_{nn}$ , которая определена по исходной матрице, описываемой уравнением (2.4), образует МНК-оптимизированную систему, представленную ниже в форме следующей структуры:

$$\begin{pmatrix} K_u^{-1} & 0 & -I \\ 0 & K_X^{-1} = \alpha \cdot I & A^T \\ -I & A & 0 \end{pmatrix}_{3n \cdot 3n} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \delta x \\ \lambda \end{pmatrix}_{3n \cdot 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}_{3n \cdot 1}. \quad (2.11)$$

Структура (2.11) содержит:

1) обратную ковариационную матрицу  $K_u^{-1}$  выполненных измерений, одновременно являющуюся стохастическим расширением блока  $l_{n:1}$  вектора свободных членов (2.9); исходная ковариационная матрица  $K_u$  (2.4) имела в примере следующие числовые значения:

$$K_u = \text{diag}\{9 \ 9 \ 9 \ 9 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 25 \ 25 \ 25 \ 25\}; \quad (2.12)$$

первые четыре элемента имеют размерность мм<sup>2</sup>, а последние восемь – (")<sup>2</sup>;

2) крайние угловые единичные матрицы со знаком *минус* ( $-I_{n \cdot n}$ ), являющиеся «коэффициентами» перед вектором  $\tilde{V}_{n \cdot 1}$  в системе (2.7);

3) стабилизирующее слагаемое, равное произведению параметра регуляризации  $\alpha = 10^{-m}$  на единичную матрицу  $I_{n \cdot n}$ , которое регуляризирует вычисления по Тихонову [29] и обеспечивает «свободу» координат всех пунктов  $3d$ -АСГП;

4) блок коэффициентов линеаризованных параметрических уравнений связи (*матрицу плана*)  $A_{n \cdot n}$  (2.8);

5) искомые корни системы: *во-первых*, вектор МНК-поправок  $\tilde{V}_{n \cdot 1}$  в результаты всех выполненных измерений  $D^0, \beta^0, v^0$ ; *во-вторых*, вектор МНК-поправок  $\delta x_{3q \cdot 1}$  к приближенным значениям координат  $(x_{n1}^0 \quad y_{n1}^0 \quad H_{n1}^0)$  построения; *в-третьих*, вектор неопределенных множителей Лагранжа  $\lambda_{n \cdot 1}$ , которые могут быть использованы при пошаговой реализации алгоритма (2.11);

6) вектор свободных членов уравнений (2.7):  $l_{n \cdot 1} = u_{n \cdot 1} - F_{n \cdot 1}(X_{3q \cdot 1}^0)$ , элементы которого вычисляются по формулам (2.9).

В моделируемом  $3d$ -АСГП (рис. 2.9) были получены числовые значения элементов матрицы плана (2.8), приведенные на рис. 2.10.

Буквенное решение системы (2.11) представлено ниже:

$$\begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \delta x \\ \lambda \end{pmatrix}_{3n \cdot 1} = \begin{pmatrix} K_{\bar{u}} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & \mathfrak{R} & A^+ \\ K_{31} & (A^+)^T & -K_{\lambda} \end{pmatrix}_{3n \cdot 3n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}_{3n \cdot 1}. \quad (2.13)$$

Решение (2.13) дает нам значения корней системы (2.11):

во-первых, это МНК-поправки  $\tilde{V}_{n \cdot 1}$  в результаты всех измерений  $u_{n \cdot 1}$ ;

во-вторых, МНК-поправки  $\delta x_{n \cdot 1}$  к приближенным значениям координат  $x_{n1}^0$   $y_{n1}^0$   $H_{n1}^0$

в-третьих, неопределенные множители Лагранжа  $\lambda_{n \cdot 1}$ .

		k = 12													
		d = k - R(A) = 4		Матрица плана А для 3d-АСГП											
		R(A) = 8,00		Пункт А			Пункт В			Пункт С			Пункт D		
		Опр-ль = -8,0E-16		$\delta x_A$	$\delta y_A$	$\delta H_A$	$\delta x_B$	$\delta y_B$	$\delta H_B$	$\delta x_C$	$\delta y_C$	$\delta H_C$	$\delta x_D$	$\delta y_D$	$\delta H_D$
Гориз_пр D	1	AB	-0,707128	-0,707128	0	0,707128	0,707128	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	BC	0	0	0	0,507024	-0,861940	0	-0,507024	0,861940	0	0	0	0	0
	3	CD	0	0	0	0	0	0	0,609701	0,792611	0	-0,609701	-0,792611	0	0
	4	DA	0,581230	-0,813722	0	0	0	0	0	0	0	-0,581230	0,813722	0	0
Гор_углы B	1	$\beta_1$	-0,055837	1,728207	0	1,031386	-1,031386	0	0	0	0	-0,975549	-0,696821	0	0
	2	$\beta_2$	1,031386	-1,031386	0	-1,932813	0,501135	0	0,901426	0,530251	0	0	0	0	0
	3	$\beta_3$	0	0	0	0,901426	0,530251	0	0,095359	-1,297009	0	-0,996786	0,766758	0	0
	4	$\beta_4$	-0,975549	-0,696821	0	0	0	0	-0,996786	0,766758	0	1,972335	-0,069937	0	0
Уклоны y	1	1_2	0,072560	0,072560	-1,447642	-0,072560	-0,072560	1,447642	0	0	0	0	0	0	0
	2	2_3	0	0	0	0,053228	-0,090487	-1,029876	-0,053228	0,090487	1,029876	0	0	0	0
	3	3_4	0	0	0	0	0	0	-0,023338	-0,030339	-1,255869	0,023338	0,030339	1,255869	0
	4	4_1	-0,020259	0,028363	1,197370	0	0	0	0	0	0	0,020259	-0,028363	-1,197370	0

Рис. 2.10 Матрица плана «А» 3d-АСГП

Блоки  $K_{ij}$  этой системы содержат информацию о коррелированности векторов  $\tilde{V}_{n \cdot 1}$  и  $\delta x_{3q \cdot 1}$ . Верхний левый блок  $(K_{\bar{u}})_{n \cdot n}$  – это априорная ковариационная матрица *уравненных значений* всех измеренных величин.

В решении (2.13) блоки  $A^+$  и  $(A^+)^T$  представляют собой прямую и транспонированную регуляризованную псевдообратную матрицу, характеризующуюся свойством наименьших квадратов (РП-МНК-

матрицу) для исходной матрицы плана  $A_{n \cdot n}$ . РП-МНК- матрица  $A^+$  характеризуется всеми своими свойствами с точностью до значений параметра регуляризации  $\alpha$ .

Матрица плана  $A_{n \cdot n}$  (рис. 2.10) будет иметь плохую обусловленность, о чем свидетельствует близкое к нулю значение определителя минора, выделенного на этом рисунке, и её неполный ранг ( $R(A_{n \cdot n}) = 8 < k = 12$ ). Матрица  $A_{n \cdot n}$  будет характеризоваться дефектом  $d$ , равным разности между числом  $k$  столбцов этой матрицы и её рангом:

$$d = k - R(A_{n \cdot n}) = 12 - 8 = 4. \quad (2.14)$$

Ранг матрицы  $A_{n \cdot n}$ , обозначаемый  $R(A_{n \cdot n})$ , вычислен по формуле С.Р. Рао [41] с использованием следа вспомогательной матрицы  $H$ :

$$R(A_{n \cdot n}) = R(A^+ \cdot A_{n \cdot n} = H_{n \cdot n}) = tr(H_{n \cdot n}) = 8. \quad (2.15)$$

Тот факт, что матрица  $A_{n \cdot n}$  является матрицей неполного ранга, приводит к тому, что элементы центрального блока  $\mathfrak{R}$  в решении (2.13) не могут быть использованы в качестве априорной оценки точности уравненных значений координат пунктов  $3d$ -АСГП, то есть  $\mathfrak{R} \neq K_{\bar{x}}$ . С помощью блоков  $A^+$  и  $(A^+)^T$  и данных исходной ковариационной матрицы  $K_u$  (2.4), была определена *априорная* ковариационная матрица уравненных значений координат  $K_{\bar{x}}$  всех пунктов  $3d$ -АСГП:

$$K_{\bar{x}} = A^+ \cdot K_u \cdot (A^+)^T. \quad (2.16)$$

По значениям  $\tilde{V}_{n \cdot 1}$  из решения (2.13) и элементам блока  $K_u^{-1}$  из (2.11) производится оценка точности выполненных измерений с использованием масштабного показателя точности (МПТ) [37]. Числовое значение МПТ в эксперименте оказалось допустимым:

$$\mu^2 = \frac{\tilde{V}_{1 \cdot n}^T K_u^{-1} \tilde{V}_{n \cdot 1}}{n-k+d} = 0,881. \quad (2.17)$$

Для апостериорной оценки точности уравненных значений измерений используется левый верхний блок  $K_{\bar{u}}$  решения (2.13), который модулируется оценкой МПТ (2.17):

$$\bar{K}_{\bar{u}} = \mu^2 \cdot K_{\bar{u}}. \quad (2.18)$$

По элементам матрицы  $\bar{K}_{\bar{u}}$  вычисляется средняя квадратическая погрешность (СКП) каждого уравненного значения  $i$ -го измерения:

$$m_i = \sqrt{\{\bar{K}_{\bar{u}}\}_{ii}}. \quad (2.19)$$

По данным матрицы (2.16) и апостериорному значению МПТ (2.17) вычисляется *апостериорная* ковариационная матрица уравненных значений координат пунктов  $3d$ -АСГП:

$$\bar{K}_{\bar{X}} = \mu^2 \cdot A^+ \cdot K_u \cdot (A^+)^T. \quad (2.20)$$

С её помощью можно оценить СКП координат  $x_q, y_q, H_q$  и СКП пространственного положения  $M_j$  ( $j=1, 2, \dots, q$ ) каждого пункта:

$$m_{xj} = \sqrt{\{\bar{K}_{\bar{X}}\}_{j \cdot j}}; \quad m_{yj} = \sqrt{\{\bar{K}_{\bar{X}}\}_{j+1 \cdot j+1}}; \quad m_{Hj} = \sqrt{\{\bar{K}_{\bar{X}}\}_{j+2 \cdot j+2}}; \quad (2.21)$$

$$M_j = \sqrt{m_{xj}^2 + m_{yj}^2 + m_{Hj}^2}. \quad (2.22)$$

С целью заключительного контроля процедуры МНК-оптимизации измерений, урвненные значения горизонтальных проложений и углов были повторно определены по урвненным значениям координат определяемых пунктов. Расхождений не выявлено.

Результаты урвнивания и оценки точности помещены на рис. 2.11.

Пункты	Координаты	Приближённые и урвненные координаты (м)			СКП к-нат	СКП п-та
					(мм)	(мм)
A	x	1000,00	0,0008	1000,0008	1,0	
	y	1000,00	-0,0009	999,9991	1,2	2,5
	H	100,00	0,0024	100,0024	2,0	
B	x	1100,00	-0,0010	1099,9990	1,0	
	y	1100,00	-0,0001	1099,9999	1,2	2,6
	H	110,00	0,0019	110,0019	2,2	
C	x	1000,00	-0,0003	999,9997	0,9	
	y	1270,00	0,0002	1270,0002	1,3	2,8
	H	90,00	-0,0004	89,9996	2,3	
D	x	900,00	0,0004	900,0004	0,9	
	y	1140,00	0,0007	1140,0007	1,2	2,6
	H	95,00	-0,0039	94,9961	2,1	

Рис. 2.11. Координаты точек 3d-АСГП и их СКП

### 2.2.3. Координирование точек объекта с учетом СКП координат пунктов опорного 3d-АСГП

Мониторинг отдельных точек объекта (рис. 2.9) требует учитывать СКП координат созданного 3d-АСГП. Для решения такой задачи будет эффективным тот же СВПВ, расширенный блоком, учитывающим вышеупомянутые погрешности опорных координат. На рис. 2.12 представлена структурная схема такого алгоритма. Размеры блоков, согласованы с данными рассматриваемого примера.

$K_z^{-1} \quad 6 \times 6$	$0 \quad 6 \times 12$	$0 \quad 6 \times 6$	$C^T \quad 6 \times 12$		$\delta z \quad 6 \times 1$		$0 \quad 6 \times 1$
$0 \quad 12 \times 6$	$K_u^{-1} \quad 12 \times 12$	$0 \quad 12 \times 6$	$-I \quad 12 \times 12$	*	$V \quad 12 \times 1$	=	$0 \quad 12 \times 1$
$0 \quad 6 \times 6$	$0 \quad 6 \times 12$	$\alpha^* I \quad 6 \times 6$	$A^T \quad 6 \times 12$		$\delta x \quad 6 \times 1$		$0 \quad 6 \times 1$
$C \quad 12 \times 6$	$-I \quad 12 \times 12$	$A \quad 12 \times 6$	$0 \quad 12 \times 12$		$\lambda \quad 12 \times 1$		$L \quad 12 \times 1$

Рис. 2.12. Алгоритм МНК-оптимизации измерений на объекте с учётом СКП пунктов 3d-АСГП

На рис. 2.12 обозначено:

$K_z^{-1}$  – обратная ковариационная матрица координат пунктов  $A$  и  $D$  3d-АСГП, которые будут использованы в решении задачи;

$K_u^{-1}$  – обратная ковариационная матрица значений линейных и угловых измерений  $u$ , связывающих объект с пунктами  $3d$ -АСГП;

$K_x^{-1} = \alpha \cdot I$  – стабилизирующее слагаемое, в котором используется параметр регуляризации  $\alpha = 10^{-m}$ ;

$A$  – матрица плана измерений  $U$ , состоящая из частных производных этих измерений по координатам определяемых точек;

$C$  – матрица плана измерений  $U$  на объекте, состоящая из частных производных этих измерений по координатам опорных пунктов  $3d$ -АСГП;

$L$  – свободные члены;

$I$  – единичные матрицы;

$0$  – нулевые блоки;

$\delta z$  – МНК-поправки к координатам пунктов  $3d$ -АСГП;

$V$  – блок МНК-поправок к линейным и угловым измерениям;

$\delta x$  – МНК-поправки к приближенным координатам точек  $P_1$  и  $P_2$  объекта;

$\lambda$  – неопределенные множители Лагранжа.

Для координирования двух новых точек  $P_1$  и  $P_2$ , закрепленных на объекте (рис. 2.9), относительно двух пунктов  $A$  и  $D$ , принадлежащих созданному ранее  $3d$ -АСГП, предусматривается измерение четырёх горизонтальных проложений  $D_i$ , четырёх горизонтальных углов  $\beta_i$  и четырёх вертикальных углов наклона  $\nu_i$ . Общее число  $n$  этих измерений будет равно 12.

Предполагается, что будет применено тоже геодезическое оборудование, которое использовалось при развитии 3d-АСГП. Вектор  $u_{n1}^0$  будет представлять собой совокупность всех результатов выполненных измерений: линейных  $D^0$  и угловых  $\beta^0, \nu^0$ . Такая информация позволяет сформировать априори блочную ковариационную матрицу  $K_u$  (формула 2.4).

Сгенерированные псевдоизмерения  $u_{n1}$ , общим числом  $n = 12$ , и опорные координаты  $z_{t1}$  пунктов  $A$  и  $D$ , созданных для мониторинга объекта, число которых равно  $t = 6$ , в сумме дадут  $s = t + n = 18$  данных, блочная ковариационная матрица которых представлена ниже:

$$K_s = \begin{pmatrix} K_z & 0 \\ 0 & K_u \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

где  $K_u$  – это ковариационная матрица, определяемая формулой (2.4), а

$$K_z = \begin{pmatrix} K_A & K_{AD} \\ K_{DA} & K_D \end{pmatrix} - \quad (2.24)$$

это блочная ковариационная матрица уравненных значений координат опорных пунктов  $A$  и  $D$ , числовые значения блоков которой взяты из материалов первого этапа и представлены на рис. 2.13.

В расширенном алгоритме СВПВ новая система параметрических уравнений связи  $U_{n1}$ , содержит, по-прежнему, три блока измеряемых

величин:  $D_{q1}$ ,  $\beta_{q1}$ ,  $\nu_{q1}$ . Однако, теперь они зависят от вектора опорных координат  $z_{t1}$  и вектора параметров  $X = (x, y, H)$ :

Ковариационная матрица $K_Z$ (мм <sup>2</sup> )					
Пункт А			Пункт D		
0,92	0,05	0,07	0,00	0,95	-0,02
0,05	1,33	0,00	0,83	-0,24	0,04
0,07	0,00	4,17	0,00	0,07	-1,35
0,00	0,83	0,00	0,90	0,02	0,02
0,95	-0,24	0,07	0,02	1,45	-0,04
-0,02	0,04	-1,35	0,02	-0,04	4,60

Рис. 2.13. Ковариационная матрица координат опорных пунктов

*A и D*

$$U_{n1} = \begin{pmatrix} D_{q1} \\ \beta_{q1} \\ \nu_{q1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{q1}^D(z_{t1} \ x_{n1} \ y_{n1} \ H_{n1}) \\ F_{q1}^\beta(z_{t1} \ x_{n1} \ y_{n1} \ H_{n1}) \\ F_{q1}^\nu(z_{t1} \ x_{n1} \ y_{n1} \ H_{n1}) \end{pmatrix} = F_{n1}(z_{t1} \ X_{n1}). \quad (2.25)$$

Система (2.25), линеаризованная относительно приближенных значений параметров  $x_{n1}^0$   $y_{n1}^0$   $H_{n1}^0$  и опорных координат  $z_{t1}$ , принимает следующую форму:

$$C_{nt}\delta z_{t1} - \tilde{V}_{n1} + A_{n-t}\delta x_{t1} = l_{n1}. \quad (2.26)$$

Здесь  $\delta z_{t1}$  вектор МНК-поправок в координаты опорных пунктов  $A$  и  $D$ , ковариационная матрица которых  $K_z$  при необходимости будет блокироваться множителем  $f = 10^m$ , с целью анализа влияния СКП опорных координат на результаты уравнивания;

$\check{V}_{n\cdot 1}$  – вектор МНК-поправок в результаты измерений;

$\delta x_{t\cdot 1}$  – вектор МНК-поправок к приближенным значениям  $x_{n1}^0$   $y_{n1}^0$   $H_{n1}^0$  координат пунктов  $P_1$  и  $P_2$ ;

$C_{n\cdot t}$  – это матрица плана, содержащая значения частных производных горизонтальных проложений  $D$ , горизонтальных « $\beta$ » и вертикальных « $v$ » углов по координатам  $z = (x, y, H)_z$  для обоих опорных пунктов  $A$  и  $D$ :

$$C_{n\cdot t} = \begin{pmatrix} C_{n_D\cdot t} \\ C_{n_\beta\cdot t} \\ C_{n_v\cdot t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial F_{q1}^D / \partial z_{t\cdot 1} \\ \partial F_{q1}^\beta / \partial z_{t\cdot 1} \\ \partial F_{q1}^v / \partial z_{t\cdot 1} \end{pmatrix}; \quad (2.27)$$

$A_{n\cdot t}$  – это матрица плана, содержащая значения частных производных тех же измерений по координатам  $X = (x, y, H)_X$  определяемых пунктов  $P_1$  и  $P_2$ :

$$A_{n\cdot t} = \begin{pmatrix} A_{n_D\cdot t} \\ A_{n_\beta\cdot t} \\ A_{n_v\cdot t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial F_{q1}^D / \partial X_{t\cdot 1} \\ \partial F_{q1}^\beta / \partial X_{t\cdot 1} \\ \partial F_{q1}^v / \partial X_{t\cdot 1} \end{pmatrix}; \quad (2.28)$$

а  $l_{n-1}$  – это свободные члены, представляющие собой разности результатов измерений и значений соответствующих функций, вычисляемых по приближенным значениям параметров  $x_{n1}^0$   $y_{n1}^0$   $H_{n1}^0$  и координатам опорных пунктов  $A$  и  $D$ :

$$\begin{pmatrix} l_{D1} \\ l_{\beta 1} \\ l_{v1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{q1}^0 - F_{q1}^D(z_{t1} \ x_{n1}^0 \ y_{n1}^0 \ H_{n1}^0) \\ \beta_{q1}^0 - F_{q1}^\beta(z_{t1} \ x_{n1}^0 \ y_{n1}^0 \ H_{n1}^0) \\ v_{q1}^0 - F_{q1}^v(z_{t1} \ x_{n1}^0 \ y_{n1}^0 \ H_{n1}^0) \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Решение системы (2.43) с использованием МНК- функционала

$$\tilde{S}_{1..s}^T K_S^{-1} \tilde{S}_{s..1} = \min, \quad (2.30)$$

где  $\tilde{S}_{1..s}^T = (\delta z_{1..t}^T | \tilde{V}_{1..n}^T)$  – блочный вектор МНК-поправок в опорные координаты  $z_{t1}$  и результаты линейных и угловых измерений  $u_{n1}^0$ , а ковариационная матрица  $(K_S^{-1})_{ss}$  определена уравнением (2.23), образует МНК-оптимизированную систему, представленную ниже в форме новой блочной матрицы:

$$\begin{pmatrix} K_z^{-1} & 0 & 0 & C^T \\ 0 & K_u^{-1} & 0 & -I \\ 0 & 0 & K_X^{-1} = \alpha \cdot I & A^T \\ C & -I & A & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta z \\ \tilde{V} \\ \delta x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Структура (2.31) содержит:

1) обратную ковариационную матрицу  $K_z^{-1}$  координат пунктов  $A$  и  $D$  (рис. 2.12);

2) обратную ковариационную матрицу  $K_u^{-1}$  измерений, выполненных, с пунктов  $A$  и  $D$  на точки  $P_1$  и  $P_2$ , одновременно являющуюся стохастическим расширением блока  $l_{n \cdot 1}$  вектора свободных членов (2.29);

3) другие блоки, описаны в комментариях к системе (2.26) и рис. 2.11.

Ковариационная матрица  $K_u^{-1}$  измерений, выполненных, с пунктов  $A$  и  $D$  на пункты  $P_1$  и  $P_2$ , будет совпадать, по условиям моделирования, с матрицей, характеризующей априорное качество данных (2.12):

$$K_u = \text{diag}\{9 \ 9 \ 9 \ 9 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 25 \ 25 \ 25 \ 25\}. \quad (2.12)$$

Первые четыре элемента имеют размерность  $\text{мм}^2$ , а последние восемь –  $(\text{''})^2$ .

На рис. 2.14 представлены матрицы плана  $C$  и  $A$ , состоящие из значений частных производных линейных и угловых измерений, выполненных по координатам пунктов  $A$  и  $D$  (матрица  $C$ ), а также по координатам точек  $P_1$  и  $P_2$  (матрица  $A$ ).

После подготовки числовых значений всех блоков алгоритма, представленного на рис. 2.11 и в формуле (2.31), выполняется решение данного алгоритма, скелетная схема которого приводится на рис. 2.15.

		Матрица плана "С"					
		Пункт А			Пункт D		
		$\delta X_A$	$\delta Y_A$	$\delta H_A$	$\delta X_D$	$\delta Y_D$	$\delta H_D$
Гор_прол D	$AP_1$	0,274734	-0,961582	0	0	0	0
	$AP_2$	0,447215	-0,894438	0	0	0	0
	$DP_1$	0	0	0	-0,752558	0,658488	0
	$DP_2$	0	0	0	-0,780838	0,624671	0
Гор_углы $\beta$	$\beta_{A1D}$	-0,169158	1,046832	0	-0,975554	-0,696820	0
	$\beta_{A2D}$	-0,674587	-0,128243	0	-0,975554	-0,696820	0
	$\beta_{D1A}$	-0,975554	-0,696820	0	-0,302128	-0,763389	0
	$\beta_{D2A}$	-0,975554	-0,696820	0	-1,036629	-1,818409	0
Уклоны_ v	A_1	0,021369	-0,074791	-2,830023	0	0	0
	A_2	0,014764	-0,029527	-1,843988	0	0	0
	D_1	0	0	0	0,041147	-0,036004	-1,938063
	D_2	0	0	0	0,117685	-0,094148	-3,210727

a)

		Матрица плана "А"					
		Точка $P_1$			Точка $P_2$		
		$\delta X_B$	$\delta Y_B$	$\delta H_B$	$\delta X_C$	$\delta Y_C$	$\delta H_C$
Гор_прол D	$AP_1$	-0,274734	0,961582	0	0	0	0
	$AP_2$	0	0	0	-0,447215	0,894438	0
	$DP_1$	0,752558	-0,658488	0	0	0	0
	$DP_2$	0	0	0	0,780838	-0,624671	0
Гор_углы $\beta$	$\beta_{A1D}$	2,724541	0,778429	0	0	0	0
	$\beta_{A2D}$	0	0	0	1,650142	0,825063	0
	$\beta_{D1A}$	1,277683	1,460209	0	0	0	0
	$\beta_{D2A}$	0	0	0	2,012183	2,515229	0
Уклоны_ v	A_1	-0,021369	0,074791	2,830023	0	0	0
	A_2	0	0	0	-0,014764	0,029527	1,843988
	D_1	-0,041147	0,036004	1,938063	0	0	0
	D_2	0	0	0	-0,117685	0,094148	3,210727

b)

Рис. 2.14. Значения частных производных линейных и угловых измерений по координатам определяемых точек:

a) A и D; б)  $P_1$  и  $P_2$

$\delta z_{6 \times 1}$		$K_Z_{6 \times 6}$	$K_{12}_{6 \times 12}$	$K_{13}_{6 \times 6}$	$K_{14}_{6 \times 12}$		$0_{6 \times 1}$
$V_{12 \times 1}$	=	$K_{21}_{12 \times 6}$	$K_Y_{12 \times 12}$	$K_{23}_{12 \times 6}$	$K_{24}_{12 \times 12}$	*	$0_{12 \times 1}$
$\delta x_{6 \times 1}$		$K_{31}_{6 \times 6}$	$K_{32}_{6 \times 12}$	$K_X_{6 \times 6}$	$A^+_{6 \times 12}$		$0_{6 \times 1}$
$\lambda_{12 \times 1}$		$K_{41}_{12 \times 6}$	$K_{42}_{12 \times 12}$	$(A^+)^T_{12 \times 6}$	$-K_\lambda_{12 \times 12}$		$L_{12 \times 1}$

Рис. 2.15. Скелетная схема результатов МНК-оптимизации измерений на объекте с учётом СКП пунктов 3d-АСГП ( $m = 0$ )

На рис. 2.15 обозначено:

$\delta z$  – МНК-поправки к координатам пунктов  $A$  и  $D$ ;

$V$  – блок МНК-поправок к линейным и угловым измерениям;

$\delta x$  – МНК-поправки к координатам точек объекта  $P_1$  и  $P_2$ ;

$\lambda$  – неопределенные множители Лагранжа;

$K_{\bar{z}}$  – априорная ковариационная матрица уравненных значений координат пунктов 3d-АСГП;

$K_{\bar{y}}$  – априорная ковариационная матрица уравненных значений линейных и угловых измерений, выполненных для координатизации определяемых точек  $P_1$  и  $P_2$ ;

$K_{\bar{x}}$  – априорная ковариационная матрица уравненных значений координат определяемых пунктов  $P_1$  и  $P_2$ ;

$A^+$  и  $(A^+)^T$  – прямая и транспонированная МНК-РП-матрицы для матрицы плана  $A$ ;

$K_{ij}$  – взаимные ковариации корней системы;

$L$  – свободные члены;

$0$  – нулевые блоки.

Для анализа влияния СКП координат опорных пунктов  $A$  и  $D$  использовался блокирующий множитель (блокиратор)  $f = 10^m$ , на который умножалась целиком вся обратная ковариационная матрица  $K_Z^{-1}$ . Когда показатель степени  $m$  принимался равным нулю, то множитель  $f$  становился равным единице и обратная матрица  $K_Z^{-1}$  сохраняла свои числовые данные, а её влияние сказывалось полностью на все результаты решения. Если же показатель степени  $m$  принимался равным шести, то числовые данные обратной матрицы  $K_Z^{-1}$  уменьшали свои значения в миллион раз, и влияние СКП опорных пунктов практически блокировалось и не сказывалось на результатах решения.

На следующем рисунке (рис. 2.16) представлена та же скелетная схема в случае блокировки ковариационной матрицы  $K_Z^{-1}$ .

$\delta z = 0$ $6 \times 1$		$0$ $6 \times 6$	$0$ $6 \times 12$	$0$ $6 \times 6$	$0$ $6 \times 12$		$0$ $6 \times 1$
$V$ $12 \times 1$	=	$0$ $12 \times 6$	$K_Y$ $12 \times 12$	$K_{23}$ $12 \times 6$	$K_{24}$ $12 \times 12$	*	$0$ $12 \times 1$
$\delta x$ $6 \times 1$		$0$ $6 \times 6$	$K_{32}$ $6 \times 12$	$K_X$ $6 \times 6$	$A^+$ $6 \times 12$		$0$ $6 \times 1$
$\lambda$ $12 \times 1$		$0$ $12 \times 6$	$K_{42}$ $12 \times 12$	$(A^+)^T$ $12 \times 6$	$-K_\lambda$ $12 \times 12$		$L$ $12 \times 1$

Рис. 2.16. Скелетная схема результатов МНК-оптимизации измерений на объекте с блокировкой СКП пунктов 3d-АСГП ( $m = 6$ )

Числовые значения корней системы и одноименных блоков этой обратной матрицы, естественно, не будут совпадать с таковыми, когда влияние СКП опорных координат не блокируется (рис. 2.15).

Обе прямоугольные матрицы плана,  $C$  и  $A$ , являются матрицами полного столбцового ранга, в связи с чем ковариационные матрицы решений  $K_{\bar{z}}$  и  $K_{\bar{x}}$  содержат на своих диагоналях квадраты априорных значений СКП координат опорных и определяемых пунктов, соответственно:

$$m_{x_A}^2, m_{y_A}^2, m_{H_A}^2, \dots, m_{x_{P_2}}^2, m_{y_{P_2}}^2, m_{H_{P_2}}^2. \quad (2.32)$$

В тоже время, априорная ковариационная матрица определяемых координат  $K_{\bar{x}}$  может быть вычислена отдельно, вне общего решения, по формуле

$$K_{\bar{x}} = A^+ \cdot K_u \cdot (A^+)^T. \quad (2.15)$$

Когда влияние опорных координат заблокировано ( $m = 6 \div 8$ ), то значения таких вычислений дают одинаковые результаты, представленные ниже на рис. 2.17.

Когда влияние СКП опорных координат учитывается ( $m = 0$ ), то результаты вычислений расходятся (рис. 2.18).

				$K_{y_p, k}^{apost} = \mu^2(A^+)K_y(A^+)^T = \mu^2K_{y_p}^{apriori}$					
мм								мм <sup>2</sup>	
$m_x =$	0,82	$P_1$	0,67	-0,73	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00
$m_y =$	1,37	2,1	-0,73	1,88	-0,05	0,00	0,00	0,00	0,00
$m_H =$	1,38		0,03	-0,05	1,92	0,00	0,00	0,00	0,00
$m_x =$	1,25	$P_2$	0,00	0,00	0,00	1,56	-1,25	0,08	0,08
$m_y =$	1,22	2,2	0,00	0,00	0,00	-1,25	1,48	-0,08	-0,08
$m_H =$	1,28		0,00	0,00	0,00	0,08	-0,08	1,65	1,65

Рис. 2.17. Идентичные апостериорные значения ковариационной матрицы  $\bar{K}_X$ , вычисленной двумя способами при блокировке СКП опорных координат

				$K_{y_p, k}^{apost} = \mu^2(A^+)K_y(A^+)^T$					
мм								мм <sup>2</sup>	
$m_x =$	0,79	$P_1$	0,62	-0,67	0,02	0,00	0,01	0,00	0,00
$m_y =$	1,34	2,0	-0,67	1,79	-0,05	0,06	0,07	0,00	0,00
$m_H =$	1,33		0,02	-0,05	1,77	0,00	0,00	-0,08	-0,08
$m_x =$	1,19	$P_2$	0,00	0,06	0,00	1,43	-1,08	0,07	0,07
$m_y =$	1,17	2,1	0,01	0,07	0,00	-1,08	1,38	-0,06	-0,06
$m_H =$	1,27		0,00	0,00	-0,08	0,07	-0,06	1,62	1,62

				$K_{y_p, k}^{apost} = \mu^2K_{y_p}^{apriori}$					
мм								мм <sup>2</sup>	
$m_x =$	0,86	$P_1$	0,74	-0,70	0,02	0,09	0,04	0,00	0,00
$m_y =$	1,58	2,5	-0,70	2,49	-0,04	0,43	0,58	0,02	0,02
$m_H =$	1,73		0,02	-0,04	3,01	0,01	0,00	1,10	1,10
$m_x =$	1,33	$P_2$	0,09	0,43	0,01	1,77	-0,76	0,07	0,07
$m_y =$	1,33	2,5	0,04	0,58	0,00	-0,76	1,78	-0,05	-0,05
$m_H =$	1,70		0,00	0,02	1,10	0,07	-0,05	2,90	2,90

Рис. 2.18. Апостериорные значения ковариационной матрицы  $\bar{K}_X$ , вычисленной с учетом СКП опорных координат двумя способами

Необходимо отметить, что МНК-РП -матрицы  $A^+$  и  $(A^+)^T$  вычисляются автоматически в теле гиперматрицы  $M^{-1}$ . Этим обстоятельством,

как раз и объясняются отмечаемые расхождения, поскольку блокирование матрицы  $K_z^{-1}$  влияет на результат обращения гиперматрицы коэффициентов и меняет значения элементов МНК-РП -матрицы  $A^+$ .

Корректным будет прямое (нижнее на рис. 2.18) решение, получаемое по формуле

$$\bar{K}_{\bar{X}} = \mu^2 \cdot K_{\bar{X}}, \quad (2.33)$$

где  $K_{\bar{X}}$  – это центральный блок гиперматрицы  $M^{-1}$ .

Дополнительно отметим, что и МПТ также реагирует на блокировку ковариационной матрицы опорных координат, так как в синтезированных алгоритмах опорные координаты – это *данные, формально равноправные с результатами измерений*. Знаменатель в формуле, по которой вычисляется значение МПТ, остается постоянным, а числитель при блокировании матрицы  $K_z^{-1}$  – изменяется.

Формула, по которой оценивается величина МПТ в расширенном алгоритме СВПВ МНК-оптимизации данных использует в числителе сглаживающий функционал (2.30), а знаменатель, как всегда будет равен разности между общим числом данных  $s$  (количество координат опорных пунктов –  $t$ , плюс число выполненных измерений по привязке определяемых точек –  $n$ ) и числом определяемых параметров-координат  $k$ , равным сумме числа опорных  $k_z$  и определяемых  $k_x$  координат:

$$\mu^2 = \frac{\tilde{S}_{1:s}^T K_S^{-1} \tilde{S}_{s-1}}{s-k} = \tilde{\sigma}^2. \quad (2.34)$$

При учете влияния СКП опорных пунктов ( $m = 0$ ) значение МПТ оказалось равным 0,806, а при блокировании влияния указанных СКП ( $m = 6 \div 8$ ), значение МПТ изменилось и стало равным 0,901. Обе величины успешно прошли тестирование на проверку нулевой гипотезы  $H_0 = \{\sigma^2 = 1\}$  на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

Окончательный контроль работы расширенного алгоритма СВПВ МНК-оптимизации данных заключался в повторном вычислении уравненных значений измерявшихся величин по уравненным значениям координат как определяемых, так и опорных пунктов. Расхождения не обнаружены.

Результаты уравнивания и оценки точности с учетом влияния СКП координат опорных пунктов ( $m = 0$ ) помещены на рис. 2.19.

Пункты, точки	Координаты	Приближённые и уравненные			СКП к-нат (мм)	СКП п-та (мм)
		координаты (м)				
A	x	1000,000	-0,0004	999,9996	0,8	
	y	999,999	-0,0005	999,9985	0,9	1,8
	H	100,000	0,0002	100,0002	1,4	
D	x	900,000	-0,0003	899,9997	0,8	
	y	1140,000	-0,0003	1139,9997	1,0	1,9
	H	95,000	-0,0003	94,9997	1,4	
P <sub>1</sub>	x	980	-0,0005	979,9995	0,8	
	y	1070	-0,0019	1069,9981	1,3	2,0
	H	98	-0,0008	97,9992	1,3	
P <sub>2</sub>	x	950	0,0017	950,0017	1,2	
	y	1100	-0,0013	1099,9987	1,2	2,1
	H	98	0,0013	98,0013	1,3	

Рис. 2.19. Координаты опорных пунктов и определяемых точек с учетом СКП координат первых

В силу хорошего качества координат опорной сети, влияние СКП её пунктов сказывается незначительно. К тому же, и сама сеть второго уровня имеет хорошие показатели качества выполненных работ.

Результаты уравнивания и оценки точности с блокировкой влияния СКП координат опорных пунктов ( $m = 6 \div 8$ ) размещены на рис. 2.20.

Пункты, точки	Координаты	Приближённые и уравненные координаты (м)			СКП к-нат	СКП п-та
					(мм)	(мм)
<i>A</i>	<i>x</i>	1000,000	0,0000	1000,000	0,0	
	<i>y</i>	999,999	0,0000	999,999	0,0	0,0
	<i>H</i>	100,000	0,0000	100,000	0,0	
<i>D</i>	<i>x</i>	900,000	0,0000	900,000	0,0	
	<i>y</i>	1140,000	0,0000	1140,000	0,0	0,0
	<i>H</i>	95,000	0,0000	95,000	0,0	
<i>P<sub>1</sub></i>	<i>x</i>	980	-0,0006	979,999	0,8	
	<i>y</i>	1070	-0,0012	1069,999	1,4	2,1
	<i>H</i>	98	-0,0009	97,999	1,4	
<i>P<sub>2</sub></i>	<i>x</i>	950	0,0020	950,002	1,2	
	<i>y</i>	1100	-0,0009	1099,999	1,2	2,2
	<i>H</i>	98	0,0015	98,001	1,3	

Рис. 2.20. Координаты опорных пунктов и определяемых точек при блокировании влияния СКП опорных пунктов

Блокирование ковариационной матрицы опорных координат фактически означает, что новое построение развивается относительно исходных, менее точных (до совместного уравнивания) координат опоры. Об этом свидетельствуют несколько увеличившиеся (на 0.1 мм) СКП положения обоих пунктов объекта  $P_1$  и  $P_2$ .

#### **2.2.4. Совместная одноэтапная обработка измерений по координированию опорных пунктов 3d-АСГП и точек объекта мониторинга**

При совместной, одноэтапной обработке всех измерений, их общее число увеличится и будет равно  $n = 3 q = 18$ , где  $q$  теперь равно 6-ти – общему количеству пунктов построения. Обработка и анализ результатов таких измерений в 3d-АСГП (рис. 2.9) вновь будет выполнена с использованием алгоритма СВПВ, который применялся в первом подразделе 2.2.2. Совокупность всех измерений образует вектор  $u$ , в который будут входить линейные величины (горизонтальные проложения  $D$ ) и угловые данные (горизонтальные  $\beta$  и вертикальные  $v$  углы). По-прежнему, вектор  $u_{18.1}^0$  – это совокупность всех выполненных результатов измерений:  $D^0, \beta^0, v^0$ .

Показатели точности результатов измерений остаются прежними, что позволяет воспользоваться блочной ковариационной матрицей  $K_u$  данных, подобной гиперматрице (2.4), но большего размера:

$$K_u = \begin{pmatrix} K_D & 0 & 0 \\ 0 & K_\beta & 0 \\ 0 & 0 & K_v \end{pmatrix}_{24 \cdot 24} \quad (2.35)$$

Повторение всех отдельных теоретических шагов алгоритма СВПВ от формул (2.6) до (2.11) не принесет новизны. В связи с этим, далее будут приведены лишь конкретные иллюстрации, представляющие собой

новые числовые данные по совместной одноэтапной оптимизации всех результатов.

Числовые значения элементов матрицы (2.35) представлены ниже в форме диагональной матрицы:

$$K_u = \text{diag}\langle 9 \dots 9 | 4 \dots 4 | 25 \dots 25 \rangle, \quad (2.36)$$

где первые восемь элементов имеют размерность  $\text{мм}^2$ , а две последующие восьмерки – это  $(\text{")})^2$ .

Матрица плана при одноэтапной обработке, естественно, увеличится до размера  $(24 \times 18)$ . На рис. 2.21 она представлена в уменьшенном масштабе.

Эта матрица имеет неполный столбцовый ранг, определенный по формуле Рао (2.15) но давшей, естественно, другой результат [41]:

$$R(A_{24 \cdot 18}) = R(A_{18 \cdot 24}^+ \cdot A_{24 \cdot 18} = H_{18 \cdot 18}) = \text{tr}(H_{18 \cdot 18}) = 14. \quad (2.37)$$

Матрица  $A_{24 \cdot 18}$  будет иметь дефект  $d$ , равный разности между числом столбцов этой матрицы и её рангом:

$$d = k - R(A_{24 \cdot 18}) = 18 - 14 = 4. \quad (2.38)$$

Поскольку матрица  $A_{24 \cdot 18}$  является матрицей неполного столбцового ранга, то элементы центрального блока  $\mathfrak{R}$ , который представляет

собой «преобразованное» стабилизирующее слагаемое  $\alpha \cdot I_{kk}$ , не могут быть использованы в качестве априорной оценки точности уравненных значений координат пунктов совместного АГСП, то есть  $\mathfrak{R} \neq K_{\bar{X}}$ . С помощью блоков  $A^+$  и  $(A^+)^T$  и данных исходной ковариационной матрицы  $K_u$  (2.36), была определена новая *априорная* ковариационная матрица уравненных значений координат  $K_{\bar{X}}$  всех пунктов совместного АСГП по ранее использованной формуле (2.16).

		k = 18																		
		d = k · R(A) = 4																		
		R(A) = 14																		
		Матрица плана $A_{24 \times 18}$																		
		Пункт А			Пункт В			Пункт С			Пункт D			Точка P <sub>1</sub>			Точка P <sub>2</sub>			
		Опр-ль = 6,3E-31	BX <sub>A</sub>	BY <sub>A</sub>	BH <sub>A</sub>	BX <sub>B</sub>	BY <sub>B</sub>	BH <sub>B</sub>	BX <sub>C</sub>	BY <sub>C</sub>	BH <sub>C</sub>	BX <sub>D</sub>	BY <sub>D</sub>	BH <sub>D</sub>	BX <sub>1</sub>	BY <sub>1</sub>	BH <sub>1</sub>	BX <sub>2</sub>	BY <sub>2</sub>	BH <sub>2</sub>
Горизонтальные продолжения D	AB	1	-0,7071	-0,7071	0	0,7071	0,7071	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	BC	2	0	0	0	0,5070	-0,8619	0	-0,5070	0,8619	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	CD	3	0	0	0	0	0	0	0,6097	0,7926	0	-0,6097	-0,7926	0	0	0	0	0	0	0
	DA	4	0,5812	-0,8137	0	0	0	0	0	0	0	-0,5812	0,8137	0	0	0	0	0	0	0
	AP <sub>1</sub>	5	0,2747	-0,9616	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,2747	0,9616	0	0	0	0
	AP <sub>2</sub>	6	0,4472	-0,8944	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,4472	0,8944	0
	DP <sub>1</sub>	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,7526	0,6585	0	0,7526	-0,6585	0	0	0	0
	DP <sub>2</sub>	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,7808	0,6247	0	0	0	0	0,7808	-0,6247	0
Горизонтальные углы B	β <sub>1</sub>	9	-0,0558	1,7282	0	1,0314	-1,0314	0	0	0	0	-0,9755	-0,6968	0	0	0	0	0	0	0
	β <sub>2</sub>	10	1,0314	-1,0314	0	-1,9328	0,5011	0	0,9014	0,5303	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	β <sub>3</sub>	11	0	0	0	0,9014	0,5303	0	0,0954	-1,2970	0	-0,9968	0,7668	0	0	0	0	0	0	0
	β <sub>4</sub>	12	-0,9755	-0,6968	0	0	0	0	-0,9968	0,7668	0	1,9723	-0,0699	0	0	0	0	0	0	0
	β <sub>A1</sub>	13	-1,7490	-0,0816	0	0	0	0	0	0	0	-0,9755	-0,6968	0	2,7246	0,7784	0	0	0	0
	β <sub>A2</sub>	14	-0,6746	-0,1283	0	0	0	0	0	0	0	-0,9755	-0,6968	0	0	0	0	1,6502	0,8251	0
	β <sub>D1</sub>	15	-0,9755	-0,6968	0	0	0	0	0	0	0	-0,3021	-0,7634	0	1,2777	1,4602	0	0	0	0
	β <sub>D2</sub>	16	-0,9755	-0,6968	0	0	0	0	0	0	0	-1,0366	-1,8184	0	0	0	0	2,0122	2,5152	0
Вертикальные углы V	v <sub>AB</sub>	17	0,0726	0,0726	-1,4476	-0,0726	-0,0726	1,4476	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v <sub>BC</sub>	18	0	0	0	0,0532	-0,0905	-1,0299	-0,0532	0,0905	1,0299	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v <sub>CD</sub>	19	0	0	0	0	0	0	-0,0233	-0,0303	-1,2559	0,0233	0,0303	1,2559	0	0	0	0	0	0
	v <sub>DA</sub>	20	-0,0203	0,0284	1,1974	0	0	0	0	0	0	0,0203	-0,0284	-1,1974	0	0	0	0	0	0
	v <sub>A1</sub>	21	0,0214	-0,0748	-2,8301	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,0214	0,0748	2,8301	0	0	0
	v <sub>A2</sub>	22	0,0148	-0,0295	-1,8440	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,0148	0,0295	1,8440
	v <sub>D1</sub>	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0411	-0,0360	-1,9381	-0,0411	0,0360	1,9381	0	0	0
	v <sub>D2</sub>	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1177	-0,0941	-3,2107	0	0	0	-0,1177	0,0941	3,2107

Рис. 2.21. Матрица плана опорных пунктов и определяемых точек при совместной МНК-оптимизации данных

По значениям  $\tilde{V}_{24 \cdot 1}$  из совместного решения и элементам блока  $K_u^{-1}$  произведена оценка точности выполненных измерений с использованием масштабного показателя точности (МПТ) [40]. Числовое значение МПТ в эксперименте оказалось допустимым и равным:

$$\mu^2 = \frac{\tilde{V}_{1 \cdot n}^T K_u^{-1} \tilde{V}_{n \cdot 1}}{n-k+d} = 1,048. \quad (2.39)$$

По новым значениям матрицы (2.16) и апостериорному значению МПТ (2.39) была вычислена *апостериорная* ковариационная матрица уравненных значений координат совместного АСГП (формула 2.20). С её помощью были определены СКП координат  $x_q, y_q, H_q$  и СКП пространственного положения  $M_j$  ( $j=1, 2, \dots, q$ ) каждого пункта АСГП (формулы 2.21 и 2.22).

С целью заключительного контроля процедуры МНК-оптимизации измерений, уравненные значения горизонтальных проложений и углов, а также углов наклона, были повторно определены по уравненным значениям координат определяемых пунктов. Расхождений не обнаружено.

Результаты совместной МНК-оптимизации и оценки точности АСГП помещены на рис. 2.22.

Ниже, на рис. 2.23 представлена сводная таблица координат моделируемого  $3d$ -АСГП и СКП положения этих пунктов, определенных различными способами.

Пункты, точки	Координаты	Приближённые и уравненные значения координат (м)			СКП к-нат	СКП п-та
					(мм)	(мм)
<b>A</b>	<i>x</i>	1000	0,0002	1000,0002	0,14	
	<i>y</i>	1000	-0,0003	999,9997	0,15	0,21
	<i>H</i>	100	0,0006	100,0006	0,05	
<b>B</b>	<i>x</i>	1100	-0,0015	1099,9985	0,19	
	<i>y</i>	1100	0,0005	1100,0005	0,20	0,29
	<i>H</i>	110	0,0011	110,0011	0,10	
<b>C</b>	<i>x</i>	1000	-0,0006	999,9994	0,15	
	<i>y</i>	1270	0,0005	1270,0005	0,21	0,29
	<i>H</i>	90	0,0006	90,0006	0,11	
<b>D</b>	<i>x</i>	900	0,0000	900,0000	0,14	
	<i>y</i>	1140	0,0009	1140,0009	0,16	0,21
	<i>H</i>	95	-0,0017	94,9983	0,05	
<b>P<sub>1</sub></b>	<i>x</i>	980	-0,0003	979,9997	0,17	
	<i>y</i>	1070	-0,0010	1069,9990	0,26	0,31
	<i>H</i>	98	-0,0010	97,9990	0,06	
<b>P<sub>2</sub></b>	<i>x</i>	950	0,0023	950,0023	0,22	
	<i>y</i>	1100	-0,0005	1099,9995	0,21	0,31
	<i>H</i>	98	0,0004	98,0004	0,06	

Рис. 2.22. Координаты точек совместного АСГП и их СКП

Ниже, на рис. 2.23 представлена сводная таблица координат моделируемого 3d-АСГП и СКП положения этих пунктов, определенных различными способами.

Сопоставление результатов МНК-оптимизации линейно-угловых измерений, выполненных по разным технологическим схемам, демонстрирует тот факт, что они довольно близки между собой. Это объясняется следующими обстоятельствами.

Во-первых, приближенные значения координат опорных пунктов и точек объекта моделируемого построения характеризуются высоким качеством.

Во-вторых, все наблюдения как выполненные для создания пунктов основы, так и для координирования точек объекта характеризуются одинаковыми показателями точности.

В-третьих, опорные пункты  $A$  и  $D$ , с которых определялись целевые точки объекта  $P_1$  и  $P_2$ , характеризуются дополнительным объёмом измерений по сравнению с пунктами  $B$  и  $C$ . Естественно, что они характеризуются меньшими СКП положения: 0,21мм у первой пары, против 0,29 мм – у последней.

В-четвертых, сами точки объекта  $P_1$  и  $P_2$  имеют самые большие, и одинаковые, СКП положения – 0,31 мм, что объясняется их «висячим» положением – с них не выполнялись никакие измерения [42].

		Сводная таблица результатов экспериментов							
Пункты, точки	Координаты	Основа		Объект (с учетом $K_z$ )		Объект (без учета $K_z$ )		Совместная обработка	
		$\mu^2 = 0,881$		$\mu^2 = 0,806$		$\mu^2 = 0,901$		$\mu^2 = 1,048$	
		Уравненные значения (м)	СКП п-та (мм)	Уравненные значения (м)	СКП п-та (мм)	Уравненные значения (м)	СКП п-та (мм)	Уравненные значения (м)	СКП п-та (мм)
$A$	$x$	1000,0008		999,9996		1000,0000		1000,0002	
	$y$	999,9991	2,5	999,9985	1,8	999,9990	0,0	999,9997	0,21
	$H$	100,0024		100,0002		100,0000		100,0006	
$B$	$x$	1099,9990		<i>Не задействованы!</i>				1099,9985	
	$y$	1099,9999	2,6					1100,0005	0,29
	$H$	110,0019						110,0011	
$C$	$x$	999,9997						999,9994	
	$y$	1270,0002	2,8					1270,0005	0,29
	$H$	89,9996						90,0006	
$D$	$x$	900,0004		899,9997		900,0000		900,0000	
	$y$	1140,0007	2,6	1139,9997	1,9	1140,0000	0,0	1140,0009	0,21
	$H$	94,9961		94,9997		95,0000		94,9983	
$P_1$	$x$	<i>Не задействованы!</i>		979,9995		979,9994		979,9997	
	$y$			1069,9981	2,0	1069,9988	2,1	1069,9990	0,31
	$H$			97,9992		97,9991		97,9990	
$P_2$	$x$			950,0017		950,0020		950,0023	
	$y$			1099,9987	2,1	1099,9991	2,2	1099,9995	0,31
	$H$			98,0013		98,0015		98,0004	

Рис. 2.23. Сводная таблица координат пунктов АСГП и точек объекта, определенных по различным технологиям

Вычисления для *Раздела 2.2* осуществлялись в среде *Excel*. Книга, в которой выполнялись все расчёты, состояла из 4-х листов: «Генератор», «Основа», «Объект» и «Всё и сразу». Лист «Генератор» формировал выборку из 120-ти стандартных, нормальных псевдослучайных чисел, вычисляемых по данным машинного генератора равномерных псевдослучайных чисел по закону больших чисел Ляпунова-Линденберга [43]. Одни и те же результаты работы «Генератора» дублировались в качестве псевдопогрешностей наблюдений на каждый из трёх рабочих листов книги: «Основа», «Объект» и «Всё и сразу». Работа генератора автоматически анализировалась: вычислялись оценка математического ожидания (среднее) и оценка стандарта (СКП) выборки. Параллельно проверялись гипотезы о незначимости отклонения каждой из оценок от параметров стандартного нормального распределения: 0 – для математического ожидания, и 1 – для стандарта.

Генератор запускался автоматически при очистке пустой ячейки любого из листов путем активации клавиши «Del». На листе появлялся анализ работы генератора и возникшие псевдопогрешности автоматически вводились в качестве погрешностей измерений. Всё пересчитывалось вновь и результаты, полученные на каждом листе, подлежали анализу.

Приведенные в контексте настоящей работы числовые результаты соответствовали одному из исполненных вариантов. Многократные просмотры других вычислений ни разу не опровергли главный вывод:

более высокая точность соответствует технологии совместной обработки данных наблюдений, как на опорных пунктах, так и на точках объекта.

### **3. ПРИМЕНЕНИЕ СИНТЕЗИРОВАННЫХ ВАРИАНТОВ АЛГОРИТМОВ МНК-ОПТИМИЗАЦИИ ГЕОПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ОБРАБОТКИ И АНАЛИЗА ГНСС-НАБЛЮДЕНИЙ**

#### **3.1. Обработка и анализ ГНСС-построений, развиваемых «лучевым» и «сетевым» способами**

##### ***3.1.1. Теоретический аспект проблемы***

При использовании ГНСС-технологий в качестве метода геодинамического мониторинга, приходится сталкиваться с проблемой, на которую авторы обращают особое внимание и предлагают свой вариант решения. Она заключается в сравнении двух способов координирования некоторого пункта, вставляемого в известную геодезическую сеть: «лучевого» и «сетевого».

Пусть  $p$  – это число опорных пунктов существующей сети, по которым координируется новая точка. По данным ГНСС-наблюдений будут определены  $n = 2*3p$  разностей  $\Delta X \Delta Y \Delta Z$ . Половина из них,  $3p$  приращений, характеризуют взаимное положение опорных пунктов (назовем эти приращения «канва»), а  $3p$  других приращений – будут «лучи»: – это разности координат опорных пунктов и определяемой точки.

В научно-технической литературе приводится информация о том, что развитие спутниковых геодезических сетей должно осуществляться только с помощью «сетевого» способа, при этом «лучевой» способ считается неприемлемым [44-46]. Такие утверждения делались исследователями, использовавшими коммерческие пакеты обработки данных ГНСС-измерений, математическое обеспечение которых не предусматривает вмешательство исполнителя в математическую основу «черного ящика» вычислительного алгоритма.

Авторы в своих экспериментах использовали собственный «пакет», реализованный в вычислительной среде Excel, и позволяющий использовать суточные данные ГНСС-наблюдений по алгоритму синтезированного варианта параметрической версии (СВПВ) МНК-оптимизации данных [47]. Ими показано, что точность «лучевого» и «сетевого» способов идентична, так как *координаты опорных пунктов должны полагаться константами*, которые не будут получать поправки по материалам уравнивания.

В пространстве  $3d$  линейная модель функциональных связей вектора истинных значений  $D_{n\cdot 1}$  разностей измеренных приращений  $\Delta_{n\cdot 1}$  геоцентрических координат  $XYZ$  пунктов построения, с вектором *опорных* координат  $Z_{n\cdot 1}$  и вектором *определяемых* координат  $X_{k\cdot 1}$  нового пункта, записывается следующим образом:

$$D_{n\cdot 1} = Z_{n\cdot 1} - A_{n\cdot k} \cdot X_{k\cdot 1}. \quad (3.1)$$

Здесь  $A_{n\cdot k}$  – это матрица плана данной линейной модели, состоящая из  $n/3$  единичных блоков типа  $\pm I_{3\cdot 3}$ .

Располагая значениями измеренных приращений геоцентрических координат  $\Delta^{\text{изм}}$  между пунктами, а также приближенными значениями  $Z^0$  координат определяемого пункта, и добавляя к ним значения  $U^0$  координат опорных точек, взятых из каталога, можно выразить неизвестные истинные значения векторов  $D$ ,  $Z$  и  $X$  стандартным образом, добавив искомые случайные поправки  $\delta\Delta$ ,  $\delta z$  и  $\delta x$ :

$$D = \Delta^{\text{изм}} + \delta\Delta; \quad (3.2)$$

$$Z = Z^0 + \delta z; \quad (3.3)$$

$$X = X^0 + \delta x. \quad (3.4)$$

Заменив в линейной функциональной модели (3.1) истинные величины векторов их приближенными значениями, сопровождаемыми искомыми поправками согласно (3.2)–(3.4), получим функциональную модель, представленную в неявной форме:

$$(\delta z)_{n \cdot 1} - (\delta\Delta)_{n \cdot 1} - A_{n \cdot k} \cdot (\delta x)_{k \cdot 1} - L_{n \cdot 1} = 0_{n \cdot 1}. \quad (3.5)$$

Свободный член  $L_{n \cdot 1}$  уравнения (3.5) – это разность измеренных значений приращений базовых линий  $(\Delta^{\text{изм.}})_{n \cdot 1}$  и их приближенных значений  $(\Delta^{\text{пр.}})_{n \cdot 1}$ , соответствующих приближенным величинам координат определяемого пункта:

$$L_{n \cdot 1} = (\Delta^{\text{изм.}})_{n \cdot 1} - (\Delta^{\text{пр.}})_{n \cdot 1}, \quad (3.6)$$

где  $(\Delta^{\text{пр.}})_{n \cdot 1} = (Z^0)_{n \cdot 1} - A_{n \cdot k} \cdot (X^0)_{k \cdot 1}$ .

Координаты опорных пунктов  $Z$ , выписанные из каталогов и принимаемые за «приближенные» значения  $Z^0$ , не могут быть изменены и, как следствие, не должны получать поправок  $\delta z$  из уравнивания. Это достигается путем использования ковариационной матрицы опорных координат, регуляризированной по Тихонову:  $(K_Z)_{n \cdot n} = 10^{-8} I_{n \cdot n} \cdot (\text{м}^2)$ . Такой прием делает элементы вектора поправок  $\delta Z$  практически незначимыми. Ковариационная матрица приближенных значений координат определяемого пункта также подвергается регуляризации по Тихонову:  $K_X = 10^{12} \cdot I_{3 \cdot 3} (\text{м}^2)$ .

*Результаты математической обработки.* Блоки алгоритма СВПВ МНК-оптимизации данных для *лучевого* способа представлены на рис. 3.1. Там же описана структура каждого блока, входящего в матрицу коэффициентов  $(C_{n \cdot n} = I_{n \cdot n} \mid -I_{n \cdot n} \mid A_{n \cdot 3})$ , вектор корней системы  $(\delta z_{n \cdot 1}, \delta \Delta_{n \cdot 1}, \delta x_{k \cdot 1})$  и вектор ее свободных членов  $L_{n \cdot 1}$ .

Лучевой способ									
$(K_Z \cdot 10^{-8})^{-1}$								$\delta z$	0
$n \cdot n$		0	$n \cdot n$	0	$n \cdot 3$	$C^T = I$	$n \cdot n$	$n \cdot 1$	$n \cdot 1$
0		$(K_{\Delta_1} \cdot 10^4)^{-1}$				-I		$\delta \Delta_1$	0
$n \cdot n$		$n \cdot n$			$n \cdot 3$	$n \cdot n$	*	$n \cdot 1$	= $n \cdot 1$
0	$3 \cdot n$	0	$3 \cdot n$	$(K_X = I \cdot 10^{12})^{-1}_{3 \cdot 3}$		$A^T$	$3 \cdot n$	$\delta x_{3 \cdot 1}$	0 $_{3 \cdot 1}$
$C = I$		-I		A		0		$\lambda$	$L_1$
$n \cdot n$		$n \cdot n$		$n \cdot 3$		$n \cdot n$		$n \cdot 1$	$n \cdot 1$

Рис. 3.1. Структура блоков алгоритма СВПВ для *лучевого* способа

На рис. 3.1 обозначено:

$K_Z \cdot 10^{-8}$  – ковариационная матрица опорных координат  $Z$ , блокированная множителем  $10^{-8}$ , с целью уменьшения её влияния до пренебрегаемо малых значений;

$K_{\Delta 1} \cdot 10^4$  – априорная ковариационная матрица измеренных приращений  $\Delta_1$ , размерность которой равна  $\text{см}^2$ ;

$(K_X)^{-1} = (I \cdot 10^{12})^{-1}$  – стабилизирующее слагаемое, выполняющее роль регуляризирующего оператора;

$L$  – свободные члены линеаризованной модели (3), равные разности измеренных значений приращений  $\Delta^{\text{изм}}$  и их приближенных значений  $\Delta^{\text{пр}}$ ;

$A$  – матрица плана по искомым координатам  $X$  определяемого пункта;

$C = I$  – матрица плана по опорным координатам  $Z$ .

Структура получаемых результатов приведена на рис. 3.2, так же сопровождаемом необходимыми пояснениями.

Лучевой способ														
$\delta z = 0$														
$n \cdot 1$		$K_{Z_{\text{гп}}}$			$K_{12}$		$K_{13}$		$K_{14}$					0
			$n \cdot n$			$n \cdot n$	$n \cdot 3$			$n \cdot n$				$n \cdot 1$
$\delta \Delta_1$														0
$n \cdot 1$	=	$K_{21}$			$K_{\Delta_{\text{гп}}}$		$K_{12}$		$K_{24}$				*	$n \cdot 1$
			$n \cdot n$			$n \cdot n$	$n \cdot 3$			$n \cdot n$				
$\delta x_{3-1}$														0
		$K_{31}$	$3 \cdot n$		$K_{32}$	$3 \cdot n$	$K_{X_{\text{гп}} 3-3}$		$K_{34}$	$3 \cdot n$				$0_{3-1}$
$\lambda$														$L_1$
$n \cdot 1$		$K_{41}$			$K_{42}$		$K_{12}$		$-K_{\lambda}$				$n \cdot n$	$n \cdot 1$
			$n \cdot n$			$n \cdot n$	$n \cdot 3$			$n \cdot n$				

Рис. 3.2 Структура результатов решения алгоритма СВПВ для лучевого способа

На рис. 3.2 обозначено:

$K_{Z_{ур}}$  – ковариационная матрица уравненных значений опорных координат  $Z_{ур}$ ;

$K_{\Delta_{1ур}}$  – ковариационная матрица уравненных значений «лучей»  $\Delta_{1ур}$ ;

$K_{X_{ур}}$  – ковариационная матрица уравненных значений определяемых координат  $X_{ур}$ ;

$\delta z = 0$  – МНК-поправки к координатам  $Z$  (практически нулевые:  $< 10^{-8}$ );

$\delta \Delta_1$  – МНК-поправки к измеренным значениям «лучей»  $\Delta_1$ ;

$\delta x$  – МНК-поправки к приближенным значениям определяемых координат  $x$ ;

$\lambda$  – неопределенные множители Лагранжа.

Для *сетевого способа* линеаризованная форма функциональной модели (3.5) увеличится количественно в связи с включением в неё дополнительно данных об измеренных приращениях между пунктами «канвы» –  $\Delta_2$ , а также свободных членов «канвы»  $L_2$ , приравненных нулевому вектору:

$$(I + C)_{n \cdot n} \delta z_{n \cdot 1} - (\delta \Delta_1)_{n \cdot 1} - (\delta \Delta_2)_{n \cdot 1} + A_{n \cdot 3} \delta x_{3 \cdot 1} - (L_1)_{n \cdot 1} - (L_2=0)_{n \cdot 1} = 0. \quad (3.7)$$

Структура алгоритма СВПВ для уравнения (3.7) в рамках МНК-оптимизации для *сетевого способа*, естественно, расширится. Она представлена на рис. 3.3.

Сетевой способ								
$(K_Z \cdot 10^{-8})^{-1}_{n \cdot n}$	0	0	0	$I_{n \cdot n}$	$C^T_{n \cdot n}$		$\delta z$	$0_{n \cdot 1}$
0	$(K_{\Delta_1} \cdot 10^4)^{-1}_{n \cdot n}$	0	0	$-I_{n \cdot n}$	0		$\delta \Delta_1$	$0_{n \cdot 1}$
0	0	$(K_{\Delta_2} \cdot 10^4)^{-1}_{n \cdot n}$	0	0	$-I_{n \cdot n}$	*	$\delta \Delta_2$	$0_{n \cdot 1}$
0	0	0	$(K_X = I \cdot 10^{12})^{-1}_{3 \cdot 3}$	$A^T_{3 \cdot n}$	0		$\delta x_{3 \cdot 1}$	$0_{3 \cdot 1}$
$I_{n \cdot n}$	$-I_{n \cdot n}$	0	$A_{n \cdot 3}$	$0_{2n \cdot 2n}$			$\lambda_1$	$L_1$
$C_{n \cdot n}$	0	$-I_{n \cdot n}$	0				$\lambda_2$	$L_2 = 0$

Рис. 3.3. Структура алгоритма синтезированного варианта МНК-оптимизации данных для сетевого способа

На рис. 3.3 обозначено:

$K_Z \cdot 10^{-8}$  – ковариационная матрица опорных координат  $Z$ , блокированная множителем  $10^{-8}$ ;

$K_{\Delta_1} \cdot 10^4$  – априорная ковариационная матрица измеренных приращений  $\Delta_1$  ("лучи"), размерность которой равна  $\text{см}^2$ ;

$K_{\Delta_2} \cdot 10^4$  – априорная ковариационная матрица измеренных приращений  $\Delta_2$  ("канва"), размерность которой равна  $\text{см}^2$ ;

$(K_X)^{-1} = (I \cdot 10^{12})^{-1}$  – стабилизирующее слагаемое, выполняющее роль регуляризирующего оператора;

$L_1$  – свободные члены приращений «лучи»;

$L_2 = 0$  – нулевые свободные члены приращений «канвы»;

$A$  – матрица плана по искомым координатам  $X$ ;

$C$  – матрица плана по опорным координатам  $Z$ .

Структура получаемых результатов решения для сетевого способа приведена на рис. 3.4. Она также сопровождается необходимыми пояснениями.

Сетевой способ							
$\delta z=0$		$K_{Z_{ур}}$	$K_{12}$	$K_{13}$	$K_{14}$	$K_{15}$	$0_{n \cdot 1}$
$\delta \Delta_1$		$K_{21}$	$K_{\Delta_{1ур}}$	$K_{23}$	$K_{24}$	$-I_{2n \cdot 2n}$	$0_{n \cdot 1}$
$\delta \Delta_2=0$	=	$K_{31}$	$K_{32}$	$K_{\Delta_{2ур}}$	$K_{34}$		*
$\delta x_{3 \cdot 1}$		$K_{41}$	$K_{42}$	$K_{43}$	$K_{X_{ур} 3 \cdot 3}$	$A^T_{3 \cdot 2n}$	$0_{3 \cdot 1}$
$\lambda$		$K_{51}$	$-I_{2n \cdot 2n}$		$A_{2n \cdot 3}$	$0_{2n \cdot 2n}$	$L_1$
							$L_2 = 0$

Рис. 3.4. Структура решения системы уравнений для сетевого способа

На рис. 3.4 обозначено:

$K_{Z_{ур}}$  – ковариационная матрица уравненных значений опорных координат  $Z_{ур}$ ;

$K_{\Delta_{ур1}}$  – ковариационная матрица уравненных значений «лучей»  $\Delta_{ур1}$ ;

$K_{\Delta_{ур2}}$  – ковариационная матрица уравненных значений «канвы»  $\Delta_{ур2}$ ;

$K_{X_{ур}}$  – ковариационная матрица уравненных значений координат  $X_{ур}$ ;

$\delta z = 0$  – МНК-поправки к координатам точек «канвы»  $Z$  (практически нулевые:  $< 10^{-4}\text{м}$ );

$\delta_{\Delta_1}$  – МНК-поправки к измеренным значениям «лучей»  $\Delta_1$ ;

$\delta_{\Delta_2} = 0$  – МНК-поправки к измеренным значениям приращений «канвы»  $\Delta_2$  (практически нулевые –  $< 10^{-4}\text{м}$ );

$\delta x$  – МНК-поправки к приближенным значениям  $x$  искомым координат  $X$ ;

$\lambda$  – неопределенные множители Лагранжа.

### ***3.1.2. Результаты сравнений двух способов на фрагменте сети спутниковых дифференциальных станций ГЛОНАСС НСО и на сети регионального геодинимического полигона ООО «ЛУКОЙЛ-Западная Сибирь»***

В качестве первого объекта, на котором проводился вычислительный эксперимент, выступал фрагмент сети спутниковых дифференциальных станций ГЛОНАСС НСО, включающий в себя пять опорных пунктов основной сети и один – определяемый (рис. 3.5).

Результаты, полученные в вычислительной таблице Excel, дали идентичные для обоих способов результаты как для поправок  $\delta X_{3:1}$  в приближенные значения координат «вставки», так и для средних квадратических погрешностей (СКП) урвненных значений координат [47]. На рис. 3.6 показаны результаты решения задачи координирования двумя способами.

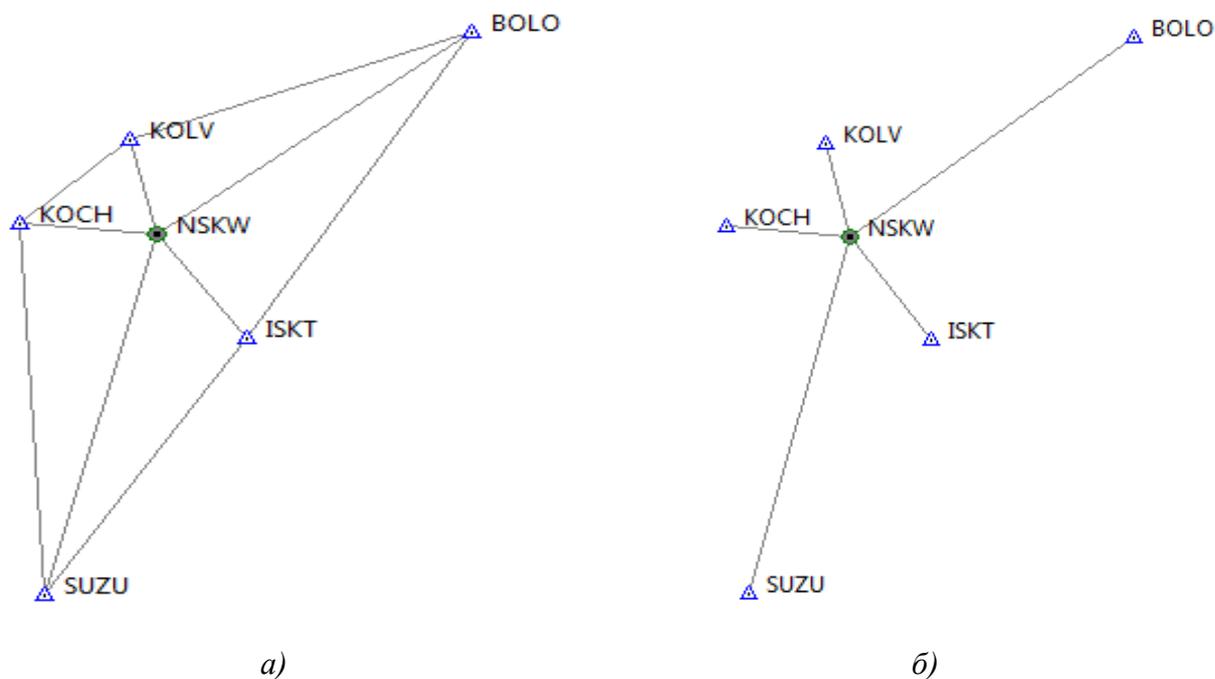


Рис. 3.5. Сетевой (а) и лучевой (б) варианты сгущения спутниковой сети

«Лучевой» способ			«Сетевой» способ		
Ново-ск	МНК-попр. (см)	СКП (см)	Ново-ск	МНК-попр. (см)	СКП (см)
$\delta X$	0,032	0,043	$\delta X$	0,032	0,043
$\delta Y$	0,426	0,161	$\delta Y$	0,426	0,161
$\delta Z$	-0,293	0,218	$\delta Z$	-0,293	0,218

Рис. 3.6. Результаты решения задачи координирования двумя способами

Вторым объектом, на котором проводился вычислительный эксперимент, выступала сеть регионального геодезического полигона ООО «ЛУКОЙЛ-Западная Сибирь» (рис.3.7).

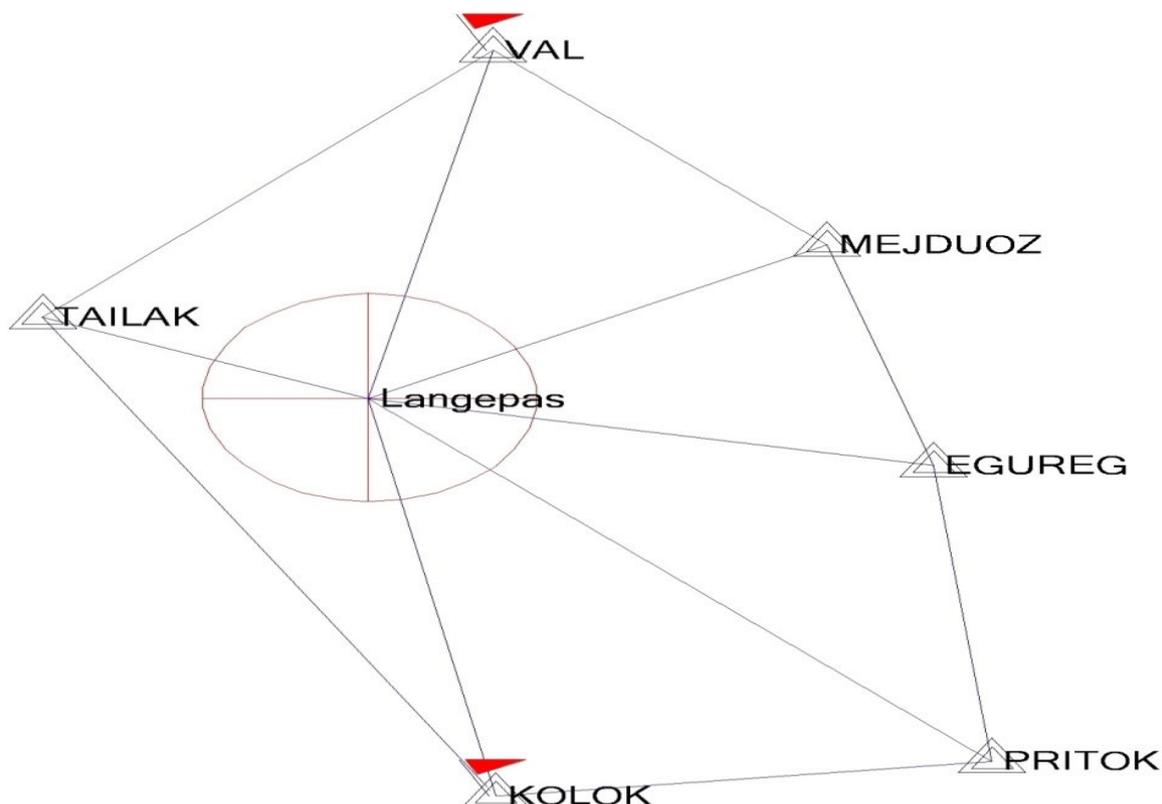


Рис. 3.7. Схема привязки ДГС *Langepas* к пунктам ГГС

Суточные данные ГНСС-измерений, выполненных при привязке дифференциальной геодезической станции (ДГС) *Langepas* к пунктам государственной геодезической сети, представляли собой массивы измеренных приращений пространственных геоцентрических координат  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ , сопровождаемые соответствующими ковариационными

матрицами  $K_{\Delta}$ . По имеющимся файлам измерений выполнялась МНК-оптимизация указанных данных по алгоритму синтезированного варианта параметрической версии (СВПВ) МНК-оптимизации (уравнивания) приближенных значений геоцентрических координат  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  пункта *Langepas* и оценка точности данных и результатов оптимизации [48].

Результаты вычислений *сетевым* способом оказались абсолютно идентичными числовым значениям, полученным *лучевым* способом, как самих уравненных координат определяемого пункта *Langepas*, так и для их показателей точности в форме априорных значений средних квадратических погрешностей (СКП) уравненных значений определяемой триады координат (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Уравненные координаты пункта *Langepas* и их оценка точности  
*лучевым и сетевым способами*

Лучевой способ			Сетевой способ		
Langepas	Координаты (м)	СКП (мм)	Langepas	Координаты (м)	СКП (мм)
$X$	779323,158	0,06	$X$	779323,158	0,06
$Y$	2952085,707	0,15	$Y$	2952085,707	0,15
$Z$	5581145,911	0,27	$Z$	5581145,911	0,27

### 3.2. Сравнение результатов обработки ГНСС-наблюдений, выполненных на одном объекте, коммерческими пакетами Trimble и CREDO

Существует хорошо известная группа лицензированных пакетов для обработки результатов ГНСС-измерений [48]. Авторами были выполнены сравнения таких результатов, полученных по одним и тем же суточным данным на даты 25.12.2016 и 26.12.2016. Данные были получены с шести пунктов сети спутниковых дифференциальных станций ГЛОНАСС НСО: Болотное (BOLO), Искитим (ISKT), Коченёво (KOCH), Колывань (KOLV), Сузун (SUZU) и Новосибирск (NSKW). На рис. 3.8 представлена схема взаимного положения указанных пунктов.

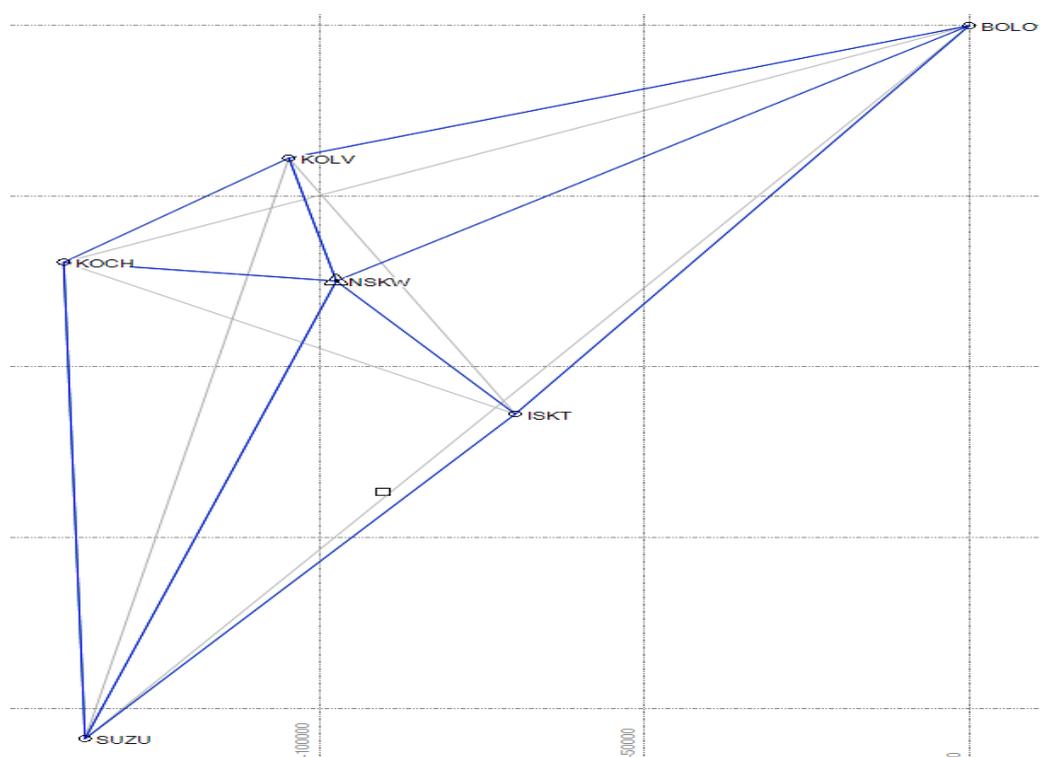


Рис. 3.8. Фрагмент сети спутниковых дифференциальных станций ГЛОНАСС НСО

Десять линий этого объекта обработаны с помощью двух коммерческих пакетов *Trimble* и *CREDO*. Суточные данные позволили сформировать два блока по десять триад измеренных приращений координат  $(\Delta X \Delta Y \Delta Z)_{15 \cdot 1}$  для каждой линии сети и их ковариационные матрицы  $K_{\Delta T}$  и  $K_{\Delta C}$  [49].

Коррелированные приращения координат  $(\Delta X \Delta Y \Delta Z)_{15 \cdot 1}$ , выданные каждым коммерческим пакетом и дополнительно характеризующиеся соответствующими ковариационными матрицами  $K_{\Delta T}$  (пакет *Trimble*) и  $K_{\Delta C}$  (пакет *CREDO*), в дальнейшем проходили математическую обработку в соответствии с алгоритмом синтезированного варианта параметрической версии МНК-оптимизации данных. Результатом такой обработки стали два массива координат, содержащие по 15 элементов  $(X Y Z)_T$  и  $(X Y Z)_C$ , а также ковариационные матрицы этих массивов  $K_T$  и  $K_C$ :

$$K_C = \left( A^+ \cdot K_{\Delta} \cdot (A^+)^T \right)_C \quad \text{и} \quad K_T = \left( A^+ \cdot K_{\Delta} \cdot (A^+)^T \right)_T \quad (3.8)$$

Разности триад координат  $(X Y Z)_T$  и  $(X Y Z)_C$  образовали собой ряд коррелированных разностей  $d_{15 \cdot 1} = (X Y Z)_T - (X Y Z)_C$ .

Ковариационная матрица  $K_d$  разностей  $d_{15 \cdot 1}$  – это сумма ковариационных матриц  $K_T$  и  $K_C$  массивов координат  $(X Y Z)_T$  и  $(X Y Z)_C$ :

$$K_d = K_T + K_C. \quad (3.9)$$

Обработка парных данных обычно ограничивается лишь оценкой точности выполненных измерений и оценкой точности действительных (уравненных) значений пар наблюдений. Важнейшие практические вопросы – «Значима ли каждая отдельная разность  $d_j$ ?» или «Значимо ли среднее значение этих разностей  $\bar{d}$ ?» не ставятся. Эти вопросы можно перефразировать в форме соответствующих статистических гипотез:

первая гипотеза о незначимости отдельной разности

$$H_0 = \{E(d_j) = 0\}, \quad (3.10)$$

вторая гипотеза о незначимости разностей в среднем

$$H_0 = \{E(D) = 0\}. \quad (3.11)$$

Разности  $d_j$  по сути являются «невязками», допустимые значения которых устанавливаются классическим способом:

$$d_j^{\text{доп}} = w_j^{\text{доп}} = t_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\{K_d\}_{jj}}. \quad (3.12)$$

Здесь  $t_{1-\alpha/2}$  – это квантиль стандартного нормального распределения на уровне значимости  $\alpha$ . Если  $|d_j| > d_j^{\text{доп}}$ , то первая, основная гипотеза

(3.10) – отвергается, то есть «данная разность признаётся величиной, значимо отличающейся от нуля».

Вторая основная гипотеза (3.11) проверяется путём выполнения более сложных вспомогательных вычислений. Случайная величина  $D$  в формуле (3.11) – это вероятностная модель разностей  $d_j$ , которые рассматриваются как элементы спектра величины  $D$ . В таком случае среднее значение  $\bar{d}$  разностей  $d_j$  будет несмещённой и состоятельной оценкой математического ожидания разностей  $E(D)$ .

Нахождение среднего значения  $\bar{d}$  коррелированных разностей  $d_j$ , ковариационная матрица которых  $K_d$  определяется выражением (3.09), решается следующим образом. Параметрические уравнения связи для ряда разностей  $d_{15 \cdot 1} = d_{k1}$  – это линейные функции, объединяемые в систему с помощью единственного параметра  $\mathcal{N}_{11}$ , представляющего собой неизвестное истинное значение средней разности:  $\mathcal{N}_{11} = \mathcal{D} = E(D)$ . Это равенство отражает предположение об отсутствии постоянной погрешности в одном из массивов  $(X Y Z)_T$  или  $(X Y Z)_C$ . Уравнения связи  $\mathcal{D}_i = \mathcal{N}_{11}$ , количество которых равно числу разностей  $k$ , зависят от этого параметра и образуют вектор

$$\mathcal{D}_{k1} = \mathbf{1}_{k1} \cdot \mathcal{N}_{11}. \quad (3.13)$$

Матрица плана  $\mathbf{1}_{k1}$  линейной системы (3.13) – это вектор-столбец, каждый элемент которого равен единице:

$$\mathbf{1}_j = \partial \mathcal{D}_j / \partial \mathcal{G}_{11} \equiv 1. \quad (3.14)$$

Приближённое значение  $x_{11}$  параметра  $\mathcal{G}_{11}$  полагается равным нулю. Преобразование параметрических уравнений связи, с учётом того, что  $\mathcal{G}_{11} = x_{11} + X_{11} = X_{11}$ , приводит к параметрическим уравнениям поправок:

$$\mathbf{1}_{k1} \cdot X_{11} - l_{k1} = V_{k1}, \quad (3.15)$$

свободные члены, которых  $l_j = d_j - x_{11}$  — это сами разности  $d_j$ , так как  $x_{11} = 0$ .

Нормальное уравнение (*единственное!*) в матричной нотации сохраняет стандартное обозначение:

$$N_{11} \cdot \tilde{x}_{11} - G_{11} = 0_{11}. \quad (3.16)$$

Коэффициент  $N_{11}$  и свободный член  $G_{11}$  этого уравнения определяются известными формулами параметрического способа. Представим их с использованием гауссовых обозначений [...] для оператора суммы:

$N_{11} = \mathbf{1}_{1k}^T K_d^{-1} \mathbf{1}_{k1} = [K_d^{-1}]$  — сумма *всех* элементов обратной априорной ковариационной матрицы разностей  $K_d^{-1}$ ;

$G_{11} = \mathbf{1}_{1k}^T K_d^{-1} \cdot d_{k1} = [kd]$  – сумма произведений столбцовых сумм  $k_i = \sum_j \{K_d^{-1}\}_j$  обратной матрицы  $K_d^{-1}$  на соответствующие разности  $d_i$ .

Неизвестное  $\tilde{x}_{11}$  нормального уравнения (3.16) – это и есть иско-  
мая оценка среднего значения коррелированных разностей  $\bar{d}$ :

$$\tilde{x}_{11} = \bar{d} = N_{11}^{-1} \cdot G_{11} = [kd] / [K_d^{-1}]. \quad (3.17)$$

Для проверки гипотезы (3.11) о незначимости среднего значения  $\bar{d}$  коррелированных разностей используется известный тест

$$t_{\Theta} = \frac{|\bar{d}|}{m_{\bar{d}}}. \quad (3.18)$$

Точность найденного параметра  $\bar{d} = \tilde{x}_{11}$  характеризуется его средней квадратической погрешностью  $m_{\bar{d}}$ , квадрат которой – это величина, обратная коэффициенту  $N_{11}$  нормального уравнения (3.16), умноженному на апостериорное значение масштабного показателя точности (МПТ)  $\mu^2$ :

$$m_{\bar{d}}^2 = \mu^2 \cdot N_{11}^{-1} = \mu^2 / [K_d^{-1}]. \quad (3.19)$$

МПТ  $\mu^2$  предварительно анализируется на равенство своему теоретическому значению  $\sigma^2$ , что осуществляется путем проверки нулевой гипотезы  $H_0 = \{\sigma^2 = \sigma_0^2 = 1\}$ .

Апостериорное значение масштабного показателя точности  $\mu^2$  ряда коррелированных разностей, объём которого равен  $k$ , вычисляется по исправленным разностям  $d'_{k1} = d_{k1} - \bar{d} = -\tilde{V}_{k1}$ :

$$\mu^2 = \frac{d'_{1k} K_d^{-1} d'_{k1}}{k-1}. \quad (3.20)$$

Тест (3.18) сопоставляется с квантилью стандартного нормального распределения на уровне значимости  $\alpha$ :

$$t_T = t_{1-\alpha/2}. \quad (3.21)$$

Если  $t_{\Theta} > t_T$ , то нулевая гипотеза (3.11) «о не значимости среднего значения коррелированных разностей» – отвергается, т.е. использованные технологии приводят к результатам, имеющим систематические отличия.

*Анализ результатов.* Практическое использование изложенной теории иллюстрируется на вычислительном примере, реализованном в среде Excel по материалам ГНСС-измерений, полученным на пунктах сети спутниковых дифференциальных станций ГЛОНАСС НСО.

Десять линий этого объекта обработаны с помощью двух коммерческих пакетов *Trimble* и *CREDO*. Для анализа были использованы 15 пар координат внешних пунктов объекта, поскольку координаты центрального пункта NSKW принимались в обоих пакетах за опорные

константы и не имели разностей. Разности координат пяти внешних пунктов, выраженные в миллиметрах, приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Разности координат (мм)

BOLO			ISKT			KOCH			KOLV			SUZU		
$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
-71,8	-24,2	33,5	-7,2	25,6	-11,3	24,6	2,8	6,1	2,2	-15,5	13,1	33,0	60,6	-42,2

Все разности, кроме  $\Delta Y$  и  $\Delta Z$  для станции KOCH, недопустимо велики на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

На рис. 3.9 представлена ковариационная матрица вышеприведённых разностей, элементы которой выражены в квадратных миллиметрах.

Далее, по формулам (3.19–3.23) были выполнены необходимые вычисления и проведён анализ среднего значения ряда коррелированных разностей. Затем было принято заключение по гипотезе (3.11).

Из результатов анализа следует, что среднее значение коррелированных разностей  $\bar{d} = 1,22$  мм, характеризуется средней квадратической погрешностью  $m_{\bar{d}} = 16$  мм. В связи с этим, проверяемая гипотеза о незначимости среднего значения коррелированных разностей  $H_0 = \{E(D) = 0\}$  не отвергается, так как эмпирическое значение теста  $t_{\bar{d}} = |\bar{d}| / m_{\bar{d}} = 0,08$  меньше допустимого значения  $t_T = 1,96$  на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ . Тем не менее, 87% разностей  $d_j$  (табл. 3.2) превышают допуск (3.14) на том же уровне значимости.

Практически это означает, что по параметру «разности» пакеты *Trimble* и *CREDO* не могут быть признаны эквивалентными. Дополнительно, каждый из пакетов может быть охарактеризован и другими параметрами, отражающими, например, соответствие между значениями средних квадратических погрешностей  $m_i = \sqrt{K_{ii}}$  выдаваемых приращений координат и скрытыми (то есть неизвестными) в этих приращениях истинными погрешностями позиционирования. Таким параметром может служить масштабный показатель точности данных, анализируемый с помощью синтезированного варианта алгоритма параметрической версии МНК-оптимизации (уравнивания) данных.

<b>0,62</b>	0,76	0,69	0,20	0,25	0,33	0,08	0,14	0,17	0,14	0,28	0,31	0,08	0,12	0,18
0,76	<b>6,12</b>	7,51	0,27	2,32	2,91	0,14	1,16	1,43	0,27	2,31	2,85	0,14	1,18	1,45
0,69	7,51	<b>11,43</b>	0,33	2,93	4,28	0,17	1,42	2,13	0,33	2,84	4,29	0,17	1,46	2,16
0,20	0,27	0,33	<b>0,44</b>	0,70	0,78	0,07	0,12	0,17	0,07	0,12	0,17	0,14	0,26	0,36
0,25	2,32	2,93	0,70	<b>6,15</b>	7,41	0,13	1,11	1,42	0,12	1,10	1,40	0,28	2,49	2,94
0,33	2,91	4,28	0,78	7,41	<b>10,97</b>	0,17	1,42	2,08	0,17	1,39	2,05	0,35	2,95	4,42
0,08	0,14	0,17	0,07	0,13	0,17	<b>0,40</b>	0,70	0,92	0,18	0,28	0,36	0,17	0,30	0,32
0,14	1,16	1,42	0,12	1,11	1,42	0,70	<b>5,83</b>	7,21	0,29	2,33	2,87	0,28	2,29	2,88
0,17	1,43	2,13	0,17	1,42	2,08	0,92	7,21	<b>10,83</b>	0,36	2,88	4,32	0,33	2,89	4,27
0,14	0,27	0,33	0,07	0,12	0,17	0,18	0,29	0,36	<b>0,42</b>	0,65	0,84	0,09	0,15	0,16
0,28	2,31	2,84	0,12	1,10	1,39	0,28	2,33	2,88	0,65	<b>5,67</b>	7,15	0,14	1,14	1,42
0,31	2,85	4,29	0,17	1,40	2,05	0,36	2,87	4,32	0,84	7,15	<b>10,77</b>	0,17	1,43	2,12
0,08	0,14	0,17	0,14	0,28	0,35	0,17	0,28	0,33	0,09	0,14	0,17	<b>0,47</b>	0,87	0,85
0,12	1,18	1,46	0,26	2,49	2,95	0,30	2,29	2,89	0,15	1,14	1,43	0,87	<b>6,62</b>	7,43
0,18	1,45	2,16	0,36	2,94	4,42	0,32	2,88	4,27	0,16	1,42	2,12	0,85	7,43	<b>11,37</b>

Рис. 3.9. Ковариационная матрица разностей  $K_d = K_T + K_C$

### 3.3. Усреднение значений приращений координат и их ковариационных матриц при повторных ГНСС-измерениях базовых линий

В работе [50] авторы разработали алгоритм усреднения значений приращений координат и их ковариационных матриц при повторных ГНСС-измерениях.

Ценность разработанного авторами алгоритма видится в том, что при дальнейшем уравнивании ГНСС-сетей (вторичном), можно отказаться от понятия зависимых и независимых базовых линий, в случае если каждая базовая линия измерена кратно, так как все усредненные повторные ГНСС-измерения не будут между собой коррелированными.

*Теоретические аспекты алгоритма усреднения приращений координат и их ковариационных матриц при повторных ГНСС-измерениях.* Пусть коррелированный вектор  $\Delta_{3t-1}$  – это совокупность ГНСС-измерений, относящихся к одной и той же базовой линии, содержащих  $t$  триад приращений пространственных геоцентрических координат  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ , каждая из которых сопровождается соответствующей ковариационной матрицей

$$K_{\Delta} = \begin{pmatrix} m_{\Delta X}^2 & K_{\Delta X \Delta Y} & K_{\Delta Y \Delta Z} \\ K_{\Delta Y \Delta X} & m_{\Delta Y}^2 & K_{\Delta Y \Delta Z} \\ K_{\Delta Z \Delta X} & K_{\Delta Z \Delta Y} & m_{\Delta Z}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Функциональная модель оптимизируемых ГНСС-измерений – это вектор истинных значений  $D_{3t-1}$  измеренных приращений  $\Delta_{3t-1}$ , представляющий собой линейную функцию параметров  $X_{3-1}$ :

$$D_{3t-1} = A_{3t-3} \cdot X_{3-1} = \Delta_{3t-1} + V_{3t-1}, \quad (3.23)$$

где  $A_{3t-3}$  – блочная матрица, состоящая из  $t$  единичных блоков типа  $\pm I_{3-3}$ ;  $X_{3-1}$  – вектор истинных значений приращений  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  данной базовой линии, используемых в качестве параметров модели;  $V_{3t-1}$  – вектор МНК-поправок к величинам измеренных приращений  $\Delta_{3t-1}$ .

Вектор параметров  $X_{3-1}$  (вектор истинных значений параметров) представлен в виде суммы его приближенного значения  $x_{3-1}$  и некоторой истинной поправки  $\delta x_{3-1}$ :  $X_{3-1} = x_{3-1} + \delta x_{3-1}$ .

Учитывая линейность модели (3.23) и полагая приближенные значения параметров равными нулю ( $x_{3-1} = 0_{3-1}$ ), получаем «линеаризованный» вариант этой модели  $\Delta_{3t-1} + V_{3t-1} = A_{3t-3} \cdot \delta x_{3-1}$ .

Отсюда легко перейти к традиционной форме записи параметрических уравнений поправок:

$$A_{3t-3} \cdot \delta x_{3-1} - L_{3t-1} = V_{3t-1}, \quad (3.24)$$

где свободные члены  $L_{3t-1}$  – это блочный вектор значений приращений пространственных геоцентрических координат  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ , полученных в ходе  $t$  сеансов  $L_{3t-1} = \Delta_{3t-1}$ .

Решение системы (3.24) при условии

$$\tilde{V}_{1:3t}^T \cdot K_{3t:3t}^{-1} \cdot \tilde{V}_{3t:1} = \min, \quad (3.25)$$

приводит к системе нормальных параметрических уравнений:

$$N_{3:3} \cdot \tilde{x}_{3:1} - G_{3:1} = 0_{3:1}. \quad (3.26)$$

В формуле (3.25):  $K_{3t:3t}^{-1}$  – это обратная ковариационная матрица  $\{K_{\Delta}\}_{3t:3t}$  коррелированного исходного вектора  $\Delta_{3t:1}$ ,  $\tilde{V}_{3t:1}$  – вектор МНК-поправок к измеренным значениям приращений, вычисляемый как  $\tilde{V}_{3t:1} = A_{3t:3} \cdot \bar{\Delta}_{3:1} - \Delta_{3t:1}$ , где  $\bar{\Delta}_{3:1}$  – усредненные приращения, равные корням  $\tilde{x}_{3:1}$  нормальных уравнений (3.26).

Коэффициенты  $N_{3:3}$  и свободные члены  $G_{3:1}$  в формуле (3.26) находят по известным формулам МНК:

$$N_{3:3} = A_{3:3t}^T \cdot K_{3t:3t}^{-1} \cdot A_{3t:3}; \quad G_{3:1} = A_{3:3t}^T \cdot K_{3t:3t}^{-1} \cdot L_{3t:1}. \quad (3.27)$$

Корни  $\tilde{x}_{3:1}$  нормальных уравнений – это искомые усредненные значения  $\bar{\Delta}_{3:1}$  вектора приращений координат оптимизируемой базовой линии:

$$\tilde{x}_{3:1} = N_{3:3}^{-1} \cdot G_{3:1} = \bar{\Delta}_{3:1}. \quad (3.28)$$

Ковариационная матрица усредненного вектора  $\bar{\Delta}_{3.1}$  необходимо образуется при решении системы (3.26):

$$\{K_{\bar{\Delta}}\}_{3 \times 3} = N_{3 \times 3}^{-1}. \quad (3.29)$$

Полученный вектор (3.28) и его ковариационная матрица (3.29) строго решают поставленную задачу усреднения ГНСС-измерений, относящихся к одной и той же базовой линии.

*Апробация алгоритма усреднения приращений координат и их ковариационных матриц при повторных ГНСС-измерениях.*

Практика – критерий истины. Применяв этот известный тезис к имеющимся данным, относящимся к базовым линиям обрабатываемого геодезического построения, авторы сопоставили результаты вторичного уравнивания базовых линий без усреднения и по усредненным данным.

Для экспериментальной проверки использовали ГНСС-измерения, выполненные при привязке дифференциальной геодезической станции Langeras, входящей в сеть регионального геодинамического полигона ООО «ЛУКОЙЛ-Западная Сибирь», к пунктам государственной геодезической сети. Спутниковая геодезическая сеть содержит двенадцать базовых линий: шесть (лучи) – связывают опорные пункты с определяемым и шесть (канва) – дополнительные измерения между пунктами (см. рис. 3.7).

Всего при привязке дифференциальной геодезической станции Langeras выполнено двадцать сеансов ГНСС-измерений, при этом

количество наблюдений по отдельным линиям колебалось от одного до трех. По результатам обработки ГНСС-измерений в программном продукте Trimble Business Center версии 4.10 получена совокупность приращений пространственных геоцентрических координат  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ , а также их ковариационные матрицы. Массивы данных усреднены с помощью разработанного авторами алгоритма. Затем дважды выполнено уравнивание материалов: без усреднения и по усредненной информации.

Реализация усреднения значений кратных определений базовой линии KOLOK – Langeras, а также нахождение ковариационной матрицы такого усредненного значения по данным трех сеансов ГНСС-измерений приведена на рис. 3.10.

Сеансы базовой линии KOLOK – Langeras ( $t = 3$ )													
Длины		Данные			Ковариационные матрицы сеансов								
$\Delta_{91}$	$b_1$	$\Delta X_1$	1055,768	$K_{99}$	1,2E-04	2,4E-04	4,1E-04	0	0	0	0	0	
	13376,273	$\Delta Y_1$	-11846,833		2,4E-04	1,0E-03	1,6E-03	0	0	0	0	0	0
		$\Delta Z_1$	6120,669		4,1E-04	1,6E-03	2,9E-03	0	0	0	0	0	0
	$b_2$	$\Delta X_2$	1055,757		0	0	0	3,4E-05	9,1E-05	1,6E-04	0	0	0
	13376,276	$\Delta Y_2$	-11846,835		0	0	0	9,1E-05	3,6E-04	6,2E-04	0	0	0
		$\Delta Z_2$	6120,674		0	0	0	1,6E-04	6,2E-04	1,2E-03	0	0	0
	$b_3$	$\Delta X_3$	1055,777		0	0	0	0	0	0	7,46E-05	1,56E-04	2,86E-04
	13376,268	$\Delta Y_3$	-11846,796		0	0	0	0	0	0	1,56E-04	6,87E-04	1,18E-03
		$\Delta Z_3$	6120,728		0	0	0	0	0	0	2,86E-04	1,18E-03	2,55E-03
Матрица плана сеансов				Коэффициенты нормальных уравнений			Направляющие косинусы			СКП линий			
$A_{93}$	1	0	0	$N_{33}$	1,3E+05	-2,6E+04	-4,1E+03	0,078928	$\sigma^2$	$m^2$	$m_{b1}$	м	
	0	1	0		-2,6E+04	4,2E+04	-1,8E+04	-0,885660	1,25E-04	0,0101	0,100		
	0	0	1		-4,1E+03	-1,8E+04	1,1E+04	0,457577	1,000000				
	1	0	0	Свободные члены нормальных уравнений			0,078928	$\sigma^2$	$m^2$	$m_{b2}$	м		
	0	1	0	$G_{31}$	4,3E+08		-0,885660	3,25E-05	0,0051	0,072			
	0	0	1		-6,3E+08		0,457577	1,000000					
	1	0	0		2,7E+08		0,078929	$\sigma^2$	$m^2$	$m_{b3}$	м		
	0	1	0				-0,885658	1,17E-04	0,0098	0,099			
	0	0	1				0,457581	1,000000					
Усредненная линия		Усредненные значения		Усредненная ковариационная матрица $K_{\Delta}$			Направляющие косинусы			СКП усредненной линии			
Корни	$b$	$\Delta X_b$	1055,763	$N_{33}^{-1}$	1,92E-05	4,68E-05	8,23E-05	0,078928	$\sigma^2$	$m^2$	$m_{b\text{ ср}}$	м	
	13376,274	$\Delta Y_b$	-11846,823		4,68E-05	1,87E-04	3,18E-04	-0,885659	2,09E-05	0,0041	0,064		
		$\Delta Z_b$	6120,690		8,23E-05	3,18E-04	6,31E-04	0,457578	1,000000				

Рис. 3.10. Усреднение приращений координат линии KOLOK – Langeras

На рис. 3.10 представлены:

- измеренные значения (данные) приращений координат линии КОЛОК – Langeras по каждому из трех сеансов  $\Delta_{91}$ ;
- блочная ковариационная матрица этих данных  $K_{99}$ ;
- матрица плана сеансов измеренных приращений  $A_{93}$ ;
- коэффициенты  $N_{33}$  и свободные члены  $G_{31}$  нормальных уравнений; усредненная ковариационная матрица  $\{K_{\Delta}\}_{3 \times 3} = N_{3 \times 3}^{-1}$  усредненных приращений, равная обратной матрице коэффициентов нормальных уравнений.

Дополнительно в правой нижней четверти (см. рис. 3.9) размещены результаты вычислений СКП длин базовой линии как для каждого из сеансов  $m_{bi}$ , так и для усредненного значения этой линии  $m_{\text{ср.}}$ .

Оценка точности значений длин базовых линий  $b$  по каждому сеансу и по результатам усреднения выполнена с учетом коррелированности ее аргументов  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ . Длина базовой линии является трансцендентной функцией этих аргументов:

$$b = (\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2)^{1/2}. \quad (3.30)$$

Квадрат СКП этой функции учитывает коррелированность  $\{K_{\Delta}\}_{3 \times 3}$  ее аргументов:

$$m_b^2 = l_b^2 m_{\Delta x}^2 + m_b^2 m_{\Delta y}^2 + n_b^2 m_{\Delta z}^2 + 2(l_b m_b K_{\Delta x \Delta y} + l_b n_b K_{\Delta x \Delta z} + m_b n_b K_{\Delta y \Delta z}), \quad (3.31)$$

где  $l_b = \Delta X/b$ ;  $m_b = \Delta Y/b$ ;  $n_b = \Delta Z/b$  – направляющие косинусы базовой линии, являющиеся частными производными уравнения (3.30);  $m_{\Delta}^2$  и  $K_{\Delta}$  – элементы ковариационных матриц (рис. 3.10).

Значения СКП длины каждой базовой линии и СКП ее усредненной длины представлены на том же рис. 3.10.

Оба уравнивания (по исходной и усредненной информации) реализованы с использованием синтезированного варианта параметрической версии МНК-оптимизации измерений, сопровождаемых соответствующими ковариационными матрицами.

Уравнивание по исходной информации определяет искомые МНК-поправки  $\tilde{x}_{3,1}$  к приближенным значениям координат определяемого пункта и их СКП  $m_{31}$  :

$$\tilde{x}_{3,1} = \begin{pmatrix} -32,5 \\ -6,7 \\ 78,0 \end{pmatrix}; \quad m_{31} = \begin{pmatrix} 0,06 \\ 0,15 \\ 0,27 \end{pmatrix},$$

где  $\tilde{x}_{3,1}$  и  $m_{31}$  выражены в см.

Решение по усредненной информации также позволило найти МНК-поправки  $\tilde{x}_{3,1}$  к приближенным значениям координат определяемого пункта и их СКП  $m_{31}$  , значения которых оказались идентичными с решением исходной системы:

$$\tilde{x}_{3,1} = \begin{pmatrix} -32,5 \\ -6,7 \\ 78,0 \end{pmatrix}; \quad m_{31} = \begin{pmatrix} 0,06 \\ 0,15 \\ 0,27 \end{pmatrix}.$$

Оценка точности исходных значений ГНСС-измерений приращений координат базовой линии. Апостериорное значение масштабного показателя точности [26] измеренных приращений координат базовых линий вычисляется по формуле  $\mu^2 = \tilde{V}_{1:3t}^T K_{3t:3t}^{-1} \tilde{V}_{3t:1} / (n - k)$ .

Завершением оценки точности является проверка нулевой гипотезы о незначимости отличия апостериорного значения масштабного показателя точности  $\mu^2$  от его теоретического априорного значения  $\sigma_0^2 = 1$ .

Результаты вычислений приведены на рис. 3.11.

МНК				Точность измеренных приращений	
погр					
-0,0046	м				
0,0099		$n = 9$	$V^T K^{-1} V = 5,40$	$-V^T K^{-1} L = 5,40$	
0,0209		$k = 3$			
0,0064		$r = n - k = 6$	$\mu^2 = 0,90$	$\mu = 0,95$	
0,0119		$\alpha = 0,05$			
0,0159		$t = 1,96$		$\chi^2_{\text{H}} = 1,2$	
-0,0136			$H_0 = \{\sigma^2 = \sigma_0^2 = 1\}$	$\chi^2_{\text{B}} = 14,4$	
-0,0271					
-0,0381			<b>Гипотеза не отвергается</b>		

Рис. 3.11. Точность измеренных приращений координат базовых линий

Разработанный авторами алгоритм усреднения ГНСС-измерений, относящихся к одним и тем же базовым линиям, корректен

и эффективен как с теоретической, так и с практической позиций. Во-первых, он снимает проблему выбора зависимых и независимых базовых линий, которые затем используются как исходные измерения при выполнении вторичного уравнивания. Во-вторых, внедрение данной технологии в коммерческие программы обработки ГНСС-измерений в качестве блока, предваряющего последующую обработку усредненных данных, несомненно, оптимизирует работу таких программных продуктов.

По результатам численного эксперимента апробированы результаты теоретических выкладок разработанного алгоритма усреднения сеансов измерений приращений координат и их ковариационных матриц при повторных ГНСС-измерениях, относящихся к одним и тем же базовым линиям.

### **3.4. Пространственно-временной мониторинг стабильности пунктов геодезических построений**

Устойчивость пунктов геодезического построения (ГП) в пространстве-времени, применяемого при анализе деформационных процессов техногенного или природного происхождения, определяется лишь путем повторных наблюдений на ГП объекта. В этом случае предполагается, что результаты каждого цикла наблюдений подвергаются МНК-оптимизации, результаты которой сопровождаются соответствующей ковариационной матрицей.

В зарубежной литературе геодезические построения, которые развиваются на объекте, подверженном деформационным процессам, классифицируются на два типа: абсолютные и относительные [51]. В абсолютных ГП опорные точки размещаются вне деформационной части объекта подверженного геодезическому мониторингу. Таким образом, предполагая, что эти опорные точки остаются устойчивыми в пространстве-времени, могут быть оценены абсолютные смещения объекта мониторинга. В относительных ГП все точки предполагаются расположенными внутри деформационной части объекта подверженного геодезическому мониторингу. В этом случае могут быть оценены только относительные смещения объекта мониторинга.

Авторами использовался алгоритм СВПВ МНК-оптимизации геопространственных данных для мониторинга стабильности пунктов в геодезических построениях, созданных с помощью ГНСС-технологий. В качестве исходной информации использовались данные реальных ГНСС-наблюдений. Анализировались вектор МНК-поправок к измеренным приращениям пространственных координат  $V_{\Delta X}$ ,  $V_{\Delta Y}$ ,  $V_{\Delta Z}$  каждой линии объекта и вектор МНК-поправок к приближенным значениям координат  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $\delta Z$  для каждого пункта.

Далее для пучка базовых линий, сходящихся в *одном* из пунктов объекта, оптимизированные по технологии СВПВ материалы подвергались модельным искажениям. Искажения выполнялись в несколько этапов.

Во-первых, выполнялся переход от приращений пространственных координат  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  базовой линии к топоцентрическим координатам  $E$ ,  $N$ ,  $U$  другого конца этой линии.

Во-вторых, нормальная высота другого конца  $U$  (для всех линий пучка это был один и тот же пункт!) уменьшалась на одинаковую величину  $\Delta U$ .

В-третьих, выполнялся обратный переход от измененных топоцентрических координат  $E$ ,  $N$ ,  $U'$  к измененным приращениям пространственных координат  $\Delta X'$ ,  $\Delta Y'$ ,  $\Delta Z'$ .

В-четвертых, измененные приращения пространственных координат  $\Delta X'$ ,  $\Delta Y'$ ,  $\Delta Z'$  вводились в надлежащее поле тела алгоритма СВПВ для каждой линии пучка.

В-пятых, алгоритм СВПВ вырабатывал новые значения вектора МНК-поправок к измеренным приращениям пространственных координат каждой линии объекта  $V'_{\Delta X}$ ,  $V'_{\Delta Y}$ ,  $V'_{\Delta Z}$  и вектор МНК-поправок к приближенным значениям координат  $\delta X'$ ,  $\delta Y'$ ,  $\delta Z'$  для каждого пункта.

В-шестых, вычислялись разности этих двух векторов МНК-поправок, которые корректно отражали как работу алгоритма СВПВ, так и соответствие между введенными искажениями и найденными разностями.

*Апробация алгоритма пространственно-временного мониторинга стабильности пунктов.*

Для экспериментальной проверки использовали ГНСС-измерения фрагмента регионального геодинамического полигона ПАО «Сургутнефтегаз», находящегося в сложных физико-географических условиях и характеризующуюся активной динамикой, обусловленной добычей углеводородов (рис. 3.12).

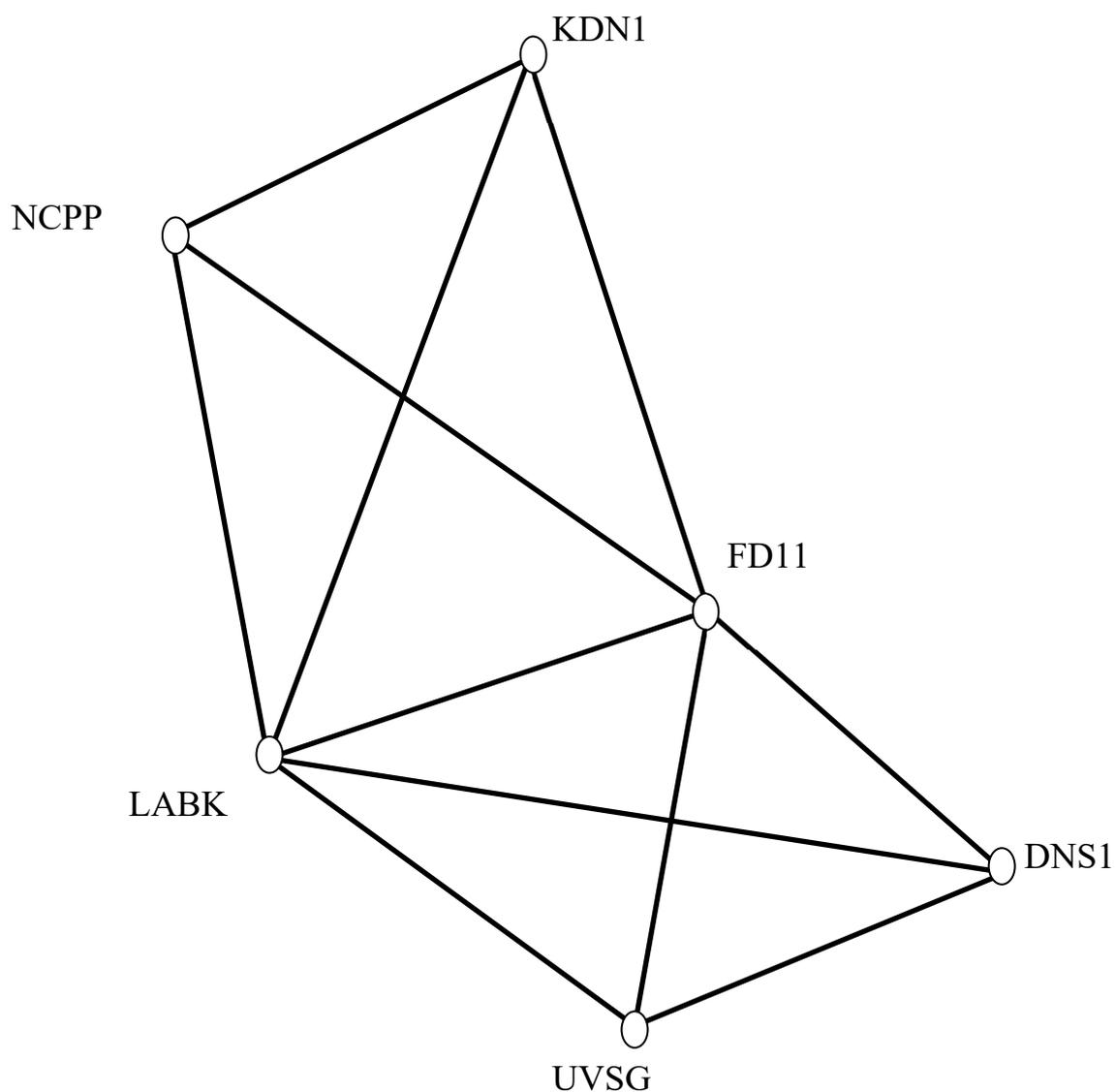


Рис. 3.12. Фрагмент регионального геодинамического полигона ПАО «Сургутнефтегаз»

Спутниковая геодезическая сеть содержит шесть пунктов NCPP, LABK, UVSG, FD11, DNS1, KDN1. Обработка ГНСС-измерений осуществлялась в программном продукте Trimble Business Center версии 4.10, по результатам которой получена совокупность приращений пространственных геоцентрических координат  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ , а также их ковариационные матрицы.

Результаты сеансов ГНСС-наблюдений рассматривались, как наблюдения в *свободном* геодезическом построении и были подвергнуты МНК-оптимизации с использованием алгоритма синтезированного варианта параметрической версии (СВПВ) [26].

Структурная схема алгоритма СВПВ, по которому выполнялась МНК-оптимизация ГНСС-наблюдений на указанном фрагменте геодезического полигона, представлена на рис. 3.13.

$M$					$b$			$L$	
$K_{\Delta}^{-1}$		0	$-I$		$V_{\Delta}$		0		
	45*45		45*18			45*1		45*1	
0		$K_x^{-1} = \alpha * I$	$A^T$	*	$\delta X$		=	0	
	18*45	$\alpha = 10^{-12}$	18*18			18*1		18*1	
$-I$		$A$	0		$\lambda$			$L$	
	45*45		45*18			45*1		45*1	

Рис. 3.13. Структурная схема МНК-оптимизации данных с использованием СВПВ и регуляризации решения СЛАУ

Матрица плана сети  $A_{45 \times 18}$  (рис. 3.14) сформирована из триад вида  $\pm I_{3 \times 3}$ , которые описывают связи концов базовых линий. На приведенном рисунке представлен северо-западный фрагмент этой матрицы, представляющий базовые линии между пунктами NSPP-KDN1 и NSPP-LABK.

Базовые линии	1_NSPP			2_KDN1			3_LABK		
	$X_1$	$Y_1$	$Z_1$	$X_2$	$Y_2$	$Z_2$	$X_3$	$Y_3$	$Z_3$
	-1	0	0	1	0	0	0	0	0
NSPP_KDN1	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	-1	0	0	1	0	0	0
	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
NSPP_LABK	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	-1	0	0	0	0	0	1

Рис. 3.14. Фрагмент матрицы плана  $A_{45 \times 18}$ .

Данная матрица плана была матрицей *неполного столбцового ранга*. Её дефект  $d = k - R(A)$  определялся с использованием формулы Рао (1.67):

$$R(A_{nk}) = R(A_{kn}^+ \cdot A_{nk} = H_{kk}) = tr(H_{kk}).$$

Участвовавшая в данной формуле МНК-РП-матрица  $A_{kn}^+$ , вычислялась в алгоритме СВПВ автоматически, отдельным блоком в теле обратной гиперматрицы коэффициентов  $M^{-1}$  (рис. 3.15).

Апостериорная ковариационная матрица МНК-оптимизированных координат объекта  $K_{\bar{X}}^{yp}$  вычислялась отдельно по формуле (2.20):

$$K_{\bar{X}}^{yp} = \bar{K}_{\bar{X}} = \mu^2 \cdot A^+ K_{\Delta} (A^+)^T.$$

$b$			$M^{-1}$					$L$
$V_{\Delta}$			$K_{\Delta}^{yp}$	$K_{12}$	$K_{13}$			$0$
	45*1		45*45	45*18	45*45			45*1
$\delta X$		=	$K_{21}$	$K_{\Delta}^{yp}$	$A^+$		*	$0$
	18*1		18*45	18*18	18*45			18*1
$\lambda$			$K_{31}$	$(A^+)^T$	$K_{33}$			$L$
	45*1		45*45	45*18	45*45			45*1

Рис. 3.15. Структурная схема решения СЛАУ по алгоритму СВПВ

Масштабный показатель точности (МПТ)  $\mu^2$ , реализующий переход от априорной ковариационной матрицы к апостериорной, вычислялся по формуле (2.17):

$$\mu^2 = \frac{\tilde{v}^T K_{\Delta}^{-1} \tilde{v}}{n-k+d}.$$

В заключение вычислялись оптимизированные значения координат всех шести пунктов ГНСС-объекта и их показатели точности. Таково содержание первого цикла эксперимента.

Дальнейшие исследования стабильности объекта, второй цикл, выполнялись путем моделирования «проседания» одного из пунктов по направлению нормали к эллипсоиду. Результаты сеансов были получены путем искусственного «понижения» отметки пункта *UVSG* в топоцентрической системе координат *ENU* по каждой базовой линии, соединяющей остальные пункты фрагмента (рисунок 3.14) с *UVSG* на 0,02 метра.

Переход от приращений геоцентрических координат  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  к топоцентрическим координатам  $E, N, U$  осуществлялся по формуле [52]:

$$\begin{pmatrix} E \\ N \\ U \end{pmatrix} = R_b^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

где  $R_b$  – это матрица преобразования:

$$R_b = \begin{pmatrix} -\sin L & -\cos L \cdot \sin B & \cos L \cdot \cos B \\ \cos L & -\sin L \cdot \sin B & \sin L \cdot \cos B \\ 0 & \cos B & \sin B \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

здесь  $B$  и  $L$  – это геодезические широта и долгота первого пункта базовой линии ( $b$ ), вторым концом которой всегда был пункт *UVSG*.

Вычисленное значение топоцентрической высоты  $U$  второго конца понижалось на указанные выше 0,02 метра, а затем выполнялся обратный переход от топоцентрических координат  $E, N, U$  к приращениям геоцентрических координат  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ :

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = R_b \cdot \begin{pmatrix} E \\ N \\ U \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Все пять триад приращений координат базовых линий, вычисленных по формуле (3.34), вводились взамен соответствующих измеренных значений триад в алгоритм СВПВ. Алгоритм вырабатывал новый вектор МНК-поправок к приближенным значениям координат этой сети (рис. 3.16).

Изменения МНК-поправок (корней решения алгоритма СВПВ) четко отражают наибольшие изменения таких поправок для координат пункта *UVSG*, для которого было смоделировано «понижение» отметки *U* вдоль по нормали к эллипсоиду.

Изменения, разности двух циклов, анализировались следующим образом. Вектор МНК-поправок к приближенным значениям координат каждого цикла характеризовался соответствующей ковариационной матрицей, вычисляемой по формуле (2.20):

$$K_{\bar{X}}^{yp} = \bar{K}_{\bar{X}} = \mu^2 \cdot A^+ K_{\Delta} (A^+)^T.$$

Для вектора разностей  $d_{18 \cdot 1} = (\delta X \ \delta Y \ \delta Z)_{18 \cdot 1}^I - (\delta X \ \delta Y \ \delta Z)_{18 \cdot 1}^{II}$  вычислялась соответствующая ковариационная матрица, размера 18·18:

$$K_d = K_{\bar{X}}^I + K_{\bar{X}}^{II}. \quad (3.35)$$

Пункты	МНК-поправки $\delta$		Разности $d$	$d^{\text{дон}}$	Решение
	Цикл 1	Цикл 2			
NCPP	82,50	82,54	0,04	0,12	хорошо
	191,53	191,69	0,16	0,24	хорошо
	-147,07	-146,78	0,30	0,46	хорошо
KDN1	-30,60	-30,56	0,04	0,11	хорошо
	-106,99	-106,83	0,16	0,25	хорошо
	-32,94	-32,64	0,30	0,47	хорошо
LABK	-30,40	-30,36	0,04	0,12	хорошо
	-107,47	-107,30	0,16	0,24	хорошо
	-35,09	-34,80	0,29	0,44	хорошо
FD11	-30,45	-30,41	0,04	0,13	хорошо
	-106,31	-106,14	0,16	0,27	хорошо
	-33,56	-33,27	0,29	0,51	хорошо
UVSG	-30,34	-30,58	-0,24	0,11	плохо
	-106,55	-107,29	-0,74	0,24	плохо
	-33,91	-35,37	-1,46	0,28	плохо
DNS1	40,34	40,37	0,03	0,12	хорошо
	249,06	249,23	0,17	0,24	хорошо
	268,79	269,08	0,29	0,43	хорошо
	см	см	см	см	

Рис. 3.16. Сравнительная таблица изменений по циклам МНК-поправок  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $\delta Z$  в значения пространственных координат  $XYZ$

Разности – это «невязки», а их допустимые значения  $d_i^{\text{дон}}$ , на уровне значимости  $\alpha$ , определяются по известной формуле:

$$d_i^{don} = t_\alpha \cdot \sqrt{\{K_d\}_{ii}}. \quad (3.36)$$

По результатам сопоставления величины каждой разности с её допустимым значением, выносилось решение: «хорошо», если разность не превышала допуск, и «плохо» – когда допуск превышался (рис. 3.16).

Естественно, что остальные пункты, хотя и не менявшие своего пространственного положения, тоже получили новые значения МНК-поправок, обусловленные вычислительными погрешностями алгоритма, но не превысившими своих допусков. Алгоритм СВПВ является сложным нелинейным преобразованием значительного объёма данных, в связи с чем, такие поправки – это «числовой шум», который сопровождает математические преобразования алгоритма СВПВ.

## **4. ПРИМЕНЕНИЕ СИНТЕЗИРОВАННЫХ АЛГОРИТМОВ МНК-ОПТИМИЗАЦИИ ГЕОПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ В МЕТРОЛОГИИ И КАДАСТРЕ**

### **4.1. Анализ результатов многолетних измерений на линейных базисах с помощью алгоритма СВПВ МНК-оптимизации геопространственных данных**

В работе [53] проведен анализ многолетних измерений, выполненных на линейном базисе Koštice с 2017 по 2020 годы, тахеометрами фирмы Leica Geosystems. Всего было проанализировано 9186 измерений между следующими секциями базиса 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 1-7 и 1-8. По каждой секции выявлялись грубые измерения, которые исключались с помощью критерия Граббса (критерий Смирнова-Граббса). После исключения обнаруженных выбросов с помощью алгоритма параметрической версии МНК-оптимизации определялась длина каждой секции базиса и выполнялась оценка точности полученных результатов.

*Общие сведения о линейном базисе «Koštice».* Линейный базис «Koštice» располагается вдоль дороги Коштице-Либчевец и был построен в период 1979 и 1980 годов недалеко от деревни Коштице в Лунском районе Чешской Республики (рис. 4.1).

Линейный базис «Kořtice» состоит из 12 пунктов, заложенных на глубину от 5 до 9 м, расстояния между которыми составляют от 25 до 1450 метров. Все пункты оснащены устройствами для принудительного центрирования.

В 2006 году на линейном базисе «Kořtice» были проведены работы по Международному сличению длин Лабораторией Геодезии Военного университета города Мюнхена (Германия). В табл. 4.1 приведены результаты этих сравнений [54].

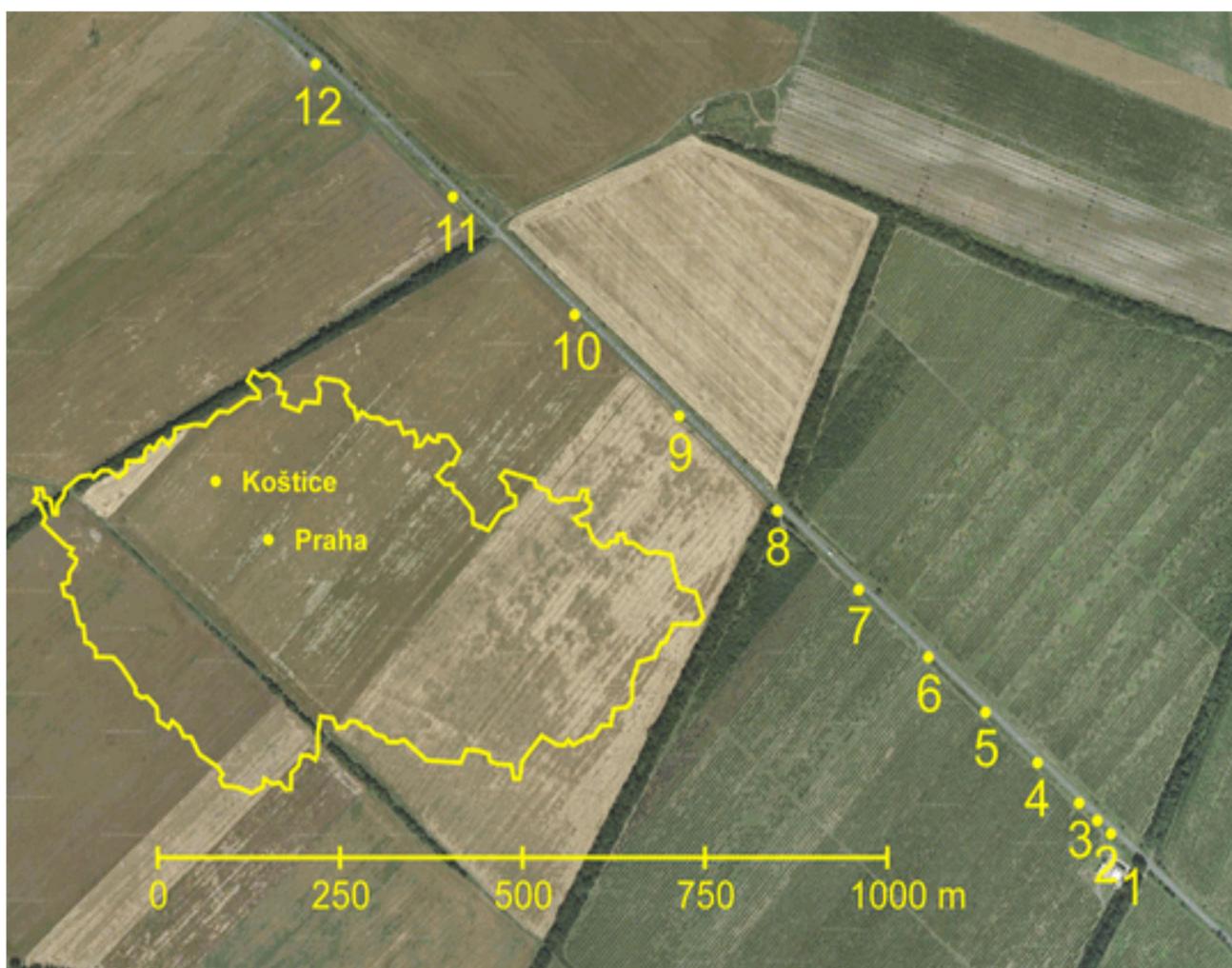


Рис. 4.1. Схематичное расположение линейного базиса «Kořtice»

## Результаты сравнений

Секция базиса	Чешский научно-исследовательский институт геодезии, картографии и топографии (RIGTC)		Лаборатория Геодезии Военного университета города Мюнхена (BUM)		Разность (мм)
	S* (м)	$\sigma^{**}$ (мм)	S* (м)	$\sigma^{**}$ (мм)	
1-2	25.0892	0.5	25.0881	0.4	1.1
1-3	58.0519	0.5	58.0500	0.4	1.9
1-4	133.8831	0.6	133.8810	0.4	2.1
1-5	228.9825	0.8	228.9811	0.4	1.4
1-6	332.9594	1.1	332.9586	0.4	0.8
1-7	459.8596	1.5	459.8584	0.4	1.2
1-8	608.8432	1.9	608.8415	0.4	1.7
1-9	787.0671	2.4	787.0651	0.4	2.0
1-10	977.8891	3.0	977.8827	0.5	6.4
1-11	1199.9900	3.6	1199.9907	0.5	-0.7
1-12	1450.0077	4.4	1450.0112	0.5	-3.5

\* S – расстояние между столбами  
\*\*  $\sigma$  – Стандартное отклонение

*Описание измерений и методика их математической обработки.*

С 2017 по 2020 годы на линейном базисе «Kořtice» была выполнена калибровка порядка 600 тахеометров различных фирм: Leica Geosystems, Trimble, Topcon, Sokkia, Nikon, Pentax, South и Geomax. Общее количество измерений, выполненных по программе во всех комбинациях, составило около 40000, из которых для дальнейшего анализа были отобраны только измерения, выполненные тахеометрами фирмы Leica, между секциями 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 1-7 и 1-8 (табл. 4.2).

*Таблица 4.2*

Исходные данные

Секция базиса	2017		2018		2019		2020	
	Количество тахеометров	Количество измерений						
1-2	66	336	105	483	102	474	64	288
1-3	66	333	105	483	102	474	64	288
1-4	66	318	105	459	102	465	64	288
1-5	66	282	105	393	102	429	64	264
1-6	66	207	105	312	102	342	64	216
1-7	66	204	105	312	102	339	64	204
1-8	66	198	105	297	102	309	64	189
Всего	66	1878	105	2739	102	2832	64	1737

Каждый набор данных, полученных по секциям базиса (табл. 4.2), подвергался анализу по критерию Граббса (критерий Смирнова-Граббса) на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  [55].

После исключения обнаруженных выбросов для каждого набора данных по алгоритму параметрической версии МНК-оптимизации вычислялось значение длины обрабатываемой секции:

$$S = (A^T K^{-1} A)^{-1} \cdot (A^T K^{-1} L), \quad (4.1)$$

здесь  $A = \{1_i\}$  – вектор-столбец, состоящий из единиц;  $L = \{S_i\}$  – вектор свободных членов, являющихся совокупностью результатов измерений  $S_i$ , выполненных на обрабатываемой секции;  $K$  – диагональная ковариационная матрица вида  $K = \text{diag} \{m_i^2\}$ , где  $m_i$  – средняя квадратическая погрешность (СКП) измерения расстояния  $S_i$  электронным тахеометром. Индекс  $i$  меняется от единицы до количества измерений в секции, равного  $n$ .

Апостериорная оценка точности длины некоторой секции  $S_i$ , вычисленной по алгоритму (4.1), выполнялась следующим образом:

$$m_{S_i} = \mu \cdot \sqrt{\left( A^T K^{-1} A \right)_{ii}^{-1}}, \quad (4.2)$$

где  $\mu^2$  представляет собой апостериорное значение масштабного показателя точности (МПТ) [26]. Предварительно, естественно,

осуществлялась проверка нулевой гипотезы  $H_0$  о незначимости отличия величины МПТ  $\mu^2$  от её априорного значения  $\sigma_0^2$ , теоретически равного единице:  $H_0 = \{E(\sigma^2) = \sigma_0^2 = 1\}$ . Для проверки использовался тест

$$\chi_{\Sigma}^2 = (A \cdot S - L)^T K^{-1} (A \cdot S - L), \quad (4.3)$$

который сопоставлялся с  $\alpha$ -процентным  $\chi^2$ -распределением, характеризующимся  $(n - 1)$ -ой степенью свободы

$$\chi_T^2 = [\chi_{\alpha/2; n-1}^2; \chi_{1-\alpha/2; n-1}^2]. \quad (4.4)$$

Когда  $\chi_{\Sigma}^2 \notin \chi_T^2$ , то нулевая гипотеза отвергалась.

*Результаты математической обработки.* Из 9186 измерений, полученных сотрудниками RIGTC при калибровке электронных тахеометров фирмы Leica, между секциями 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 1-7 и 1-8, по критерию Граббса (критерий Смирнова-Граббса) был обнаружен 261 выброс, что составляет 3% от общего количества измерений. После исключения обнаруженных выбросов были вычислены длины восьми секций 1-2, ..., 1-8 с помощью алгоритма (4.1) по измерениям, полученным за 2017, 2018, 2019 и 2020 годы, а также по измерениям

за период с 2017 по 2020 годы. В табл. 4.3 приведены результаты вычисления длин секций с оценкой точности полученных значений.

Таблица 4.3

Вычисленные длины секций (м) и их СКО (мм)

Секция ба- зиса	2017		2018		2019		2020		2017-2020	
	S	ms	S	ms	S	ms	S	ms	S	ms
1-2	25.0906	0.1	25.0907	0.1	25.0896	0.1	25.0914	0.1	25.0903	0.5
1-3	58.0492	0.1	58.0505	0.1	58.0495	0.1	58.0510	0.1	58.0501	0.5
1-4	133.8797	0.1	133.8810	0.1	133.8799	0.1	133.8808	0.1	133.8805	0.5
1-5	228.9783	0.2	228.9791	0.1	228.9795	0.1	228.9801	0.2	228.9795	0.5
1-6	332.9576	0.2	332.9593	0.2	332.9592	0.1	332.9602	0.2	332.9592	0.5
1-7	459.8582	0.2	459.8604	0.2	459.8606	0.2	459.8604	0.2	459.8600	0.6
1-8	608.8404	0.2	608.8423	0.2	608.8429	0.2	608.8447	0.2	608.8427	0.6

Вычисленные значения длин секций сравнивались с результатами измерений, выполненных на линейном базисе «Kořtice», при Международном сличении длин Лабораторией Геодезии Военного университета города Мюнхена (Германия) и Научно-исследовательским институтом геодезии, топографии и картографии. Результаты сравнения представлены в табл. 4.4.

## Результаты сравнений длин секций

Секция ба- зиса	Среднее за 2017- 2020	BUM (2006)	RIGTC (2007)	Разности (мм)		m <sub>2</sub> (мм)	m <sub>3</sub> (мм)	m <sub>4</sub> (мм)	Допуск (2-3)	Допуск (2-4)
				2 – 3	2 – 4					
				Длины секций (м)						
1	2	3	4							
1-2	25.0903	25.0881	25.0892	<b>2.2</b>	1.1	0.5	0.4	0.5	<b>1.3</b>	1.4
1-3	58.0501	58.0500	58.0519	0.1	<b>-1.8</b>	0.5	0.4	0.5	1.3	<b>1.4</b>
1-4	133.8805	133.8810	133.8831	-0.5	<b>-2.6</b>	0.5	0.4	0.6	1.3	<b>1.5</b>
1-5	228.9795	228.9811	228.9825	<b>-1.6</b>	<b>-3.0</b>	0.5	0.4	0.8	<b>1.3</b>	<b>1.8</b>
1-6	332.9592	332.9586	332.9594	0.6	-0.2	0.5	0.4	1.1	1.3	2.4
1-7	459.8600	459.8584	459.8596	<b>1.6</b>	0.4	0.6	0.4	1.5	<b>1.4</b>	3.2
1-8	608.8427	608.8415	608.8432	1.2	-0.5	0.6	0.4	1.9	1.4	3.9

В табл. 4.4 допустимые значения разностей по колонкам 2-3 и 2-4 ( $d^{\text{доп}}$ ) образованы на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  в предположении того, что эти разности имеют стандартное нормальное распределение:  $d^{\text{доп}} = 1,96 \cdot m_d$ , где величины  $m_d = \sqrt{m_2^2 + m_{3(4)}^2}$ .

Вычисленные значения длин секций в табл. 4.4 (колонка 2) в целом хорошо согласуются с результатами измерений (колонка 3), выполненными на линейном базисе «Koštice» Лабораторией Геодезии Военного

университета города Мюнхена (Германия) и результатами аналогичных измерений (колонка 4), выполненными на том же базисе силами Научно-исследовательского института геодезии, топографии и картографии. По секции 1-5 по результатам обоих сравнений получены разности, превышающие допустимые значения точности определения характеристик базиса. Это может быть связано с тем, что по отдельным пунктам наблюдаются смещения, которые, как отмечалось выше, носят в основном периодический характер.

## **4.2. Применение СВПВ МНК-оптимизации геопространственных данных для оценки точности определения характерных точек объектов недвижимости**

В статье [56] показано использование синтезированного варианта алгоритма параметрической версии МНК-оптимизации геопространственных данных для оценки точности определения характерных точек объектов недвижимости (ХТОН) комбинированным методом. На примере смоделированной типовой ситуации, возникающей при координировании ХТОН, демонстрируется реальное падение значений СКП положения точек «висячей» опорной межевой сети (ОМС).

При постановке объектов на кадастровый учет в пределах кадастрового квартала часто используется схема создания опорной межевой сети (ОМС) в виде «хода» из последовательных обратных линейно-угловых засечек, которые опираются на исходные пункты, определенные с помощью ГНСС-технологий (рис. 4.2).

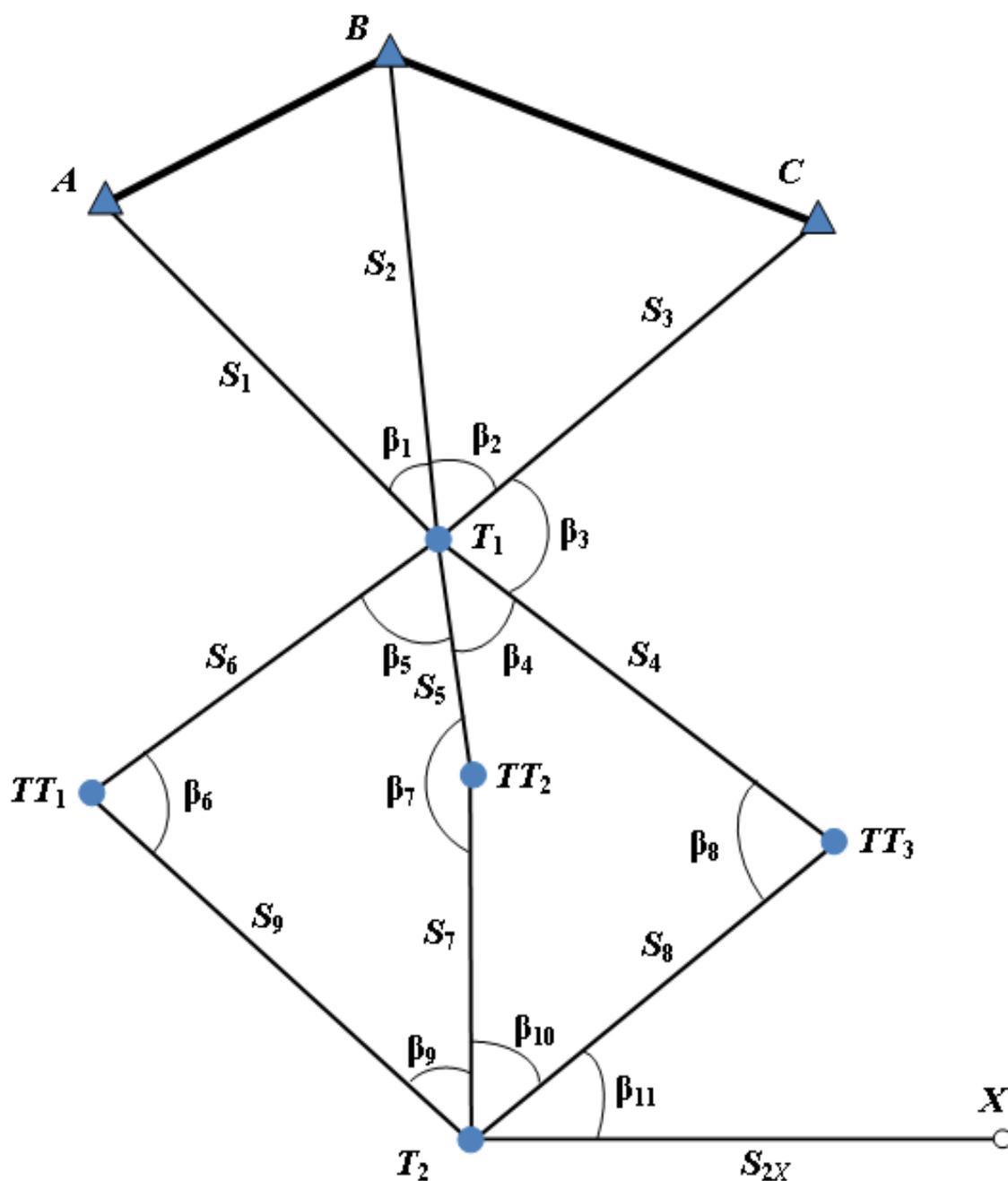


Рис. 4.2. Вариант создания опорной межевой сети

На схеме (рисунок 4.2) введены следующие обозначения:

–  $A, B, C$  – исходные пункты ОМС, определенные с помощью ГНСС-технологий в режиме «статика»;

- $T_1$  и  $T_2$  – точки установки электронного тахеометра;
- $TT_i$  – промежуточные точки ОМС;
- $\beta_i$  и  $S_i$  – углы и расстояния, измеренные электронным тахеометром;
- $X$  – характерная точка объекта недвижимости.

Определение координат характерной точки  $X$  объекта недвижимости выполняется с помощью «полярной засечки» после проложения группы последовательных обратных линейно-угловых засечек. Для определения позиции характерной точки  $X$  необходимо последовательно устанавливать электронный тахеометр на точку  $T_2$  и ориентировать его на точку  $TT_3$  (или  $TT_1$ , или  $TT_2$ ), а затем измерять расстояние  $S_{2X}$  и угол  $\beta_{11}$  («полярная засечка»).

Моделирование псевдоизмерений для представленной схемы опорной межевой сети (рис. 4.2) выполнялось в электронно-вычислительной среде Excel с использованием [41] генератора стандартных квазинормальных случайных чисел. Предполагалось, что измеряемые углы характеризуются СКП  $m_\beta = 6''$ , а стороны – СКП  $m_s = 2$  мм. Именно по этим характеристикам реализовывался переход от стандартных квазинормальных чисел к модельным.

*Результаты моделирования.* В ходе ряда экспериментов, проведенных авторами, результаты псевдоизмерений углов и линий моделировались распределенными по нормальному закону с нулевыми математическими ожиданиями и стандартами  $m_\beta = 6''$  и  $m_s = 2$  мм. Подтвердился ожидаемый эффект нарастающего увеличения СКП положения

определяемых точек по мере их удаления от пунктов ОМС. Исходные пункты  $A$ ,  $B$  и  $C$  характеризовались трехблочной диагональной ковариационной матрицей ( $K_Z$ ), элементы которой выражены в мм<sup>2</sup>:

$$K_Z = \begin{pmatrix} 390 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 320 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 420 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 380 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 370 & 190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 190 & 330 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

СКП положения исходных пунктов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  были близки по значениям и равнялись:  $m_A = 26,6$  мм,  $m_B = 28,3$  мм и  $m_C = 26,5$  мм.

Всего было проведено пять экспериментов, в каждом из которых, во-первых, ковариационная матрица  $K_Z$  постоянно сохраняла свое значение, а, во-вторых, выборочно блокировались [29] ковариационные матрицы соответствующих измерений, выполняемых на отдельных пунктах. Блокировка заключалась в модулировании соответствующей ковариационной матрицы, диагональные элементы которой теоретически бесконечно малы, путем ее замены на квадратную матрицу  $\alpha \cdot I_{pp}$  соответствующих размеров  $pp$ . Число  $\alpha$  – это параметр регуляризации.

*Первый эксперимент* иллюстрирует ситуацию, когда в предполагаемое общее уравнивание включены погрешности координат исходных пунктов ОМС и результаты моделирования угловых и линейных измерений на её промежуточных пунктах. В табл. 4.5 приведены результаты уравнивания в этом эксперименте.

Таблица 4.5

СКП положения промежуточных точек  $T$ ,  $TT$  и конечного пункта  $X$  сети с учетом влияния СКП пунктов ОМС и СКП всех измерений

Точка	СКП положения точек, мм	Вклад СКП исходных пунктов ОМС и СКП предшествующих измерений	
		в мм	в % допуска
$T_1$	21,6	21,4	99,1
$TT_3$	27,5	27,1	98,5
$TT_2$	24,6	24,3	98,8
$TT_1$	31,6	31,0	98,1
$T_2$	32,3	31,8	98,4
$X$	<b>37,4</b>	36,6	98,0

Эксперимент показал, что СКП положения точки объекта недвижимости  $X$  будет характеризоваться величиной 37,4 мм, что находится в пределах допустимых значений, определенных нормативным документом [56]. В колонке «Вклад» видно, что влияние СКП координат исходных пунктов ОМС огромно и составляет 98 % для характерной точки объекта недвижимости  $X$ .

*Второй эксперимент* отличался от первого тем, что влияние погрешностей координат исходных пунктов ОМС было «блокировано». Блокирование достигалось путем уменьшения значений диагональных элементов матрицы  $K_Z$  в *сто миллионов* раз. Погрешности измерений

углов и линий кадастровой сети по-прежнему моделировались с характеристиками:  $m_{\beta} = 6''$  и  $m_S = 2$  мм. В табл. 4.6 приведены результаты второго эксперимента.

Таблица 4.6

СКП положения промежуточных точек  $T$ ,  $TT$  и конечного пункта  $X$  сети без учета влияния СКП пунктов ОМС

Точка	СКП положения точки, мм	СКП положения исходных пунктов ОМС, не вошедшие в СКП положения соответствующей промежуточной точки, мм
$T_1$	2,3	21,4
$TT_3$	4,2	27,1
$TT_2$	3,3	24,3
$TT_1$	5,4	31,0
$T_2$	5,0	31,8
$X$	6,8	36,6

Этот эксперимент показывает, что СКП положения характерной точки объекта недвижимости  $X$  определяется величиной 6,8 мм, то есть в 5 раз меньше, чем в предыдущем случае.

Третий эксперимент моделировал ситуацию, когда исполнитель выполняет привязку точки  $T_1$ , измеряя углы  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и расстояния  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  (рис. 4.2), блокируя влияние СКП координат исходных пунктов ОМС.

Результаты уравнивания приведены в первой строке таблице 4.6, из которой видно, что СКП координирования этой точки составляет 2,3 мм, а реально – она грубее (см. табл. 4.5) и составляет величину 21,6 мм.

*Четвертый эксперимент* отличался от третьего тем, что дополнительно на той же точке  $T_1$  выполняются новые наблюдения на объекты  $TT_1$ ,  $TT_2$  и  $TT_3$  (рис. 4.2): три угла  $\beta_3$ ,  $\beta_4$ ,  $\beta_5$  и три линии  $S_4$ ,  $S_5$ ,  $S_6$ . Влияние погрешностей координат исходных пунктов ОМС по-прежнему блокируются. СКП положения точки  $T_1$  также исключаются подобным приемом. В табл. 4.7 приведены результаты уравнивания в четвертом эксперименте.

Здесь, как и ранее, наблюдается завышенная оценка точности – реальные СКП новых точек грубее тех значений, которые не учитывают блокированную ковариационную матрицу исходных пунктов ОМС.

Таблица 4.7

СКП положения пунктов  $TT_1$ ,  $TT_2$  и  $TT_3$  без учета погрешностей координат пунктов ОМС.

Точка	СКП каждой точки, мм	Вклад СКП ковариационной матрицы $K_Z$ в СКП каждой точки, мм
$T_1$	0,0	21,4
$TT_3$	3,1	27,1
$TT_2$	1,3	24,3
$TT_1$	3,1	31,0

*Пятый эксперимент* рассматривает случай последней установки тахеометра с целью координирования характерной точки объекта недвижимости  $X$ . Предполагается измерение лишь угла  $\beta_{11}$  и линии  $S_{2X}$  (рис. 4.2). Влияние погрешностей координат исходных пунктов ОМС, а также всех промежуточных пунктов блокируется, как и в предыдущем случае. В табл. 4.8 приведены точностные характеристики результатов уравнивания в пятом эксперименте.

*Таблица 4.8*

СКП положения характерной точки объекта недвижимости  $X$  без учета погрешностей координат всех пунктов ОМС

Точка	СКП каждой точки, мм	Вклад СКП ковариационной матрицы $K_Z$ в СКП каждой точки, мм
$T_1$	0,0	21,4
$TT_3$	0,0	27,1
$TT_2$	0,0	24,3
$TT_1$	0,0	31,0
$T_2$	0,0	31,8
$X$	2,5	36,6

Вновь, мы видим нарастающее влияние СКП не учитываемых погрешностей координат всех пунктов ОМС.

Следует отметить важный практический нюанс. Если на базе общей сети ОМС будет координировано несколько близких характерных точек объекта недвижимости  $X_i$ , то их взаимное положение, например, расстояние между ними, не будет сильно зависеть от неучета погрешностей координат опорных и промежуточных пунктов, так как влияние таковых будет соизмеримым.

### **4.3. Сопряжение координат характерных точек смежных границ земельных участков на основе СВПВ МНК-оптимизации геопространственных данных**

В работе [58] дано математико-статистическое обоснование геодезической составляющей сопряжения координат характерных точек смежных границ, а также «узлов», в которых одновременно сходятся несколько земельных участков в кадастре. Там же разработана технология сопряжения координат характерных точек, определенных на смежных границах.

В основу сопряжения координат характерных точек легли следующие теоретические выкладки. Положение отдельной характерной точки земельного участка на плоскости определяется ее радиус-вектором  $\mathbf{R}$  [26]:

$$\mathbf{R} = \bar{x} \cdot \mathbf{i} + \bar{y} \cdot \mathbf{j}, \quad (4.6)$$

где  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  – орты осей прямоугольных плановых координат, а  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  – урвненные значения таких координат.

Показателем точности межевания служит средняя квадратическая погрешность (СКП) планового положения некоторой характерной точки границы земельного участка относительно ближайших пунктов государственной геодезической основы, обозначаемое символом  $m_R$ . Значение «СКП положения», вычисляется по известной формуле:

$$m_R = \sqrt{m_{\bar{x}}^2 + m_{\bar{y}}^2}, \quad (4.7)$$

где  $m_{\bar{x}}$  и  $m_{\bar{y}}$  – это СКП **урвненных** значений абсциссы и ординаты характерной точки. Фактическое значение СКП положения не должно превышать нормативного допуска, определяемого документом [57].

Предположим, что после согласования границ соседних земельных участков, которые закреплены на местности межевыми знаками, на каждом из участков выполнена математическая обработка результатов полевых измерений, т.е. известны урвненные значения координаты  $\bar{X}^T = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  всех характерных точек и ковариационная матрица  $K_{\bar{x}}$  этого вектора координат  $\bar{X}$ .

Расхождение значений первого и второго координирований некоторой характерной точки, расположенной на общей границе двух земельных участков №1 и №2 оценивается по расстоянию  $S_{12} = |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|$

между двумя независимыми определениями координат такой характерной точки:  $\mathbf{R}_1 = \bar{x}_1 \mathbf{i} + \bar{y}_1 \mathbf{j}$  и  $\mathbf{R}_2 = \bar{x}_2 \mathbf{i} + \bar{y}_2 \mathbf{j}$ , то есть:

$$S_{12} = ((\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.8)$$

Предполагается, что векторы  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  определены, хотя и разными независимыми технологиями, но в одной системе координат  $XOY$ . СКП положения каждого из определений  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  должны удовлетворять нормативным допускам, установленным документом [57].

Объединенная ковариационная матрица  $K_{ХТ}$  двух *независимых* координирований *общей* характерной точки смежной границы будет иметь следующую блочную структуру:

$$K_{ХТ} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Каждый блок  $K_i$  матрицы (4.9) – это ковариационная матрица автономного определения координат характерной точки на соответствующем земельном участке. Матрица  $K_i$  считается известной из материалов уравнивания результатов измерений на  $i$ -ом земельном участке:

$$K = \begin{pmatrix} m_x^2 & K_{xy} \\ K_{yx} & m_y^2 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

На практике полная информация в форме (4.10) может отсутствовать. В таком случае данная матрица заменяется диагональной, элементы которой могут представлять собой экспертную оценку качества измерений:

$$K = \begin{pmatrix} m_x^2 & 0 \\ 0 & m_y^2 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

В случае наличия полной информации в форме (4.10), СКП расстояния  $S_{12}$  (4.8) должна быть вычислена с учетом коррелированности значений абсцисс и ординат общей точки, уравненных на смежных участках:

$$m_{S_{12}}^2 = \cos^2 T (m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2) + \sin^2 T (m_{y_1}^2 + m_{y_2}^2) + \sin 2T (K_{x_1 y_1} + K_{x_2 y_2}) \quad (4.12)$$

Для случая (4.11) данная формула упрощается:

$$m_{S_{12}}^2 = \cos^2 T (m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2) + \sin^2 T (m_{y_1}^2 + m_{y_2}^2). \quad (4.13)$$

В обоих случаях величина  $T$  – это дирекционный угол отрезка  $S_{12}$ , длина которого равна «расстоянию» между двумя положениями общей точки, вычисленного по формуле (4.8):

$$T = \arctg \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right). \quad (4.14)$$

В идеале, оба определения  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  (4.6) должны совпадать между собой, то есть расстояние  $S_{12}$  (4.8) между ними должно равняться нулю. Этот факт позволяет сформулировать нулевую гипотезу  $H_0$  о равенстве нулю математического ожидания  $E(S)$  случайной величины  $S$ :  $H_0 = \{E(S) = 0\}$ . Тестом для проверки такой гипотезы является стандартная процедура сопоставления эмпирического значения этого теста  $t_{\Theta}$ , равного значению вычисленного расстояния  $S_{12}$  (4.8), деленного на величину его СКП  $m_S$ , с теоретическим значением  $t_T$ , являющимся квантилью стандартного нормального распределения на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ . Значение теста  $t_T$  определяется по известному соотношению [43]:

$$t_T = \arg(F_{\text{Gaus}} = 1 - \alpha/2) = 1,96 \approx 2. \quad (4.15)$$

Когда  $t_{\Theta} = (S_{12} / m_{S12}) > t_T$ , то нулевая гипотеза  $H_0$  отвергается, то есть линейная составляющая расхождения положений точки  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  недопустимо велика. Возникшую при этом реестровую ошибку исключают путем переопределения значений положения характерных точек на повторные (контрольные) определения координат при условии, что это не влечет за собой прекращение, возникновение или переход зарегистрированного права на объект недвижимости.

Когда же  $t_{\Theta} = (S_{12} / m_{S12}) \leq t_T$ , то есть нулевая гипотеза не отвергнута, то в этом случае необходимо выполнить сопряжение координат характерных точек смежных границ земельных участков. Предполагается, что

на каждом  $i$ -ом участке полученные координаты  $\bar{X}_{ХТi}$  по отдельности допустимы и характеризуются соответствующей ковариационной матрицей  $K_{ХТi}$ . В такой ситуации возникает задача усреднения (*сопряжения*) как значений координат  $\bar{X}_{ХТi}$ , так и характеризующих эти координаты ковариационных матриц  $K_{ХТi}$ .

Возможны две принципиально различные ситуации. Во-первых, может возникнуть задача сопряжения положений группы  $n$  точек, находящихся на смежной границе двух участков, а, во-вторых, – задача сопряжения положения одной точки, являющейся общей в месте стыковки нескольких участков, общим числом  $g$ .

В первой ситуации наиболее эффективной будет технология МНК-оптимизации двойных коррелированных значений координат одних и тех же точек  $\bar{X}_1$  и  $\bar{X}_2$ , характеризующихся соответствующими ковариационными матрицами  $K_{\bar{X}_1}$  и  $K_{\bar{X}_2}$ . Такая информация предполагается известной для каждого участка и, дополнительно, считается, что каждая точка удовлетворяет требованиям  $M$  качества своего положения [57].

Во второй ситуации используется СВПВ МНК-оптимизации группы пар векторов  $X_{2g \cdot 1}$ , характеризующихся соответствующими ковариационными матрицами  $K_{2g \cdot 2g}$ .

*Технология сопряжения координат точек смежной границы двух земельных участков.*

В общем случае, технология МНК-оптимизации двойных коррелированных значений координат точек смежной границы двух земельных участков реализуется в четыре этапа [26].

## 1. Подготовка данных.

На первом этапе составляют вектор разностей  $D$  массивов уравненных значений координат  $\bar{X}_1$  и  $\bar{X}_2$  характерных точек смежной границы:

$$D = \bar{X}_2 - \bar{X}_1. \quad (4.16)$$

Коррелированные массивы координат  $\bar{X}_1$  и  $\bar{X}_2$  сопровождаются своими ковариационными матрицами  $K_{\bar{X}_1}$  и  $K_{\bar{X}_2}$ , по которым вычисляют априорную ковариационную матрицу коррелированных разностей:

$$K_D = K_{\bar{X}_1} + K_{\bar{X}_2}. \quad (4.17)$$

## 2. Выявление нарушений в технологии межевания.

На втором этапе, *во-первых*, выдвигается нулевая гипотеза о несущественности, в среднем, значения коррелированных разностей координат характерных точек:

$$H_0 = \{E(D) = 0\}. \quad (4.18)$$

*Во-вторых*, вычисляется эмпирическое значение  $t_{\Theta}$  теста о равенстве математического ожидания  $E(D)$  нулю (на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ ):

$$t_{\Theta} = \frac{|\bar{d}|}{m_{\bar{d}}} > t_T = 1,96. \quad (4.19)$$

Здесь  $\bar{d}$  – это среднее коррелированных разностей, которое равно  $\bar{d} = \frac{[s_k \cdot d]}{[K_D^{-1}]}$ ; знаменатель этой формулы  $[K_D^{-1}]$  – это сумма всех элементов обратной априорной ковариационной матрицы разностей (4.17); а числитель  $[s_k \cdot d]$  – сумма произведения столбцовых сумм  $s_k$  матрицы  $K_D^{-1}$  на соответствующие разности  $d_i \in D$ ; квадрат СКП среднего коррелированных разностей) равен  $m_{\bar{d}}^2 = \frac{\mu^2}{[K_D^{-1}]}$ ; числитель последней дроби – это масштабный показатель точности  $\mu^2 = \frac{D^T K_D^{-1} D'}{k-1}$ , где  $D'$  – это исправленные разности:  $D' = D - \mathbf{1} \cdot \bar{d}$ ; здесь  $\mathbf{1}$  – это вектор-столбец, все элементы которой равны единице; число пар коррелированных координат  $k$  равно удвоенному количеству  $n$  характерных точек смежных границ земельных участков, каждая из которых описывается двумя координатами:  $k = 2 \cdot n$ .

*В-третьих*, эмпирическое значение теста  $t_{\Theta}$  сравнивается с его теоретическим значением  $t_T$ , являющимся квантилью стандартного нормального распределения на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ . Если  $t_{\Theta} > t_T$ , то нулевая гипотеза (4.18) отвергается, то есть массив характерных точек содержит реестровые ошибки и работы по межеванию границ подлежат переделке. Когда гипотеза (4.18) не отвергнута, можно приступить к процедуре сопряжения координат характерных точек смежной границы.

Однако, и в этой ситуации, когда среднее коррелированных разностей прошло проверку на незначимость, возможны отдельные недопустимые расхождения в определении координат некоторых характерных точек.

3. Идентификация реестровых ошибок отдельных характерных точек.

Сопряжение смежных границ двух земельных участков имеет смысл, если разности координат характерных точек  $d_i$  не превышают допустимых значений:

$$d_i^{\text{доп}} = t_T \sqrt{\{K_D\}_{ii}}, \quad (4.20)$$

где  $t_T = t_\alpha = 1,96$  квантиль стандартного нормального распределения (4.15), а  $\{K_D\}_{ii}$  – диагональный элемент ковариационной матрицы разностей  $K_D$  (4.17).

Единичные недопустимые разности  $d_i \in D$  свидетельствуют либо о реестровых ошибках в отдельных координатах  $i$ -ой характерной точки, определенных на первом или втором земельном участке, либо о перемещении межевого знака.

4. Сопряжение координат характерных точек.

При отсутствии реестровых ошибок, или после их устранения, необходимо осуществить сопряжение координат характерных точек общей границы. Ковариационная матрица  $K_D$  (4.17) разностей

двойных определений координат является матрицей коэффициентов нормальных уравнений коррелат  $(N_{\Lambda} = K_D) \cdot \Lambda - D = 0$ , из решения которых находят искомые корни – коррелаты:

$$\Lambda = K_D^{-1} \cdot D. \quad (4.21)$$

По вычисленным коррелатам определяют МНК-поправки  $\tilde{V}_1$  и  $\tilde{V}_2$  в исходные координаты по каждому участку:

$$\tilde{V}_1 = -K_{\bar{X}_1} \cdot \Lambda; \text{ и } \tilde{V}_2 = K_{\bar{X}_2} \cdot \Lambda. \quad (4.22)$$

Окончательно, дважды вычисляют значения сопряженных координат характерных точек, используя исходные координаты участков:

$$\bar{X}_{\bar{S}} = \bar{X}_1 + \tilde{V}_1 = \bar{X}_2 + \tilde{V}_2, \quad (4.23)$$

Оценку точности сопряженных значений координат характерных точек выполняют так же дважды, вычисляя двумя способами апостериорное значение ковариационной матрицы  $\bar{K}_{\bar{S}}$  сопряженных координат:

$$\bar{K}_{\bar{S}} = \mu^2 (K_{\bar{X}_1} - K_{\bar{X}_1} K_D^{-1} K_{\bar{X}_1}) = \mu^2 (K_{\bar{X}_2} - K_{\bar{X}_2} K_D^{-1} K_{\bar{X}_2}) \quad (4.24)$$

где  $\mu^2 = \frac{D^T \Lambda}{k}$  – это апостериорное значение масштабного показателя точности  $\sigma^2$ , теоретическое, априорное, значение которого  $\sigma_0^2 \equiv 1$  [26].

*СВПВ МНК-оптимизации группы векторов  $X_{2g \cdot 1}$ , характеризующих соответствующими ковариационными матрицами  $K_{2g \cdot 2g}$ , и относящимися к общей точке.*

Особый случай сопряжения координат характерной точки, представляющей собой узел, в котором сходятся границы трех и более ( $g$ ) земельных участков, так же осуществляется на основе синтезированного варианта алгоритма параметрической версии МНК-оптимизации данных. По каждому из участков предполагаются известными вектор координат узла  $\bar{X}_i$  ( $\forall i = 1, \dots, g$ ) и соответствующая ковариационная матрица таких координат  $K_{\bar{X}_i}$  этой характерной точки: полная ( $K_{\bar{X}_i}$  – по материалам уравнивания), дисперсионная ( $D_{\bar{X}_i}$  – известна лишь информация о неравноточности абсцисс и ординат) или единичная, модулированная априорным показателем точности ( $\sigma^2 I$ ). Совокупность всех определений координат по участкам здесь трактуется как вектор «измерений» с известной ковариационной матрицей.

Линеаризованные параметрические уравнения связи для решения задачи сопряжения координат некоторой узловой характерной точки, в которой сходятся  $g$  участков, имеют такой вид:

$$A_{2g \cdot 2} \cdot \tilde{X}_{2 \cdot 1} - X_{2g \cdot 1} = \tilde{V}_{2g \cdot 1}, \quad (4.25)$$

где  $A_{2g \cdot 2}$  – блочная матрица коэффициентов, содержащая  $g$  единичных блоков, вида  $I_{2 \cdot 2}$ ;

$\tilde{X}_{2 \cdot 1}$  – искомый (неизвестный!) вектор сопряженных координат узла;

$X_{2g \cdot 1}$  – блочный вектор, состоящий из  $g$  пар  $(x_i, y_i)$  известных координат общего узла по данным  $i$ -го участка, который является вектором свободных членов системы (4.25);

$\tilde{V}_{2g \cdot 1}$  – блочный вектор искомых МНК-поправок к оптимизируемым координатам  $(x_i, y_i)$ .

Решение уравнений (4.25) под условием  $\tilde{V}_{1 \cdot 2g}^T K_{2g \cdot 2g}^{-1} \tilde{V}_{2g \cdot 1} = \min$ , где  $K_{2g \cdot 2g}$  – это блочно-диагональная ковариационная матрица, содержащая блоки  $K_{\tilde{X}_i}$ , порождает систему нормальных уравнений

$$N_{2 \cdot 2} \cdot \tilde{X}_{2 \cdot 1} - G_{2 \cdot 1} = 0_{2 \cdot 1}, \quad (4.26)$$

содержащую тот же неизвестный вектор  $\tilde{X}_{2 \cdot 1}$  сопрягаемых координат узла, а также коэффициенты нормальных уравнений

$$N_{2 \cdot 2} = A_{2 \cdot 2g}^T K_{2g \cdot 2g}^{-1} A_{2g \cdot 2}, \quad (4.27)$$

и свободные члены

$$G_{2 \cdot 1} = A_{2 \cdot 2g}^T K_{2g \cdot 2g}^{-1} X_{2g \cdot 1}. \quad (4.28)$$

Корни системы (4.26) как раз и являются сопряженными координатами узловой точки:

$$\tilde{X}_{2 \cdot 1} = N_{2 \cdot 2}^{-1} G_{2 \cdot 1}, \quad (4.29)$$

а обратная матрица коэффициентов нормальных уравнений – это ковариационная матрица сопряженных координат узловой точки:

$$N_{2 \cdot 2}^{-1} = K_{\tilde{X}_{2 \cdot 1}}. \quad (4.30)$$

Естественно, что и при сопряжении координат  $g$  узлов, вычисляется апостериорное значение  $\mu^2$  масштабного показателя точности  $\sigma^2$  и проверяется нулевая гипотеза о незначимости его отклонения от теоретического значения  $\sigma_0^2 \equiv 1$  по методике, изложенной выше.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе продемонстрирован потенциал различных вариантов синтезированных алгоритмов МНК-оптимизации числовых данных, которые могут быть получены в ходе выполнения физически разнородных измерений, широкий спектр которых охватывает многие стороны научной и хозяйственной деятельности человека.

Авторы активно используют такие алгоритмы в своих научных исследованиях и учебном процессе на протяжении последних пятнадцати лет, что подтверждается большим числом публикаций в этом направлении, приведенном в списке использованной литературы.

Важнейшим достоинством синтезированных алгоритмов является их способность решать как СЛАУ, матрицы коэффициентов которых являются матрицами полного ранга, так и системы, матрицы которых не обладают таким свойством. Данная особенность позволяет легко выполнять МНК-оптимизацию «свободных» геодезических построений.

Блочная матрица коэффициентов синтезированного варианта МНК-оптимизации данных включает в себя *регуляризирующий блок*,

наличие которого наделяет синтезированный алгоритм свойством автоматического построения *регуляризованной псевдообратной матрицы  $A^+$* , характеризующейся свойством наименьших квадратов (РП-МНК-матрицы), которая автоматически вычисляется в теле обратной матрицы своих коэффициентов. Получаемая РП-МНК- матрица, естественно, характеризуется всеми своими свойствами с точностью до значения параметра регуляризации  $\alpha$ .

РП-МНК- матрица  $A^+$  позволяет строго оценивать ранг исходной матрицы коэффициентов  $A$  линеаризованной исходной функциональной модели геодезического построения по формуле Р. Рао, определять дефект этой матрицы и корректно оценивать точность, как исходных числовых данных, так и оптимизированных значений параметров и функций от последних.

Синтезированный вариант параметрической версии МНК-оптимизации позволяет реализовывать математическую обработку результатов измерений, выполненных с целью создания геодезического построения «в чистом поле» в автономной системе координат, которое предназначается для мониторинга естественного или техногенного объекта в пространстве-времени.

В работе представлен широкий спектр научно-производственного применения синтезированных вариантов МНК-оптимизации геопространственных данных. Это и технологии геоспутникового позиционирования, и геодезическое обеспечение кадастровых работ,

и метрологические работы по созданию базисов для контроля линейных измерений, а также обработка и анализ числовых данных о системах с известной структурой.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Legendre A. M. Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Sur la methode des moindres carrés. – Paris: Appendice, 1806. – P. 72–80.

2. Гаусс К. Ф. Избранные геодезические сочинения. Т. 1 / Под редакцией, с введением и комментариями Г. В. Багратуни. – М. : Геодезиздат, 1957. – 152 с.

3. Adrian R. Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations // The analyst or mathematical museum. – Philadelphia, 1908. – Vol. 1, No 4. – P. 93–109.

4. Мазуров Б. Т., Падве В. А. Метод наименьших квадратов (статика, динамика, модели с уточняемой структурой) // Вестник СГУГиТ, Том 22, № 2, 2017. – С. 22 – 35.

5. Машимов М. М. Методы математической обработки астрономо-геодезических измерений : учебник. – М. : ВИА, 1990. – 509 с.

6. Mazurov B., Padve V., Levin E. Analysis of the Least-Squares Method Evolution: From Static to Dynamic and Updated Structure Models // Surveying and Land Information Science. – 2019. – Vol. 78 (1). – P. 45-50.

7. Taleb Nassim Nicholas. The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable. – London: Penguin, 2008. – 366 с.

8. Чеботарёв А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. – М. : Геодезиздат, 1958. – 606 с.
9. Михайлович К. Геодезия (уравнительные вычисления). – М. : Недра, 1984. – 448 с.
10. Герасименко М. Д. Современный метод наименьших квадратов с геодезическими приложениями. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 98 с.
11. Большаков В. Д. Уравнивание геодезических построений : справочн. пособие. – М. : Недра, 1989. – 413 с.
12. Гайдаев П. А., Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений. – М. : Недра, 1979. – 367 с.
13. Leick A. GPS satellite surveying. Published by John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, 2004. – 435 p.
14. Wells D. E., Krakiwsky E. J. The Method of least squares. University of New Brunswick, Canada, 1971. – 180 p.
15. Teunissen P. J. G. Testing theory (an introduction). Delft University Press, 2000. – 147 p.
16. Teunissen P. J. G. Adjustment theory (an introduction). Delft University Press, 2000. – 193 p.
17. Иордан В. Руководство по геодезии. Т. 1. Уравнительные вычисления по способу наименьших квадратов. – М. : Редбюро ГУГК при СНК СССР, 1939. – 692 с.
18. Христов В. К. Расширение уравнивания по способу наименьших квадратов // Тр. центр. лаб. по геодезии. София, Болг. АН. – 1966. – № 12.

19. Коугия В. А. Избранные труды. Исследования по теории математической обработки результатов измерений: монография. – СПб. : ПГУПС, 2012. – 447 с.

20. Маркузе Ю. И. Теория математической обработки геодезических измерений. Кн. 2. Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений. – М. : МИИГАиК, 2005. – 286 с.

21. Маркузе Ю. И., Голубев В. В. Теория математической обработки геодезических измерений. – М. : Альма Матер, 2010. – 247 с.

22. Падве В. А. Синтезированный алгоритм коррелятивной версии МНК-оптимизации геопространственных данных // ГЕО-Сибирь-2006. Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 24–28 апреля 2006 г.). – Новосибирск : СГГА, 2006. Т. 6, ч. 1. – С. 62–64.

23. Падве В. А. Синтезированный алгоритм параметрической версии МНК-оптимизации геопространственных данных // ГЕО-Сибирь-2008. IV Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 5 т. (Новосибирск, 22–24 апреля 2008 г.). – Новосибирск : СГГА, 2008. Т. 1, ч. 2. – С. 3–5.

24. Падве В. А. Потенциал универсального синтезированного алгоритма МНК-оптимизации геодезических данных // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – № 4. – С. 34–39.

25. Падве В. А. Математическая обработка и анализ результатов геодезических измерений : монография. В 2 ч. Ч. 1. Основы теории погрешностей измерений и фундаментальные алгоритмы точностной МНК-оптимизации результатов измерений. – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. – 163 с.

26. Падве В. А. Математическая обработка и анализ результатов геодезических измерений : монография. В 2 ч. Ч. 2. Синтезированные и комбинированные алгоритмы точностной МНК-оптимизации и анализа результатов измерений. – Новосибирск : СГУГиТ, 2018. – 135 с.

27. Падве В. А. Показатель точности геопространственных данных // Геодезия и картография. – 2005. – № 1. – С. 18–19.

28. Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики. – М. : Финансы и статистика, 1982. – 344 с.

29. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М. : Наука, 1986. – 288 с.

30. Тихонов А. Н. О некорректных задачах в линейной алгебре и устойчивом методе их решения // ДАН СССР, 1965, 163, № 6.

31. Тихонов А. Н. Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений // ЖВМ и МФ, 1965, № 4.

32. Тихонов А. Н., Большаков В. Д., Бывшев В. А., Ильинский А. С., Нейман Ю. М. О вариационном методе регуляризации при уравнивании свободных геодезических сетей // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1978. – № 3. – С. 3–10.

33. Большаков В. Д., Бывшев В. А., Нейман Ю. М. Об использовании регуляризации при уравнивании геодезических сетей // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1985. – № 1. – С. 3–9.

34. Бывшев В. А. К методике выбора параметра регуляризации в задачах ТМОГИ // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1989. – № 1. – С. 10–17.

35. Губанов В. С. Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. – СПб. : Наука : С.-Петербург. изд. фирма, 1997. – 318 с.

36. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

37. Виленкин С. Я. Статистическая обработка результатов исследований случайных функций. – М. : Энергия, 1979. – 320 с.

38. Барлиани А. Г. Разработка алгоритмов уравнивания и оценки точности свободных и несвободных геодезических сетей на основе псевдонормального решения : монография. – Новосибирск : СГГА, 2010. – 135 с.

39. Барлиани А. Г. Методы обработки и анализа пространственных и временных данных : монография / А. Г. Барлиани. – Новосибирск : СГУГиТ, 2016. – 176 с.

40. Падве В. А. Точки на плоскости: положение и показатели точности // Геодезия и картография. – 2008. – № 2. – С. 12–13.

41. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. – М. : Наука, 1986. – 548 с.

42. Падве В. А., Барлиани А. Г., Сальников В. Г., Горобцов С. Р. Автономное свободное геодезическое 3D-построение как координатная

основа исследуемого пространства // Геодезия и картография. – 2024. – No 1. – С. 14–23.

43. Падве В. А. Элементы теории вероятностей и математической статистики: учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2013. – 208 с.

44. ГКИНП (ОНТА)-02-262-02 «Инструкция по развитию съемочного обоснования и съемке ситуации и рельефа с применением глобальных навигационных спутниковых систем ГЛОНАСС и GPS». – М. : ЦНИИГАиК, 2002. – 124 с.

45. СП 317.1325800.2017 «Инженерно-геодезические изыскания для строительства. Общие правила производства работ». – М. : Минстрой России, 2017. – 85 с.

46. Струков А. А. Определение положения одного пункта в общеземной системе координат лучевым и сетевым способами по ГНСС-измерениям // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. 2013. – Т. 3. – С. 72–77.

47. Падве В. А., Косарев Н. С. К вопросу об уравнивании спутниковых геодезических сетей в общеземной координатной системе отсчета // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2020. – Т. 1. № 1. – С. 120–128.

48. Косарев Н. С., Падве В. А. ГНСС-наблюдения на геодинамическом полигоне нефтегазового месторождения: методика, обработка данных и их анализ // Вестник СГУГиТ. – 2022. – Том 27(2). – С. 18–29.

49. Косарев Н. С., Падве В. А., Сергеев С. А., Дударев В. И. Использование синтезированного варианта алгоритма параметрической версии МНК-оптимизации результатов ГНСС-измерений для их сравнительного анализа // Вестник СГУГиТ. – 2018. – Том 23, №3. – С. 30–45.

50. Падве В. А., Косарев Н. С. Алгоритм усреднения приращений координат и их ковариационных матриц при повторных ГНСС-измерениях // *Геодезия и картография*. – 2022. – № 4. – С. 2–8.

51. Chrzanowski, A., Chen, Y. Q., Secord, J. M. Geometrical analysis of deformation surveys // *Proc., Deformation Fredericton*. – 1986. – P. 170–206.

52. Гиенко Е. Г., Антонович К. М., Липатников Л. А. Применение глобальных спутниковых навигационных систем в геодезии и навигации. – Новосибирск : СГУГиТ, 2019. – 100 с.

53. Kosarev N. S., Lechner J., Padve V. A., Umnov I. A. Results of Many Years' Measurements Conducted at the Czech State Long Distances Measuring Standard Koštice // *Science and Technique*. – 2023. – 22 (1). – P. 13–19.

54. Lechner, J., Cervinka, L., Umnov, I. (2008). Geodetic surveying tasks for establishing a National long length standard baseline. FIG Congress 2008, Stockholm, Sweden, June 14–19, 2008.

55. Grubbs F. E., Beck G. Extension of Sample Sizes and Percentage Points for Significance Tests of Outlying Observations // *Technometrics*. – 1972. – Vol. 14. – P. 847–854.

56. Косарев Н. С., Падве В. А., Онищак Д. И., Багдасарян Р. Э. Об оценке точности определения координат характерных точек объектов недвижимости в кадастре // *Вестник СГУГиТ*. – 2022. – Том 27(1). – С. 22–30.

57. Приказ Федеральной службы государственной регистрации, кадастра и картографии от 23 октября 2020 г. № П/0393 «Об

утверждении требований к точности и методам определения координат характерных точек границ земельного участка, требований к точности и методам определения координат характерных точек контура здания, сооружения или объекта незавершенного строительства на земельном участке, а также требований к определению площади здания, сооружения, помещения, машиноместа». – Режим доступа: <http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/74812016/#ixzz6lZniLAKo>.

58. Падве В. А., Калюжин В. А. К вопросу сопряжения координат характерных точек смежных границ земельных участков в кадастре // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2021. – Т. 65. № 6. – С. 673–679.

*Научное издание*

**Падве Владимир Абрамович**

**Косарев Николай Сергеевич**

**СИНТЕЗИРОВАННЫЕ ВАРИАНТЫ  
МНК-ОПТИМИЗАЦИИ ГЕОПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ  
В ГЕОДЕЗИИ, ГНСС-ТЕХНОЛОГИЯХ, МЕТРОЛОГИИ  
И КАДАСТРЕ**

Издается в авторской редакции

Компьютерная верстка *Ю. С. Мерзликиной*

Дизайн обложки *А. А. Пантелеев*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 25.03.2024. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 10,05. Тираж 500 экз. Заказ 28.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ  
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ  
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.