Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия для обучающихся по направлению подготовки
21.03.02 Землеустройство и кадастры (уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2024

УДК 517
В937

Авторский коллектив:
В. П. Вербная, О. В. Григоренко,
О. М. Логачёва, О. Г. Павловская

Рецензенты: кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН *А. В. Логачёв*

кандидат технических наук, доцент СГУГиТ *Е. М. Крылова*

В937 Высшая математика : учебное пособие / В. П. Вербная, О. В. Григоренко, О. М. Логачёва, О. Г. Павловская. – Новосибирск : СГУГиТ, 2024. – 141 с. – Текст : непосредственный.
ISBN 978-5-907711-71-6

Учебное пособие подготовлено старшим преподавателем В. П. Вербной, кандидатами физико-математических наук, доцентами О. В. Григоренко и О. М. Логачёвой, кандидатом технических наук О. Г. Павловской на кафедре высшей математики СГУГиТ.

Учебное пособие содержит теоретический материал по основным разделам высшей математики: математический анализ: введение в анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной, неопределенный интеграл, определенный и несобственный интегралы; линейная и векторная алгебра и аналитическая геометрия. Изложение теоретического материала сопровождается примерами, раскрывающими смысл математических понятий.

Пособие предназначено для обучающихся по основным образовательным программам бакалавриата по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры, а также может быть рекомендовано обучающимся СГУГиТ, осваивающим образовательные программы других направлений подготовки, предусматривающие изучение высшей математики.

Рекомендовано к изданию ученым советом Института геодезии и менеджмента.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ.

УДК 517

ISBN 978-5-907711-71-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта бакалавр по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры готовится к профессиональной деятельности, предполагающей наличие у выпускника фундаментальной математической подготовки для того, чтобы иметь способность осуществлять критический анализ и синтез информации, формулировать задачи, используя математические модели, учитывать системный подход, ставить цели и формулировать задачи, подбирать оптимальные методы их решения, проводить исследования в области землеустройства и кадастров.

Настоящее пособие подготовлено на основе разработанного авторами курса лекций для бакалавров СГУГиТ направления подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры и соответствует рабочей программе дисциплины «Высшая математика», содержит теоретический материал по базовым разделам высшей математики: началам анализа, дифференциальному и интегральному исчислению, линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии.

Структура изложения и содержание материала обеспечивают реализацию компетентностного подхода, предусматривающего широкое использование активных и интерактивных форм проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой. Изложение теоретического материала проводится кратко, без громоздких доказательств теорем и сопровождается примерами и рисунками, раскрывающими смысл математических понятий.

1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1.1. Числовые множества

Множества $A, B, C, X, Y\ldots$ представляются совокупностью произвольных элементов $a, b, c, x, y\ldots$, обладающих общим свойством.

Символическая запись	Расшифровка
$a \in A$	элемент a принадлежит множеству A
$b \notin A$	b не является элементом множества A
$\forall$	для любого, для всех, для каждого
$\exists$	найдется, существует

Пустое множество $\varnothing$ не содержит ни одного элемента.

Числа, используемые при счете предметов, составляют ***множество натуральных чисел*** N. Натуральные числа, им противоположные числа и число ноль образуют ***множество целых чисел*** Z.

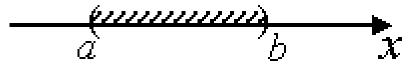
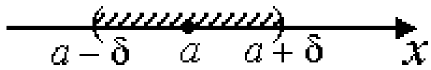
Числа, представимые как обыкновенная дробь, составляют ***множество рациональных чисел*** $Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z,\, n \in N \right\}$.

Множество иррациональных чисел I состоит из чисел, являющихся бесконечной десятичной непериодической дробью.

Множество действительных (вещественных) чисел R составляют вместе рациональные и иррациональные числа.

Геометрически множество действительных чисел R означает множество точек ***числовой прямой***, поэтому $R = (-\infty; +\infty)$.

Отрезок, интервал и полуинтервал, открытый и замкнутый луч, а также вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$ обобщаются единым термином ***числовые промежутки***.

Интервал	$(a;b)=\{x\in R: a<x<b\}$	
Полуинтервал	$(a;b]=\{x\in R: a<x\le b\}$	
Отрезок	$[a,b]=\{x\in R: a\le x\le b\}$	
Открытый луч	$(a,+\infty)=\{x\in R: x>a\}$	
Замкнутый луч	$[a,+\infty)=\{x\in R: x\ge a\}$	
δ*-окрестность числа a*	$(a-\delta,\ a+\delta)=$ $=\{x\in R: \lvert x-a\rvert<\delta\}$	

Модулем действительного числа x называется $|x|=\begin{cases}x, & \text{если } x\ge 0;\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$

1.2. Функции, свойства функций

На произвольных множествах X и Y задается ***функция*** $y=f(x)$, если каким-то образом описан способ $f: X\to Y$, по которому любому $x\in X$ указывается соответствующий ему единственный $y\in Y$.

аргумент функции $y=f(x)$ $x\in X$	***область определения*** функции $y=f(x)$ $X=D(f)$
значение функции $y=f(x)$ $y\in Y$	***область значений*** функции $y=f(x)$ $Y=E(f)$

Примеры.

$y=f(x)$	$D(y)$	$E(y)$
$y=2x+5$	R	R
$y=\ln\lvert x\rvert$	$(-\infty;0)\cup(0;\infty)$	R
$y=\sqrt{4-x^2}$	$[-2;2]$	$[0;2]$
$y=\sqrt{(1-x^2)(x^2-1)}$	$\{-1\}\cup\{1\}$	$\{0\}$

Существуют различные способы задания функций:

1) в виде формул, то есть аналитически, например, $y = \frac{\sin x}{x-5} + e^x x^3$;

2) в виде графика, то есть графически;

3) в виде таблицы, в которой перечислены значения $x \in X$ и соответствующие значения $y \in Y$.

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Основные свойства функций

$y = f(x)$ – возрастающая на интервале $(a;\, b)$ $f(x)\uparrow$	если $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
$y = f(x)$ – убывающая на интервале $(a;\, b)$ $f(x)\downarrow$	если $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
Возрастание и убывание обобщают термином ***монотонность***	
$y = f(x)$ – четная	если $\forall x \in X$ $f(-x) = f(x)$
$y = f(x)$ – нечетная	если $\forall x \in X$ $f(-x) = -f(x)$
Функция ***общего вида*** $y = f(x)$ не является ни четной, ни нечетной	
$y = f(x)$ – периодическая с периодом $T > 0$	если $\forall x \in X$ $f(x+T) = f(x)$
$y = f(x)$ – ограниченная	если $\exists M > 0$ $\forall x \in X$ $\lvert f(x) \rvert \le M$
$y = f(x)$ – неограниченная	если $\forall M > 0$ $\exists x \in X$ $\lvert f(x) \rvert \ge M$

Примеры.

1. $y = x^2$ $\uparrow$ при $x \in (0;\infty)$, $\downarrow$ при $x \in (-\infty; 0)$.

2. $y = x^3$ монотонна при $x \in R$.

3. $y = \sin x$ ограничена, потому что $|\sin x| \le 1$.

4. четные функции: $y = x^2$, $y = \cos x$, нечетные: $y = x^3$, $y = \sin x$.

5. $y = \operatorname{tg} x$ – периодическая с периодом $T = \pi$.

Иногда способ задания соответствия каждому $x \in X$ единственного $y \in Y$ невозможно явно записать аналитически в виде равенства $y = f(x)$, но он может быть записан равенством $F(x, y) = 0$, тогда уравнение $F(x, y) = 0$ определяет функцию, заданную ***неявно***.

Пусть $y = F(u)$, а $u = f(x)$, тогда ***суперпозицией*** функций F и f является ***сложная функция*** $y = F(f(x))$.

$y = F(u)$	$u = f(x)$	$y = F(f(x))$
$y = \cos u$	$u = x^2$	$y = \cos x^2$

Если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ верно $f(x_1) \neq f(x_2)$, то $y = f(x)$ − ***взаимно-однозначная*** функция.

Если для взаимно-однозначной функции $y = f(x)$ как аргумент рассматривать $y \in Y$, а как функцию $x \in X$, то $x = f^{-1}(y)$ − ***обратная*** функция.

Например, для $y = e^x$ обратная функция $x = \ln y$ или $y = \ln x$, если вернуться к обозначениям аргумента и функции.

Основные элементарные функции [1]	
Тригонометрические функции	$y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{ctg} x$
Обратные тригонометрические функции	$y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \operatorname{arctg} x$ $y = \operatorname{arcctg} x$
Показательная функция	$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$
Логарифмическая функция	$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
Степенная функция	$y = x^k$, $k \in R$

Элементарные функции получаются в результате сложения, вычитания, умножения, деления и конечного числа суперпозиций основных элементарных функций. Например, $y = \ln\left(\sqrt{\cos x} + \dfrac{x^3}{e^{2x}}\right)$. Остальные функции являются ***неэлементарными***. Например, $y = \begin{cases} \sin x, \text{ при } x < 0; \\ x + 1, \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$

1.3. Понятие о пределе функции одной переменной

Если функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x = a$, за исключением, быть может, самой точки $x = a$, принимает значения, близкие к $y = A$, когда аргумент x принимает значения, близкие к $x = a$, то число A является пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$.

Пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ называется число A, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x$: $0 < |x - a| < \delta$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 1.1)

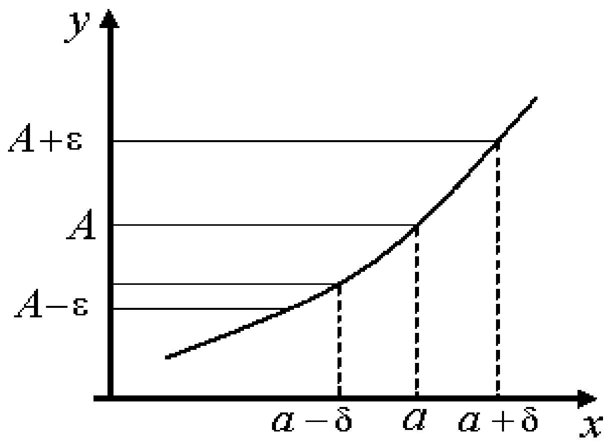


Рис. 1.1. Предел функции $y = f(x)$ в точке $x = a$

Односторонний предел функции $y = f(x)$ в точке $x = a$	
справа	***слева***
$A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$	$A = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, что $\forall x$: $a < x < a + \delta$ $\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, что $\forall x$: $a - \delta < x < a$ $\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$

Теорема. Пусть число $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ является пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, тогда односторонние пределы функции $y = f(x)$ в этой точке равны $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$. Обратное утверждение истинно [1].

Пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, называется число $A = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0$, что выполняется $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$ для всех $\left| x \right| > M$ (рис. 1.2).

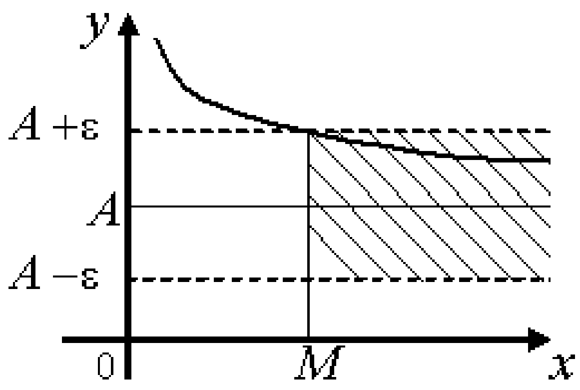


Рис. 1.2. Предел функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$

Если уточняется знак аргумента x, то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ при $x > 0$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ при $x < 0$.

Если в точке $x = x_0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы, то верны следующие теоремы ***о пределах функции одной переменной*** [1].

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x),\ C = \text{const}$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)^n$
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)},\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0,$

Теорема. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$ и для всех x из окрестности точки x_0 $f_1(x) \le g(x) \le f_2(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

бесконечно малая функция при $x \to x_0$	*бесконечно большая функция* при $x \to x_0$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\colon\ 0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ $\lvert f(x) \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\colon\ 0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ $\lvert f(x) \rvert > M$

Пример. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является бесконечно малой при $x \to 0$ и бесконечно большой при $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций	
при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$ – бесконечно малая $\beta(x)$ – бесконечно малая $h(x)$ – ограниченная	при $x \to x_0$ функции $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая $\alpha(x) \cdot h(x)$ – бесконечно малая $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая

Примеры. 1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 5x - 6}{2x^2 - x + 2} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$, так как

$$\lim_{x \to 2}\left(2x^2 - x + 2\right) = 2\left(\lim_{x \to 2} x\right)^2 - \lim_{x \to 2} x + 2 = 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 8,$$

$$\lim_{x \to 2}\left(x^3 + 5x - 6\right) = \left(\lim_{x \to 2} x\right)^3 + 5\lim_{x \to 2} x - 6 = 2^3 + 5 \cdot 2 - 6 = 12.$$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 5x - 6}{x^2 - x - 2} = \left(\dfrac{12}{0}\right) = \infty$, что следует из свойства бесконечно малых и бесконечно больших.

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$, так как $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - x - 2) = 0$ и $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 4) = 0$, теорема о пределе частного не применима, полученное частное двух бесконечно малых называется неопределенностью вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и требует дополнительного исследования.

Существуют неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$; $(\infty - \infty)$; $\left(\infty^0\right)$; $\left(0^0\right)$; $\left(1^\infty\right)$.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\ D=9,\\ x_1=2,x_2=-1\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{3}{4}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+5}{x^3+4x^2+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+1/x^2+5/x^3}{1+4/x+1/x^3}=2.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+6}-\sqrt{x})=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x})(\sqrt{x+6}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+6-x}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x}}=0.$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=1.$

1 замечательный предел [2]: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 3x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2\sin 2x}{2x}}{\dfrac{3\sin 3x}{3x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x}=\dfrac{2}{3}.$

Следствия 1 замечательного предела		
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

2 замечательный предел [2]: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

Замечание. После замены переменной $t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow t\to 0$ при $x\to\infty$ получается $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$

Следствия 2 замечательного предела	
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

Если предел частного двух бесконечно малых при $x\to x_0$ функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ равен единице $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными*** бесконечно малыми $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\beta(x)$.

Замечательные пределы и их следствия для бесконечно малой при $x\to 0$ функции $\alpha(x)$ порождают ***эквивалентности бесконечно малых функций***:

$$\alpha(x)\underset{x\to 0}{\sim}\begin{matrix}\sin\alpha(x)\\ \operatorname{tg}\alpha(x)\\ \arcsin\alpha(x)\end{matrix}\qquad \alpha(x)\underset{x\to 0}{\sim}\begin{matrix}\operatorname{arctg}\alpha(x)\\ e^{\alpha(x)}-1\\ \ln(1+\alpha(x))\end{matrix}$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{(\operatorname{tg}2x)^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}x\to 0\\ \sin 3x\sim 3x\\ \operatorname{tg}2x\sim 2x\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 3x}{(2x)^2}=\dfrac{3}{4}.$

1.4. Понятие о непрерывных функциях

Если предел при $x\to x_0$ функции $y=f(x)$, определенной в точке $x=x_0$ и в некоторой ее окрестности, равен значению функции при $x=x_0$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, то функция $y=f(x)$ ***непрерывна в точке*** $x=x_0$.

Если в любой точке промежутка функция $y=f(x)$ непрерывна, то она ***непрерывна на промежутке***.

Теорема. Любая элементарная функция непрерывна в своей области определения [1].

Если какое-либо из условий непрерывности в точке $x=x_0$ функции $y=f(x)$ нарушается, то функция терпит ***разрыв в точке*** $x=x_0$.

Функция $y = f(x)$, определенная в окрестности точки $x = x_0$, имеет ***устранимый разрыв*** при $x = x_0$, если $f(x_0)$ не определено или не равно пределу функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ или $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ (рис. 1.3).

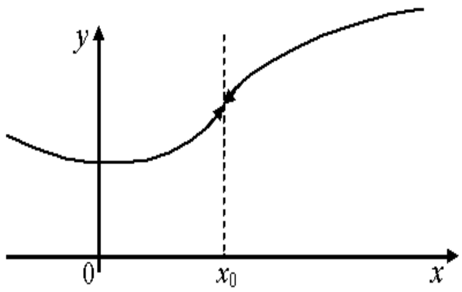


Рис. 1.3. Функция $y = f(x)$ имеет устранимый разрыв в точке x_0

Функция $y = f(x)$, определенная в окрестности точки $x = x_0$, имеет ***разрыв первого рода*** в точке $x = x_0$, если конечные односторонние пределы при $x \to x_0$ функции $y = f(x)$ не равны, то есть $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$. В самой точке $x = x_0$ значение функции может быть как определено, так и не определено (рис. 1.4).

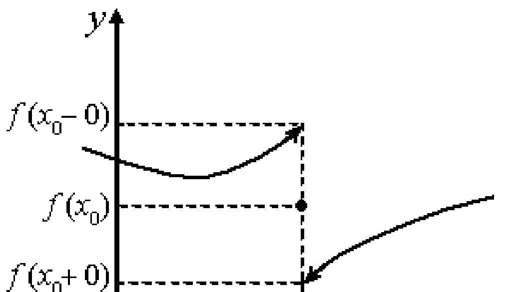


Рис. 1.4. Функция $y = f(x)$ имеет разрыв I рода в точке x_0

Величина скачка равна модулю разности односторонних пределов $|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$.

Функция $y = f(x)$, определенная в окрестности точки $x = x_0$, имеет ***разрыв второго рода*** в точке $x = x_0$, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ при $x \to x_0$ функции $y = f(x)$ не существует или бесконечен.

Пример. Функция $y = e^{\frac{1}{x-1}}$ определена на всей числовой прямой, кроме $x = 1$. В точке $x = 1$ вычисляются односторонние пределы:

$$y(1+0) = \lim_{x \to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{(1+0)-1}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = \infty.$$

$$y(1-0) = \lim_{x \to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{(1-0)-1}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0.$$

В точке $x = 1$ функция терпит разрыв второго рода (рис. 1.5). Дополнительно вычисляется $\lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1$.

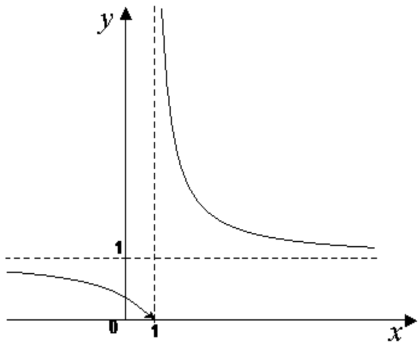


Рис. 1.5. Функция $y = e^{\frac{1}{x-1}}$ имеет разрыв II рода в точке $x_0 = 1$

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Понятие о производной функции

Приращением функции $y = f(x)$, определенной в точке x и некоторой ее окрестности, называется $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, соответствующее достаточно малому ***приращению аргумента*** Δx, при этом новое значение аргумента $x + \Delta x$ остается в окрестности точки x.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x определяется как предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пример. Функция $y = \sin x$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \left| \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Откуда, $(\sin x)' = \cos x$. Аналогично, $(\cos x)' = -\sin x$.

Функция $y = f(x)$ ***дифференцируема*** в точке x, если она имеет конечную производную в этой точке x. Если $y = f(x)$ дифференцируема $\forall x \in [a;\, b]$, то $y = f(x)$ дифференцируема на $[a;\, b]$.

Теорема. Дифференцируемая в точке x функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x [1].

Механический смысл производной

Расстояние $M_0 M$, пройденное за время t точкой M, движущейся равномерно и прямолинейно, от ее начального положения M_0 обозначается $s(t)$ (рис. 2.1).

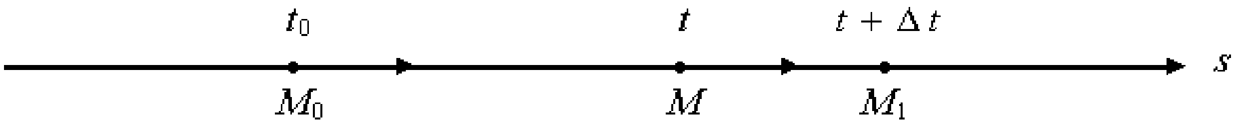


Рис. 2.1. Прямолинейное движение точки

В момент времени $t+\Delta t$ точка M перемещается в точку M_1, находящуюся от начального положения M_0 на расстоянии $s+\Delta s$. Средняя скорость за время Δt равна $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, а скорость $v(t)$ в момент времени t:

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=s'(t).$$

Производная $s'(t)$ – скорость $v(t)$ движения точки M.

Геометрический смысл производной

Прямая линия, пересекающая в двух точках M_0 и M график дифференцируемой в точке x_0 функции $y=f(x)$, называется ***секущей*** M_0M.

Касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 с абсциссой x_0 называется предельное положение секущей M_0M при движении точки графика M к зафиксированной точке M_0.

Угол наклона секущей M_0M к положительному направлению оси Ox с тангенсом $\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$ переходит в угол наклона касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис. 2.2) с тангенсом

$$k=\mathrm{tg}\,\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{tg}\,\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

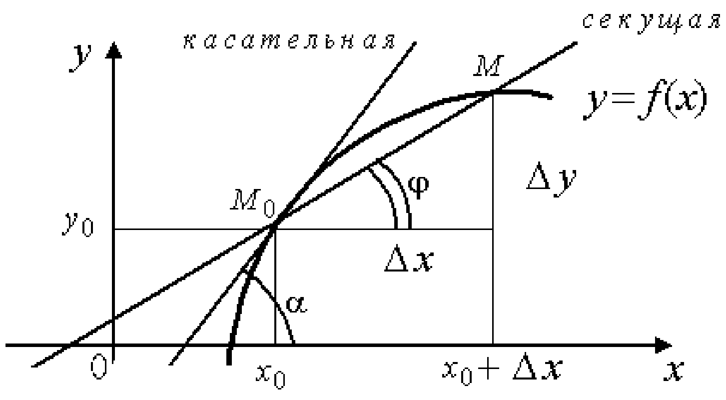


Рис. 2.2. Касательная и секущая к графику функции $y=f(x)$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Уравнение касательной	***Уравнение нормали***
к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$	
$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$	$y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Если $f'(x_0) = 0$, то в точке $M_0(x_0; y_0)$ касательная $y = y_0$ к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox, нормаль $x = x_0$ параллельна оси Oy.

Пример.

Уравнение касательной	Уравнение нормали
к графику функции $y = \sin x$ в точке с $x_0 = -\dfrac{\pi}{6}$	
$y_0 = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$, $\quad y' = \left(\sin x\right)' = \cos x$, $\Rightarrow$ $f'(x_0) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	
$y + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$	$y + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$
$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{12} - \dfrac{1}{2}$	$y = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}x - \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2}$

Правила дифференцирования

$(C)' = 0$, $C = \text{const}$	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$(uv)' = u'v \pm uv'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции.

Пример. Производные функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ находятся как производные частного двух функций:

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Теорема (*Дифференцирование суперпозиции функций*). Сложная функция $y = y(u(x))$, являющаяся суперпозицией функций $y = y(u)$, $u = u(x)$, имеет производную в точке x, если функция $u = u(x)$, имеет в точке x производную u'_x, а функция $y = y(u)$ в соответствующей точке u имеет производную y'_u, причем:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Количество суперпозиций функций можно увеличивать:

$$y = y(u),\, u = u(v),\, v = v(x), \text{ тогда } y'_x = y'_u u'_v v'_x.$$

Теорема (*Дифференцирование обратной функции*). Если в точке x производная $f'(x)$ монотонной в окрестности этой точки функции $y = f(x)$ отлична от нуля, то x обратная функция $x = f^{-1}(y)$ в точке x имеет производную, причем

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Ненулевому приращению аргумента $\Delta x \neq 0$ соответствует ненулевое приращение $\Delta y \neq 0$ монотонной функции $y = f(x)$, причем $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Совершая предельный переход, при достаточном малом приращении аргумента $\Delta x \to 0$ приращение непрерывной функции $y = f(x)$ также достаточно мало $\Delta y \to 0$, получается формула дифференцирования обратной функции.

Производные основных элементарных функций

$(x)'=1$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\left(x^k\right)' = kx^{k-1}, \quad k \in R$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Пример. Дифференцируя степенную функцию как суперпозицию функций $y = x^k = e^{k\ln x}$, получается $y' = e^{k\ln x} \cdot \dfrac{k}{x} = x^k \cdot \dfrac{k}{x} = k \cdot x^{k-1}$.

Откуда $\left(x^k\right)' = kx^{k-1}$, $k \in R$.

Пример. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$. Тогда $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$. Откуда, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Таблица производных суперпозиции функций

$\left(u^k\right)' = ku^{k-1} \cdot u', \quad k \in R$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$	$\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'$	$\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Пример. Производная y' суперпозиции трех функций $y=\ln(\operatorname{arctg} e^x)$ находится как:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^x}\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^x.$$

Производная y'_x функции $y=y(x(t))$, заданной системой уравнений, выражающих аргумент x и функцию y через параметр t

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$$

находится по правилу дифференцирования суперпозиции функций $y'_t = y'_x\cdot x'_t$, при условии, что функции $x=x(t)$, $y=y(t)$ дифференцируемы в точке t. При $x'_t\neq 0$ получается формула ***дифференцирования параметрически заданной функции***

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример. Составляется уравнение касательной к кривой, заданной уравнениями $\begin{cases} x = 2\sin t; \\ y = 6\cos t, \end{cases}$ в точке, соответствующей значению параметра $t=\dfrac{\pi}{4}$. При $t=\dfrac{\pi}{4}$ находятся координаты точки касания $M_0(\sqrt{2};\ 3\sqrt{2})$.

$$y'_x = -\frac{6\sin t}{2\cos t} = -3\operatorname{tg} t,\quad y'_x(M_0) = y'_x\,\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -3,$$

Откуда уравнение касательной $y-3\sqrt{2}=-3(x-\sqrt{2})$; $y=-3x+6\sqrt{2}$.

Дифференцирование по x равенства $F(x,y)=0$, задающего неявно функцию $y=y(x)$, представленную как сложную, позволяет найти ***производную*** y'_x ***функции*** $y=y(x)$, ***заданной неявно***.

Пример. Дифференцируется равенство $y^2+xe^y-\sin y+4=0$, неявно задающее функцию $y=y(x)$: $2yy'+e^y+xe^y y'-\cos x=0$.

$$\text{Откуда } y'=\frac{\cos x-e^x}{2y+xe^y}.$$

Дифференцирование показательно-степенной функции $y=\left(u(x)\right)^{v(x)}$, записанной в виде степени, основанием и показателем которой являются функции аргумента x, производится после предварительного логарифмирования $\ln y=\ln\left(u(x)\right)^{v(x)}$, откуда $\ln y=v\ln u$.

$$\left(\ln y\right)'=\left(v\ln u\right)'; \quad \frac{y'}{y}=v'\ln u+v\frac{u'}{u}; \quad y'=u^v\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right).$$

$$y'=u^v\ln u\cdot v'+vu^{v-1}u'.$$

Пример. Дифференцирование показательно-степенной функции $y=x^{\operatorname{arctg}x}$ производится после предварительного логарифмирования и преобразования по свойствам логарифма:

$$\ln y=\ln x^{\operatorname{arctg}x}, \quad \ln y=\operatorname{arctg}x\cdot\ln x;$$

$$\left(\ln y\right)'=\left(\operatorname{arctg}x\right)'\cdot\ln x+\left(\ln x\right)'\cdot\operatorname{arctg}x;$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}x.$$

Подставляя $y=x^{\operatorname{arctg}x}$, получается

$$y'=x^{\operatorname{arctg}x}\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}x\right).$$

2.2. Дифференциал функции. Производные высших порядков

Дифференциал дифференцируемой в точке x функции $y=f(x)$ определяется как $dy=f'(x)dx$, причем $dx=\Delta x$.

Выражая производную $f'(x)$ из определения дифференциала, $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, получается обозначение производной функции.

Основные свойства дифференциала

1. $d(u\pm v)=du\pm dv$. 2. $d(uv)=vdu+udv$. 3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$.

Для сложной функции $y=y(u(x))$ производная равна

$$\frac{dy}{dx}=y'_u(u)u'(x)\text{, откуда дифференциал}$$

$$dy=y'_u(u)u'(x)dx=y'_u(u)du.$$

Форма дифференциала ***инвариантна*** как в случае зависимого, так и в случае независимого аргумента.

Геометрически дифференциал функции

$$dy=f'(x)\Delta x=\operatorname{tg}\varphi\cdot\Delta x$$

представляет собой приращение ординаты точки, движущейся по касательной к графику функции $y=f(x)$ (рис. 2.3).

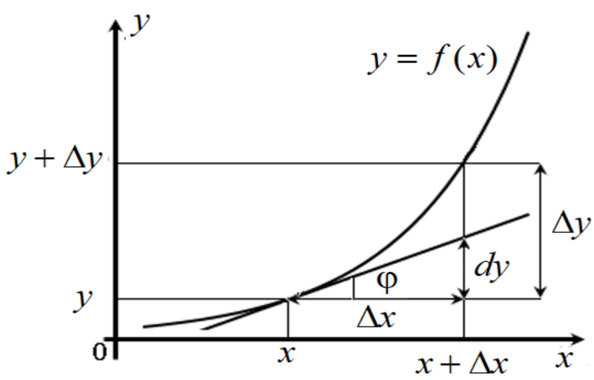


Рис. 2.3. Геометрический смысл дифференциала функции $y=f(x)$

Приращение Δy функции $y = f(x)$ незначительно отличается от ее дифференциала dy, если значения приращения Δx аргумента x достаточно малы: $\Delta y \approx dy$ или $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$.

При достаточно малых приращениях Δx ***приближенное значение функции*** $y=f(x)$, вычисленное по формуле

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x,$$

получается достаточно близким к истинному значению.

Пример. Приближенное значение $\sqrt{0,9}$ вычисляется формуле $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x,$ если $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Получается $\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x$. В качестве x выбирается число, наиболее близкое к 0,9, но, чтобы значение $\sqrt{x}$ было известно, при этом Δx должно быть достаточно малым. Очевидно, следует выбрать $x = 1$, $\Delta x = -0,1$. Итак,

$$\sqrt{0,9} = \sqrt{1-0,1} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot (-0,1) = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Пример. Приближенное значение $\sin 28^\circ$ вычисляется по формуле

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, если $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $x = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$.

$$x + \Delta x = 28^\circ,\ \Delta x = -2^\circ = -\frac{\pi}{90},\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin 28^\circ \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{90}\right) \approx 0,5 - 0,03 = 0,47.$$

Производная 2-го порядка	***Производная n -го порядка***
дифференцируемой функции $y=f(x)$	
производная от производной функции $y=f(x)$	производная от производной $(n-1)$ -го порядка функции $y=f(x)$
$y''=f''(x)=\left(f'(x)\right)'$	$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$
все производные функции $y=f(x)$ до $(n-1)$ -го порядка дифференцируемы	

Производные высших порядков параметрически заданных функций $\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t) \end{cases}$ находятся следующим образом:

$$y_x^{(n)}=\frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)_t'}{x_t'}.$$

Замечание. Вторая производная функции пути $s=s(t)$, пройденного материальной точкой за время t, определяет ее ускорение $a(t)=v'(t)=s''(t)$.

Пример. Производные функции $y=e^{kx}$ $(k\in R)$ высших порядков имеют вид

$$y'=ke^{kx};\ y''=k^2e^{kx};\ldots;\ y^{(n)}=k^ne^{kx}.$$

Пример. Производная параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t); \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$$

равна $y_x'=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{a(1-\cos t)'}{a(t-\sin t)'}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$,

производная второго порядка

$$y_x''=\frac{\left(y_x'\right)_t'}{x_t'}=\frac{\left(\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\right)'}{a(1-\cos t)}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\sin t}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

Пример. Дифференцируется равенство $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, задающее неявно функцию $y=y(x)$: $\frac{2x}{a^2}-\frac{2y\cdot y'}{b^2}=0$, откуда $y'=\frac{b^2x}{a^2y}$.

$$y''=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}.$$

Подставляя y', с учетом исходного равенства, получается

$$y''=\frac{b^4}{a^2}\cdot\frac{\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}}{y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Дифференциал порядка n функции $y=f(x)$ в точке x, соответствующий дифференциалу $dx=\Delta x$ аргумента x, определяется как

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=d\left(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right)=f^{(n)}(x)dx^n.$$

Дифференциалы d, d^n соответствуют одному дифференциалу dx аргумента x, представленного как постоянная не зависящая от x величина.

Производная порядка n функции $y=f(x)$ в точке x записывается в виде отношения:

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n},$$

где d^ny – дифференциал порядка n функции y в точке x, соответствующий значению dx в знаменателе.

Формы дифференциалов высших порядков не инвариантны.

Пример. Для функции $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x$ находятся dy и d^2y.

$$y'=\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x\right)'=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=1-\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$dy = y'dx = \left(1 - \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$$

$$y'' = \left(1 - \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = -\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= -\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$

$$d^2y = y''(dx)^2 = \left(1 - \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'(dx)^2 = -\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx^2.$$

2.3. Некоторые теоремы о производных. Разложения Тейлора

Теорема 1. Если определенная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b) функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего или наименьшего значения в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$, то $f'(x_0) = 0$ [2].

Теорема 2. Если непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b) функция $y = f(x)$ принимает на концах отрезка равные значения $f(a) = f(b)$, то $\exists \xi \in (a, b)$, в которой $f'(\xi) = 0$, что означает, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $\xi \in (a, b)$, параллельна оси Ox (рис. 2.4) [2].

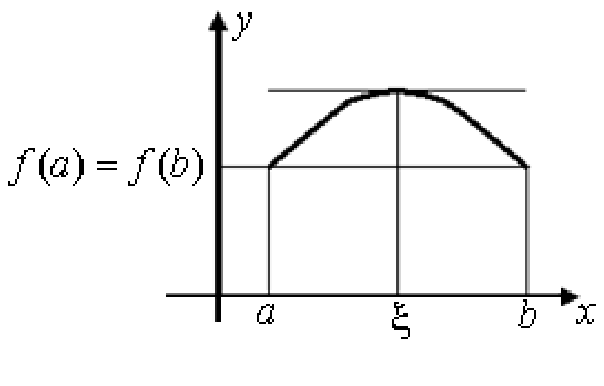


Рис. 2.4. Значения функции $y = f(x)$ на концах отрезка равны

Теорема 3. Если для непрерывных на $[a, b]$ и дифференцируемых на (a, b) функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ верно, что для любого $\forall x \in (a,b)$ $g'(x) \neq 0$, то $\exists c \in (a, b)$, в которой $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ [2].

Теорема 4. Для непрерывной на $[a, b]$ и дифференцируемой на (a, b) функции $y = f(x)$ $\exists \xi \in (a, b)$, в которой $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ [2].

Теорема (*правило Лопиталя)*. Если для дифференцируемых в некоторой окрестности точки x_0 функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ производная функции $g'(x) \neq 0$, а в точке x_0 значения функций равны нулю $f(x_0) = g(x_0) = 0$, и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Правило Лопиталя применяется в теории пределов для раскрытия неопределенностей $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Замечание. Если $x \to \infty$, то замена $x = \dfrac{1}{t}$ приводит к тому, что $t \to 0$ и можно применять правило Лопиталя.

Алгебраическими преобразованиями неопределенности $(0 \cdot \infty)$ и $(\infty - \infty)$ можно привести к неопределенностям $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Примеры. Применение правила Лопиталя при вычислении пределов функций.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{1 - e^x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{-e^x} = 0.$

2. $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2)\ln(x - 2) = (0 \cdot \infty) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(x - 2)}{\dfrac{1}{(x - 2)}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\dfrac{1}{(x - 2)}}{-\dfrac{1}{(x - 2)^2}} =$

$= -\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = 0.$

3. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+(x-1)\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

В теории пределов встречаются неопределенности $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$, $\left(1^\infty\right)$, которые раскрываются предварительным логарифмированием.

Предел функции $f(x)^{g(x)}$ заменяется на предел ее логарифма

$$\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x).$$

4. Для вычисления предела $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=(\infty^0)$ логарифмируется функция $y(x)=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$ и вычисляется предел логарифма, учитывая свойства логарифма

$$\lim_{x\to0}\ln y(x)=\lim_{x\to0}\ln(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=\lim_{x\to0}\sin x\ln(\operatorname{ctg}x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\operatorname{ctg}x)}{\dfrac{1}{\sin x}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x}\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0.$$

Так как логарифмическая функция непрерывна, из того, что $\lim\limits_{x\to0}\ln y(x)=0$, следует $\ln\lim\limits_{x\to0}y(x)=0$, тогда $\lim\limits_{x\to0}y(x)=1$.

Разложения Тейлора

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема до порядка $(n+1)$ в некоторой окрестности точки x_0, то можно записать полином n-й степени

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n,$$

такой что

$$P_n(x_0)=f(x_0);\ P_n'(x_0)=f'(x_0);\ ...\ ;\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0).$$

Дифференцируя полином $P_n(x)$ и подставляя $x=x_0$, вычисляются коэффициенты $c_i\,(i=1,\ 2,\ ...,\ n)$:

$$c_0=f(x_0);\ c_1=f'(x_0);\ c_2=\frac{f''(x_0)}{2!};\ c_3=\frac{f'''(x_0)}{3!};\ ...\ ;\ c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Получается полином Тейлора функции $y=f(x)$:

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

За ***остаточный член*** разложения Тейлора принимается

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x).$$

Одной из форм остаточного члена разложения Тейлора является форма Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad x_0<\xi<x.$$

Этой формой удобно пользоваться при определении абсолютной погрешности в приближенных вычислениях. Если $R_n(x)$ достаточно мал, то верно приближенное равенство $f(x)\approx P_n(x)$.

Разложение Тейлора функции $y=f(x)$ имеет вид $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

$$\text{или}\ f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

где $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ – полином Тейлора функции $y=f(x)$;

$\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ – коэффициенты полинома Тейлора функции $y = f(x)$.

При $x_0 = 0$ разложения Тейлора для основных элементарных функций называются ***формулами Маклорена***:

1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + R_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + R_n$;

2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - ... + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_n$;

3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - ... + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_n$;

4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + R_n =$

$= 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot ... \cdot(\alpha-(k-1))}{k!} x^k + R_n$;

5) $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - ... + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + R_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + R_n$;

6) $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \dfrac{x^k}{k} + R_n$.

В случае $\alpha = -1$ формула 4) для функции $(1+x)^\alpha$ имеет вид

7) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + R_n$.

А при замене x на $(-x)$ получается

8) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + R_n$.

Примеры. 1. Разложение Маклорена функции $f(x) = e^{5x}$ получается заменой x на $5x$ в формуле 1

$$e^{5x} = 1 + 5x + \frac{(5x)^2}{2!} + ... + \frac{(5x)^n}{n!} + R_n .$$

2. Разложение Маклорена функции $f(x) = \cos^2 x$ получается с учетом тригонометрической формулы понижения степени $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ заменой x на $2x$ в формуле 3

$$\cos^2 x = 1 - \frac{(2x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(2x)^4}{2\cdot 4!} - ... + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{2\cdot (2n)!} + R_n .$$

3. Разложение Маклорена функции $f(x) = \frac{1}{3+2x}$ получается с учетом представления $f(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}x}$ заменой x на $\frac{2}{3}x$ в формуле 7

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - ... + (-1)^n\left(\frac{2}{3}x\right)^n\right) + R_n .$$

Пример. Для вычисления приближенного значения $\sqrt{e}$ с точностью $\delta = 0{,}001$ используется разложение Тейлора функции $f(x) = e^x$ в окрестности точки $x_0 = 0$: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}$.

При $x = \frac{1}{2}$ получается $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + ... + \frac{1}{2^n n!} + \frac{e^{\xi}}{2^{n+1}(n+1)!}$,

где $0 < \xi < \frac{1}{2}$. Для достижения требуемой точности $\delta = 0{,}001$ остаточный член должен удовлетворять условию:

$$\frac{e^{\xi}}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} < 0{,}001$$, откуда определяется $n = 4$,

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2} + \frac{1}{2^3 6} + \frac{1}{2^4 24} \approx 1{,}648.$$

2.4. Монотонность функции. Выпуклость графика функции

Теорема [2]. Для дифференцируемой и возрастающей на интервале (a, b) функции $y = f(x)$ верно неравенство $f'(x) \ge 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Для дифференцируемой и убывающей на интервале (a, b) функции $y = f(x)$ верно неравенство $f'(x) \le 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Обратное также верно.

Пример. Чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 1$ определяются знаки производной $y' = x^3 - x$ на интервалах, на которые разбивают числовую прямую нули производной (рис. 2.5).

$$y' = x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0;$$

$$x(x-1)(x+1) = 0, \; x = -1, \; x = 0, \; x = 1.$$

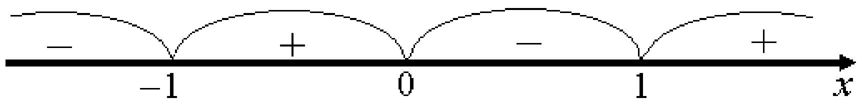


Рис. 2.5. Знаки производной y'

$f(x)\uparrow$ при $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$; $f(x)\downarrow$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

Точки экстремума функции $y = f(x)$	
x_0 – ***точка максимума***	x_0 – ***точка минимума***
$\forall x$ из некоторой окрестности точки x_0	
$f(x_0) > f(x)$	$f(x_0) < f(x)$
значения функции $y = f(x)$ в точках экстремума – ***экстремумы*** функции	

Необходимое условие экстремума. Производная дифференцируемой в некоторой окрестности точки x_0 (за исключением, быть может, самой точки) функции $y = f(x)$ в точке x_0 обращается в ноль $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0.

Для функции $y = f(x)$ точка x_0 называется ***стационарной***, если $f'(x_0)=0$. Точки из области определения функции $y = f(x)$, в которых производная y' равна нулю или не существует, называются ***критическими*** точками.

Пример. Функция $y = x^3$ монотонно возрастает на всей числовой оси и не имеет экстремумов. Производная равна нулю $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$. В критической точке $x = 0$ функция $y = x^3$ не имеет экстремума.

Достаточное условие экстремума I. В критической точке x_0 функции $y = f(x)$ имеет экстремум, а именно

максимум	минимум
$f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак	
с «+» на «−»	с «−» на «+»

Достаточное условие экстремума II. В стационарной точке x_0 функция $y = f(x)$, имеющая в окрестности этой точки непрерывную вторую производную $f''(x)$ имеет экстремум, а именно

максимум	минимум
вторая производная в точке x_0	
отрицательна $f''(x_0) < 0$	положительна $f''(x_0) > 0$.

Пример. Производная функции $f(x) = \sqrt[3]{\left(x^2 - 4x + 3\right)^2}$ имеет вид

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 4}{\sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}}.$$

Критические точки $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, найденные из условий $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, делят числовую прямую на промежутки, где по знакам $f'(x)$ определяется монотонность $y = f(x)$.

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;3)$	3	$(2;+\infty)$
y'	−	∞	+	0	−	∞	+
y	$f(x)\downarrow$	0	$f(x)\uparrow$	1	$f(x)\downarrow$	0	$f(x)\uparrow$
		min		max		min	

Функция $y = f(x)$ в критических точках $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3$ имеет экстремумы, а именно $y_{\max}(2) = 1$, $y_{\min}(1) = y_{\min}(3) = 0$.

Наибольшее и наименьшее значения непрерывной ***на отрезке*** $[a, b]$ функции $y = f(x)$ выбирается среди значений функции $y = f(x)$, вычисленных на концах отрезка $[a, b]$ и в критических точках из отрезка $[a, b]$.

Для функции $y=f(x)$ (рис. 2.6), непрерывной на отрезке $[a,b]$, экстремум достигается в точках x_2 (максимум), x_1, x_3 (минимум), а наибольшее значение $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(b)$ и наименьшее значение $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(x_3)$

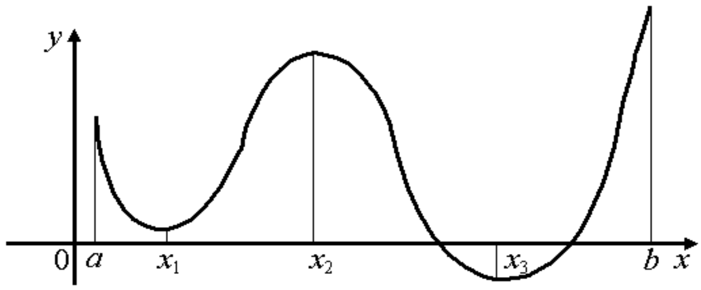


Рис. 2.6. Наибольшее и наименьшее значение функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$

Пример. Для функции $y=x^3-x^2-x+2$, заданной на отрезке $[0;2]$,

$$y' = 3x^2-2x-1=0 \text{ при } x_1=1,\ x_2=-\frac{2}{3}.$$

Критические точки $x_1=1\in[0;2];\ x_2=-\dfrac{2}{3}\notin[0;2].$

Среди значений $f(0)=2;\ f(1)=1;\ f(2)=4$ выбираются наибольшее $\max\limits_{x\in[0;2]} f(x) = f(2)=4$ и наименьшее $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x) = f(1)=1$.

График функции $y=f(x)$ на интервале (a,b),	
выпуклый вниз	***выпуклый вверх***
если все точки графика функции $y=f(x)$ лежат	
выше	ниже
касательной к графику в точке из интервала (a,b), кроме точки касания	

Две части графика функции $y=f(x)$ с различными направлениями выпуклости разделяет ***точка перегиба*** с координатами $(x_0, f(x_0))$ (рис. 2.7).

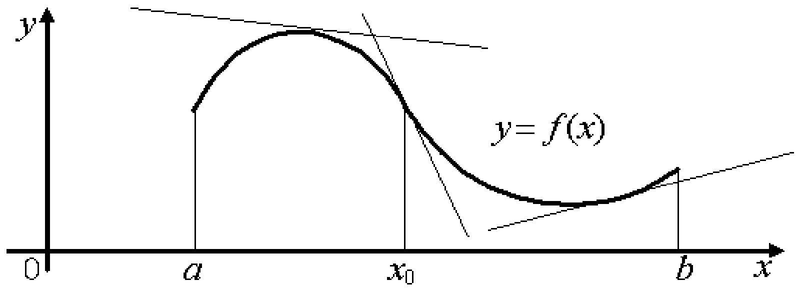


Рис. 2.7. Точка перегиба графика функции $y = f(x)$

Теорема [2]. График функции $y = f(x)$ на интервале (a, b)	
выпуклый вверх	выпуклый вниз
если $\forall x \in (a;\ b)$ $f''(x) < 0$	если $\forall x \in (a;\ b)$ $f''(x) > 0$

Равенство нулю второй производной $f''(x) = 0$ допускается в некоторых точках из (a, b). Например, вторая производная всюду выпуклой вниз функции $y = x^4$ равна нулю $y'' = 12x^2 = 0$ при $x = 0$.

Необходимое условие перегиба. Производная второго порядка функции $y = f(x)$ в точке x_0 обращается в ноль $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, если в точке с координатами $(x_0, f(x_0))$ график функции $y = f(x)$ имеет перегиб.

Достаточное условие перегиба. График функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке с координатами $(x_0, f(x_0))$, если производная второго порядка функции $y = f(x)$ в точке x_0 обращается в ноль $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и происходит смена знака $f''(x)$ при переходе через точку x_0.

Пример. Найти интервалы выпуклости и перегибы графика функции $y = x\ln x - \dfrac{x^2}{2}$, определенной при $x \in (0; \infty)$.

Производная функции $y' = \ln x + 1 - x$, вторая производная $y'' = \dfrac{1-x}{x}$.

$y'' = 0$ при $x_1 = 1$; y'' не существует при $x_2 = 0$, $x_2 \notin (0; \infty)$.

Область определения функции делится точкой $x_1 = 1$ на промежутки, где определяются знаки второй производной y'', и, следовательно, направления выпуклости графика функции $y = f(x)$.

x	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	$+$	0	$-$
y	$\cup$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cap$

Точка $\left(1;\, -\dfrac{1}{2}\right)$ – точка перегиба, отделяющая выпуклую вниз на интервале $(0;\,1)$ часть графика от части, выпуклой вверх на интервале $(1;\infty)$.

2.5. Асимптоты графика функции. Полный анализ свойств функции

Если расстояние $d(x)$ между некоторой прямой и бесконечно удаляющейся от начала координат точкой графика функции $y = f(x)$ становится достаточно малым $d(x) \to 0$, то эта прямая называется ***асимптотой*** графика функции.

Прямая $y = kx + b$ является ***наклонной*** асимптота графика функции $y = f(x)$ (рис. 2.8), тогда значение функции $f(x)$ незначительно отличается от $kx + b,$ то есть $f(x) = kx + b + \alpha(x),$ где $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0.$

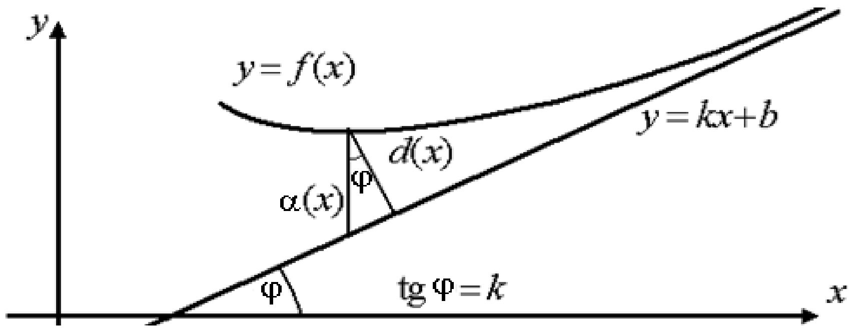


Рис. 2.8. Наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$

Из соотношения сторон в прямоугольном треугольнике $\alpha(x) = \dfrac{d(x)}{\cos\varphi},$ если расстояние $d(x) \to 0,$ то и $\alpha(x) \to 0.$

При $k=0$ наклонная асимптота графика функции $y=f(x)$ является ***горизонтальной*** асимптотой.

Прямая $y=kx+b$ – асимптота графика функции $y=f(x)$	
$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$	$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$

Прямая $x=a$ является ***вертикальной*** асимптотой графика функции $y=f(x)$, если в точке $x=a$ бесконечен хотя бы один из односторонних пределов функции $f(a-0)$ или $f(a+0)$.

Пример. Так как $y\to\infty$ при $x\to 2$, для графика функции $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ вертикальной асимптотой является прямая $x=2$. Для наклонной асимптоты с уравнением $y=kx+b$ находятся угловой коэффициент $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x(x-2)}=1$ и свободный член $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x-2}=2$, получается наклонная асимптота графика $y=x+2$.

Замечание. Если значения пределов функции $y=f(x)$ различны при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$, то график имеет ***односторонние*** асимптоты.

Пример. Так как $k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\operatorname{arctg}x}{x}=\dfrac{\pi}{2}$, $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot\operatorname{arctg}x}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$,

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot\operatorname{arctg}x\mp\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\operatorname{arctg}x\mp\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}}=\left|\text{правило Лопиталя}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=-1.$$

График функции $y=x\cdot\operatorname{arctg}x$ имеет односторонние наклонные асимптоты при $x\to+\infty$ $y=\dfrac{\pi}{2}x-1$; при $x\to-\infty$ $y=-\dfrac{\pi}{2}x-1$.

Полный анализ свойств функции

1. Область определения функции.
2. Четность, нечетность функции.
3. Нули функции. Точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Непрерывность функции. Точки разрыва.
5. Асимптоты графика функции.
6. Монотонность функции, экстремумы.
7. Выпуклость графика функции, перегибы.
8. Дополнительные точки, график функции.

Пример. Проводится полное исследование свойств функции

$$y = e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \ (a;\ \sigma = \text{const}).$$

1) $D(y) = (-\infty; \infty)$.

2) Функция общего вида, так как $y(-x) \neq y(x),\ \ y(-x) \neq -y(x)$.

3) График функции пересекает ось Oy в точке $\left(0; e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right)$, график функции не пересекается с осью Ox.

4) Функция элементарна, поэтому непрерывна в области определения. Нет точек разрыва.

5) Из 4) следует, нет вертикальных асимптот.

Находится наклонная асимптота с уравнением $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{x} = 0; \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} - 0\cdot x\right) = 0.$$

$y = 0$ – горизонтальная асимптота.

6) Производная $y' = -\dfrac{(x-a)}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ обращается в ноль в критической точке $x_0 = a$. По знакам производной y' на промежутках числовой прямой,

на которые ее делит критическая точка $x_0 = a$, определяются интервалы возрастания и убывания функции

x	$(-\infty; a)$	a	$(a; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$
y	$f(x)\uparrow$	1	$f(x)\downarrow$
		max	

и экстремум $y_{\max} = y(a) = 1$.

7) Производная второго порядка $y'' = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{(x-a)^2}{\sigma^2} - 1 \right)$ обращается в ноль $y'' = 0$ при $x_{1,2} = a \pm \mathrm{s}$.

По знакам производной второго порядка y'' на промежутках числовой прямой, на которые ее делят точки $x_{1,2} = a \pm \sigma$, определяются направления выпуклости графика функции и перегибы.

x	$(-\infty; a-\sigma)$	$a-\sigma$	$(a-\sigma; a+\sigma)$	$a+\sigma$	$(a+\sigma; +\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cap$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cup$
		перегиб		перегиб	

8) График функции (рис. 2.9).

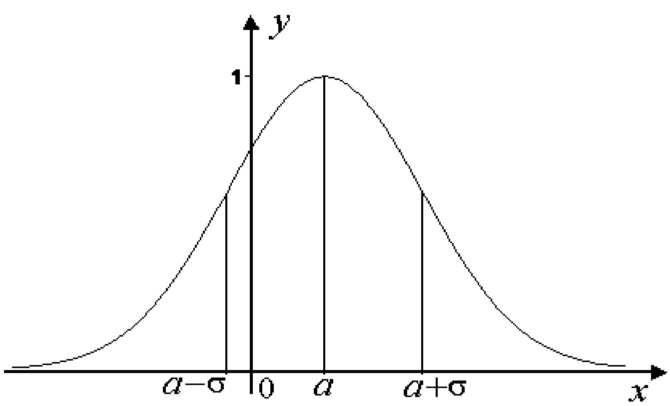


Рис. 2.9. График функции $y = e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

Пример. Провести полное исследование свойств функции $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

1) $D(y)=(-\infty;\ 1)\bigcup(1;\ \infty)$.

2) Функция общего вида, так как $y(-x)\neq y(x),\ \ y(-x)\neq -y(x)$.

3) График функции пересекает оси Ox и Oy в точке $(0;0)$.

4) Функция элементарна, поэтому непрерывна в области определения, то есть всюду, кроме $x=1$.

При $x=1$ функция терпит разрыв второго рода, так как

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^4}{x^3-1}=\frac{1}{-0}=-\infty;\qquad f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^4}{x^3-1}=\frac{1}{+0}=+\infty.$$

5) Вертикальная асимптота $x=1$, так как $x=1$ – точка разрыва второго рода.

Наклонная асимптота $y=kx+b$ имеет уравнение $y=x$, так как

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-1}=1;\ \ b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^3-1}=0.$$

6) Находятся критические точки $x_1=0;\ x_2=\sqrt[3]{4}$ из условия $y'=0$, где

$$y'=\frac{4x^3(x^3-1)-3x^6}{(x^3-1)^2}=\frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}.$$

Производная y' не существует в точке $x=1$, не являющейся критической, так как $x=1\notin D(y)$. По знакам производной y' на промежутках числовой прямой, на которые ее делят точки $x_1=0,\ x_2=\sqrt[3]{4}$, $x=1$, определяются интервалы возрастания и убывания функции.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	$(1;\sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4};+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$f(x)\uparrow$	0	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$	$\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$	$f(x)\uparrow$
		max			min	

Экстремумы функции $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y\left(\sqrt[3]{4}\right) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$.

7) Вторая производная

$$y'' = \frac{(6x^5 - 12x^2)(x^3-1)^2 - 6x^2(x^3-1)(x^6-4x^3)}{(x^3-1)^4} = \frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3} = 0$$

при $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt[3]{2}$, y'' не существует при $x = 1$.

По знакам y'' на промежутках числовой прямой, на которые ее делят точки $x = 0$, $x = -\sqrt[3]{2}$, $x = 1$, определяются направления выпуклости графика функции и перегибы.

x	$(-\infty;-\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2};0)$	0	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
y''	+	0	–	0	–	+
y	$\cup$	$-\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$	$\cap$	0	$\cap$	$\cup$
		перегиб				

8) График функции (рис.2.10).

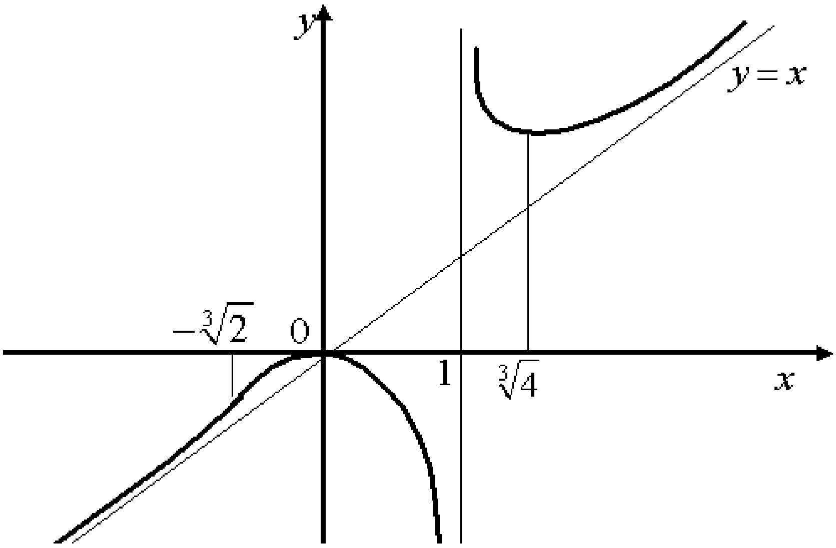


Рис. 2.10. График функции $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1. Понятие о первообразной и неопределенном интеграле

Основная задача	Дано	Найти
Дифференциальное исчисление	функция $y = F(x)$	производную $F'(x) = f(x)$
Интегральное исчисление	производная $f(x) = F'(x)$	функцию $y = F(x)$

Первообразной функции $f(x)$ называется такая функция $y = F(x)$, что

$$F'(x) = f(x).$$

Любые две первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ функции $f(x)$ отличаются друг от друга на некоторое число $F_1(x) - F_2(x) = C,$ где $C = \text{const}$.

Пример. Функция $f(x) = \cos x$ имеет первообразные $F_1(x) = \sin x$, $F_2(x) = \sin x + 3,$ $F_3(x) = \sin x - 0{,}5$ так как $(\sin x + C)' = \cos x.$

Теорема. Непрерывная на некотором промежутке функция $y = f(x)$ имеет на этом промежутке первообразную [1].

Всякая элементарная функция непрерывна в своей области определения, поэтому в области определения имеет первообразную.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Выражение $f(x)dx$ называется ***подынтегральным***. Нахождение неопределенного интеграла называется ***интегрированием*** функции $f(x)$.

Замечание. Первообразные некоторых элементарных функций не могут быть представлены в виде элементарной функции. Интегралы от них называются ***неберущимися***. Например: $\int\frac{\sin x}{x}dx$, $\int\frac{\cos x}{x}dx$, $\int\frac{x}{\ln x}dx$, ,

$\int\sin(x^2)dx$, $\int\cos(x^2)dx$, $\int e^{-x^2}dx$.

Свойства неопределенного интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$

2. $\int dF(x)=F(x)+C.$

3. $\int(Af(x)+Bg(x))dx=A\int f(x)dx+B\int g(x)dx,$ где $A,\ B=\text{const}.$

4. $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,$ где $a,b=\text{const}.$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}+C\ \ (k\neq -1);$ 2. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C;$

3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C;$ 4. $\int e^x dx=e^x+C;$

5. $\int\sin x dx=-\cos x+C;$ 6. $\int\cos x dx=\sin x+C;$

7. $\int\operatorname{tg}x dx=-\ln|\cos x|+C;$ 8. $\int\operatorname{ctg}x dx=\ln|\sin x|+C;$

9. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C;$ 10. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C;$

11. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C;$ 12. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C;$

13. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C;$ 14. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C.$

Примеры.

1. $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx=\int\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx=\int\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C.$

2. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$

3.2. Методы подстановки и интегрирования по частям в неопределенном интеграле

Для дифференцируемой функции $x=\varphi(t)$ с обратной функцией $t=\varphi^{-1}(x)$ справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

позволяющее упростить подынтегральное выражение в неопределенном интеграле путем замены переменной.

Замечание. Если интеграл можно представить в виде $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, то замена переменной $t=\varphi(x)$ приводит интеграл к более простому виду $\int f(t)dt$.

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \begin{vmatrix} t=f(x) \\ dt=f'(x)dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Примеры.

1. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{vmatrix} x=\sin t \\ dx=\cos t dt \end{vmatrix} = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt =$

$$= \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\, dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t \cos t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

2. $\int \frac{x}{1-x^4}dx = \begin{vmatrix} t=x^2 \\ dt=2xdx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t^2}dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right| + C.$

3. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{vmatrix} t=1-x^2 \\ dt=-2xdx \\ xdx=-\frac{1}{2}dt \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$

Метод интегрирования по частям основан на применении формулы

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

полученной интегрированием дифференциала произведения двух дифференцируемых функций u и v

$$d(uv) = udv + vdu.$$

При удачном выборе двух частей u и dv заданного интеграла $\int udv$, формула позволяет перейти к более простому интегралу $\int vdu.$ После выбора частей u и dv, дифференцированием функции $u = u(x)$ находится $du = u'(x)dx$, интегрированием дифференциала $dv = v'(x)dx$ находится функция $v = v(x)$.

Метод интегрирования по частям применяется в следующих случаях.

1. Интегралы вида $\int x^n \cdot f(x)dx$, где $f(x)$ – интегрируемая функция, например, $e^{kx}, \cos kx, \sin kx, ...$

Вместо степенной функции x^n подынтегральное выражение может содержать функцию $(ax+b)^n$. Здесь a, b, k – постоянные, n – натуральное число. Такие интегралы находятся с помощью n-кратного интегрирования по частям. В качестве $u(x)$, которую предстоит дифференцировать, следует взять x^n (или $(ax+b)^n$), тогда каждый шаг понижает степень на единицу.

Примеры.

1. $$\int xe^{-3x}dx = \left| \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-3x}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{array} \right| = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \left(-\frac{1}{3}\int e^{-3x}dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C.$$

2. $$\int (2x+3)^2 \sin xdx = \left| \begin{array}{c} u = (2x+3)^2 \Rightarrow du = 4(2x+3)dx \\ dv = \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -(2x+3)^2\cos x - \left(-4\int (2x+3)\cos xdx\right) = \left| \begin{array}{c} u = 2x+3 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = \cos xdx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= -(2x+3)^2\cos x + 4\left((2x+3)\sin x - 2\int \sin xdx\right) =$$

$$= -(2x+3)^2\cos x + 4(2x+3)\sin x + 8\cos x + C.$$

2. Интегралы вида $\int x^n \ln x dx$, $\int x^n \arcsin bx dx$, $\int x^n \arccos bx dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} bx dx$, $\int x^n \operatorname{arcctg} bx dx$, $\int x^n \ln^2 x dx$, $\int x^n \arcsin^2 bx dx$ и т. д.

В качестве функции $u(x)$, которая далее дифференцируется, следует выбрать одну из функций $\ln x$, $\arcsin bx$, $\arccos bx$, $\operatorname{arctg} bx$, $\operatorname{arcctg} bx$, $\ln^2 x$, $\arcsin^2 bx$, ...

Примеры.

1. $\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \dfrac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$

2. $\int x \ln^2 x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x \Rightarrow du = 2 \ln x \cdot \dfrac{dx}{x} \\ dv = x\, dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2} x^2 \end{matrix} \right| = \dfrac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \int x \ln x\, dx =$

$$= \left| \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x\, dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2} x^2 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C = \frac{1}{4} x^2 \left(2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1 \right) + C.$$

3. $\int \arcsin x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right| = x \arcsin x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$

$$= \left| \begin{matrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2xdx \\ xdx = -\dfrac{1}{2} dt \end{matrix} \right| = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin x + \sqrt{t} = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

3. Интегралы вида $\int e^{ax} \sin bx\, dx$, $\int e^{ax} \cos bx\, dx$.

Такие интегралы называются ***циклическими***.

Поскольку каждый из множителей в подынтегральной функции одинаково просто и дифференцируется, и интегрируется, u и dv можно выбирать произвольно. При любом выборе первый шаг приведет исходный интеграл $I = \int e^{ax} \sin bx\, dx$ к интегралу $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ (и наоборот). При повторном интегрировании по частям разбиение на части u и dv обусловлено первоначальным выбором частей u и dv. В результате вновь появится исходный интеграл I, цикл завершится. Остается решить полученное линейное уравнение относительно I.

Пример. $\int e^{3x}\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u=\sin x \Rightarrow du=\cos x\,dx \\ dv=e^{3x}dx \Rightarrow v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} =$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\sin x - \frac{1}{3}\int e^{3x}\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x\,dx \\ dv=e^{3x}dx \Rightarrow v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\sin x - \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3x}}{3}\cos x + \frac{1}{3}\int e^{3x}\sin x\,dx\right).$$

Если обозначить $I=\int e^{3x}\sin x\,dx,$ то можно записать, что

$$I = \frac{e^{3x}}{3}\sin x - \frac{e^{3x}}{9}\cos x - \frac{1}{9}I \;\Rightarrow\; I = \frac{e^{3x}}{10}\left(3\sin x - \cos x\right) + C.$$

Циклическими также являются интегралы $\int \sin(\ln x)\,dx,\quad \int\cos(\ln x)\,dx.$

3.3. Неопределенные интегралы от дробно-рациональных функций и суперпозиции квадратичной функции

Применение метода подстановки в интегралах вида

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,\quad \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

позволяет получить более простые интегралы, если использовать замену

$$t=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)' = ax+\frac{b}{2}.$$

Примеры.

1. $\int\frac{1}{x^2-8x+20}dx = \int\frac{1}{(x-4)^2+2^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{2}+C.$

2. $$\int \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2-4x+5}}dx = \left| \begin{matrix} t = \dfrac{4x-4}{2} = 2x-2 \\ x = \dfrac{t}{2}+1 \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{t+2+1}{\sqrt{\dfrac{1}{2}t^2+2t+2-2t-4+5}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{t+3}{\sqrt{t^2+6}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{t}{\sqrt{t^2+6}}dt + \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{t^2+6}}dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t^2+6 \\ du = 2tdt \end{matrix} \right| = \frac{2}{2\sqrt{2}}\sqrt{u} + \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left| t + \sqrt{t^2+6} \right| + C =$$

$$= \sqrt{2x^2-4x+5} + \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left| 2x-2+\sqrt{4x^2-8x+10} \right| + C.$$

Замечание. Если знаменатель в интеграле $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ раскладывается на множители, то подынтегральная функция может быть представлена в виде суммы рациональных дробей.

Понятия о рациональных дробях

Многочленом n-й степени называется выражение

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \; a_i \in R, \, i = 0,1,\ldots,n.$$

Корнем многочлена $P_n(x)$ называется число α, при котором значение многочлена равно нулю $P_n(\alpha) = 0$.

Всякий многочлен степени n с действительными коэффициентами раскладывается [3] на неприводимые линейные множители с действительными корнями α_m кратности k_m, $m = 1,2,\ldots,i$, и неприводимые квадратные множители с отрицательным дискриминантом:

$$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_i)^{k_i}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_jx+q_j)^{s_j},$$

где $k_1+\ldots+k_i+2(s_1+\ldots+s_j)=n.$

Пример. Разложение многочлена $P_5(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1$ на неприводимые множители $P_5(x) = x^3(x^2-1)+(x^2-1) = (x^3+1)(x^2-1) =$

$$= (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2(x^2-x+1).$$

Частное двух многочленов представляет собой дробно-рациональную функцию (рациональную дробь)

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}.$$

Если степень многочлена в числителе дробно-рациональной функции больше степени многочлена в знаменателе $m>n$, то выделяется целая часть

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=R_{m-n}(x)+\frac{F_k(x)}{P_n(x)},$$

где $R_{m-n}(x)$ – многочлен степени $m-n$.; $\frac{F_k(x)}{P_n(x)}$ – ***правильная рациональная дробь*** с $k<n$.

Пример. Если разделить многочлен x^5+2x^3+3 на многочлен x^4-x^3-x+1, то частное $\frac{x^5+2x^3+3}{x^4-x^3-x+1}$ представляется в виде суммы

$$\frac{x^5+2x^3+3}{x^4-x^3-x+1}=x+1+\frac{3x^3+x^2+2}{x^4-x^3-x+1},$$

так как

$$\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l} x^5 \quad +\; 2x^3 \quad +\quad 3 \\ \underline{x^5-x^4 \qquad -x^2+x} \end{array} & \left|\begin{array}{l}x^4-x^3-x+1\\ \hline x+1\end{array}\right. \\
-\begin{array}{l} x^4+2x^3+x^2-x+3 \\ \underline{x^4-x^3 \qquad\quad -x+1} \end{array} & \\
3x^3+x^2 \qquad +2 &
\end{array}.$$

Теорема. Любая правильная рациональная дробь представима в виде суммы ***простейших рациональных дробей***

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a_1}+\ldots+\frac{B_{k_i}}{(x-a_i)^{k_i}}+\ldots+\frac{B_1}{x-a_i}+\ldots+$$

$$+\frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{C_{s_j}x+D_{s_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}}+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_jx+q_j},$$

где $P_n(x)=a_n(x-\alpha_1)^{k_1}...(x-\alpha_i)^{k_i}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}...(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}$ – разложение знаменателя дроби на неприводимые множители.

Пример. Частное полиномов $\frac{3x^3+x^2+2}{x^4-x^3-x+1}$ записывается в виде суммы простейших дробей

$$\frac{3x^3+x^2+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}=$$
$$=\frac{A(x^2+x+1)+B(x^3-1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Числа A, B, C, D находятся ***методом неопределенных коэффициентов***. Тождественное равенство числителей

$$x^3+3x^2+2=A(x^2+x+1)+B(x^3-1)+(Cx+D)(x-1)^2$$

позволяет приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{aligned} &x^0:\ A-B+D=2;\\ &x^1:\ A-2D+C=0;\\ &x^2:\ A+D-2C=3;,\\ &x^3:\ B+C=1. \end{aligned}$$

откуда $A=2;\ B=1;\ D=1;\ C=0.$

$$\frac{x^3+3x^2+2}{x^4-x^3-x+1}=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Интегрирование любой правильной рациональной дроби сводится к интегрированию суммы простейших дробей. Непосредственным интегрированием находятся интегралы $\int\frac{A}{x-a}dx$, $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx,\ k>1$. Для интеграла $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ применяются методы интегрирования суперпозиции квадратичной функции. Интеграл $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$ подстановкой $t=x+\frac{p}{2}$ сводится к интегралу $I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}$. Интегрированием по частям может быть получено рекуррентное соотношение

$$I_k = \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} I_{k-1} + \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2 + a^2)^{k-1}},$$

откуда находится интеграл I_k.

Пример. Подынтегральная функция интеграла $\int \frac{3x-7}{x^2 - 4x + 3} dx$ раскладывается в сумму

$$\frac{3x-7}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}.$$

Числа A и B находятся методом неопределенных коэффициентов после приведения дробей к общему знаменателю:

$$3x - 7 = Ax - 3A + Bx - B;$$

$$3x - 7 = (A + B)x - 3A - B.$$

Коэффициенты при одинаковых степенях x равны, поэтому

$$\begin{cases} 3 = A + B; \\ -7 = -3A - B, \end{cases} \quad A = 2,\ B = 1.$$

$$\int \frac{3x-7}{x^2 - 4x + 3} dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-3} = 2\ln|x-1| + \ln|x-3| + C.$$

Пример. Полученное выше разложение

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

позволяет найти интеграл $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 2}{x^4 - x^3 - x + 1} dx$ как сумму интегралов от простейших дробей.

$$\int \frac{x^3+3x^2+2}{x^4-x^3-x+1}dx = \int \left(\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+x+1} \right) dx =$$

$$= -\frac{2}{x-1} + \ln|x-1| + \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx =$$

$$= -\frac{2}{x-1} + \ln|x-1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример. Интегрирование рациональной дроби $\frac{-2x^2+8x+16}{x^4-2x^3-8x+16}$ как суммы простейших дробей основано на разложении подынтегральной функции:

$$\frac{-2x^2+8x+16}{x^4-2x^3-8x+16} = \frac{-2x^2+8x+16}{x^3(x-2)-8(x-2)} = \frac{-2x^2+8x+16}{(x-2)^2(x^2+2x+4)} =$$

$$= \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+4}.$$

Числа A, B, C, D находятся методом неопределенных коэффициентов после приведения дробей к общему знаменателю:

$$-2x^2+8x+16 = A(x^2+2x+4) + B(x^3-8) + (Cx+D)(x^2-4x+4).$$

Коэффициенты при одинаковых степенях x равны, поэтому

$$\begin{array}{l} x^0: 16 = 4A - 8B + 4D \\ x^1: \quad 8 = 2A + 4C - 4D \\ x^2: -2 = A - 4C + D \\ x^3: \quad 0 = B + C \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A - 2B + D = 4 \\ A - 2B - 2D = 4 \\ A + 4B + D = -2 \\ C = -B \end{cases}$$

Из первых двух уравнений $D = 0$, из первого и третьего $B = -1$ и $A = 2$, $C = 1$.

$$\int \frac{-2x^2+8x+16}{x^4-2x^3-8x+16}dx = 2\int \frac{dx}{(x-2)^2} - \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{xdx}{x^2+2x+4} =$$

$$=\begin{vmatrix} t=x+1 \\ dt=dx \end{vmatrix} = -\frac{2}{x-2} - \ln|x-2| + \int\frac{t}{t^2+3}dt - \int\frac{dt}{t^2+3} + C =$$

$$= -\frac{2}{x-2} - \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3.4. Неопределенные интегралы от иррациональных и тригонометрических функций

1. Замена переменной $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ приводит к интегралу от рациональной функции аргумента t интегралы от тригонометрических функций $\int R(\cos x,\ \sin x)dx$, где R – рациональная функция, так как

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\ x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ целесообразна, если подынтегральная функция содержит $\sin x$ и $\cos x$ в первой степени.

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 2} = \begin{vmatrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2};\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \\ x = 2\operatorname{arctg} t;\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \int\frac{2dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2-2t^2}{1+t^2} + 2\right)(1+t^2)} = \int\frac{dt}{t(2t+1)} =$$

$$= \int\frac{dt}{t} - 2\int\frac{dt}{2t+1} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|.$$

2. Замены переменной $t=\cos x,\ t=\sin x,\ t=\operatorname{tg} x$ приводят к интегралу от рациональной функции аргумента t интегралы от тригонометрических функций $\int R(\cos x)\sin x dx$, $\int R(\sin x)\cos x dx$, $\int R(\operatorname{tg} x)dx$, где R − рациональная функция.

Пример. $\int \operatorname{tg}^3 x dx = \left| \begin{matrix} t=\operatorname{tg} x \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \dfrac{t^3 dt}{1+t^2} = \int t dt - \int \dfrac{t dt}{1+t^2} =$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)+C=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C.$$

3. Замена переменной $t=\operatorname{tg} x$ приводит к интегралу от рациональной функции аргумента t интегралы от тригонометрических функций $\int R(\cos^{2m} x,\ \sin^{2n} x)dx$, где R − рациональная функция, так как

$$\sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2};\ \cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2}.$$

Пример. $\int \dfrac{dx}{(2-\sin^2 x)\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} t=\operatorname{tg} x \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \dfrac{dt}{(1+t^2)\left(2-\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{1}{1+t^2}} =$

$$=\int\frac{(1+t^2)dt}{2+t^2}=\int dt-\int\frac{dt}{2+t^2}=\operatorname{tg} x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}+C.$$

При интегрировании тригонометрических функций, содержащих $\sin x$ и $\cos x$ в четных степенях $\int R(\cos^{2m} x,\ \sin^{2n} x)dx$, используются тригонометрические формулы понижения степени

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

4. Замена переменной $t=\cos x$ или $t=\sin x$ приводит к интегралу от рациональной функции аргумента t интегралы от тригонометрических

функций $\int \sin^m x \cos^n x dx$, содержащих хотя бы одну нечетную степень $\sin x$ или $\cos x$. За новую переменную t берется функция, имеющая четную степень, или любая, если степени $\sin x$ и $\cos x$ нечетные.

Пример. $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\cos^4 x \cdot \cos x dx}{\sin^3 x} = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dx = \cos x dx \end{vmatrix} = \int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^3} =$

$$= \int t^{-3} dt - 2\int \frac{dt}{t} + \int t dt = -\frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln\left|\sin x\right| + \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

5. Тригонометрические формулы

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right),$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right),$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right)$$

применяются при интегрировании соответствующих функций

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \int \sin \alpha x \sin \beta x dx, \int \cos \alpha x \cos \beta x dx.$$

Пример.

$$\int \cos 3x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int \cos 10x dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x dx = \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

При интегрировании ***функций, содержащих иррациональность,*** применяется метод замены переменной, приводящий к интегралу от дробно-рациональной функции аргумента t. Наименьшее общее кратное знаменателей показателей степеней x обозначается $k = \text{НОК}\left(n, \ldots, q\right)$ после преобразований по определению степени с дробным показателем $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

Интеграл	Замена
$\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{p}{q}})dx$	$x = t^k$
$\int R(x, (ax+b)^{\frac{m}{n}}, ..., (ax+b)^{\frac{p}{q}})dx$	$ax+b=t^k$
$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\right)dx$	$t^k = \frac{ax+b}{cx+d}$

Примеры.

1. $$\int \frac{1+2\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = \left| \begin{matrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dx \end{matrix} \right| = 6\int \frac{(1+2t)t^5 dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{2t^4+t^3}{1+t}dt =$$

$$= 12\int t^3 dt - 6\int t^2 dt + 6\int t dt - 6\int dt + 6\int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= 3x^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{x} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\ln\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right) + C =$$

$$= 3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right) + C.$$

2. $$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = \left| \begin{matrix} 2x-1 = t^2 \\ x = \frac{1}{2}(t^2+1) \\ 2dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t}tdt = \frac{1}{2}\int (t^2+1)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right) + C = \frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{6} + \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C.$$

3. $$\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left| \begin{matrix} \frac{x+1}{x-1} = t^3; \quad x = 1 + \frac{2}{t^3-1} \\ dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \end{matrix} \right| = -\int \frac{t}{\frac{4}{(t^3-1)^2}} \cdot \frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\int t^3 dt = -\frac{3}{8}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4} + C.$$

Интеграл $\int R(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C})dx$ заменой $t = Ax + \frac{B}{2}$ приводится к интегралам, сводящимся к интегралам от тригонометрических функций с помощью тригонометрических замен.

Интеграл	Замена
$\int R(x,\ \sqrt{a^2-x^2})dx$	$x = a\sin t$
$\int R(x,\ \sqrt{x^2-a^2})dx$	$x = \dfrac{a}{\sin t}$
$\int R(x,\ \sqrt{x^2+a^2})dx$	$x = a\,\mathrm{tg}\,t$

Примеры.

1. $$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = 2\sin t;\ \sin t = \dfrac{x}{2};\ t = \arcsin\dfrac{x}{2} \\ dx = 2\cos t dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \mathrm{ctg}^2 t dt = \int\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt = -\,\mathrm{ctg}\,t - t + C = \left| \mathrm{ctg}\,t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} \right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}{\dfrac{x}{2}} - \arcsin\frac{x}{2} + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{2} + C.$$

2. $$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx = \left| \begin{array}{c} x = \dfrac{1}{\sin t};\ \ \sin t = \dfrac{1}{x}; \\ t = \arcsin\dfrac{1}{x};\ dx = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt \end{array} \right| = -\int \frac{\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t} - 1}\cdot \dfrac{\cos t}{\sin^2 t}}{\dfrac{1}{\sin^3 t}}dt =$$

$$= -\int \frac{\sin^3 t\cdot\cos^2 t}{\sin^3 t}dt = -\int \cos^2 t dt = -\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt = -\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C =$$

$$= \left| \sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} \right| =$$

$$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + C = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} + C.$$

$$3.\ \int \frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^3}}dx = \left| \begin{matrix} x = 2\,\mathrm{tg}\,t;\ \ \mathrm{tg}\,t = \dfrac{x}{2} \\ dx = \dfrac{2}{\cos^2 t}dt \end{matrix} \right| = \frac{2}{8}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^3}\cos^2 t}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\dfrac{\cos^2 t}{\cos^3 t}}dt = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \frac{1}{4}\sin t + C = \left| 1 + \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{1-\sin^2 t} \right| =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,t}{4\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} + C = \frac{\dfrac{x}{2}}{4\sqrt{1+\dfrac{x^2}{4}}} + C = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.$$

4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Понятие об определенном интеграле

Отрезок $[a;\ b]$ области определения функции $y = f(x)$ произвольно выбранными точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ разбивается на частичные отрезки $[x_{i-1};\ x_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$, на каждом из которых выбирается некоторая точка $\xi_i \in [x_{i-1};\ x_i]$. Суммируя все произведения значений функции $f(\xi_i)$ и длин частичных отрезков $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, составляется ***интегральная сумма*** функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

При стремящейся к нулю максимальной длине частичного отрезка $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$ функция $y = f(x)$ называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a;\ b]$, если предел интегральной суммы существует и не зависит от выбора точек разбиения отрезка $[a;\ b]$ и внутренних точек ξ_i. Концы отрезка a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования.

Непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция $y = f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Значение предела интегральной суммы при $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$ называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$:

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} I_n = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Свойства определенного интеграла [4]

1. $\int_a^b M dx = M(b-a), \quad M = \text{const}.$

2. Для интегрируемых на $[a;\, b]$ функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ верно

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx, \qquad A,\, B = \text{const}.$$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

4. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad a < c < b.$

6. Если $f(x) \geq 0$ на $[a;\, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

7. Если на отрезке $[a;\, b]$ функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \geq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$

8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

9. Для непрерывной на отрезке $[a;\, b]$ функции $f(x)$, имеющей на этом отрезке наименьшее m и наибольшее M значения, верна оценка определенного интеграла

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

10. Среднее значение непрерывной на отрезке $[a;\, b]$ функции $y = f(x)$ равно значению функции $y = f(x)$ в некоторой точке $\xi \in (a;\, b)$:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,.$$

Определенный интеграл на симметричном отрезке	
11. четной функции	12. нечетной функции
$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$	$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Пример. Оценить значение интеграла $\int_0^3 (x^2 - 2x + 3)dx.$

Аппарат дифференциального исчисления используется при нахождении наименьшего $m = 2$ и наибольшего $M = 6$ значений непрерывной на отрезке [0; 3] функции $y = x^2 - 2x + 3$, причем $b - a = 3$.

По свойству 9 оценивается определенный интеграл этой функции:

$$6 \le \int_0^3 (x^2 - 2x + 3)dx \le 18.$$

При вычислении площади S ***криволинейной трапеции*** – фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$, отрезок $[a; b]$ оси абсцисс разделяется на частичные отрезки $[x_{i-1}; x_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$ точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$

На каждом частичном отрезке выбирается некоторая точка $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, в которой вычисляется значение функции $f(\xi_i)$ и площадь соответствующего прямоугольника $f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (рис. 4.1)

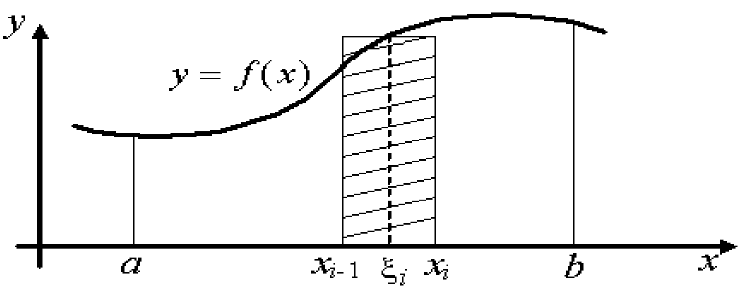


Рис. 4.1. Площадь частичного прямоугольника

Интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ геометрически означает площадь ступенчатой фигуры. При неограниченном увеличении количества $n \to \infty$ точек разбиения отрезка $[a; b]$ и уменьшении длины частичных отрезков $\max_i \Delta x_i \to 0$ площадь криволинейной трапеции $S \approx S_n$, при переходе к пределу получается

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

4.2. Методы подстановки и интегрирования по частям в определенном интеграле. Формула Ньютона – Лейбница

Функция $\Phi(x)$ верхнего предела интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ определяется следующим образом:

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \text{ где } x \in [a;\, b],$$

при этом нижний предел интегрирования фиксируется, а верхний предел рассматривается как независимая переменная x.

Теорема (Барроу) [4]. Функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной непрерывной на отрезке $[a;\, b]$ функции $f(x)$, то есть для любых $x \in (a; b)$ верно

$$\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

Теорема (*Формула Ньютона – Лейбница*). Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. По теореме Барроу $\int\limits_a^x f(x)dx = F(x) + C.$

Пусть $x = a$, тогда $C = -F(a)$ и $\int\limits_a^x f(x)dx = F(x) - F(a).$ При $x = b$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Примеры.

1. Определенный интеграл, для которого ранее была получена оценка его значения:

$$6 \le \int_0^3 (x^2 - 2x + 3)dx \le 18,$$

вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_0^3 (x^2 - 2x + 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right)\Bigg|_0^3 = 9 - 9 + 9 = 9.$$

2. С помощью аппарата интегрального исчисления находится среднее значение функции $f(x) = 8x + \cos x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8x + \cos x)dx = \frac{2}{\pi}(4x^2 + \sin x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}(\pi^2 + 1).$$

При вычислении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции $y = f(x)$ может применяться ***метод подстановки*** по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$ – монотонная и имеющая непрерывную производную на отрезке $[t_1;\ t_2]$ функция, для которой $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$.

Следует заметить, что применение метода подстановки в определенном интеграле не требует возврата к переменной x. Иногда целесообразнее использовать замену $t = \psi(x)$.

Примеры. Выбрав замену переменной, вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x=\sin t & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{4} \end{array} \\ dx=\cos t dt & \end{array} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\cdot\cos t\cdot\cos t\,dt =$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t\,dt = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 4t)\,dt = \frac{1}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{32}.$$

2. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx = \left| \begin{array}{ll} t=e^x & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \ln 2 \\ t & 1 & 2 \end{array} \\ dt=e^x dx & \end{array} \right| = \int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt =$

$$= \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Big|_1^2 = \ln\left(2+\sqrt{5}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}.$$

Вычисление определенного интеграла может осуществляться ***методом интегрирования по частям*** по формуле

$$\int\limits_a^b u dv = u v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du,$$

при условии, что соответствующие интегралы существуют.

Пример. Вычислить

$$\int\limits_1^e x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u=\ln x & du=\frac{dx}{x} \\ dv=x^2dx & v=\frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int\limits_1^e x^2dx =$$

$$= \frac{e^3}{3}-\frac{x^3}{9}\Bigg|_1^e = \frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}.$$

4.3. Применение интегрального исчисления

Учитывая геометрический смысл интегральной суммы функции $y = f(x)$, вычисляется ***площадь криволинейной трапеции***, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если $f(x) \le 0$ при $x \in [a;b]$, то $S = -\int\limits_a^b f(x)dx.$

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$

Примеры. 1. Криволинейная трапеция, заданная параболой $y = \frac{1}{3}x^2$ и осью Ox при $1 \le x \le 3$ (рис. 4.2), имеет площадь, равную:

$$S = \int\limits_1^3 \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 = \frac{1}{9}(27-1) = \frac{26}{9}.$$

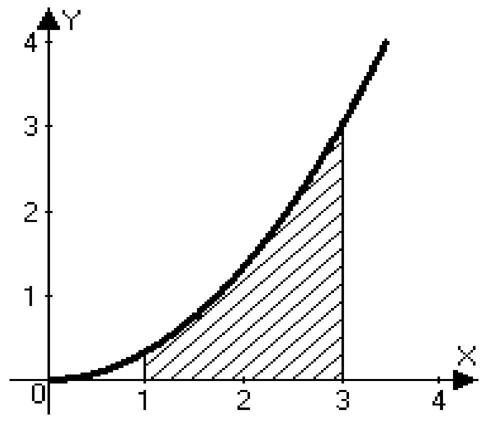


Рис. 4.2. Криволинейная трапеция

2. Площадь фигуры, ограниченной параболой, симметричной относительно оси Ox $x = 1 - y^2$ [5], и осью Oy (рис. 4.3), можно вычислить двумя способами.

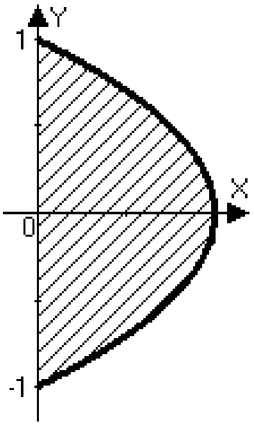


Рис. 4.3. Фигура, ограниченная параболой и осью Oy

Первый способ. В силу симметрии фигуры достаточно вычислить площадь части, расположенной в первой координатной четверти, ограниченной линией $y=\sqrt{1-x},\ 0\le x\le 1$:

$$\frac{1}{2}S=\int_0^1\sqrt{1-x}dx==\left|\begin{matrix}1-x=t^2;\ x=1-t^2; & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 0\end{array} \\ dx=-2t\,dt & \end{matrix}\right|=$$

$$=-\int_1^0 2t^2dt=2\int_0^1 t^2dt=\frac{2}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}\Rightarrow S=\frac{4}{3}.$$

Второй способ. Можно изменить роли осей координат. Пределы интегрирования $-1\le y\le 1$ находятся как пересечение графика с осью Oy, в силу симметрии:

$$\frac{1}{2}S=\int_0^1 f(y)dy=\int_0^1(1-y^2)dy=\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\Rightarrow\ S=\frac{4}{3}.$$

3. При вычислении площади фигуры, ограниченной синусоидой $y=\sin 2x,$ осью Ox и прямыми $x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{3\pi}{4}$ (рис. 4.4), учитывается, что при $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin 2x\ge 0,$ поэтому

$$S_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}.$$

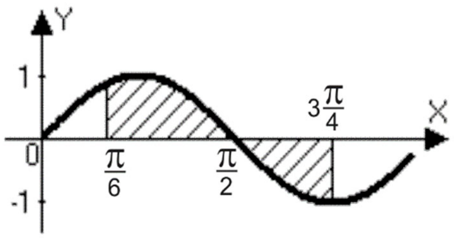


Рис. 4.4. Фигура, ограниченная синусоидой и тремя прямыми

При $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$ функция $\sin 2x \le 0$, поэтому

$$S_2 = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\cos 2x \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\pi\right) = \frac{1}{2}.$$

Искомая площадь равна сумме найденных площадей: $S = S_1 + S_2 = \frac{5}{4}.$

4. Пересечение парабол $y = x^2$ и $x = y^2$ задает фигуру (рис. 4.5), для вычисления площади которой находятся переделы интегрирования

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow\ x_1 = y_1 = 0,\ x_2 = y_2 = 1.$$

$$f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = \sqrt{x},\ f_1 \le f_2,\ x \in [0;\ 1].$$

$$S = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

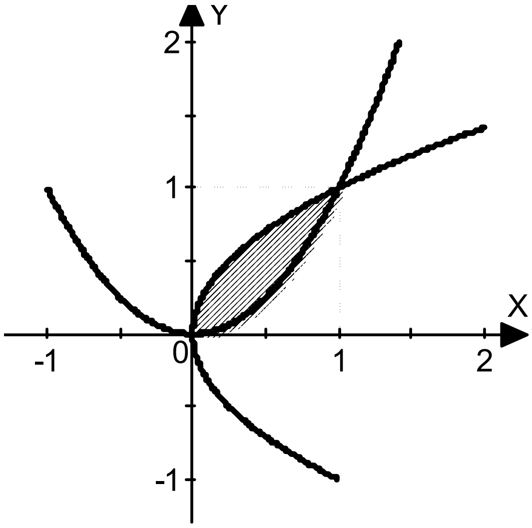


Рис. 4.5. Фигура, ограниченная параболами

5. Пересечение линий $x + y = 0$ и $y = 2x - x^2$ задает фигуру (рис. 4.6), для вычисления площади которой находятся переделы интегрирования

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 2x - x^2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 3.$$

$$S = \int_0^3 \left((2x - x^2) - (-x) \right) dx = \int_0^3 \left(3x - x^2 \right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

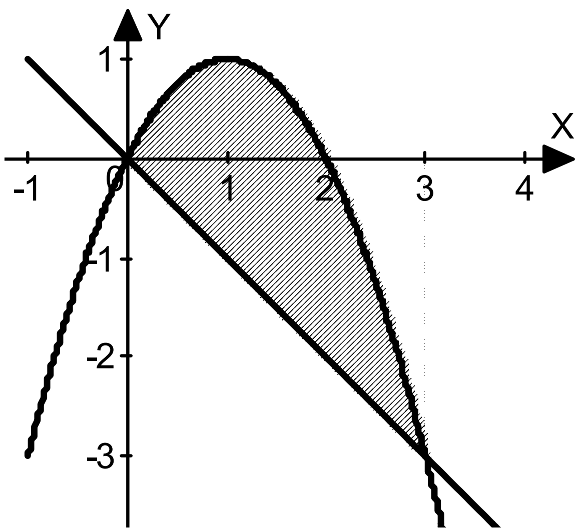


Рис. 4.6. Фигура, ограниченная параболой и прямой

Определенный интеграл применяется для вычисления объема V тела, ограниченного плоскостями $x = a$, $x = b$ и поверхностью, для которой площади поперечных сечений плоскостями, параллельными оси Oz, заданы функцией $S = S(x)$.

Для этого отрезок $[a;\ b]$ оси абсцисс разделяется на частичные отрезки $[x_{i-1};\ x_i]$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$ На каждом частичном отрезке выбирается некоторая точка $\xi_i \in [x_{i-1};\ x_i]$, в которой вычисляется значение функции $S(\xi_i)$ (рис. 4.7) и объем соответствующего цилиндра $S(\xi_i)\Delta x_i$, высота которого $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Интегральная сумма $V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$ геометрически означает объем ступенчатого тела. При неограниченном увеличении количества $n \to \infty$ точек разбиения отрезка $[a;\ b]$ и уменьшении длины частичных отрезков $\max_i \Delta x_i \to 0$ объем данного тела $V \approx V_n$, при переходе к пределу получается

$$V = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} V_n = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx.$$

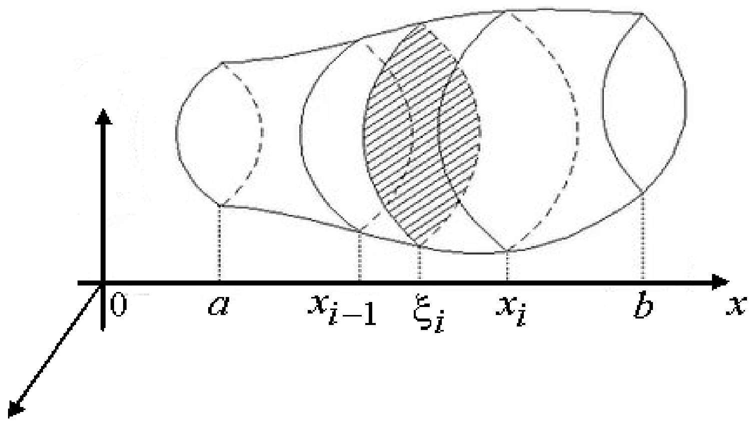


Рис. 4.7. Поперечное сечение тела

Формула ***объема тела по площадям поперечных сечений*** [6]:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Поперечным сечением плоскостью, параллельной оси Oz тела вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, заданной графиком непрерывной знакопостоянной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, является круг радиуса $f(x)$, площадь которого $S(x) = \pi f^2(x)$ (рис. 4.8).

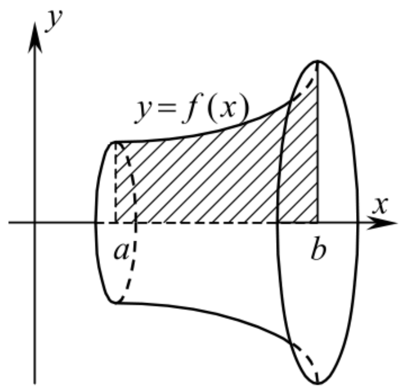


Рис. 4.8. Тело вращения криволинейной трапеции вокруг оси Ox

Аналогично рассматривается функция

$$S = S(y) = \pi g^2(y)$$

площади поперечных сечений плоскостями, параллельными оси Oz, тела вращения криволинейной трапеции вокруг оси Oy (рис. 4.9).

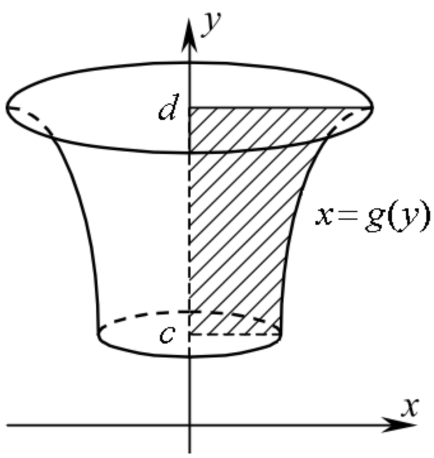


Рис. 4.9. Тело вращения криволинейной трапеции вокруг оси Oy

Объем тела вращения криволинейной трапеции	
вокруг оси Ox	вокруг оси Oy
$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$	$V_y = \pi\int_c^d g^2(y)dy$

Пример. Известную формулу объема шара $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ можно получить с помощью аппарата интегрального исчисления.

Шар является телом вращения криволинейной трапеции, ограниченной полуокружностью $y=\sqrt{R^2-x^2}$ вокруг оси Ox. В силу симметрии

$$V = 2\pi\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = 2\pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Пусть функция $y = f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, тогда ***длина дуги кривой*** $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Пример. В силу симметрии окружности $x^2+y^2=R^2$ для вычисления длины окружности достаточно вычислить длину дуги, содержащейся в первой четверти, то есть длину дуги кривой $y=\sqrt{R^2-x^2},\ 0\le x\le R$.

Производная $y'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ и $\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2} = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{R^2-x^2}} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

Тогда $l = 4R\displaystyle\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = 4R\arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_0^R = 2\pi R$.

4.4. Понятие о несобственных интегралах

Несобственным интегралом первого рода функции $y = f(x)$ на интервале $[a;\ \infty)$ называется предел определенного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

Несобственный интеграл первого рода	
$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ***сходится***	$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ***расходится***
$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ существует и конечен	$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ не существует или бесконечен

Формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла имеет вид

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}F(b)-F(a)\,,$$

где $F(x)$ – первообразная функции $y=f(x)$ [6].

Несобственные интегралы первого рода с бесконечными пределами интегрирования определяются аналогично:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx;\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_c^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

Примеры. Определить, сходятся или расходятся несобственные интегралы

1. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\mathrm{arctg}(b)-\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$

Интеграл сходится.

2. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\lim\limits_{b\to\infty}\frac{b^{-p+1}}{1-p}-\frac{1}{1-p}, & p\ne1;\\ \lim\limits_{b\to\infty}\ln b, & p=1.\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1;\\ \infty, & p\le1.\end{cases}$

При $p>1$ интеграл сходится, при $p\le1$ интеграл расходится.

Несобственным интегралом второго рода на отрезке $[a;\,b]$ функции $y=f(x)$, имеющей в точке $x=b$ разрыв второго рода, называется предел определенного интеграла

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл второго рода	
$\int_a^b f(x)dx$ ***сходится***	$\int_a^b f(x)dx$ ***расходится***
$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ существует и конечен	$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ не существует или бесконечен

Несобственные интегралы от функций с разрывами второго рода в точках $x=a$ или $c\in(a;b)$ определяются аналогично:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Пример. Определить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_0^b\frac{dx}{x^p}$, $b>0$, от функции, терпящей разрыв второго рода на нижнем пределе интегрирования.

$$\int_0^b\frac{dx}{x^p}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^b\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left.\dfrac{x^{-p+1}}{1-p}\right|_\varepsilon^b, & p\neq 1;\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^b, & p=1.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{b^{1-p}}{1-p}, & p<1;\\ \infty, & p\geq 1.\end{cases}$$

При $p<1$ интеграл сходится, при $p\geq 1$ интеграл расходится.

Замечание. Если функция $y=f(x)$ терпит разрыв первого рода во внутренней точке отрезка $[a;\ b]$, то ее определенный интеграл не является несобственным, для его вычисления используется свойство аддитивности определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$

где $c\in(a;b)$ – точка разрыва первого рода функции $y=f(x)$.

5. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Алгебра как теория алгебраических уравнений возникла в XVII–XVIII вв., благодаря трудам Декарта, Эйлера, Ньютона, Крамера, Лапласа, Безу и Даламбера. Современная алгебра сформировалась в период с 1770 по 1870 г. Прорыв в развитии современной алгебры сделали работы Гаусса «Арифметические исследования», Лагранжа «Размышления об алгебраическом решении уравнений», Галуа «Уравнение, не решаемое в радикалах» и др. Для решения систем линейных уравнений и сейчас используют работы Гаусса, Кронекера, Саррюса и Крамера. В этих работах раскрываются основные понятия линейной алгебры.

5.1. Понятие матрицы

Прямоугольная таблица $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, в которой ***элементы*** $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ записываются в m строк и n столбцов, называется ***матрицей*** размера $m\times n$. В случае $m=n$ матрица является ***квадратной***.

Элементы матрицы a_{11}, a_{22}, a_{33} и т. д. образуют ее ***главную диагональ***.

Диагональная	$D_{n\times n}=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & d_n \end{pmatrix}$
Единичная $E_{n\times n}$	$E_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Нулевая $O_{m\times n}$	$O_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ступенчатая (треугольная)	$C_{2\times4}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$ $B_{3\times3}=\begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ 0 & в_{22} & в_{23} \\ 0 & 0 & в_{33} \end{pmatrix}$

5.2. Действия с матрицами

Транспонирование	$A^T_{m\times n}=B_{n\times m}$, $a_{ij}=b_{ji}$, $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$
Сложение матриц	$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}$, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$
Умножение матрицы на число	$k\cdot A_{m\times n}=B_{m\times n}$, $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$
Умножение матриц	$A_{m\times t}\cdot B_{t\times n}=C_{m\times n}$, где $c_{ij}=\sum\limits_{p=1}^{t} a_{ip}\cdot b_{pj}=$ $a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+...+a_{it}\cdot b_{tj}$ $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$

Свойства	Формула
1) коммутативность сложения	$A+B=B+A$
2) ассоциативность сложения и умножения	$A+(B+C)=(A+B)+C$ $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
3) дистрибутивность	$k\cdot A+k\cdot B=k\cdot(A+B)$; $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
4) некоммутативность умножения	$A\cdot B\neq B\cdot A$
5) существование единичной матрицы	$A\cdot E=E\cdot A$
6) существование нулевой матрицы	$A+O=A$ $\quad A\cdot O=O\cdot A=O$

Свойства распространяются на случаи, когда размеры матриц позволяют выполнять указанные в свойствах действия.

Матрицы называются ***перестановочными***, если для них выполняется соотношение $A\cdot B=B\cdot A$.

Пример. Для матриц $A_{2\times3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ и $B_{2\times3}=\begin{pmatrix}-1&3&0\\2&-7&1\end{pmatrix}$ найти:

1) $A+B$; 2) $2A-3B$; 3) $A^T\cdot B$;

2) $A_{2\times3}+B_{2\times3}=C_{2\times3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&3&0\\2&-7&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&5&3\\6&-2&7\end{pmatrix}$;

3) $2A_{m\times n}-3B_{m\times n}=P_{m\times n}=2\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-1&3&0\\2&-7&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-5&6\\2&31&9\end{pmatrix}$;

4) $A^T_{2\times3}=K_{3\times2}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$;

5) $A^T_{2\times3}\cdot B_{2\times3}=K_{3\times2}\cdot B_{2\times3}=M_{3\times3}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&3&0\\2&-7&1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+4\cdot2 & 1\cdot3+4\cdot(-7) & 1\cdot0+4\cdot1\\ 2\cdot(-1)+5\cdot2 & 2\cdot3+5\cdot(-7) & 2\cdot0+5\cdot1\\ 3\cdot(-1)+6\cdot2 & 3\cdot3+6\cdot(-7) & 3\cdot0+6\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-25&4\\8&-29&5\\9&-33&6\end{pmatrix}.$$

5.3. Определитель квадратной матрицы

Определители n-го порядка

Число всех перестановок элементов множества n первых натуральных чисел $\{1,2,3,...,n\}$ равно $P_n=n!$. Перестановка, в которой все элементы расположены в порядке возрастания, называется исходной, или нулевой. Все перестановки множества $\{1,2,3,...,n\}$ могут быть получены из исходной перестановки с помощью конечного числа транспозиций, то есть переменой местами двух элементов множества.

Если перестановка получена из исходной перестановки с помощью четного числа транспозиций, она называется четной, в противном случае – нечетной. Число четных перестановок равно числу нечетных.

Находятся все возможные произведения $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n}$, состоящие из n элементов матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix},$$

стоящих в разных строках и разных столбцах, причем $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ образуют множество n первых натуральных чисел.

Каждому такому набору соответствует искомое произведение, получить которое можно, если подставить в него вместо $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ соответствующую перестановку, тогда число всех произведений будет равно $n!$ (числу перестановок).

Сумма всех найденных произведений, взятых со знаком «плюс», если оно получено четной перестановкой, и со знаком «минус» в противном случае [5], называется ***определителем n-го порядка*** и обозначается:

$$\Delta = \Delta_A = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель первого порядка равен единственному элементу матрицы $A_{1\times 1}$.

Определитель второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

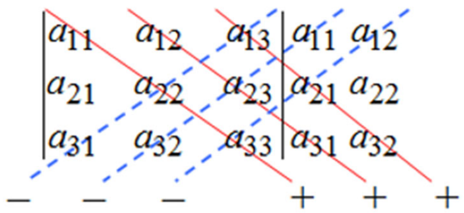
Пример. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-7) = 2 + 35 = 37.$$

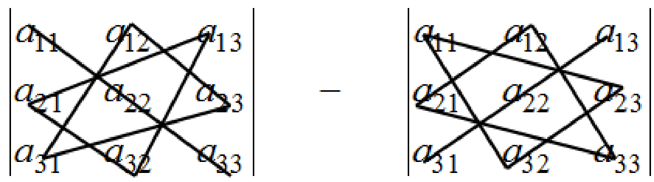
Для вычисления определителей более высоких порядков нерационально пользоваться определением, существуют более простые методы.

При вычислении определителей третьего порядка используются методы, самыми известными из которых являются метод Саррюса (Пьер Фредерик Саррюс – французский математик (10.03.1798 – 20.11.1861)) и метод треугольников, которые реализуется по следующим схемам.

Метод Саррюса



Метод треугольников



При методе Саррюса справа от определителя дописываются первый и второй столбцы и линии на схеме указывают на элементы, которые участвуют в произведении, при этом произведение элементов, которые находятся на сплошной линии, берется со знаком «+», на пунктирной со знаком «–».

В методе треугольников в произведениях участвуют диагональные элементы и элементы, находящиеся в вершинах треугольников.

В обоих случаях согласно определению определитель будет равен сумме этих произведений:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} -$$

$$-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, используя метод Саррюса.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$-\left(3 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 2\right) = -2 + 18 + 0 - (-6 + 3 + 0) = 16 - (-3) = 16 + 3 = 19.$$

Метод понижения порядка, наиболее часто применяемый метод при вычислении определителей порядка больше трех, заключается в *разложении определителя по строке с номером* i:

$$\Delta_A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik},$$

где $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$ – ***алгебраическое дополнение*** к элементу a_{ik}.

Минор M_{ik} элемента a_{ik} получается из определителя вычеркиванием i-ой строки и k -го столбца.

Пример. Вычислить $\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\Delta_A = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{разложим} \\ \text{по 1-й строке} \end{matrix} \right\} = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + 2 \cdot (-1)^{1+2} M_{12} + 1 \cdot (-1)^{1+3} M_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$$= -5 + 18 + 6 = 19.$$

С целью рационализации вычислений определителей для получения нулевых элементов в какой-либо строке (столбце) возможно использовать свойства:

1) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на одно и то же число не меняет определителя;

2) перестановка двух строк (столбцов) меняет знак определителя.

Пример. Для вычисления определителя 4-го порядка $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ сначала в первом столбце получаются нулевые элементы, за исключением первого $a_{11} = -1$, и далее раскладывается определитель по первому столбцу. Определитель 3-го порядка вычисляется методом треугольников, или методом Саррюса.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 2 \\ + \downarrow \\ \\ + \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & 11 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-22 + 7 + 300 - (20 - 10 + 231)) = -44.$$

5.4. Обратная матрица

Матрица A^{-1} – обратная к матрице A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

при этом $\Delta A \neq 0$, иначе A^{-1} не существует.

Для нахождения A^{-1} сначала вычисляется определитель матрицы ΔA. Если $\Delta A \neq 0$, то вычисляются алгебраические дополнения A_{ij} к элементам матрицы A. Матрица A^{-1} записывается в соответствии с формулой. Чтобы проверить результат, проверяется тождество $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Пример. Для $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ найти A^{-1}.

$$\Delta A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-5)\cdot(-1)+2\cdot3\cdot2+3\cdot7\cdot1-1\cdot(-5)\cdot2-3\cdot7\cdot1-2\cdot3\cdot(-1)=$$

$$=5+12+21+10-21+6=33\neq0$$

Алгебраические дополнения всех элементов матрицы:

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 7 & -1\end{vmatrix}=5-21=-16,\quad A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1\cdot(-3-6)=9,$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 7\end{vmatrix}=21-(-10)=31,\quad A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 7 & -1\end{vmatrix}=-(-2-7)=9,$$

$$A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-2=-3,\quad A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 7\end{vmatrix}=-(7-4)=-3,$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -5 & 3\end{vmatrix}=6-(-5)=11,\quad A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-5-6=-11.$$

Обратная матрица: $A^{-1}=\dfrac{1}{33}\cdot\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{33} & \frac{9}{33} & \frac{11}{33}\\ \frac{9}{33} & -\frac{3}{33} & 0\\ \frac{31}{33} & -\frac{3}{33} & -\frac{11}{33}\end{pmatrix}.$

Проверка: $A^{-1}\cdot A=\dfrac{1}{33}\cdot\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}=$

$$=\frac{1}{33}\cdot\begin{pmatrix}-16+27+22 & -32-45+77 & -16+27-11\\ 9-9+0 & 18+15+0 & 9-9+0\\ 31-9-22 & 62+15-77 & 31-9+11\end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}33 & 0 & 0\\ 0 & 33 & 0\\ 0 & 0 & 33\end{pmatrix}=E.$$

5.5. Ранг матрицы

Минором k-го порядка матрицы $A_{m\times n}$ $\left(k\leq\min(m,n)\right)$ является определитель k-го порядка, составленный из элементов, стоящих на пересечении некоторых k строк и k столбцов.

Рангом $r(A)$ матрицы $A_{m\times n}$ называется наивысший порядок не равного нулю минора этой матрицы.

Элементарные преобразования матрицы не изменяют абсолютной величины миноров, поэтому матрицу можно привести к ступенчатому виду, тогда ранг матрицы равен количеству оставшихся ненулевых строк.

Пример. Матрица $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ приводится к ступенчатому виду элементарными преобразованиями:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} :2 \\ \\ \\ :5 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{l} \text{поменяем местами строки} \\ \text{так, чтобы 1-я стала} \\ \text{последней} \end{array}\right]$$

$$\sim\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{array}{ll} \times 3 & \times 2 \\ \oplus\downarrow & \mid \\ \oplus & \hookleftarrow \\ \times(-1) & \\ \oplus\downarrow & \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ :(-11) \\ :(-5) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \oplus\downarrow \\ \oplus\downarrow \\ \\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc:c} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ таким образом } r(A)=2\,.$$

5.6. Системы линейных алгебраических уравнений

Система m-линейных алгебраических уравнений с n-неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

или в матричном виде $A \cdot X = B$, если

$$X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{неизвестные}; \; B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{свободные члены};$$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{основная матрица системы}.$$

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} & b_m \end{array}\right) - \text{расширенная матрица системы.}$$

Упорядоченный набор значений $x_1, x_2, ..., x_n$, обращающий каждое уравнение системы в тождество, называется ее ***решением.***

Решение систем уравнений с квадратной невырожденной основной матрицей может быть найдено ***методом Крамера*** или ***матричным методом***.

Если определитель основной матрицы системы $\Delta A \neq 0$, то единственное решение системы находится по ***формулам Крамера***:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta A}, \quad j = 1, 2, .., n,$$

где Δ_j – определитель, получаемый из ΔA заменой ее j-го столбца столбцом свободных членов B.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 5x - y - z = 0; \\ x + 2y + 3z = 14; \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ по формулам Крамера.

$$\Delta A = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + (2-12) - (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное решение.

Составляются и вычисляются определители, которые получаются из ΔA заменой соответствующих столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta x = \begin{array}{c} \to \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28-48)-(42-32) = -20-10 = -30;$$

$$\Delta y = \begin{array}{c} \to \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48)-(16-56) = -100+40 = -60;$$

$$\Delta z = \begin{array}{c} \to \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32-42)+(16-56) = -50-40 = -90.$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta A} = \frac{-30}{-30} = 1,\ y = \frac{\Delta y}{\Delta A} = \frac{-60}{-30} = 2,\ z = \frac{\Delta z}{\Delta A} = \frac{-90}{-30} = 3.\ \text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Если определитель основной матрицы системы $\Delta A \neq 0$, то единственное решение системы находится по ***формуле в матричном виде***:

$$X = A^{-1} \cdot B \ [5].$$

Действительно, в матричном виде система записывается $A \cdot X = B$. Умножая обе части этого равенства на обратную матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

так как $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, откуда $X = A^{-1} \cdot B$.

Пример. Решить систему уравнений в матричном виде

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0; \\ x + 2y + 3z = 14; \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0\\ 14\\ 16\end{pmatrix}.\quad \Delta A=\begin{vmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}=-30\neq 0.$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4-9=-5;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-(2-12)=10.$$

$$A_{13}=-5;\ A_{21}=-1;\ A_{22}=14;\ A_{23}=-19;\ A_{31}=-1;\ A_{32}=-16;\quad A_{33}=11.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-5 & -1 & -1\\ 10 & 14 & -16\\ -5 & -19 & 11\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-5 & -1 & -1\\ 10 & 14 & -16\\ -5 & -19 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=-\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-30\\ -60\\ -90\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

Теорема *(критерий совместности системы)*. Система линейных уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда ранги $r(A)=r(A_p)$.

При $r(A)=r(A_p)=n$ (n – количество неизвестных) система *определена* (имеет единственное решение); при $r(A)=r(A_p)<n$ система *не определена* (имеет множество решений); при $r(A)\neq r(A_p)$ система *несовместна* (не имеет решения).

Метод Гаусса является универсальным для решения системы с прямоугольной основной матрицей размера $m\times n$. Расширенная матрица системы элементарными преобразованиями приводится к ступенчатому виду. Сравниваются ранги основной и расширенной матриц и делается вывод о совместности/несовместности системы. Если система совместна, то записывается и решается система, соответствующая полученной ступенчатой матрице, так как системы уравнений, имеющие эквивалентные матрицы, являются равносильными, то есть имеют одно множество решений [3].

Если $r(A)=r(A_p)=k<n$, то для нахождения общего решения системы выбирается k базисных переменных (определитель из коэффициентов которых не равен нулю) и $(n-k)$ свободных. Из k уравнений системы базисные переменные выражаются через свободные.

Пример. Исследовать систему $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=2 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2-2x_3=-3 \end{cases}$ на совместность, в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Расширенная матрица системы приводится к ступенчатому виду:

$$A_p=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Так как $r(A)=r(A_p)=3$, что равно количеству неизвестных, то система имеет единственное решение.

По полученной ступенчатой матрице восстанавливается система уравнений и решается с последнего уравнения:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=2; \\ x_2-x_3=-1; \\ -x_3=-3 \end{cases}\sim\begin{cases} x_1=2+x_2-x_3; \\ x_2=-1+x_3; \\ x_3=3 \end{cases}\sim\begin{cases} x_1=1; \\ x_2=2; \\ x_3=3. \end{cases} \text{Ответ: } X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пример. Исследовать систему $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1; \\ 2x_1+3x_2+2x_3=5; \\ 3x_1+7x_2-22x_3=4 \end{cases}$ на совместность, в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Расширенная матрица системы и приводится к ступенчатому виду:

$$A_p=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -22 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{cc} \times(-2) & \times(-3) \\ \swarrow + & \downarrow \\ & \swarrow + \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & -10 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \times 1 \\ \swarrow + \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Так как $r(A)=2;\ r(A_p)=3$, то система уравнений несовместна (не имеет решений).

Пример. Исследовать систему $\begin{cases} 2x-3y+z=0; \\ 3x-4y-2z=-1; \\ 7x-10y=-1 \end{cases}$ на совместность, в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Составляется расширенная матрица системы и приводится к ступенчатому виду:

$$A_p=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -2 & -1 \\ 7 & -10 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \nwarrow + \\ \times(-1) \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -2 & -1 \\ 7 & -10 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{ll} \times 3 & \times 7 \\ \swarrow + & \downarrow \\ & \swarrow + \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & 21 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{ll} & \times(-1) \\ \times(-3) & \times(-1) \\ \swarrow + & \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как $r(A)=r(A_p)=2$, что меньше количества неизвестных $n=3$, система уравнений является неопределенной, то есть имеет бесконечное множество решений.

Учитывая, что $r(A)=r(A_p)=2$, то система будет иметь две базисные неизвестные x, y и одну свободную z. По полученной ступенчатой матрице записывается система уравнений и, начиная с последнего уравнения, выражаются x, y через z:

$$\begin{cases} x-y-3z=-1; \\ y-7z=-2; \\ z\in\mathbb{R}; \end{cases} \begin{cases} x=-1+y+3z; \\ y=-2+7z; \\ z\in\mathbb{R}; \end{cases} \begin{cases} x=-1-2+7z+3z; \\ y=-2+7z; \\ z\in\mathbb{R}; \end{cases} \begin{cases} x=-3+10z; \\ y=-2+7z; \\ z\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Общее решение системы: $X=\begin{pmatrix} -3+10z \\ -2+7z \\ z \end{pmatrix}, z\in\mathbb{R}$.

Придавая свободной неизвестной z произвольное значение, например, при $z=1$, получается частное решение системы $X_{z=1}=\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}$.

6. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

6.1. Векторы и линейные операции над ними

Отрезок с указанным направлением называется ***вектором*** $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$,... или $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. ***Длина (модуль)*** $\left|\overline{AB}\right|$ вектора $\overline{AB}$ есть расстояние между точками A и B.

$\overline{a}=\overline{0}$ нулевой вектор	$\left\|\overline{a}\right\|=0$
$\overline{a}=\overline{e}$ единичный вектор	$\left\|\overline{a}\right\|=1$
Коллинеарные векторы $\overline{a}\,\|\|\,\overline{b}$ лежат на одной или на параллельных прямых	
Сонаправленные $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$	*Противоположно направленные* $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$
$\overline{a}_0$ – *орт* вектора $\overline{a}$	$\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{a}_0$ и $\left\|\overline{a}_0\right\|=1$
равные векторы $\overline{a}=\overline{b}$	$\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$ и $\left\|\overline{a}\right\|=\left\|\overline{b}\right\|$
Компланарные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ лежат в одной или в параллельных плоскостях	

Понятие равных векторов позволяет от любой точки пространства откладывать вектор, равный данному.

Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – наименьший угол, на который поворачивается один вектор до совпадения с другим, если их начала совпадают (рис. 6.1).

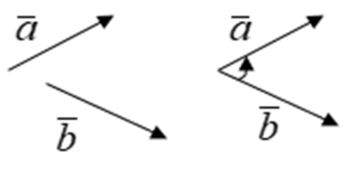


Рис. 6.1. Угол между векторами

Произведением вектора $\overline{a}$ ***на действительное число*** λ является вектор $\overline{b} = \lambda \overline{a}$, для которого $\left|\overline{b}\right| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$ и $\overline{b} \| \overline{a}$, причем $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, если $\lambda > 0$; $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$, если $\lambda < 0$.

Сумма векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, определяется правилами, указанными на рис. 6.2 и рис. 6.3.

Правило треугольника:

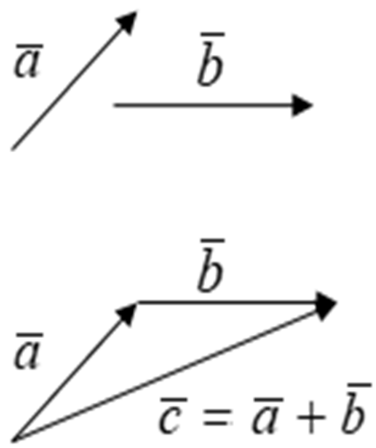


Рис. 6.2. Сложение по правилу треугольников

Правило параллелограмма:

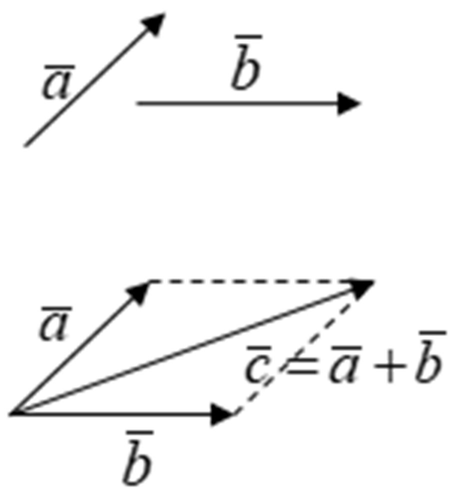


Рис. 6.3. Сложение по правилу параллелограмма

Разность векторов – $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + \left(-\overline{b}\right)$. В параллелограмме, построенном на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, вектор $\overline{a} - \overline{b}$ является второй диагональю и направлен из конца вектора $\overline{b}$ в конец вектора $\overline{a}$ (рис. 6.4).

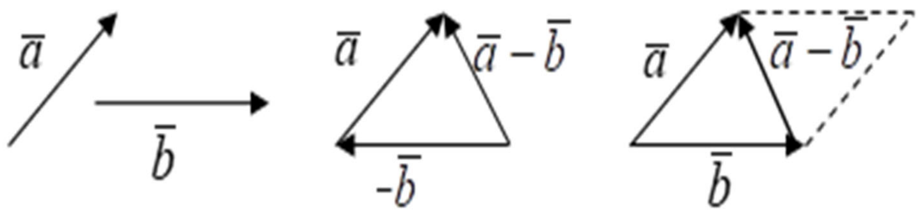


Рис. 6.4. Вычитание по правилам треугольника и параллелограмма

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется $\text{пр}_l \overline{AB} = \pm\left|\overline{A_1B_1}\right|$, где A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ось l, причем «+», если $\overline{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$, «–», если $\overline{A_1B_1} \uparrow\downarrow l$ (рис. 6.5).

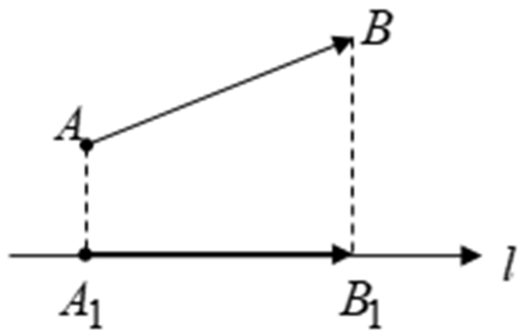


Рис. 6.5. Проекция вектора на ось

Свойства проекций:

1) $\text{пр}_l \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\angle\left(\overline{AB}, l\right)$;

2) $\text{пр}_l\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \text{пр}_l \overline{a} + \text{пр}_l \overline{b}$;

3) $\text{пр}_l\left(\lambda \cdot \overline{a}\right) = \lambda \cdot \text{пр}_l \overline{a}$.

6.2. Трехмерное пространство

Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ линейно зависимая, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, одновременно не равные нулю, такие что $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}$, иначе $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ линейно независимая.

Если к линейно независимой системе векторов нельзя добавить хотя бы один вектор, не нарушая независимость, то такая система называется ***максимальной линейно независимой системой векторов (базисом)***.

Любые три некомпланарных вектора образуют базис в трехмерном пространстве, а любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости.

Теорема. Если векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ образуют базис в трехмерном пространстве, то любой вектор $\overline{d}$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации:

$$\overline{d} = d_1\overline{e}_1 + d_2\overline{e}_2 + d_3\overline{e}_3,$$

где числа d_1, d_2, d_3 называются координатами вектора $\overline{d}$ в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$.

В трехмерном пространстве используется прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ с началом координат – точкой O и тремя взаимно перпендикулярными осями Ox (ось абсцисс), Oy (ось ординат), Oz (ось аппликат). Орты координатных осей соответственно $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ образуют базис.

Откладывается произвольный вектор $\overline{a}$ от начала координат и находятся его проекции на оси (рис. 6.6.): $x_a = \text{пр}_{Ox}\overline{a}$, $y_a = \text{пр}_{Oy}\overline{a}$, $z_a = \text{пр}_{Oz}\overline{a}$.

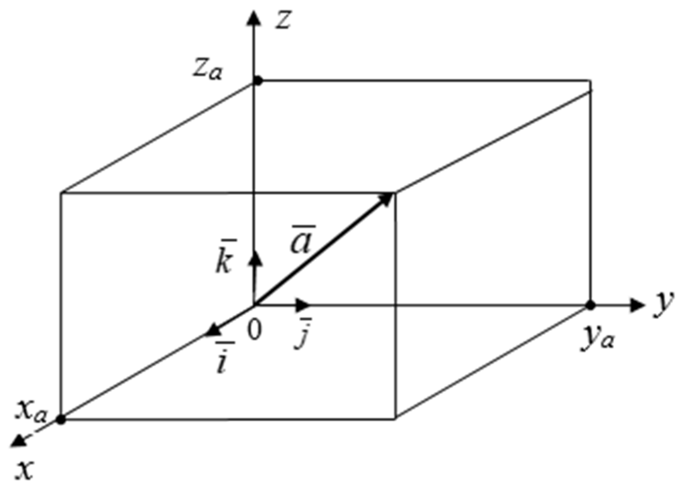


Рис. 6.6. Координаты вектора в базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$

Вектор $\overline{a}$ представляется в виде $\overline{a} = x_a\overline{i} + y_a\overline{j} + z_a\overline{k}$, тогда проекции вектора $\overline{a}$ на оси координат x_a, y_a, z_a являются координатами вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ и обозначаются $\overline{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$.

Длина вектора $\overline{a}$ равна $|\,\overline{a}\,| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$.

Углы α, β, γ между вектором $\overline{a}$ и осями координат Ox, Oy, Oz задают его направление (рис. 6.7).

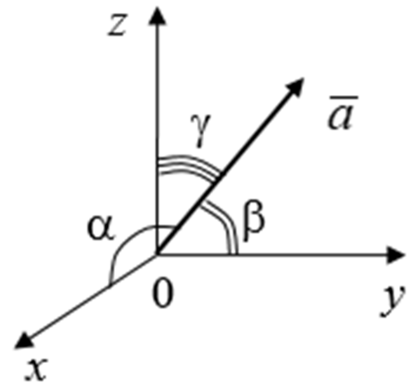


Рис. 6.7. Углы между вектором и осями координат

Направляющие косинусы вектора $\overline{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{x_a}{|\,\overline{a}\,|},\ \cos\beta = \frac{y_a}{|\,\overline{a}\,|},\ \cos\gamma = \frac{z_a}{|\,\overline{a}\,|},$$

причем $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Орт вектора $\overline{a}$ имеет координаты $\overline{a}_0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$.

Пример. Для вектора $\overline{a} = \{6; -2; 3\}$ длина $|\,\overline{a}\,| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7,$ направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{6}{7}$; $\cos\beta = -\frac{2}{7}$; $\cos\gamma = \frac{3}{7}$. Орт вектора $\overline{a}$ имеет координаты $\overline{a}_0 = \left\{\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right\}$.

Линейные операции в координатной форме

Произведением вектора $\overline{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ ***на число*** λ является вектор $\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a} = \lambda \cdot \left(x_a\overline{i} + y_a\overline{j} + z_a\overline{k}\right) = \lambda x_a\overline{i} + \lambda y_a\overline{j} + \lambda z_a\overline{k}$, откуда

$$\overline{b} = \{x_b, y_b, z_b\} = \{\lambda x_a,\ \lambda y_a,\ \lambda z_a\}.$$

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, тогда и только тогда, когда соответствующие координаты пропорциональны: $\overline{b} \parallel \overline{a} \iff \dfrac{x_b}{x_a} = \dfrac{y_b}{y_a} = \dfrac{z_b}{z_a} = \lambda$.

Суммой векторов $\overline{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ и $\overline{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$ является вектор

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = \left(x_a\overline{i} + y_a\overline{j} + z_a\overline{k}\right) + \left(x_b\overline{i} + y_b\overline{j} + z_b\overline{k}\right) =$$
$$= (x_a + x_b)\cdot\overline{i} + (y_a + y_b)\cdot\overline{j} + (z_a + z_b)\cdot\overline{k},$$

Откуда

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = \{x_a + x_b;\, y_a + y_b;\, z_a + z_b\}.$$

Пример. Найти $\overline{a} + \overline{b}$ и $2\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{b}$, если $\overline{a} = \{-4; 7; 2\}$ и $\overline{b} = \{3; -6; 0\}$.

1) $\overline{a} + \overline{b} = \{-4; 7; 2\} + \{3; -6; 0\} = \{-4+3; 7+(-6); 2+0\} = \{-1; 1; 2\}$;

2) $2\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{b} = 2\cdot\{-4; 7; 2\} - \frac{1}{3}\{3; -6; 0\} = \{-8; 14; 4\} - \{1; -2; 0\} =$
$= \{-8-1; 14-(-2); 4-0\} = \{-9; 16; 4\}$.

Координатами точки A в трехмерном пространстве называются координаты вектора $\overline{OA}$ – ***радиус-вектора точки*** A.

Если координаты начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и конца $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора $\overline{AB}$, то по правилу треугольника $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$ (рис. 6.8), откуда $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ или

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

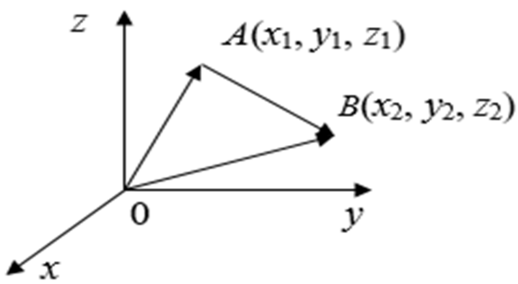


Рис. 6.8. Координаты вектора $\overline{AB}$

Расстояние между точками A и B находится как длина вектора $\overline{AB}$:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Пример. Если координаты точек $A(1;-2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(1;1;0)$, то координаты векторов

$$\overline{AB} = \left\{0-1;\,-1-(-2);\,2-3\right\} = \left\{-1;1;-1\right\};$$
$$\overline{AC} = \left\{1-1;\,1-(-2);\,0-3\right\} = \left\{0;\,3;-3\right\}.$$
$$2\overline{AB} = 2\left\{-1;1;-1\right\} = \left\{-2;\,2;-2\right\};$$
$$-3\overline{AC} = -3\left\{0;\,3;-3\right\} = \left\{0;-9;\,9\right\}.$$
$$2\overline{AB} - 3\overline{AC} = \left\{-2;2;-2\right\} + \left\{0;-9;9\right\} = \left\{-2;-7;7\right\}.$$

Точка $M(x;\,y;\,z)$ делит отрезок M_1M_2, где $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $M_2(x_2;\,y_2;\,z_2)$, в данном отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$ (рис. 6.9).

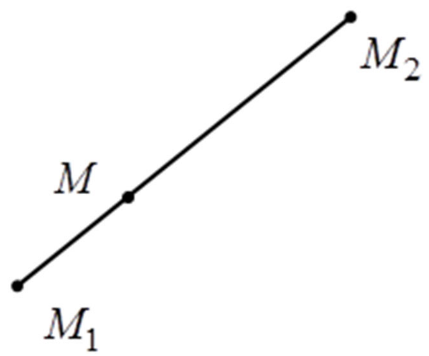


Рис. 6.9. Деление отрезка

Координаты коллинеарных векторов $\overline{M_1M} = \left\{x - x_1;\,y - y_1;\,z - z_1\right\}$ и $\overline{MM_2} = \left\{x_2 - x;\,y_2 - y;\,z_2 - z\right\}$, связанных соотношением $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$, удовлетворяют условию:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda\,,$$

откуда выражаются ***координаты точки*** $M(x; y; z)$, ***делящей отрезок в данном отношении***

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Середина M отрезка M_1M_2 делит отрезок в отношении $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = 1$, тогда ***координаты середины отрезка***

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Пример. Найти координаты точки M, которая делит отрезок KP в отношении 5:3, если $K(-3; 2; 4)$ и $P(5; -6; 0)$.

Вычисляются координаты точки $M(x_M; y_M; z_M)$, делящей отрезок KP отношении $\lambda = \frac{KM}{MP} = \frac{5}{3}$

$$x_M = \frac{x_K + \lambda x_P}{1+\lambda} = \frac{-3 + \frac{5}{3}\cdot 5}{1 + \frac{5}{3}} = \frac{\frac{-9+25}{3}}{\frac{3+5}{3}} = \frac{16}{8} = 2;$$

$$y_M = \frac{y_K + \lambda y_P}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{5}{3}\cdot(-6)}{1 + \frac{5}{3}} = \frac{\frac{6-30}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{-24}{8} = -3;$$

$$z_M = \frac{z_K + \lambda z_P}{1+\lambda} = \frac{4 + \frac{5}{3}\cdot 0}{1 + \frac{5}{3}} = \frac{4}{\frac{8}{3}} = \frac{12}{8} = 1{,}5.$$ Ответ: $M(2; -3; 1{,}5)$.

Пример. Найти координаты точки B отрезка AB, если точка M делит отрезок AB в отношении 2:3 и $A(-2; 1)$, $M(4; -3)$.

Подставляя координаты точек A и M в формулы координат точки M, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$, вычисляются x_B и y_B:

$$x_M=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\quad \frac{-2+\frac{2}{3}\cdot x_B}{1+\frac{2}{3}}=4;\quad \frac{-6+2\cdot x_B}{5}=4;\quad x_B=\frac{4\cdot 5+6}{2}=\frac{26}{2}=13;$$

$$y_M=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda};\quad \frac{1+\frac{2}{3}\cdot y_B}{1+\frac{2}{3}}=-3;\quad \frac{3+2\cdot y_B}{5}=-3;\quad y_B=\frac{-3\cdot 5-3}{2}=-9.$$

Ответ: $B(13;-9)$.

6.3. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ ***и*** $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(\bar{a},\bar{b})=|\,\bar{a}\,|\cdot|\,\bar{b}\,|\cdot\cos\angle(\bar{a},\bar{b}).$$

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\,\bar{a}\,|\,|\,\bar{b}\,|}$$ –косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\,\bar{b}\,|}$$ – проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$.

Свойства скалярного произведения	Формула
1) коммутативность	$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$; если λ – число $(\lambda\cdot\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(\lambda\cdot\bar{b})=\lambda\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})$
2) дистрибутивность	$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$
3) скалярный квадрат	$\bar{a}\cdot\bar{a}=\lvert\bar{a}\rvert^2$
4) условие перпендикулярности векторов	$\bar{a}\perp\bar{b}\,\left(\bar{a}\neq 0\text{ и }\bar{b}\neq 0\right)\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0$
$\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1;\quad \bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{i}\cdot\bar{k}=\bar{j}\cdot\bar{k}=0$	

Скалярное произведение векторов $\bar{a}=\{x_a,y_a,z_a\}$ и $\bar{b}=\{x_b,y_b,z_b\}$ ***в координатной форме***

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b,$$ так как

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(x_a\overline{i}+y_a\overline{j}+z_a\overline{k})\cdot(x_b\overline{i}+y_b\overline{j}+z_b\overline{k})=$$

$$=x_ax_b(\overline{i}\cdot\overline{i})+x_ay_b(\overline{i}\cdot\overline{j})+x_az_b(\overline{i}\cdot\overline{k})+y_ax_b(\overline{j}\cdot\overline{i})+y_ay_b(\overline{j}\cdot\overline{j})+y_az_b(\overline{j}\cdot\overline{k})$$

$$+z_ax_b(\overline{k}\cdot\overline{i})+z_ay_b(\overline{k}\cdot\overline{j})+z_az_b(\overline{k}\cdot\overline{k}).$$

Пример. Найдите $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$, если $\overline{a}=4\overline{m}+\overline{n};\ \overline{b}=2\overline{m}-3\overline{n};\ |\overline{m}|=3;\ |\overline{n}|=2;$ $\angle(\overline{m},\overline{n})=120°$.

Находится скалярное произведение

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(4\overline{m}+\overline{n})\cdot(2\overline{m}-3\overline{n})=$$

{раскрываются скобки и по свойствам 1), 2) скалярного произведения}

$$=8\overline{m}\cdot\overline{m}-12\overline{m}\cdot\overline{n}+2\overline{n}\cdot\overline{m}-3\overline{n}\cdot\overline{n}=8\overline{m}^2-12\overline{m}\cdot\overline{n}+2\overline{n}\cdot\overline{m}-3\overline{n}^2=$$

$$=\{\text{по свойству 1)}\quad \overline{m}\cdot\overline{n}=\overline{n}\cdot\overline{m}\}=8\overline{m}^2-10\overline{m}\cdot\overline{n}-3\overline{n}^2=$$

{по свойству 3) $\overline{m}^2=|\overline{m}|^2$, $\overline{n}^2=|\overline{n}|^2$; по определению скалярного произведения $\overline{m}\cdot\overline{n}=|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|\cdot\cos\angle(\overline{m},\overline{n})$}

$$=8|\overline{m}|^2-10|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|\cdot\cos\angle(\overline{m},\overline{n})-3|\overline{n}|^2=$$

$$=8\cdot3^2-10\cdot3\cdot2\cdot\cos120^\circ-3\cdot2^2=8\cdot9-60\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-3\cdot4=72+30-12=90.$$

Находится длина вектора $\overline{b}$, используя свойство 3):

$$|\overline{b}|=\sqrt{\overline{b}^2}\quad\Rightarrow\quad\overline{b}^2=(2\overline{m}-3\overline{n})^2=4\overline{m}^2-12\overline{m}\cdot\overline{n}+9\overline{n}^2=$$

$$=4|\overline{m}|^2-12|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|\cdot\cos\angle(\overline{m},\overline{n})+9|\overline{n}|^2=$$

$$=4\cdot3^2-12\cdot3\cdot2\cdot\cos120^\circ-9\cdot2^2=$$

$$=4\cdot9-72\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+9\cdot4=36+36+36=108\Rightarrow|\overline{b}|=\sqrt{\overline{b}^2}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}.$$

По формуле $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|}$ вычисляется $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}=\dfrac{90}{6\sqrt{3}}=\dfrac{15}{\sqrt{3}}=\dfrac{15\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{3}$.

6.4. Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ называется ***правой***, если из конца вектора $\overline{c}$ кратчайший поворот вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ виден против часовой стрелки (рис. 6.10). В противном случае тройка векторов – ***левая***.

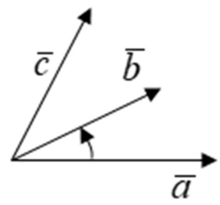


Рис. 6.10. Правая тройка векторов

Например, $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – правая тройка, $\overline{j}, \overline{i}, \overline{k}$ – левая.

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ ***на вектор*** $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = \left[\overline{a}, \overline{b}\right]$, определяемый следующим образом:

1) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис. 6.11);

2) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую тройку векторов;

3) длина вектора $\overline{c}$ равна $|\overline{c}| = |\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис. 6.11).

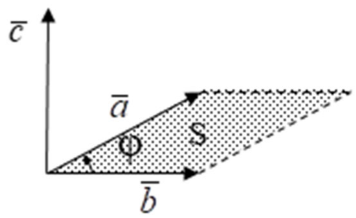


Рис. 6.11. Векторное произведение векторов

Свойства векторного произведения	Формула
1) антикоммутативность	$\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$
2) дистрибутивность	$\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$
3) ассоциативность относительно числового множителя m	$(m \cdot \overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (m \cdot \overline{b}) = m \cdot (\overline{a} \times \overline{b})$
4) векторный квадрат	$\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}$
5) условие коллинеарности векторов	$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$
$\overline{i} \times \overline{i} = \overline{j} \times \overline{j} = \overline{k} \times \overline{k} = 0$; $\overline{i} \times \overline{j} = -\overline{j} \times \overline{i} = \overline{k}$, $\overline{j} \times \overline{k} = -\overline{k} \times \overline{j} = \overline{i}$, $\overline{k} \times \overline{i} = -\overline{i} \times \overline{k} = \overline{j}$	
6) площадь $S_{\text{пм}}$ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$	$S_{\text{пм}} = \lvert\overline{a} \times \overline{b}\rvert = \lvert\overline{a}\rvert \cdot \lvert\overline{b}\rvert \sin\varphi$

Векторное произведение векторов $\overline{a}=\{x_a, y_a, z_a\}$ и $\overline{b}=\{x_b, y_b, z_b\}$ ***в координатной форме***

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}, \text{ так как}$$

$$\overline{a}\times\overline{b}=(x_a\overline{i}+y_a\overline{j}+z_a\overline{k})\times(x_b\overline{i}+y_b\overline{j}+z_b\overline{k})=$$

$$=x_a x_b(\overline{i}\times\overline{i})+x_a y_b(\overline{i}\times\overline{j})+x_a z_b(\overline{i}\times\overline{k})+$$

$$+y_a x_b(\overline{j}\times\overline{i})+y_a y_b(\overline{j}\times\overline{j})+y_a z_b(\overline{j}\times\overline{k})+$$

$$+z_a x_b(\overline{k}\times\overline{i})+z_a y_b(\overline{k}\times\overline{j})+z_a z_b(\overline{k}\times\overline{k}),\Rightarrow$$

$$\overline{a}\times\overline{b}=(y_a z_b-z_a y_b)\overline{i}-(x_a z_b-z_a x_b)\overline{j}+(x_a y_b-y_a x_b)\overline{k}\,.$$

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a}=4\overline{m}+\overline{n};\ \overline{b}=2\overline{m}-3\overline{n};\ |\overline{m}|=3;\ |\overline{n}|=2;\ \angle(\overline{m},\overline{n})=120°$.

Площадь параллелограмма находится по формуле $S_{\text{пм}}=|\overline{a}\times\overline{b}|$.

$$\overline{a}\times\overline{b}=(4\overline{m}+\overline{n})\times(2\overline{m}-3\overline{n})=$$

{раскрываем скобки, используя свойства 2), 3) векторного произведения}

$$=8\overline{m}\times\overline{m}-12\overline{m}\times\overline{n}+2\overline{n}\times\overline{m}-3\overline{n}\times\overline{n}=$$

{по свойству 4): $\overline{m}\times\overline{m}=\overline{n}\times\overline{n}=\vec{0}$; по свойству 1): $\overline{n}\times\overline{m}=-\overline{m}\times\overline{n}$}

$$=-12\overline{m}\times\overline{n}-2\overline{m}\times\overline{n}=-14\overline{m}\times\overline{n};$$

$$S_{\text{пм}}=|\overline{a}\times\overline{b}|=|-14\overline{m}\times\overline{n}|=14|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|\cdot\sin 120°=14\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=42\sqrt{3}\ (\text{ед.}^2).$$

6.5. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ и вектора $\overline{c}$:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}\,.$$

Или $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$.

Свойства смешанного произведения	Формула
1) смешанное произведение не меняется при круговой перестановке множителей	$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a}=\overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b}$
2) смешанное произведение меняет знак при перестановке двух множителей	$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=-\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}=\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a}$
3) условие компланарности векторов	$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=0 \;\Leftrightarrow\; \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – компланарны
Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис в трехмерном пространстве $\Leftrightarrow \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\neq 0$,	
4) объем $V_{\text{пд}}$ параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$	$V_{\text{пд}}=\left\| \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \right\|$
Следствие: объем $V_{\text{т}}$ тетраэдра построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$	$V_{\text{т}}=\frac{1}{6}\cdot V_{\text{пд}}=\frac{1}{6}\cdot\left\| \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \right\|$

Смешанное произведение векторов $\overline{a}=\{x_a, y_a, z_a\}, \overline{b}=\{x_b, y_b, z_b\}$ $\overline{c}=\{x_c, y_c, z_c\}$ ***в координатной форме*** равно

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix},\text{ так как}$$

умножая вектор $\overline{a}\times\overline{b}=\{y_a z_b - z_a y_b; -(x_a z_b - z_a x_b); x_a y_b - y_a x_b\}$ скалярно на вектор $\overline{c}$, получается

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=$$
$$=(y_a z_b - z_a y_b)x_c-(x_a z_b - z_a x_b)y_c+(x_a y_b - y_a x_b)z_c.$$

Пример. Даны вершины тетраэдра $ABCD$: $A(3;1;4)$, $B(6;7;2)$, $C(-2;1;-1)$, $D(2;2;3)$. Найти: 1) $\angle BAC$; 2) площадь грани ABC; 3) объем тетраэдра $ABCD$.

1) $\angle BAC=\angle\left(\overline{AB};\overline{AC}\right)=\varphi$ находится по формуле $\cos\varphi=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}$.

Координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}=\{x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A\}=\{6-3;\ 7-1;\ 2-4\}=\{3;6;-2\};$$

$$\overline{AC}=\{x_C-x_A;\ y_C-y_A;\ z_C-z_A\}=\{-2-3;\ 1-1;\ -1-4\}=\{-5;0;-5\}.$$

Скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=3\cdot(-5)+6\cdot0+(-2)\cdot(-5)=-15+0+10=-5.$$

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}=\sqrt{9+36+4}=\sqrt{49}=7;$$

$$\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{(-5)^2+0^2+(-5)^2}=\sqrt{25+0+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\frac{-5}{7\cdot5\sqrt{2}}=-\frac{1}{7\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{14}\Rightarrow\ \varphi=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{14}\right)\approx95^\circ48'.$$

2) Площадь треугольника ABC равна $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

Находится векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 3 & 6 & -2\\ -5 & 0 & -5\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix}6 & -2\\ 0 & -5\end{vmatrix}-\overline{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ -5 & -5\end{vmatrix}+\overline{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & 6\\ -5 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{i}\cdot(-30-0)-\overline{j}\cdot(-15-10)+\overline{k}\cdot(0+30)=-30\overline{i}+25\overline{j}+30\overline{k}.$$

Тогда $\overline{AB}\times\overline{AC}=\{-30;25;30\}$;

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-30)^2+25^2+30^2}=\sqrt{900+625+900}=\sqrt{2425}=5\sqrt{97}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{5\sqrt{97}}{2}\approx24{,}62\ \text{(ед.}^2\text{)}.$$

3) Объем тетраэдра $ABCD$, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ равен:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|.$$

Координаты вектора $\overline{AD}=\{2-3;\ 2-1;\ 3-4\}=\{-1;1;-1\}$.

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{array}{r} \\ \\ \to \end{array}\begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -5 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-30-0)-1\cdot(-15-10)-1\cdot(0+30)=$$

$$=30+25-30=25.$$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot 25=\frac{25}{6}\ (\text{ед.}^3).$$

Пример. Проверить, что векторы $\overline{a}=\{3;-2;1\}$, $\overline{b}=\{-1;1;-2\}$, $\overline{c}=\{2;1;-3\}$ образуют базис в трехмерном пространстве, и найти разложение вектора $\overline{d}=\{11;-6;5\}$ по базису $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{array}{r} \to \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3+2)+2\cdot(3+4)+1\cdot(-1-2)=-3+14-3=8\neq 0,$$

поэтому векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис, и вектор $\overline{d}$ можно разложить по этому базису, притом единственным образом $\overline{d}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}$ или

$$\{11;-6;5\}=\alpha\cdot\{3;-2;1\}+\beta\cdot\{-1;1;-2\}+\gamma\cdot\{2;1;-3\},$$

$$\{11;-6;5\}=\{3\alpha-\beta+2\gamma;\ -2\alpha+\beta+\gamma;\ \alpha-2\beta-3\gamma\}.$$

Соответствующие координаты равных векторов равны, откуда:

$$\begin{cases} 3\alpha-\beta+2\gamma=11, \\ -2\alpha+\beta+\gamma=-6, \\ \alpha-2\beta-3\gamma=5, \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right)\begin{array}{l} \times(2)\times(-3) \\ \hookleftarrow+\quad\downarrow \\ \qquad\ \hookleftarrow+ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & 11 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times 5 \\ \times 3^{+} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ :8 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} \alpha-2\beta-3\gamma=5 \\ 3\beta+5\gamma=-4 \\ \gamma=1 \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha=5+2\beta+3\gamma \\ \beta=\dfrac{-4-5\gamma}{3} \\ \gamma=1 \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-3. \\ \gamma=1 \end{cases}$$

$$\overline{d}=2\overline{a}-3\overline{b}+\overline{c}.$$

7. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

7.1. Плоскость в трехмерном пространстве

Плоскость α в трехмерном пространстве с прямоугольной декартовой системой координат $Oxyz$ задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$, и вектором нормали $\overline{n} = \{A; B; C\} \perp \alpha$ (рис. 7.1). Если $M(x, y, z) \in \alpha$, то вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\} \in \alpha$ и $\overline{n} \perp \overline{M_0M}$, поэтому $\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$.

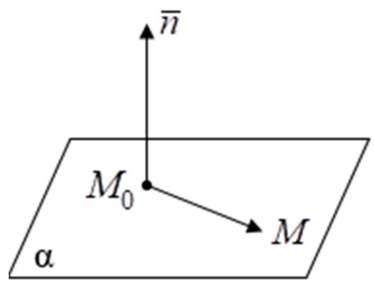


Рис. 7.1. Плоскость

Записывая скалярное произведение в координатной форме, получается ***уравнение плоскости, заданной точкой и вектором нормали***:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Если $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то ***общее уравнение плоскости***:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Пример. Записать уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(-1; 2; 4)$ перпендикулярно вектору $\overline{a} = \{3; -5; -2\}$.

Координаты точки M_0 и вектора нормали $\overline{a}$ подставляются в уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$:

$$3(x - (-1)) + (-5)(y - 2) + (-2)(z - 4) = 0.$$

Откуда, уравнение плоскости α: $3x-5y-2z+21=0$.

Плоскость α задана тремя точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащими на одной прямой, и $M(x,y,z)\in\alpha$ (рис. 7.2).

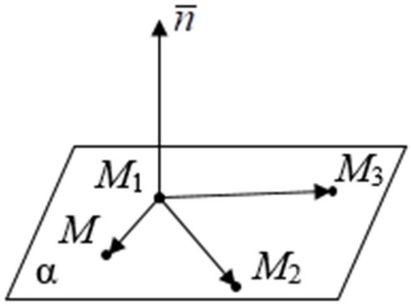


Рис. 7.2. Плоскость, проходящая через три точки

Векторы $\overline{M_1M}\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$, $\overline{M_1M_2}\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$, $\overline{M_1M_3}\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}$ компланарны (рис. 7.2), поэтому:

$$\left(\overline{M_1M}\times\overline{M_1M_2}\right)\cdot\overline{M_1M_3}=0.$$

Записывая смешанное произведение в координатной форме, получается уравнение ***плоскости, проходящей через три точки***:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Пример. Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(4;-2;1)$, $M_2(7;-1;5)$, $M_3(5;-3;2)$:

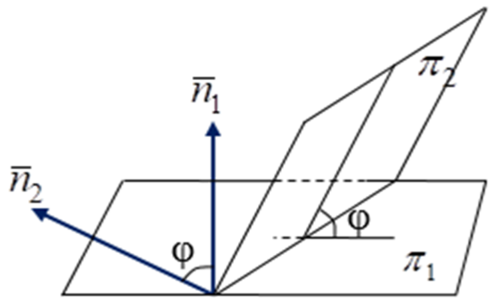
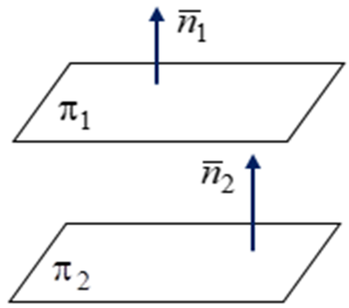
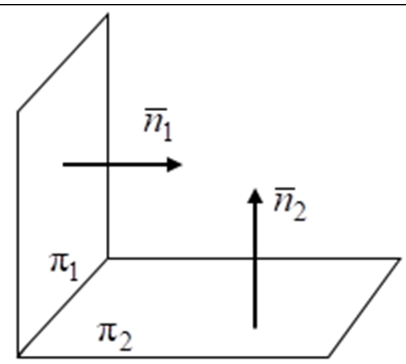
$$\begin{vmatrix} x-4 & y-(-2) & z-1 \\ 7-4 & -1-(-2) & 5-1 \\ 5-4 & -3-(-2) & 2-1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-4 & y+2 & z-1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

$$(x-4)\cdot\left(1-(-4)\right)-(y+2)\cdot(3-4)+(z-1)\cdot(-3-1)=0;$$

$$5(x-4)+1(y+2)-4(z-1)=0.$$

Уравнение $M_1M_2M_3$: $5x+y-4z-14=0$.

Плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, их нормали $\bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ $\bar{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$.

Угол между плоскостями	
Угол φ ***между*** π_1 и π_2 – меньший из двугранных углов между π_1 и π_2 $\varphi = \angle(\pi_1; \pi_2) = \angle(\bar{n}_1; \bar{n}_2)$, $\cos\varphi = \dfrac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{\lvert\bar{n}_1\rvert \cdot \lvert\bar{n}_2\rvert}$	
Условие параллельности плоскостей	
$\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$, $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$	
Условие перпендикулярности плоскостей	
$\pi_1 \perp \pi_2 \iff \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ и $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$, $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$	

Пример. Под каким углом пересекаются π_1: $2x - 3y + z + 7 = 0$ и π_2: $2x + y - z + 3 = 0$?

Нормали плоскостей $\bar{n}_1 = \{2; -3; 1\}$ и $\bar{n}_2 = \{2; 1; -1\}$.

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{\lvert\bar{n}_1\rvert \cdot \lvert\bar{n}_2\rvert} = \frac{2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = 0;$$

$$\varphi = 90^\circ,\ \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2, \text{ тогда } \pi_1 \perp \pi_2.$$

Пример. Плоскости $Ax-6y-6z+1=0$ и $2x+By+3z-8=0$ параллельны, поэтому $\frac{A}{2}=\frac{-6}{B}=\frac{-6}{3}=-2$, где $\overline{n}_1=\{A;-6;-6\}$ и $\overline{n}_2=\{2;B;3\}$ нормали плоскостей. Тогда $A=-4$ и $B=3$.

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится так (рис. 7.3):

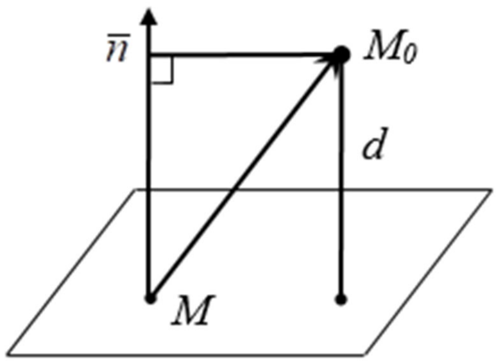


Рис. 7.3. Расстояние от точки до плоскости

$$d=\left|\text{пр}_{\overline{n}}\overline{MM_0}\right|= =\frac{\left|\overline{MM_0}\cdot\overline{n}\right|}{|\,\overline{n}\,|}=\frac{\left|(x_0-x)A+(y_0-y)B+(z_0-z)C\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Если $D=-(Ax+By+Cz)$, то

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ – ***расстояние от точки до плоскости.***

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(-1;5;2)$ до плоскости $5x-3y-4z+8=0$.

$$d=\frac{\left|5(-1)-3\cdot5-4\cdot2+8\right|}{\sqrt{5^2+(-3)^2+(-4)^2}}=\frac{\left|-5-15-8+8\right|}{\sqrt{25+9+16}}=\frac{20}{5\sqrt{2}}=\frac{20\sqrt{2}}{10}=2\sqrt{2}.$$

7.2. Прямая в пространстве

Прямая L в трехмерном пространстве с прямоугольной декартовой системой координат $Oxyz$ задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$, и направляющим вектором $\overline{s} = \{m; n; p\} \parallel L$. Если $M(x, y, z) \in L$ точка прямой L с текущими координатами, тогда $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\} \parallel \overline{s}$.

Из условия коллинеарности векторов получаются ***канонические уравнения прямой***:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

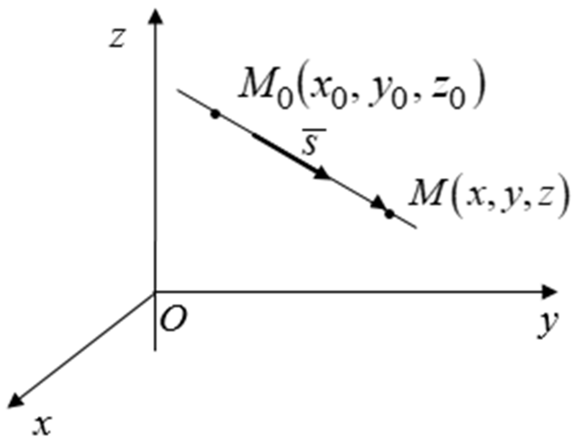


Рис. 7.4. Прямая в пространстве

Если $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$, t – параметр, то выражая x, y, z через t получаются ***параметрические уравнения прямой в пространстве***:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt. \end{cases}.$$

Пример. Канонические уравнения прямой, заданной точкой $M_0(1, 2, -3)$ и направляющим вектором $\overline{s} = \{4; -5; -6\}$:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-(-3)}{-6} \Rightarrow \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+3}{-6}.$$

Параметрические уравнения: $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 5t \\ z = -3 - 6t \end{cases}$.

Если $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L$ и $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L$, то направляющим является вектор $\overline{s} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ (рис. 7.5).

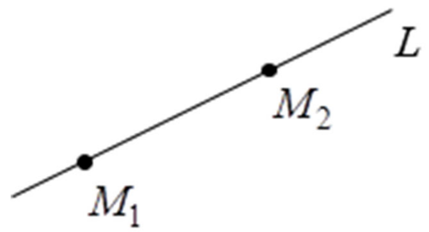


Рис. 7.5. Прямая, проходящая через две точки

Тогда ***уравнения прямой, проходящей через две точки***:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Пример. Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2, -4, 1)$ и $M_2(5, -2, 2)$:

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y-(-4)}{-2-(-4)}=\frac{z-1}{2-1}, \Rightarrow \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

Так как две плоскости пересекаются в пространстве по единственной прямой, то прямую можно задать системой, содержащей уравнения этих плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Из решения этой системы уравнений можно получить канонические или параметрические уравнения прямой.

Пример. Чтобы составить канонические уравнения прямой $\begin{cases} 7x+6y+3z+21=0; \\ 4x+y-8z-22=0, \end{cases}$ нужно найти координаты $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ из решения системы и вектор $\overline{s} \parallel L$.

Система уравнений неопределенная (уравнений меньше числа неизвестных), достаточно рассмотреть частный случай при $z=0$:

$$\begin{cases} 7x+6y+21=0; \\ 4x+y-22=0; \end{cases} \begin{cases} y=22-4x; \\ 7x+6(22-4x)=-21; \end{cases} \begin{cases} y=22-4x; \\ 7x-24x=-21-132; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=22-4x; \\ -17x=-153; \end{cases} \begin{cases} y=-14; \\ x=9. \end{cases} \quad M_0(9;-14;0) \in L$$

Направляющий вектор $\overline{s}$ прямой L коллинеарен векторному произведению $\overline{n}_1 \times \overline{n}_2$, так как $\overline{s} \perp \overline{n}_1$ и $\overline{s} \perp \overline{n}_2$, а $L \perp \overline{n}_1 = \{7;6;3\}$ и $L \perp \overline{n}_2 = \{4;1;-8\}$ (рис. 7.6).

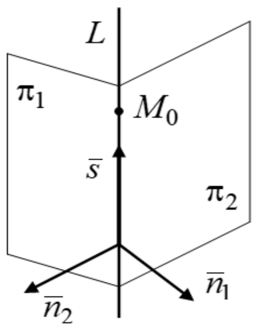


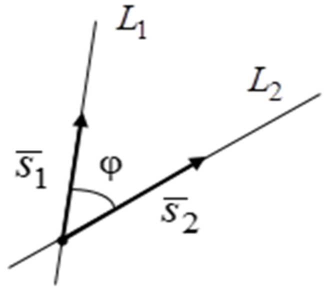
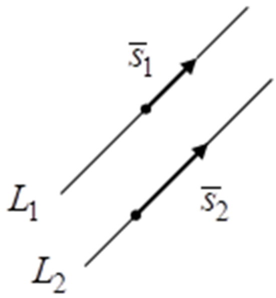
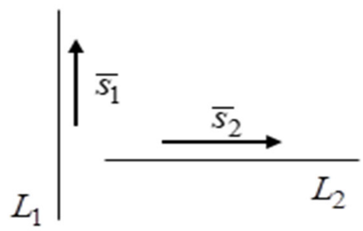
Рис. 7.6. Прямая, как пересечение двух плоскостей

$$\overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & -8 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i} \cdot (-48-3) - \overline{j} \cdot (-56-12) + \overline{k} \cdot (7-24) = -51\overline{i} + 68\overline{j} - 17\overline{k}.$$

$$\overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = -17(3\overline{i} - 4\overline{j} + 1\overline{k}), \text{ тогда } \overline{s} = \{3;-4;1\}.$$

Канонические уравнения данной прямой: $\frac{x-9}{3}=\frac{y+14}{-4}=\frac{z}{1}$.

<table>
<tr><td colspan="2">Угол между прямыми</td></tr>
<tr><td>Угол между прямыми L_1 и L_2 равен углу между их направляющими векторами $\overline{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$ и $\overline{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$
$\varphi=\angle(L_1;L_2)=\angle(\overline{s}_1;\overline{s}_2)=\arccos\left(\frac{\overline{s}_1\cdot\overline{s}_2}{|\overline{s}_1|\cdot|\overline{s}_2|}\right)$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Условие параллельности прямых</td></tr>
<tr><td>$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2$
$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Условие перпендикулярности прямых</td></tr>
<tr><td>$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overline{s}_1 \perp \overline{s}_2 \Leftrightarrow \overline{s}_1\cdot\overline{s}_2=0$
$m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0$.</td><td></td></tr>
</table>

Расстояние от точки $P(x_p, y_p, z_p)$ до прямой L, заданной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\overline{s}=\{m;n;p\}$, находится как высота параллелограмма, построенного на векторах $\overline{M_0P}$ и $\overline{s}$ (рис. 7.7).

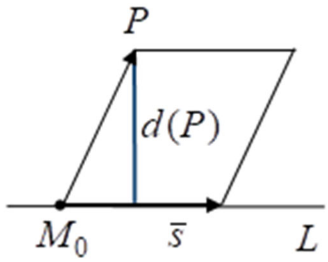


Рис. 7.7. Расстояние от точки до прямой

$$d(P,L)=\frac{S_{пар.}}{|\overline{s}|}=\frac{\left|\overline{M_0P}\times\overline{s}\right|}{|\overline{s}|}$$ – ***расстояние от точки до прямой***.

Пример. Для вычисления расстояния от точки $P(-1,5,2)$ до прямой L по каноническим уравнениям $\frac{x-9}{3}=\frac{y+14}{-4}=\frac{z}{1}$ определим $M_0(9,-14,0)$ и $\overline{s}=\{3;-4;1\}$. Вектор $\overline{M_0P}=\{-1-9;\ 5+14;\ 2-0\}=\{-10;19;\ 2\}$.

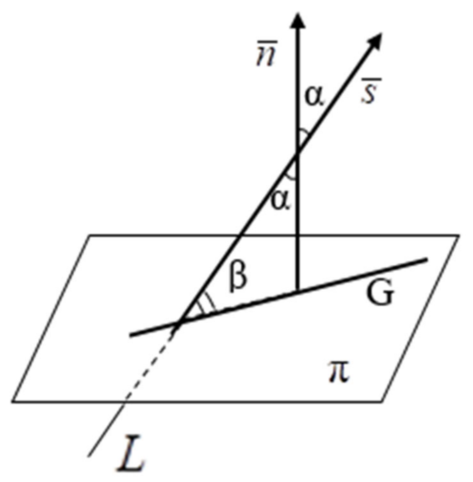
$$\overline{M_0P}\times\overline{s}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -10 & 19 & 2\\ 3 & -4 & 1\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix}19 & 2\\ -4 & 1\end{vmatrix}-\overline{j}\cdot\begin{vmatrix}-10 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\overline{k}\cdot\begin{vmatrix}-10 & 19\\ 3 & -4\end{vmatrix}=$$

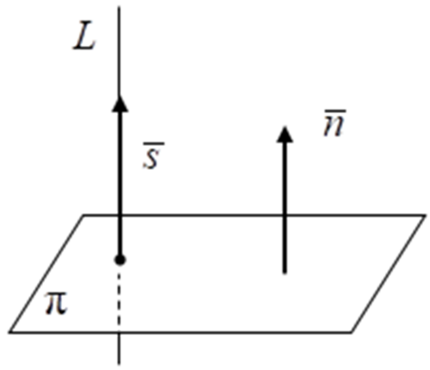
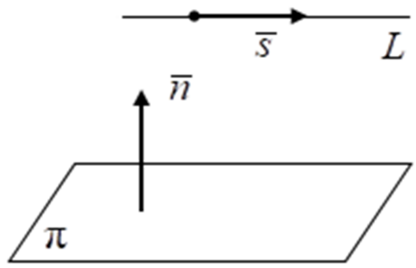
$$=27\overline{i}+16\overline{j}-17\overline{k}.$$

$$d(P,L)=\frac{\left|\overline{M_0P}\times\overline{s}\right|}{|\overline{s}|}=\frac{\left|\{27;16;-17\}\right|}{\left|\{3;-4;1\}\right|}=\frac{\sqrt{27^2+16^2+(-17)^2}}{\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}}=\sqrt{\frac{1274}{26}}=\sqrt{49}=7.$$

7.3. Прямая и плоскость в пространстве

Плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ с нормалью $\overline{n}=\{A;B;C\}$ и прямая $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ с направляющим вектором $\overline{s}=\{m;n;p\}$.

Угол между прямой и плоскостью	
Угол между прямой L ***и плоскостью*** π ранен углу β между прямой и ее проекцией G на π. $\beta=\angle(\pi;L)$ и $\alpha=\angle(\overline{n};\overline{s})$, $\alpha+\beta=90^0$, $\cos\alpha=\cos\left(90^0-\beta\right)=\sin\beta$, $\beta=\arcsin\frac{\lvert\overline{n}\cdot\overline{s}\rvert}{\lvert\overline{n}\rvert\cdot\lvert\overline{s}\rvert}$	

<table>
<tr><td colspan="2">Условие перпендикулярности прямой и плоскости</td></tr>
<tr><td>$L \perp \pi \Leftrightarrow \bar{s} \parallel \bar{n}, \Rightarrow$
$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Условие параллельности прямой и плоскости</td></tr>
<tr><td>$L \parallel \pi \Leftrightarrow \bar{s} \perp \bar{n}, \Rightarrow A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0.$</td><td>
</td></tr>
</table>

Если прямая $L \cap \pi = M$, то координаты M являются решениями системы из параметрических уравнений прямой L и общего уравнения плоскости π:

$$\begin{cases} x = mt + x_0; \\ y = nt + y_0; \\ z = pt + z_0; \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Подставляя x, y, z в общее уравнение плоскости, находится значение параметра t:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}, \text{ где } Am + Bn + Cp \neq 0.$$

Координаты M вычисляются подстановкой найденного значения параметра t в уравнения прямой. По значению параметра t также можно определить:

1) $L \parallel \pi$ – в случае, если значение t из решения системы получить невозможно;

2) $L \in \pi$ – в случае, если из решения системы получается бесконечное множество значений t.

Пример. Чтобы определить угол β между плоскостью $3x-5y-z-2=0$ и прямой $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$, вектор нормали плоскости $\overline{n}=\{3;-5;-1\}$ и направляющий вектор прямой $\overline{s}=\{4;3;1\}$ подставляются:

$$\beta=\arcsin\frac{|\overline{n}\cdot\overline{s}|}{|\overline{n}|\cdot|\overline{s}|}=\arcsin\frac{|\,3\cdot4+(-5)\cdot3+(-1)\cdot1\,|}{\sqrt{3^2+(-5)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2+1^2}}=$$

$$=\arcsin\frac{|\,12-15-1\,|}{\sqrt{9+25+1}\cdot\sqrt{16+9+1}}=\arcsin\frac{|-4|}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{26}}=\arcsin\frac{4}{\sqrt{910}}\approx7{,}62^{\circ}.$$

Пример. Пересечение прямой $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ и плоскости $3x+5y-z-2=0$ находится из системы:

$$\begin{cases} x=4t+12; \\ y=3t+9; \\ z=t+1; \\ 3x+5y-z-2=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 3\left(4t+12\right)+5\left(3t+9\right)-\left(t+1\right)-2=0; \\ 12t+36+15t+45-t-1-2=0; \\ 26t+78=0; \\ t=-3. \end{array}$$

Так как t имеет единственное значение, то единственная общая точка прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x=4\cdot\left(-3\right)+12=0; \\ y=3\cdot\left(-3\right)+9=0; \\ z=-3+1=-2; \end{cases} \Rightarrow M\left(0;0;-2\right).$$

Пример. Через точку $M\left(-2,0,3\right)$ и прямую L $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{5}$ провести плоскость π.

По каноническим уравнениям прямой L определяются $M_0(-2, 1, 0) \in L$ и $\overline{s} = \{-3;\ 4;\ 5\} \parallel L$.

Так как $L \in \pi \Leftrightarrow \overline{s} \parallel \pi$ и $\overline{M_0M} = \{0;\ -1;\ 3\} \in \pi$, то $\overline{n} \perp \overline{s}$ и $\overline{n} \perp \overline{M_0M}$ (рис. 7.8).

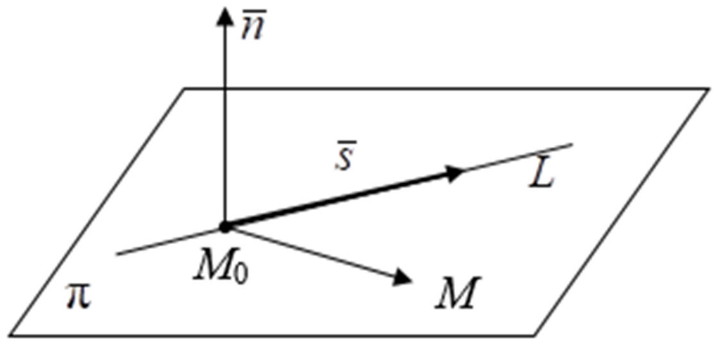


Рис. 7.8. Плоскость, проходящая через точку и прямую

Нормаль $\overline{n}$ плоскости π находится как векторное произведение:

$$\overline{n} = \overline{M_0M} \times \overline{s} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot (-5 - 12) - \overline{j} \cdot (0 + 9) + \overline{k} \cdot (0 - 3) =$$

$$= -17\overline{i} - 9\overline{j} - 3\overline{k} = \{-17;\ -9;\ -3\}.$$

В уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ вместо A, B, C записываются $-17, -9, -3$ соответственно, вместо x_0, y_0, z_0 числа $-2, 1, 0$:

$$-17(x + 2) - 9(y - 1) - 3(z - 0) = 0;$$

$$17x + 9y + 3z + 25 = 0 \ \text{ – уравнение плоскости } \pi.$$

Пример. Провести прямую через точку $M_0(5;\ -1;\ 0)$ перпендикулярно к плоскости $2x + 7y - 4z + 8 = 0$.

Из условия задачи $L \perp \pi$, тогда в свою очередь $L \parallel \overline{n} \Rightarrow$ направляющий вектор прямой $\overline{s} = \overline{n} = \{2;\ 7; -4\}$ (рис. 7.9).

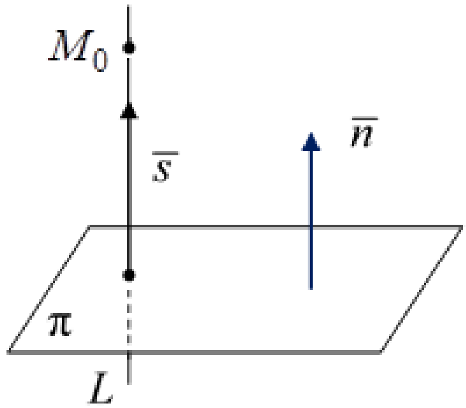


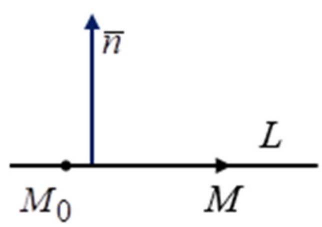
Рис. 7.9. Прямая, проходящая через точку перпендикулярно плоскости

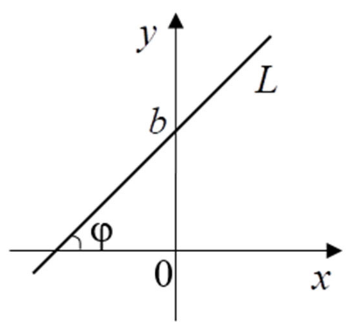
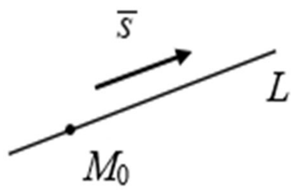
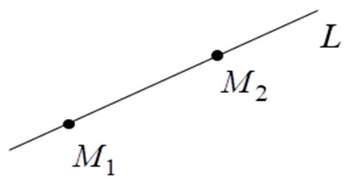
В знаменатели уравнений $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ записываются координаты $\overline{s} = \overline{n} = \{2;\ 7; -4\}$, а вместо x_0, y_0, z_0 значения $5, -1, 0$ соответственно, в итоге получаем:

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-0}{-4}.$$

7.4. Прямая на плоскости

Прямая L в двумерном пространстве с прямоугольной декартовой системой координат Oxy имеет вектор нормали $\overline{n} = \{A; B\}$ и направляющий ветор $\overline{s} = \{m;\ n\}$.

Уравнение прямой, заданной точкой и вектором нормали	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, $M_0(x_0, y_0) \in L$, $\overline{n} = \{A; B\} \perp L$	
Общее уравнение прямой на плоскости	$Ax + By + C = 0$, где $C = -Ax_0 - By_0$	

Уравнение прямой с угловым коэффициентом	$y = kx + b$, где $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{A}{C}$, b – отрезок, отсекаемый прямой L на оси Oy	
Уравнение прямой, заданной угловым коэффициентом и точкой	$y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$, где $k = \mathrm{tg}\varphi$, φ – угол наклона прямой L к положительному направлению оси Ox	
Каноническое уравнение прямой	$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$ $\overline{s} = \left\{m; n\right\} \parallel L$	
Уравнение прямой, проходящей через две точки	$M_1\left(x_1, y_1\right) \in L$ $M_2\left(x_2, y_2\right) \in L$ $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	

Пример. Общее уравнение прямой L получается из уравнения прямой, заданной точкой $M_0\left(-1;2\right)$ и вектором нормали $\overline{n} = \left\{3; -5\right\}$:

$$3\left(x - \left(-1\right)\right) + \left(-5\right)\left(y - 2\right) = 0;$$

$$3\left(x + 1\right) - 5\left(y - 2\right) = 0;$$

$$3x - 5y + 13 = 0.$$

Выражая из общего уравнения y, записывается уравнение прямой L с угловым коэффициентом: $y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{13}{5}$.

Пример. Общее уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0\left(4; -5\right)$, параллельно вектору $\overline{s} = \left\{-1;3\right\}$ получается из канонического уравнения:

$$\frac{x-4}{-1}=\frac{y-(-5)}{3};$$

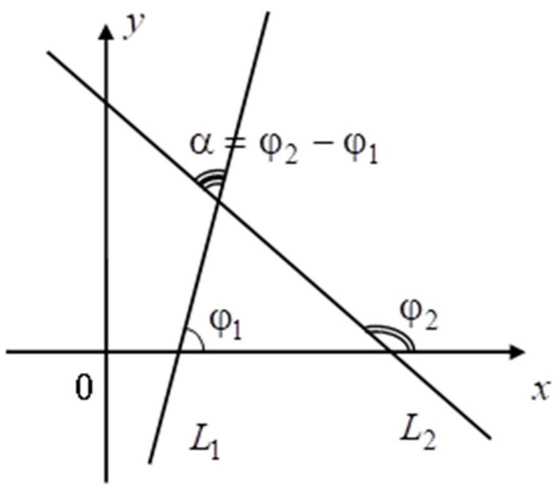
$$3\cdot(x-4)=-1\cdot(y+5) \;\Rightarrow\; 3x+y-7=0.$$

Пример. Общее уравнение прямой M_1M_2, где $M_1(2,-3)$, $M_2(-5,2)$ получается из уравнения прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-2}{-5-2}=\frac{y-(-3)}{2-(-3)};$$

$$5\cdot(x-2)=-7\cdot(y+3) \;\Rightarrow\; 5x+7y+11=0.$$

Прямые L_1 и L_2 могут быть заданы общими уравнениями или уравнениями с угловым коэффициентом.

$L_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$ $L_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$	$L_1:\ y=k_1x+b_1$ $L_2:\ y=k_2x+b_2$
Угол между прямыми	
А) Угол α между прямыми равен углу между их нормалями $\bar{n}_1=\{A_1;B_1\}$ и $\bar{n}_2=\{A_2;B_2\}$, $\alpha=\angle(L_1;L_2)=\angle(\bar{n}_1;\bar{n}_2)$, $\alpha=\arccos\left(\dfrac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{\lvert\bar{n}_1\rvert\cdot\lvert\bar{n}_2\rvert}\right)$	Б) Острый угол α между прямыми равен модулю разности углов наклона прямых L_1 и L_2 к положительному направлению оси Ox $\alpha=\angle(L_1;L_2)=\lvert\varphi_1-\varphi_2\rvert$ 

	$\operatorname{tg}\alpha = \left\lvert \dfrac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} \right\rvert$, $\operatorname{tg}\alpha = \left\lvert \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right\rvert$, $\alpha = \operatorname{arctg}\left\lvert \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right\rvert$
Условие параллельности прямых	
А) $L_1 \parallel L_2$, тогда $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2$, $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.	Б) $L_1 \parallel L_2$, тогда $\varphi_1 = \varphi_2$ $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.
Условие перпендикулярности прямых	
А) $L_1 \perp L_2$, тогда $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$. $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0$, $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.	Б) $L_1 \perp L_2$, тогда $\alpha = 90^\circ$ $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 90^\circ$ не существует при $1 + k_1 k_2 = 0$ $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$

Расстояние** d **от точки** $M_0(x_0; y_0)$ **до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d(M_0; L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. Угловой коэффициент прямой L_1, перпендикулярной прямой L с уравнением $3x - y + 1 = 0$, равен $k_1 = -\dfrac{1}{k}$, где k – угловой коэффициент прямой L. Из общего уравнения прямой L находятся $A = 3,\ B = -1$ и $k = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{3}{-1} = 3$. Тогда угловой коэффициент прямой L_1 будет равен $k_1 = -\dfrac{1}{k} = -\dfrac{1}{3}$.

Пример. Угловой коэффициент прямой L_2, параллельной прямой L с уравнением $3x - 5y + 13 = 0$, равен $k_2 = k$, где k – угловой коэффициент прямой L. Из общего уравнения прямой L находятся $A=3$, $B=-5$ и $k=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{-5}=\frac{3}{5}$. Общее уравнение прямой получается из уравнения прямой, заданной точкой $M_0(-1;2)$ и угловым коэффициентом $k_2=\frac{3}{5}$:

$$y-2=\frac{3}{5}(x+1) \Rightarrow y=\frac{3}{5}x+\frac{13}{5} \Rightarrow 3x-5y+13=0.$$

Пример. Расстояние между параллельными прямыми L_1 и L_2, заданными уравнениями $5x-3y+20=0$ и $5x-3y+8=0$, находится как расстояние от некоторой точки M_0, лежащей на прямой L_1, до прямой L_2. Координаты $M_0(-1;5)$ определяются из уравнения прямой L_1 при некотором значении, например $y_0=5$, тогда $x_0=\frac{3y_0-20}{5}=\frac{15-20}{5}=-1$.

$$d(L_1;L_2)=d(M_0;L_2)=\frac{|5\cdot(-1)-3\cdot 5+8|}{\sqrt{5^2+(-3)^2}}=\frac{|-14|}{\sqrt{34}}=\frac{14}{\sqrt{34}}.$$

Пример. Треугольник ABC задан координатами вершин $A(2;1)$, $B(-4;4)$, $C(-1;5)$. Найти:

1) длины сторон AB и BC;
2) внутренний угол при вершине B;
3) уравнение стороны BC;
4) уравнение медианы BM;
5) уравнение высоты AH;
6) длину высоты AH;
7) координаты точки H пересечения высоты AH и стороны BC;
8) площадь треугольника ABC (рис. 7.10).

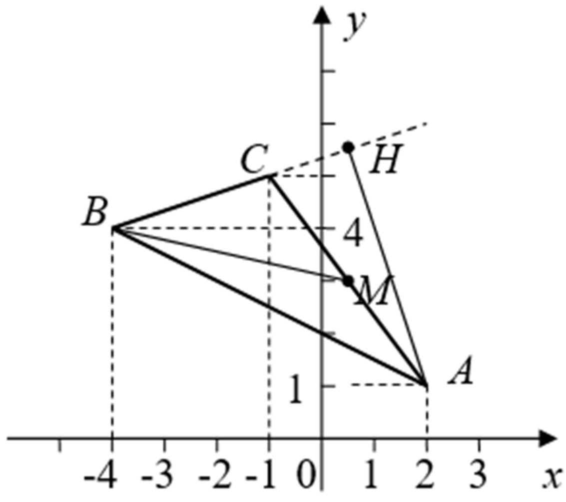


Рис. 7.10. Треугольник ABC

1) Длины сторон AB и BC находятся как длины соответствующих векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$:

$$\overline{AB} = \{-4-2;\ 4-1\} = \{-6;\ 3\},\ \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

$$\overline{BC} = \{-1-(-4);\ 5-4\} = \{3;\ 1\},\ \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

2) Внутренний угол при вершине B образуют векторы $\angle B = \angle\left(\overline{BA}, \overline{BC}\right)$.

$$\cos\angle B = \cos\angle\left(\overline{BA}, \overline{BC}\right) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|} = \frac{-\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|} = \frac{-\{-6,\ 3\}\cdot\{3,\ 1\}}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} =$$

$$= \frac{-(-18+3)}{3\sqrt{50}} = \frac{15}{15\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{откуда}\quad \angle B = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^0.$$

3) Для нахождения уравнения стороны BC воспользуемся формулой:

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B},\ \text{где } B(-4;4),\ C(-1;5),\Rightarrow \frac{x+4}{-1+4} = \frac{y-4}{5-4};\quad \frac{x+4}{3} = \frac{y-4}{1}$$

или $x - 3y + 16 = 0$ (общее уравнение стороны BC).

4) Медиана BM соединяет точку $B(-4;4)$ и M – середину отрезка AC, координаты которой:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Уравнение медианы BM находится из уравнения прямой, проходящей через точки $B(-4;4)$ и $M\left(\frac{1}{2};3\right)$:

$$\frac{x-(-4)}{0{,}5-(-4)} = \frac{y-4}{3-4};\ 2\cdot(x+4) = -9\cdot(y-1);\ \Rightarrow\ 2x+9y-1=0.$$

5) *I способ*. Уравнение высоты AH, перпендикулярной стороне BC, записывается из уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;1)$ с угловым $k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}}$. Угловой коэффициент прямой BC с уравнением $x-3y+16=0$ определяется из условия, что $k = -\frac{A}{B}$, где $A=1,\ B=-3,$ откуда $k_{BC} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3},\ k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{1/3} = -3.$

Уравнение высоты AH:

$$y-1 = -3(x-2)\ \Rightarrow\ 3x+y-7=0.$$

II способ. Так как $AH \perp BC$, то уравнение высоты AH составляется как уравнение прямой, заданной вектором нормали $\overline{BC} = \{3;1\}$ и точкой $A(2;1)$:

$$3(x-2)+1(y-1)=0\ \Rightarrow\ 3x+y-7=0.$$

6) Длина высоты AH находится как расстояние от точки $A(2;1)$ до прямой BC с уравнением $x-3y+16=0$:

$$AH = d(A;BC) = \frac{|Ax_A + By_A + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2-3\cdot1+16|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{2}.$$

7) Точка H – это точка пересечения прямых BC и AH, координаты которой определяются из решения системы уравнений:

$$\begin{matrix} BC \\ AH \end{matrix} \begin{cases} x-3y+16=0; \\ 3x+y-7=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y=-16; \\ y=7-3x; \end{cases} \begin{cases} x-3(7-3x)=-16; \\ y=7-3x; \end{cases} \begin{cases} 10x=5; \\ y=7-3x; \end{cases} \begin{cases} x=0,5; \\ y=5,5. \end{cases} \Rightarrow H(0,5;\ 5,5).$$

7.5. Кривые второго порядка

Уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

в двумерном пространстве с прямоугольной декартовой системой координат задает линию, которая называется ***кривой второго порядка*** [7].

Числа $a_{11},\ldots,a_0$ – коэффициенты уравнения, причем, $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\neq 0.$

Множество точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки плоскости, называемой центром, на расстояние R называется ***окружностью*** радиуса R (рис. 7.11).

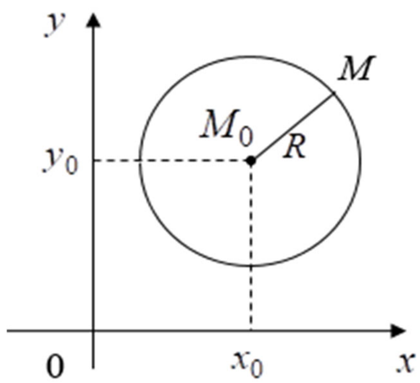


Рис. 7.11. Окружность радиуса R

Пусть точка $M(x,y)$ лежит на окружности с центром $M_0(x_0,y_0)$ и радиусом R (рис. 7.11), тогда расстояние между M_0 и M равно $\left|\overline{M_0M}\right|=R,$

вычисляя длину вектора $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ получается ***каноническое уравнение окружности***:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Каноническое уравнение окружности с центром в точке $M_0(0, 0)$:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Пример. Для того, чтобы найти центр и радиус окружности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0,$$

выделяются полные квадраты $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$:

$$\left(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2\right) + \left(y^2 + 2 \cdot 3y + 3^2 - 3^2\right) = 0;$$

$$\left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 + \left(y^2 + 6y + 9\right) - 9 = 0;$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13.$$

Из канонического уравнения $C(2; -3)$ – центр окружности и радиус $R = \sqrt{13}$.

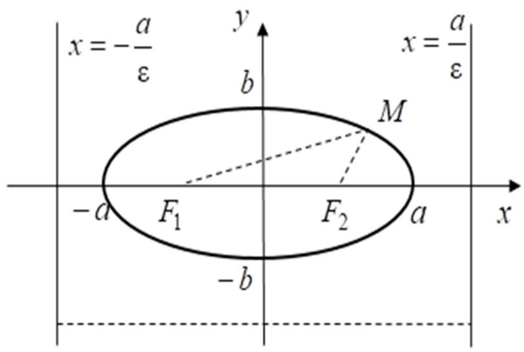
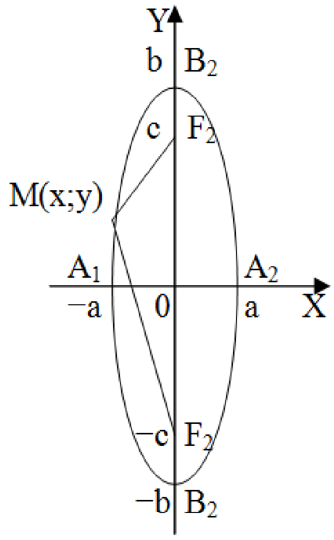
Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная $\left|\overline{F_1M}\right| + \left|\overline{F_2M}\right| = 2a$ (рис. 7.12) [7].

Рассматриваются два случая для эллипса:

1) фокусы лежат на оси Ox, симметрично относительно начала координат;

2) фокусы лежат на оси Oy, симметрично относительно начала координат.

Основные характеристики эллипса

Параметры эллипса	$F_1, F_2 \in Ox$	$F_1, F_2 \in Oy$
Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
график		
полуоси	$a>b$ $(a>0, b>0)$ a – большая полуось, b – малая полуось	$a<b$ $(a>0, b>0)$ a – малая полуось b – большая полуось
фокусы	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$ – левый и правый фокусы	$F_1(0,-c), F_2(0,c)$ – верхний и нижний фокусы
расстояние от О до фокуса	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{b^2-a^2}$
эксцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$	$\varepsilon=\frac{c}{b}<1$
директрисы	$x=-\frac{a}{\varepsilon}$, $x=\frac{a}{\varepsilon}$ – левая и правая	$y=-\frac{b}{\varepsilon}$, $y=\frac{b}{\varepsilon}$ – нижняя и верхняя

Если центр эллипса находится в $M_0\left(x_0;y_0\right)$, то его уравнение принимает вид: $\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$.

Пример. Уравнение эллипса $36x^2+9y^2=144$ привести к каноническому виду. Определить полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

Уравнение эллипса делится на 144 и получается каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1.$$

Откуда полуоси $a=3$ и $b=6$.

Так как $a<b$, то фокусы лежат на оси Oy. Тогда $c=\sqrt{b^2-a^2}$, $c=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$.

Фокусы $F_1(0,-3\sqrt{3}), F_2(0,3\sqrt{3})$. Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Директрисы $y=\pm\frac{12}{\sqrt{3}}$, тогда $y=-4\sqrt{3}$ – нижняя директриса, $y=4\sqrt{3}$ – верхняя директриса.

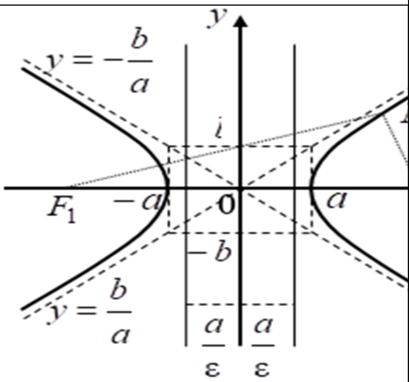
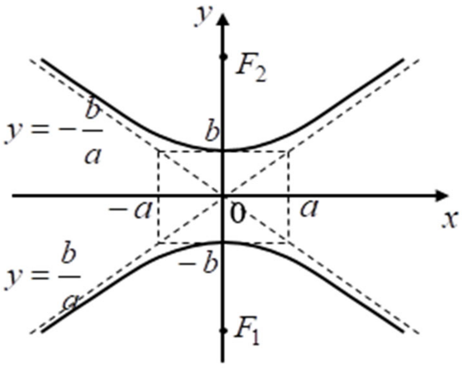
Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная $\left\|\overline{F_1M}\right|-\left|\overline{F_2M}\right\|=2a$ [7].

Рассматриваются два случая для гиперболы:

1) фокусы лежат на оси Ox, симметрично относительно начала координат;

2) фокусы лежат на оси Oy, симметрично относительно начала координат.

Основные характеристики гиперболы

Параметры гиперболы	$F_1, F_2 \in Ox$	$F_1, F_2 \in Oy$
Каноническое уравнение	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$
график		
полуоси	$a>b \;\; (a>0, b>0)$ a – действительная b – мнимая полуось	$a<b \;\; (a>0, b>0)$ a – мнимая полуось, b – действительная
фокусы	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$ – левый и правый	$F_1(0,-c), F_2(0,c)$ – нижний и верхний
расстояние от О до фокуса	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
эксцентриситет	$\varepsilon=\dfrac{c}{a}>1$	$\varepsilon=\dfrac{c}{b}>1$
директрисы	$x=-\dfrac{a}{\varepsilon},\; x=\dfrac{a}{\varepsilon}$ – левая и правая	$y=-\dfrac{b}{\varepsilon},\; y=\dfrac{b}{\varepsilon}$ – нижняя и верхняя
асимптоты	$y=-\dfrac{b}{a}x, \quad y=\dfrac{b}{a}x$	$y=-\dfrac{b}{a}x, \quad y=\dfrac{b}{a}x$

Если центр гиперболы находится в точке $M_0(x_0; y_0)$, то ее уравнение принимает вид: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Пример. Уравнение гиперболы $16x^2-9y^2=144$ привести к каноническому виду. Найти основные параметры гиперболы.

Уравнение делится на 144 и получается каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 .$$

По типу уравнения определяем, что $a=3$ является действительной полуосью и $b=4$ – мнимая полуось. Значит, $F_1, F_2 \in Ox$.

Тогда $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $c=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\Rightarrow$ фокусы $F_1(-5;0), F_2(5;0)$.

Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.

Уравнения директрис $x=\pm\frac{9}{5}$. Уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой*. Фокальный параметр $p>0$ – половина расстояния между фокусом и директрисой [7].

Определяют 4 случая расположения ветвей параболы с вершиной в начале координат:

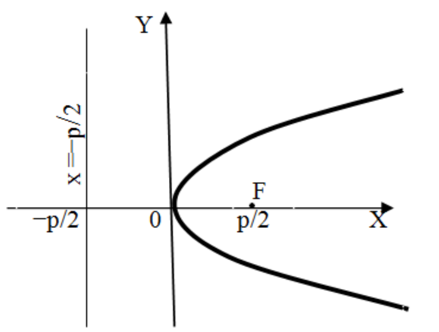
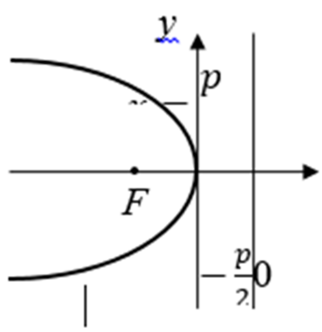
1) расположенные в правой полуплоскости, симметрично оси Ox;

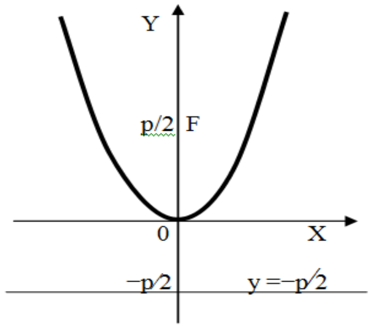
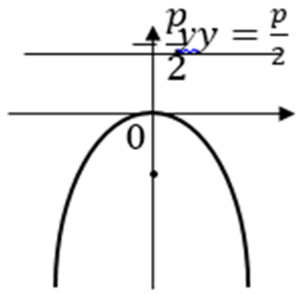
2) расположенные в левой полуплоскости, симметрично оси Ox;

3) расположенные в верхней полуплоскости, симметрично оси Oy;

4) расположенные в нижней полуплоскости, симметрично оси Oy.

Основные виды и характеристики парабол

Каноническое уравнение	$y^2=2px$	$y^2=-2px$
фокус	$F\left(\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$
директриса	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$
график		

Каноническое уравнение	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
фокус	$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$
директриса	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
график		

Если вершина параболы находится в точке $M_0(x_0; y_0)$, то ее уравнение $y^2 = 2px$ принимает вид $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$. В остальных случаях аналогично.

Пример. Парабола задана уравнением $y^2 = 24x$. Найти параметр p, координаты фокуса и уравнение директрисы.

Вершина параболы находится в начале координат, $2p = 24$, параметр параболы $p = 12$. Фокус $F(6;0)$, уравнение директрисы $x = -6$.

Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0.$$

Чтобы привести общее уравнение к каноническому виду, требуется сделать поворот осей координат на угол α, в результате чего коэффициент a_{12} станет равен 0.

Формулы поворота осей координат:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Подставив эти формулы в уравнение и приравняв коэффициент при xy к нулю, получаем формулу, из которой найдем $\operatorname{tg}\alpha$:

$$a_{12}\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha\left(a_{11} - a_{22}\right) - a_{12} = 0.$$

Далее находятся

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \text{ и } \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

После подстановки $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ в уравнение и последующего преобразования, общее уравнение примет вид:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_1x' + a'_2y' + a_0 = 0,$$

где новые коэффициенты уравнения находятся так:

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha;$$
$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha;$$
$$a'_1 = 2a_1\cos\alpha + 2a_2\sin\alpha;$$
$$a'_2 = -2a_1\sin\alpha + 2a_2\cos\alpha.$$

Для дальнейшего упрощения уравнения требуется выполнить параллельный перенос осей координат. Один из методов – выделение полных квадратов.

Пример. Привести уравнение $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$ к каноническому виду.

Выпишем коэффициенты уравнения

$$a_{11} = 2,\ a_{12} = -2,\ a_{22} = 5,\ a_1 = 4,\ a_2 = -1,\ a_0 = 9.$$

Далее находим $\operatorname{tg}\alpha$ из уравнения

$$-2\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha\left(2-5\right) + 2 = 0 \text{ или } 2\operatorname{tg}^2\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0.$$

Уравнение дает два корня $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ и $\mathrm{tg}\alpha = -2$. Выбираем первый корень, тогда для $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Тогда новые коэффициенты уравнения равны:

$$a'_{11} = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 2(-2)\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} + 5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{8}{5} - \frac{8}{5} + 1 = 1;$$

$$a'_{22} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2(-2)\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} + 5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{8}{5} + 4 = 6;$$

$$a'_1 = 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 2(-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{14}{\sqrt{5}};$$

$$a'_2 = -2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 2(-1) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{-12}{\sqrt{5}}.$$

Исходное уравнение преобразуется в это уравнение:

$$x'^2 + 6y'^2 + \frac{14}{\sqrt{5}}x' - \frac{12}{\sqrt{5}}y' + 9 = 0.$$

Далее выполняем выделение полных квадратов, для этого требуется получить квадрат суммы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ или разности $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$\left(x'^2 + \frac{2 \cdot 7}{\sqrt{5}}x'\right) + 6\left(y'^2 - \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{5}}y'\right) + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x'^2 + \frac{2 \cdot 7}{\sqrt{5}}x' + \left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2\right) + 6\left(y'^2 - \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{5}}y' + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right) + 9 = 0;$$

$$\left(x'^2 + \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y'^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{49}{5} - \frac{6}{5} + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x' + \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 11 + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x' + \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2.$$

Делаем параллельный перенос осей по формулам:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x' + \dfrac{7}{\sqrt{5}}; \\ \tilde{y} = y' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Тогда каноническое уравнение данной кривой будет иметь вид:

$$\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 = 2 \;\text{ или }\; \frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{1/3} = 1 \text{ – эллипс,}$$

с центром в точке $\tilde{O}\left(-\dfrac{7}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ и полуосями $a = \sqrt{2},\ b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\dfrac{\tilde{x}^2}{2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{1/3} = 1$.

7.6. Поверхности второго порядка

В трехмерном пространстве с прямоугольной декартовой системой координат $Oxyz$ рассматриваются поверхности, определяющиеся уравнениями второго порядка.

Каноническое уравнение ***эллипсоида*** имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c – полуоси эллипсоида.

Центр симметрии эллипсоида совпадает с началом координат. Вершины эллипсоида находятся в точках $(\pm a; 0; 0)$, $(0; \pm b; 0)$, $(0; 0; \pm c)$. Плоскости, параллельные координатным осям, пересекают эллипсоид по эллипсам (рис. 7.12). В случае $a = b$ горизонтальные плоскости $z = h,\ |h| < c$ пересекают эллипсоид по окружностям, центры которых лежат на оси Oz, то есть такой эллипсоид является поверхностью вращения вокруг оси Oz. Эллипсоид, в котором $a = b = c$, является сферой.

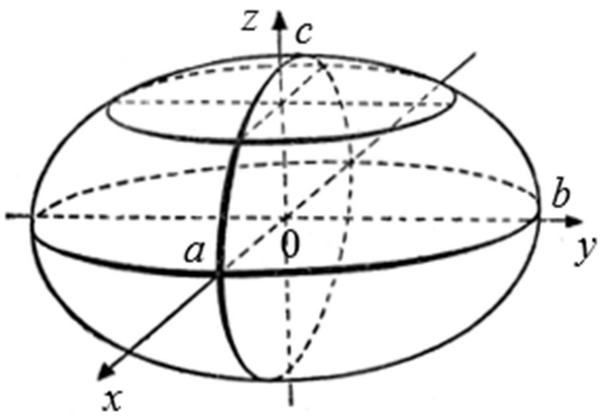


Рис. 7.12. Эллипсоид

Каноническое уравнение ***однополостного гиперболоида*** имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

Центр симметрии гиперболоида совпадает с началом координат. Горизонтальные плоскости пересекают гиперболоид по эллипсам, в пересечении плоскостью Oxy получается наименьший из них – горловой эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Вертикальные плоскости пересекают поверхность по гиперболам (рис. 7.13). Гиперболоид, в котором $a=b$, является поверхностью вращения вокруг оси Oz.

Каноническое уравнение ***двуполостного гиперболоида*** имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\,.$$

Центр симметрии совпадает с началом координат. Горизонтальные плоскости $z=h,\ |h|>c$ пересекают гиперболоид по эллипсам, вертикальные плоскости – по гиперболам. Поверхность имеет две вершины в точках $(0;\,0;\pm c)$. Одна ***полость*** лежит выше плоскости $z=c$, другая – ниже плоскости $z=-c$ (рис. 7.14).

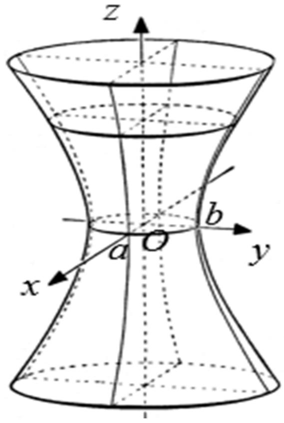


Рис. 7.13. Однополостный гиперболоид

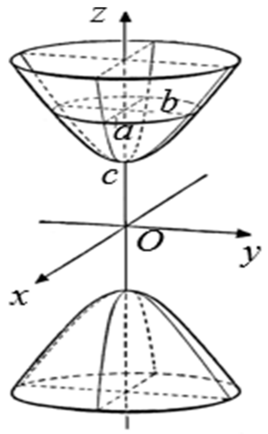


Рис. 7.14. Двуполостный гиперболоид

Каноническое уравнение ***конуса*** имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Вершина конуса совпадает с началом координат. Горизонтальные плоскости $z=h$ пересекают конус по эллипсам. Координатная плоскость Oyz пересекает конус по прямым $\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$ и $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$, а плоскость Oxz – по прямым $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$ и $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0$ (рис. 7.15). При $a=b$ уравнение определяет круговой конус с осью вращения Oz.

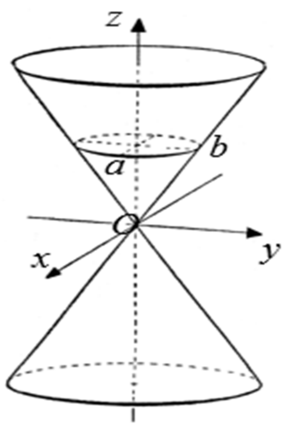


Рис. 7.15. Конус

Каноническое уравнение ***эллиптического параболоида*** имеет вид

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Вершина находится в начале координат. Вся поверхность расположена выше плоскости Oxy. Каждая горизонтальная плоскость $z = h,\ h > 0$ пересекает эллиптический параболоид по эллипсам, каждая вертикальная плоскость – по параболам (рис. 7.16). При $a = b$ имеем параболоид вращения вокруг оси Oz.

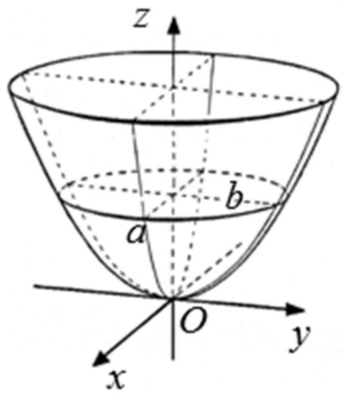


Рис. 7.16. Эллиптический параболоид

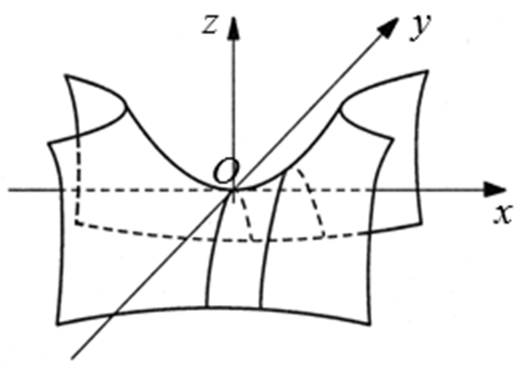


Рис. 7.17. Гиперболический параболоид

Каноническое уравнение ***гиперболического параболоида*** имеет вид

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Горизонтальные плоскости $z = h$ пересекают гиперболический параболоид по гиперболам. Координатная плоскость Oxy пересекает поверхность по прямым $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, которые являются асимптотами указанных гипербол. Вертикальные плоскости пересекают поверхность по параболам. Поверхность имеет вид седла (рис. 7.17).

Каноническое уравнение ***эллиптического цилиндра*** имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Произвольная горизонтальная плоскость пересекает поверхность по эллипсу (рис.7.18). При $a=b$ получается круговой цилиндр.

Каноническое уравнение ***параболического цилиндра*** имеет вид

$$z^2=2px.$$

Произвольная горизонтальная плоскость пересекает этот цилиндр по параболе, которая является направляющей (рис. 7.19).

Каноническое уравнение ***гиперболического цилиндра*** с осью Oz имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Произвольная горизонтальная плоскость пересекает этот цилиндр по направляющей гиперболе (рис. 7.20).

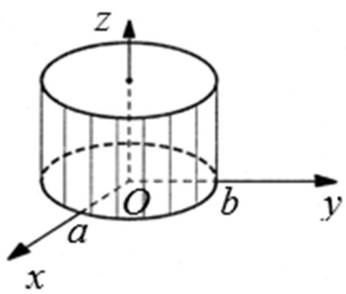


Рис. 7.18. Эллиптический цилиндр

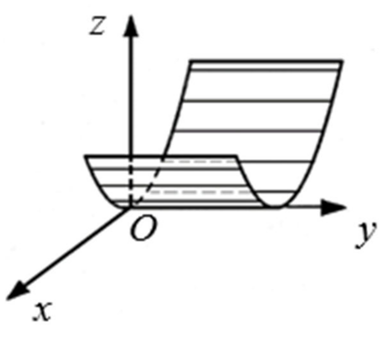


Рис. 7.19. Параболический цилиндр

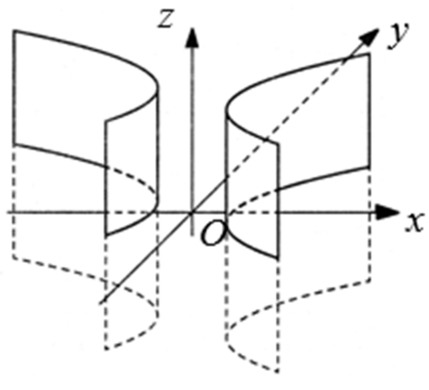


Рис. 7.20. Гиперболический цилиндр

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математика играет важную роль в научных исследованиях в области землеустройства и кадастров. Изучение основ высшей математики – первый этап на пути формирования системного и критического мышления, необходимого для эффективного проведения землеустроительной и кадастровой деятельности, обработки результатов дистанционного зондирования Земли и геодезических изысканий, принятия оптимальных и эффективных управленческих решений для целей кадастра.

Настоящее учебное пособие даст возможность обучающимся освоить теоретический материал и методы решения задач высшей математики, которые являются базовыми для формирования компетенции, выражающейся в способности применять необходимые математические модели в исследовании прикладных проблем, основываясь на знания высшей математики, в частности, дифференциального и интегрального исчисления, линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии при изучении следующих дисциплин учебного плана: «Теория вероятностей и математическая статистика», «Финансовая математика для оценки недвижимости», «Физика», «Информатика» «Геоинформационные системы», «Мониторинг земель и объектов недвижимости», «Фотограмметрия и дистанционное зондирование», а также для подготовки к научным исследованиям в области землеустройства и кадастра.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. – 7-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 648 с.

2. Логачёва О. М., Логачёв А. В., Григоренко О. В. Математический анализ для экономистов. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 97 с.

3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры : учеб. для вузов. – 25-е изд., стер. – СПб : Лань, 2024. – 432 с.

4. Логачёва О. М., Логачёв А. В., Григоренко О. В. Математический анализ для экономистов. В 2 ч. Ч. 2 : учеб. пособие. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 87 с.

5. Павловская О. Г., Вербная В. П. Математика: алгебра и геометрия : учеб.- метод. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2021. – 118 с.

6. Улитин Г. М. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие. – Донецк: ДонНТУ, 2018. – 298 с.

7. Вербная В. П., Мартынов Г. П., Плюснина Е. С. Математика для дистанционного обучения : учеб. пособие – 2-е изд. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. –278 с.

Учебное издание

Вербная Валентина Павловна
Григоренко Ольга Викторовна
Логачёва Ольга Михайловна
Павловская Ольга Геннадьевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Редактирование и компьютерная верстка
Ю. С. Мерзликиной

Дизайн обложки *А. А. Пантелеев*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.
Подписано в печать 16.09.2024. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 8,25. Тираж 248 экз. Заказ 110.
Гигиеническое заключение
№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.