Министерство науки и высшего образования и Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

С. В. Савелькаев

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия для обучающихся по направлению подготовки
10.03.01 Информационная безопасность (уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2025

УДК 681.5.01
С 128

Рецензенты: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН *П. А. Фомин*

кандидат технических наук, доцент, СГУГиТ *И. Н. Карманов*

Савелькаев, С. В.
С 128 Основы теории управления : учебное пособие / С. В. Савелькаев. – Новосибирск : СГУГиТ, 2025. – 120 с. – Текст : непосредственный.
ISBN 978-5-907998-11-7

Учебное пособие подготовлено доктором технических наук, профессором С. В. Савелькаевым на кафедре специальных устройств, инноватики и метрологии СГУГиТ.

Учебное пособие содержит одиннадцать тем по основным разделам курса «Основы теории управления», который является составной частью общей дисциплины «Теория автоматического управления». Особое внимание уделено математическому аппарату курса. В каждой теме рассматриваются методики решения практических заданий по ее теме, которые включены в пять рабочих тетрадей, заполняемых обучающимися на практических занятиях. Краткий конспект лекций совместно с рабочими тетрадями облегчает и повышает качество обучения учащихся всех форм обучения, включая дистанционное.

Учебное пособие по курсу «Основы теории управления» предназначено для обучающихся по направлению подготовки 10.03.01 Информационная безопасность (уровень бакалавриата), а также может быть использовано по направлению подготовки 27.03.05 Инноватика (уровень бакалавриата).

Рекомендовано к изданию кафедрой специальных устройств, инноватики и метрологии, Ученым советом Института оптики и технологий информационной безопасности СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 681.5.01

ISBN 978-5-907998-11-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предпосылки к развитию теории автоматического управления (ТАУ) исходят из глубокой древности, а ее бурное развитие началось с разработки таких устройств, как регулятор уровня Ползунова и регулятор скорости вращения вала паровой машины Д. Уатта. Курс «Основы Теории управления» (ОТУ) опирается на применение атематического аппарата ТАУ для идентификации характеристик автоматических систем управления и разработки методик их оптимального проектирования.

Актуальность написания учебного пособия «Основы теории управления» обусловлена тем, что в различных вузах его содержание зависит от направления подготовки обучающихся и уровня их образования и по наполнению математическим аппаратом и стилю изложения может существенно отличаться.

Учебное пособие включает 11 тем, что достаточно для направления подготовки и уровня образования по программе издаваемого его вуза, написано на современном техническом языке и адаптировано к направлению подготовки 10.03.01 Информационная безопасность (уровень бакалавриата), а также может быть использовано для направления подготовки 27.03.05 Инноватика (уровень бакалавриата). Вид изложения учебного пособия существенно повышает качество усвоения дисциплины «Основы теории управления» и облегчает выполнение самостоятельных контрольных работ (рабочих тетрадей) обучающимися, что дополнительно подчеркивает его актуальность.

При работе с учебным пособием обучающимся поможет изучение научной литературы [1–4].

1. ПРЕДПОСЫЛКИ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Предмет теории управления

Курс «Основы теории управления» является составной частью общей дисциплины «Теория автоматического управления» и направлен на освоение этой дисциплины, которая занимается анализом и синтезом систем автоматизации для объектов разноплановых физических происхождений. ТАУ охватывает широкий спектр применений от космических аппаратов и оборонительных ракетных комплексов до гражданских авиалайнеров, станков с числовым программным управлением, а также касается управленческих аспектов в социальной сфере и образовании, включая экономическую стратегию и инновационные процессы.

Курс ОТУ опирается на применение математического аппарата ТАУ для идентификации характеристик автоматических систем управления и разработки методик их оптимального проектирования. Предпосылки к развитию ТАУ исходят из глубокой древности, а ее бурное развитие началось с разработки таких устройств, как регулятор уровня Ползунова и регулятор скорости вращения вала паровой машины Д. Уатта. Рассмотрим структурные схемы этих устройств и их конструкции, показанные на рис. 1.1.

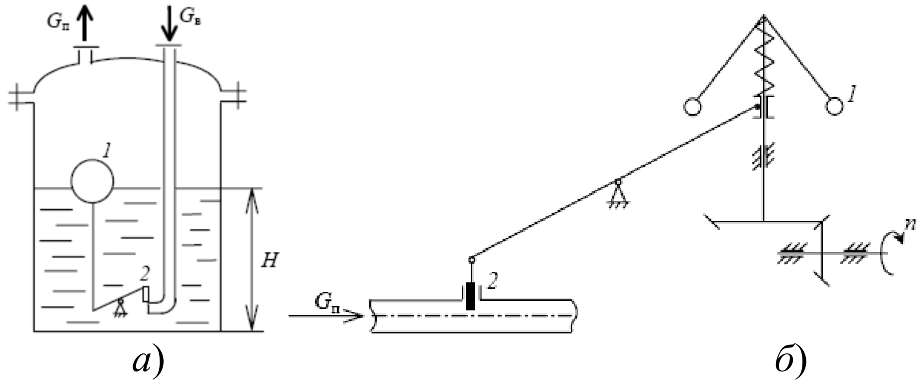


Рис. 1.1. Регуляторы: *а*) И. Ползунова; *б*) Д. Уатта

Регулирование в этих устройствах обеспечивается за счет организации обратной связи. Она обеспечивает стабилизацию и устойчивость технических устройств, на которые действуют внешние факторы окружающей среды.

Для обеспечения устойчивости регуляторов потребовались методы ее исследования, позволяющие предсказать общие закономерности поведения регуляторов. Попытки создания этих методов впервые изложены в работах «О регуляторах» английского математика-механика Д. Максвелла и русского механика И. В. Вышнеградского.

Работы этих ученых заложили фундаментальные основы ТАУ – науки об управлении различными объектами без участия человека, изучаемой в курсе ОТУ.

1.2. Основные понятия и определения

Объект управления – техническое устройство или процесс, поведение которого нас не устраивает по каким-либо причинам.

Управление – процесс воздействия на объект управления с целью изменения его поведения нужным образом.

Регулирование – частный случай управления, целью которого являетсяприведение объекта к заданному состоянию.

Автоматический процесс – процесс, который совершается без участия человека.

Система – совокупность элементов, объединенных общим режимом функционирования. При этом элементом можно называть любое техническое устройство.

Динамическая система – система, протекание внутренних процессов в которой во времени зависит от ее свойств (схемных решений и параметров ее звеньев).

Система автоматического управления (САУ) – динамическая система, которая работает без участия человека.

САУ по виду сигналов в их звеньях подразделяют на непрерывные и дискретные, по виду параметров ее звеньев – на стационарные и нестационарные и по характеру уравнений, описывающих звенья, – на линейные и нелинейные.

Различают три основные вида САУ: разомкнутые, с компенсацией известного внешнего воздействия и с обратной связью, структурные схемы которых показаны на рис. 1.2, *а, б* и *в* соответственно.

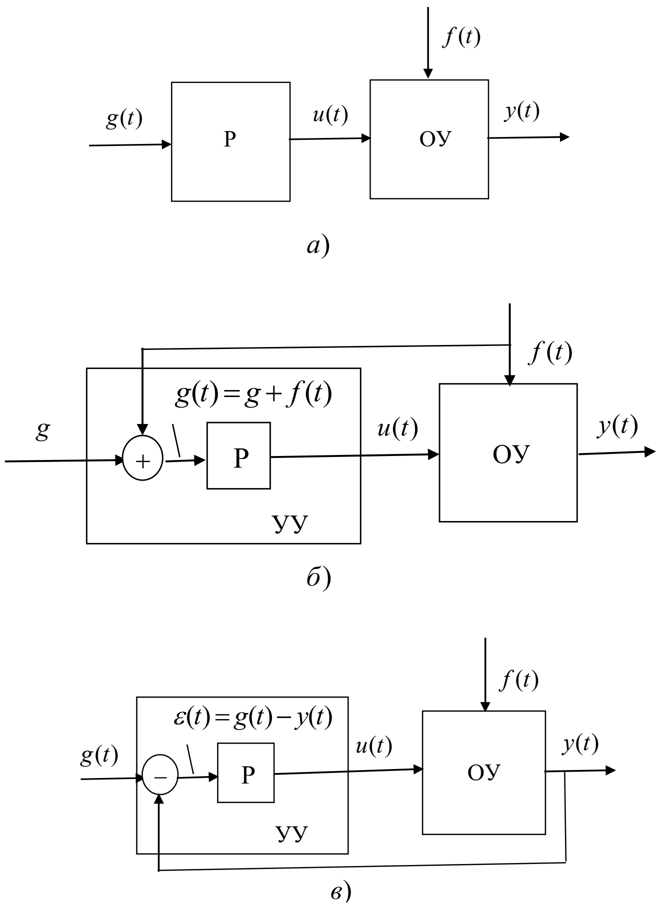


Рис. 1.2. Структурные схемы САУ:
а) разомкнутой; *б*) с компенсацией известного внешнего воздействия; *в*) с обратной связью

Основными элементами САУ являются:

– объект управления (ОУ);

– регулятор (Р) или управляющее устройство (УУ), которое сравнивает выходную управляемую величину $y(t)$ с требуемой $g(t)$ и в зависимости от результата вырабатывает управляющий сигнал $u(t)$ для ОУ;

– УУ – управляющее устройство.

Переменные САУ:

$g(t)$ – задающее воздействие, определяемое целью управления ОУ;

$y(t)$ – управляемая (регулируемая) и доступная измерению величина, которая отражает реакцию объекта на управляющее воздействие;

$f(t)$ – возмущающее случайное воздействие внешней среды на ОУ;

$u(t)$ – управляющее воздействие, с помощью которого можно влиять на поведение ОУ.

Для многоканальных САУ переменные $g(t), y(t), f(t)$ и $u(t)$ являются вектор-матрицами $G(t), Y(t), F(t)$ и $U(t)$. Их размерность и соотношение между ними будут подробно рассмотрены в следующем разделе.

Принцип работы САУ с компенсацией известного внешнего воздействия заключается в измерении возмущения и внесении коррективы в алгоритм управления для компенсации вызываемых возмущениями отклонений алгоритма функционирования. Недостаток такой САУ – низкая точность выполнения алгоритма функционирования при значительной величине внешних воздействий.

1.3. Общие представления о математических моделях САУ и принципах их построения

В ТАУ рассматриваются не физические системы управления, а их математические модели. Процедуру получения математической модели объекта можно разбить на следующие этапы.

Составление гносеологической (мысленной) модели объекта. Исходя из технического задания и изучения режимов работы объекта инженер создает приближенную мысленную модель, которая в дальнейшем уточняется и приобретает вид математической.

Определение независимых переменных, которые характеризуют объект, и уточнение их размерностей. При этом число управляющих воздействий должно быть больше числа выходных переменных ($\dim u \geq \dim y$).

Размерность переменных состояния должна быть больше размерности выходных переменных ($\dim x \geq \dim y$). Размерность возмущающих воздействий $f(t)$ может быть любой, и не связана с размерностью y, x, u.

Запись физических законов, в силу которых развиваются процессы в объекте.

Приведение уравнений объекта к виду, удобному для описания его работы.

1.4. Обзор древних автоматических устройств

1. Посмотрите фильм № 6 «Автоматические устройства» из серии «Технологии древних цивилизаций» по ссылке: https:// dokonline .com/ dokumentalnie-filmi/10759-tehnologii-drevnih-civilizaciy-echnology-of-ancient-civilizations-2011.html. Ответьте на вопросы:

1) что называлось ценнейшим товаром в древние века, почему?

2) о каких механизмах рассказывается в фильме, кто их изобретатель?

3) опишите принципы действия этих механизмов. Для чего они использовались?

2. Приведите структурную схему либо общий вид одного из древних автоматических устройств (по вариантам) и опишите принцип его действия (по вариантам), этапы его усовершенствования. Приведите примеры использования подобных устройств в наши дни, укажите, как усовершенствованы эти устройства сегодня. Ответ оформите в виде небольшого реферата (2–3 страницы). Варианты заданий:

1) автоматические двери Герона;

2) древний торговый автомат;

3) переносной насос Герона для тушения пожаров;

4) превращение воды в вино;

5) фонтан Герона;

6) музыкальная шкатулка предсказаний;

7) Геркулес и дракон Герона;

8) полиболос Герона;

9) автоматический ручной арбалет Герона;

10) автоматические передвижные декорации Герона;

11) автоматический театр Герона;

12) диоптра Герона;

13) одометр Герона;

14) эолипил;
15) гидравлос;
16) клепсидра (водяные часы) Ктесибия;
17) автоматон;
18) термостат Дреббеля;
19) регулятор парового котла Папена;
20) ветряная мельница Эдмунда Ли.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

При анализе и синтезе систем управления применяются их математические модели (динамические характеристики), представляющие собой набор уравнений, связывающих входные, выходные и внутренние переменные системы. Динамические характеристики позволяют исследовать поведение системы во времени и рассчитать протекающие в ней переходные процессы.

Основными динамическими характеристиками являются:

– математическая модель «вход-состояние-выход» (ВСВ) на основе системы дифференциальных уравнений первого порядка;

– математическая модель «вход-выход» (ВВ) на основе дифференциального уравнения n-го порядка;

– передаточная функция (ПФ) или передаточная матрица (ПМ).

Динамические характеристики, получаемые из ПФ:

– амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики (АЧХ, ФЧХ), а также вещественная частотная характеристика (ВЧХ), мнимая частотная характеристика (МЧХ) и логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ).

2.1. Математическая модель «вход-состояние-выход»

Математическая модель ВСВ, или модель в пространстве состояний, описывает состояние исследуемого объекта *системой дифференциальных уравнений первого порядка,* записанных относительно некоторых переменных – *переменных состояния*. В набор переменных состояния могут входить любые внутренние переменные (например, мгновенные значения напряжений и токов на емкостях и индуктивностях электрической схемы) при условии, что все они в совокупности однозначно определяют ее текущее состояние в любой момент времени. При этом переменные, не входящие в этот набор (например, токи на ее резистивных элементах), могут быть выражены через переменные состояния и входные переменные посредством алгебраических уравнений (законов Ома и Кирхгофа).

Многоканальная система управления (СУ) описывается n переменными состояния и имеет r входов и m выходов, как показано на рис. 2.1.

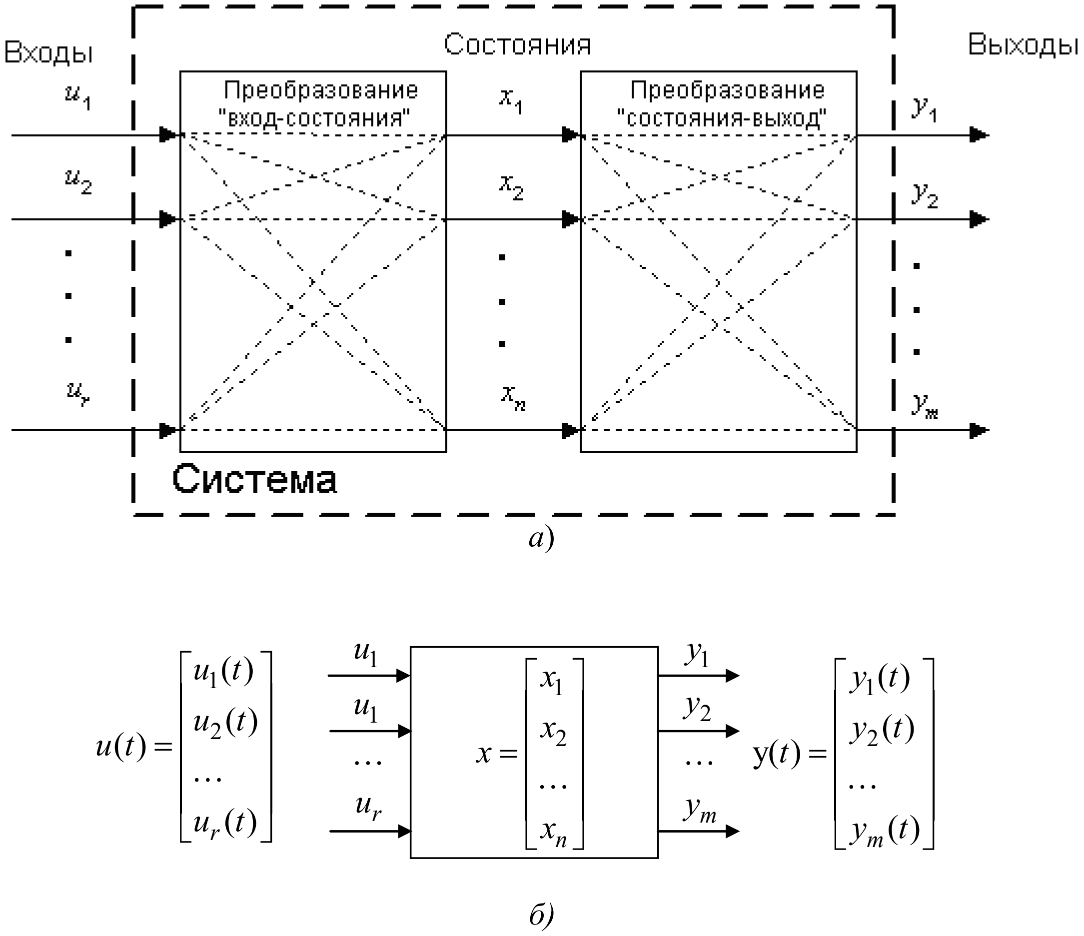


Рис. 2.1. Структурная схема многоканальной СУ: *а*) в различных состояниях; *б*) упрощенное матричное представление

Состояние линейной многоканальной системы описывается дифференциальными уравнениями (ДУ) первого порядка относительно каждой из переменных состояния. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \ldots + b_{1r}u_r; \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \ldots + b_{2r}u_r; \\
&\dots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \ldots + b_{nr}u_r,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$.

Уравнения (2.1) можно записать одним *дифференциальным уравнением состояния* в матричном виде

$$\dot{X} = AX + BU\,, \tag{2.2}$$

где матрицы-столбцы

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

которые называются *вектором состояний* $x_k;\ k = \overline{1,n}$ и *вектором входных сигналов* $u_k; k = \overline{1,r}$ соответственно.

Уравнение (2.2) связывает скорость изменения состояния системы с самим состоянием и входными сигналами.

Кроме того, выходные сигналы линейной многоканальной системы связаны с переменными состояния и входными сигналами *уравнением выхода*

$$Y = CX + DU\,, \tag{2.4}$$

где $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$ – вектор выходных переменных $y_k;\ k = \overline{1,m}$.

В общем случае математической моделью (динамической характеристикой) многоканальной СУ в пространстве состояний называют систему, состоящую из уравнений (2.2) и (2.4):

$$\begin{cases} \dot{X}^{(n\times 1)} = A^{(n\times n)} X^{(n\times 1)} + B^{(n\times r)} U^{(r\times 1)} - \text{ДУ состояния;} \\ Y^{(n\times 1)} = C^{(m\times n)} X^{(n\times 1)} + D^{(m\times r)} U^{(r\times 1)} - \text{ДУ выхода.} \end{cases} \tag{2.5}$$

В эту систему уравнений входят следующие матрицы:

1) A – матрица коэффициентов системы – квадратная матрица состояний размерности $n \times n$, где n – число переменных состояния;

2) B – матрица входа размера $n \times r$, где r – число входных величин;

3) C – матрица выхода размерности $m \times n$;

4) D – матрица обхода, определяющая прямую зависимость выхода от входа, имеющая размерность $m \times r$.

Для наглядности размерности этих матриц указаны непосредственно на уравнениях многоканальной математической модели (2.5).

Линейной называют такую систему управления, графики поведения которой можно представить прямой линией или в многомерном случае (плоскостью или гиперплоскостью).

Если элементы матриц A,B,C постоянны, то говорят, что система стационарная или с постоянными параметрами.

Если хотя бы один из элементов матриц A,B,C зависит от времени t, то говорят о нестационарной системе

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X + B(t)U; \\ Y = C(t)X. \end{cases}$$

Система с возможными внешними воздействиями учитывает их влияние:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU + F(t); \\ Y = CX + F(t), \end{cases}$$

где $F(t)$ – матрица внешних воздействий произвольной размерности. Система с внешними воздействиями $F(t)$ рассматриваться в нашем курсе не будет.

Математическая модель одноканальной СУ ($m = r = 1$) имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{X}^{(n\times 1)} = A^{(n\times n)}X^{(n\times 1)} + B^{(n\times 1)}u; \\ &y = C^{(1\times n)}X^{(n\times 1)} + D^{(1\times 1)}u. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Система линейных уравнений (2.6) характеризует преобразования, которые можно представить структурной схемой, показанной на рис. 2.2.

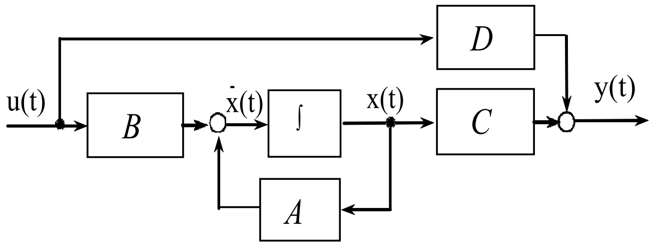


Рис. 2.2. Структура преобразований системы линейных уравнений (2.6)

Системы с несколькими входами r и выходами m – многоканальными ((2.5) MIMO – multiple-input ⁄ multiple-output). Системы с одним входом и одним выходом ($r = m = 1$) называют одноканальными системами ((2.6) SISO – single-input ⁄ single-output).

Смысл модели в переменных состояния заключается в том, что она, сохраняя соотношения между входами и выходами системы, позволяет одновременно исследовать поведение внутренних ее переменных. При надлежащем выборе они могут описывать различные физические величины (токи, напряжения, скорости, ускорения, перемещения, температуры и т. п.), представляющие интерес для исследователя.

В программе MatLab линейные системы в пространстве состояний являются частным случаем LTI (Linear Time-Invariant, линейных стационарных) систем и называются SS (State Space, в пространстве состояний) системами.

2.2. Математическая модель «вход-выход»

Динамика стационарной линейной системы может описываться линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) n-го порядка с постоянными коэффициентами, связывающим входной $u(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u\,, \qquad (2.7)$$

где n – порядок модели, причем $0 \le m \le n$; a_i, b_i – постоянные коэффициенты (параметры модели);

$$y^{(n)} = \frac{d^n y(t)}{dt^n}, \ldots, \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt}; u^{(n)} = \frac{d^n u(t)}{dt^n}, \ldots, \dot{u} = \frac{du(t)}{dt}.$$

Дифференциальные уравнения получаются на основании фундаментальных физических законов. Этот метод в равной степени применим к механическим, электрическим, гидравлическим, электромеханическим и другим системам. В линейном ОДУ, которое получают чаще всего путем линеаризации нелинейного ДУ, выходную величину системы (искомую функцию времени) и ее производные принято записывать в левой части, а входные величины (известные функции времени) и их производные – в правой.

3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ПЕРЕМЕННЫМИ СОСТОЯНИЯ

Дифференциальное уравнение (2.7) можно записать в символической (операторной) форме, используя оператор дифференцирования $p = \dfrac{d}{dt}$

$$\begin{aligned} &a_n p^{(n)} y(t) + a_{n-1} p^{(n-1)} y(t) + \ldots + a_1 p y(t) + a_0 y(t) = \\ &= b_m p^m u(t) + b_{m-1} p^{(m-1)} u(t) + \ldots + b_1 p u(t) + b_0 u(t) \end{aligned}$$

или

$$A(p) y(t) = B(p) u(t), \tag{3.1}$$

где дифференциальные полиномы $A(p)$ и $B(p)$ имеют следующие выражения:

$$A(p) = a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \ldots + a_1 p + a_0; \tag{3.2}$$

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{(m-1)} + \ldots + b_1 p + b_0. \tag{3.3}$$

В общем случае $A(p)$ имеет степень n, а $B(p)$ – степень m, $0 \le m \le n$, где n – порядок модели. В случае, когда $a_n = 1$ (или $b_m = 1$), полином называется *приведенным*. Полином, у которого коэффициент при младшем члене равен 1, т. е. $a_0 = 1$ (или $b_0 = 1$), называется *нормированным*.

Оператор $A(p)$ (3.2) называется характеристическим полиномом ДУ (3.1), а комплексные числа $p_i, i = \overline{1 \cdot n}$, являющиеся решениями (корнями) характеристического уравнения

$$A(p) = 0 \tag{3.4}$$

или

$$a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0, \tag{3.5}$$

называются *полюсами* системы (3.1).

Комплексные числа $z_i, i = \overline{1 \cdot n}$, являющиеся решениями уравнения

$$B(p) = 0, \tag{3.6}$$

называются нулями системы (3.1).

Нули и полюсы ПФ могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными числами.

Уравнение (3.1) можно записать в виде

$$y(t) = \frac{B(p)}{A(p)} u(t) = W(p) u(t),$$

где интегро-дифференциальный оператор $W(p)$ определен как

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{(m-1)} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \ldots + a_1 p + a_0}; n \ge m \tag{3.7}$$

и называется операторной *передаточной функцией* (ПФ) системы, описываемой уравнением (3.1).

ПФ представляет собой дробно-рациональную функцию оператора *p* с вещественными коэффициентами. Как видно из (3.7), ПФ может быть записана в виде отношения двух полиномов – полинома *B*(*p*) правой части и полинома *A*(*p*) левой части исходного символического (операторного) уравнения.

Другая интерпретация понятия ПФ связана с *методом преобразования Лапласа*. В этом случае передаточной функции можно дать следующее определение.

Передаточной функцией системы называется отношение операторных изображений выходной и входной переменных *при нулевых начальных условиях*:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

С помощью передаточной функции выходная величина легко связывается с входной:

$$Y(p) = W(p)X(p).$$

ПФ можно найти с помощью дифференциального уравнения, записав его в операторной форме при нулевых начальных условиях. Применительно к электрическим цепям ПФ получают с помощью операторнойсхемы замещения при нулевых начальных условиях, минуя этап составления ДУ.

Передаточная функция системы (или элемента) однозначно описывает динамическую связь между входной и выходной переменнымии не несет никакой информации о внутренних переменных (переменных состояния) и характере их изменения. Она может быть сформирована непосредственно по коэффициентам дифференциального уравнения n-го порядка.

В программе MatLab линейные системы, заданные передаточными функциями, называются TF (transfer functions) системами. Такие системы задаются векторами коэффициентов числителей и знаменателей передаточных функций. Кроме того, в MatLab передаточные функции можно задавать наборами полюсов, нулей и масштабных коэффициентов, используя полюсно-нулевые модели (ZPK).

ПФ можно записать таким образом, чтобы в числителе и знаменателе находились приведенные полиномы, т. е. полиномы, у которых коэффициенты при старших степенях оператора p были бы равны единице:

$$\mathrm{w}(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m}{a_n} \frac{p^m + \dfrac{b_{m-1}}{b_m} p^{(m-1)} + \ldots + \dfrac{b_1}{b_m} p + \dfrac{b_0}{b_m}}{p^n + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} p^{(\mathrm{n}-1)} + \ldots + \dfrac{a_1}{a_n} p + \dfrac{a_0}{b_n}} = K \frac{p^m + c_{m-1} p^{(m-1)} + \ldots + c_1 p + c_0}{p^n + d_{n-1} p^{(n-1)} + \ldots + d_1 p + d_0}, \quad (3.8)$$

где K – масштабный коэффициент.

Известно, что алгебраическое уравнение (полином) степени n с действительными коэффициентами

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (3.9)$$

имеет n корней, среди которых могут быть как действительные, таки комплексные, попарно сопряженные, корни. Если корнями уравнения (3.9) являются числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то оно можен быть представлено в виде

$$a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)=0 .$$

Учитывая это свойство полинома и зная нули и полюсы ПФ, ее можно записать в виде

$$\mathrm{W}(p)=K\frac{(p-z_1)\ldots(p-z_m)}{(p-p_1)\ldots(p-z_n)} .$$

Такая форма представления ПФ называется в MatLab Zero-Pole-Gain-моделью, или ZPK-моделью.

Графическое изображение расположения нулей и полюсов ПФ в плоскости комплексной частоты $p=\sigma+j\omega$ называется *диграммой нулей и полюсов,* или *полюсно-нулевой диаграммой* (ПНД). При построении ПНД нули изображают кружками, а полюсы – крестиками. Зная расположение нулей и полюсов ПФ системы в плоскости комплексной частоты *p*, можно получить полную информацию о свойствах системы, в частности, с точностью до масштабного коэффициента найти реакцию системы на заданное воздействие.

Система с одним входом и одним выходом описывается одной передаточной функцией

$$W(t)=\frac{y(t)}{u(t)} .$$

Система MIMO (multiple-input / multiple-output) имеет несколько входов и выходов. В этом случае для описания системы используется *передаточная матрица* $W(p)$. Она связывает между собой вектор входных (управляющих) величин U и вектор выходных (управляемых) величин Y:

$$Y=W(p)U . \tag{3.10}$$

Если многомерная система имеет r входов и m выходов, то размер передаточной матрицы равен $[m \times r]$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{y_1(t)}{u_1(t)} & \dfrac{y_1(t)}{u_2(t)} & \cdots & \dfrac{y_1(t)}{u_r(t)} \\ \dfrac{y_2(t)}{u_1(t)} & \dfrac{y_2(t)}{u_2(t)} & \cdots & \dfrac{y_2(t)}{u_r(t)} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \dfrac{y_m(t)}{u_1(t)} & \dfrac{y_m(t)}{u_2(t)} & \cdots & \dfrac{y_m(t)}{u_r(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} = \tag{3.11}$$

$$= \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) & \cdots & W_{1r}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) & \cdots & W_{2r}(p) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ W_{m1}(p) & W_{m2}(p) & \cdots & W_{mr}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

Таким образом, элементами передаточной матрицы являются передаточные функции по отдельным каналам управления, причем первый индекс ПФ равен номеру выхода, а второй – номеру входа.

Установим в общем виде связь между передаточной матрицей и уравнениями состояния, для чего уравнения (2.5) запишем в символической (операторной) форме:

$$pX = AX + BU\,; \tag{3.12}$$

$$Y = CX + DU\,. \tag{3.13}$$

Группируем все члены, содержащие X (3.12), в левой части уравнения:

$$pX - AX = BU. \tag{3.14}$$

Для того чтобы выделить множитель X в левой части уравнения, сначала представим член pX как $pE{\cdot}X$, где E – единичная матрица размерности n. Тогда

$$pEX - AX = BU \tag{3.15}$$

или

$$(pE - A)X = BU\,. \tag{3.16}$$

Этот дополнительный шаг понадобился потому, что вычитание матрицы A из скалярной переменной p не определено: мы не можем выразить $x(t)$ непосредственно из (3.14). Из уравнения (3.16) получим

$$X = (pE - A)^{-1} BU . \tag{3.17}$$

Введем обозначение

$$\Phi(p) = (pE - A)^{-1}. \tag{3.18}$$

Эта матрица, обратная матрице ($pE - A$), называется *резольвентой*. Оригинал этой матрицы $\Phi(t)$ называется *переходной матрицей состояния,* или *фундаментальной матрицей*.

Иногда резольвенту удобно находить по формуле

$$\Phi(p) = \frac{(pE - A)^{+}}{\det(pE - A)}, \tag{3.19}$$

где $(pE - A)^{+}$ – присоединенная (союзная) матрица.

С учетом (3.19) получим решение операторных уравнений состояния:

$$X = \Phi(p)BU . \tag{3.20}$$

Определитель матрицы $pE - A$ является характеристическим полиномом системы, т. е.

$$\det(pE - A) = A(p). \tag{3.21}$$

Собственные числа матрицы A в точности совпадают с корнями характеристического уравнения (полюсами) системы: $\square_i\{A\} = p_i$.

Подставляя X (3.17) с учетом (3.18) в (3.13), получим уравнение выхода:

$$Y = C\Phi(p)BU + DU = (C\Phi(p)B + D)U ,$$

$$W(p) = C\Phi(p)B + D = \frac{C(pE - A)^{+} B}{\det(pE - A)} + D . \tag{3.22}$$

Итак, n уравнений состояния, дифференциальное уравнение n-го порядка или передаточная функция (для многомерной системы – передаточная матрица) являются различными математическими моделями одной и той же физической системы. Между этими моделями имеется прямая связь. По уравнениям состояния можно однозначно определить передаточную функцию или передаточную матрицу. Отметим, что обратное преобразование к пространству состояний не всегда является однозначным: одной и той же модели типа «вход-выход» можно поставить в соответствие множество моделей «вход-состояние-выход» (одно и то же внешнее поведение может иметь множество внутренних реализаций). Вид модели зависит от применяемого метода преобразования.

4. АЛГОРИТМ ПЕРЕХОДА ОТ МОДЕЛИ ВВ К МОДЕЛИ ВСВ И ОБРАТНО

Выпишем ДУ (2.7) заново:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u. \quad (4.1)$$

Для одноканальной СУ ($\dim m = \dim y = 1$) его записывают в нормированном виде

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \ldots + a_2 \dot{y} + a_1 y = bu,$$

где теперь $a_n = a_{n-1} / a_n; a_2 = a_2 / a_n; a_1 = a_1 / a_n$ и $b = b_0 / a_n$.

При этом для одноканальной СУ применяют наиболее простой канонический порядок, когда $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}, \ldots, x_n = y^{(n-1)}$, для которого можно записать

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{y}; \\ \dot{x}_2 &= x_3 = \ddot{y}; \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n = y^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

С учетом (4.2) модель ВВ в виде ДУ (4.1) можно свести к модели ВСВ:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2; \\ &\dot{x}_2 = x_3; \\ &\ldots \\ &\dot{x}_{n-1} = x_n = y^{(n-1)}; \\ &\dot{x}_n = bu - a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - a_{n-2} x_3, \ldots, -a_1 x_n \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu; \\ \text{y} &= CX + Du, \end{aligned} \quad (4.3)$$

матрицы которой имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b \end{bmatrix} u;$$

$$y = \left[b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, 0, \dots, 0\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + [0]u.$$

При записи модели ВСВ (4.3) учтено, что при $m < n$ и отсутствии обратной связи матрица D всегда обращается в нуль $D = 0$.

Рассмотрим примеры перехода от модели ВСВ СУ к модели ВВ в и обратно.

Пример 1.

Задана система дифференциальных уравнений ВСВ:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &1.\ \dot{x}_1 = x_2; \\ &2.\ \dot{x}_2 = x_3; \\ &3.\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 8x_2 - 3x_3 + 2u; \end{aligned}\right) \text{(уравнения состояния)} \\ 4.\ y = x_1. \text{ (уравнение выхода)} \end{cases} \tag{4.4}$$

Ее матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -8 & -3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Требуется перейти от модели ВСВ (4.4) к модели ВВ (прямой переход) и обратно (обратный переход).

Прямой переход

Из четвертого, первого и второго уравнений (4.4) получим

$$
\begin{aligned}
&4.\ y = x_1 \Rightarrow x_1 = y;\\
&1.\ x_2 = \dot{x}_1 \Rightarrow x_2 = \dot{y};\\
&2.\ x_3 = \dot{x}_2 \Rightarrow x_3 = \ddot{y};\\
&\Rightarrow \dot{x}_3 = \dddot{y}.
\end{aligned}
$$

Подстановка состояний x_1, x_2, x_3 и производной $\dot{x}_3$ в третье уравнение (4.4) дает

$$3 \cdot \dddot{y} + 3\ddot{y} + 8\dot{y} + 2y = 2u\,. \tag{4.5}$$

ДУ (4.5) является искомой моделью ВВ.

Обратный переход

Полученная модель ВВ (4.5) имеет порядок $n = 3$.

Для простого канонического описания третьего порядка $n = 3$, когда $y = x_1$, справедливо

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}\,.$$

Тогда:

$y = x_1$ – это четвертое уравнение выхода;

$\dot{y} = x_2$;

$\ddot{y} = x_3 \Rightarrow \dddot{y} = \dot{x}_3$.

Подстановка переменной y и ее производных $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$ в модель ВВ (4.5) дает третье уравнение ВСВ

$$\dot{x}_3 = -2x_1 - 8x_2 - 3x_3 + 2u\,.$$

Кроме того, из введенного канонического порядка можно найти:

$x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$ – это первое уравнение ВСВ;

$x_3 = \ddot{y} = \dot{x}_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = x_3$ – это второе уравнение ВСВ.

Четыре полученных уравнения дают исходную модель ВСВ (4.4):

$$\begin{cases} 1.\ \dot{x}_1 = x_2; \\ 2.\ \dot{x}_2 = x_3; \\ 3.\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 8x_2 - 3x_3 + 2u; \\ 4.\ y = x_1. \end{cases}$$

Пример 2.

Задана модель ВСВ:

$$\begin{cases} \begin{cases} 1.\ \dot{x}_1 = 2x_2; \\ 2.\ \dot{x}_2 = 5x_3; \qquad\qquad\qquad - \text{ уравнения состояний;} \\ 3.\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 5u\ ; \end{cases} \\ 4.\ y = 0{,}1x_1\ - \text{ уравнение выхода.} \end{cases} \tag{4.6}$$

Ее матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D = [0].$$

Требуется перейти от модели ВСВ к модели ВВ (прямой переход) и обратно (обратный переход).

Прямой переход

Из четвертого, первого, и второго уравнений ВСВ (4.6) получим

$$\begin{aligned} &4.\ x_1 = 10y; \\ &1.\ x_2 = \frac{\dot{x}_1}{2} = \frac{10\dot{y}}{2} = 5\dot{y}; \\ &2.\ x_3 = \frac{\dot{x}_2}{5} = \frac{5\ddot{y}}{5} = \ddot{y}; \\ &\Rightarrow \dot{x}_3 = \dddot{y}. \end{aligned}$$

Подстановка полученных состояний x_1, x_2, x_3 и производной $\dot{x}_3$ в третье уравнение ВСВ (4.6) дает

$$\dddot{y} + \ddot{y} + 10\dot{y} + 40y = 5u\,. \tag{4.7}$$

ДУ (4.7) является искомой моделью ВВ.

Обратный переход

Порядок ВВ (4.7) составляет $n = 3$. Для простого канонического описания порядка $n = 3$, когда $y = x_1$, справедливо

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}.$$

Тогда

$y = x_1$ – это четвертое уравнение выхода;
$\dot{y} = x_2$;
$\ddot{y} = x_3$;
$\Rightarrow \dddot{y} = \dot{x}_3$.

Подставив переменную y и ее производные $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$ в модель ВВ (4.7), получим третье уравнение модели ВСВ

$$\dot{x}_3 = -40x_1 - 10x_2 - x_3 + 5u.$$

Также для принятого канонического описания запишем:

$x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$ – это первое уравнение состояний;
$x_3 = \ddot{y} = \dot{x}_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = x_3$ – это второе уравнение состояний.

Четыре полученных уравнения представляют собой модель ВСВ:

$$\begin{cases} 1.\ \dot{x}_1 = x_2; \\ 2.\ \dot{x}_2 = x_3; \\ 3.\ \dot{x}_3 = -40x_1 - 10x_2 - x_3 + 5u \text{ – уравнения состояний;} \end{cases}$$
$$4.\ y = x_1 \text{ – уравнение выхода.} \qquad (4.8)$$

Сравнивание моделей ВСВ (4.8) и (4.6) указывает на то, что обратный переход от модели ВВ (4.7) к модели ВСВ (4.8) неоднозначен, так как одной и той же модели ВВ соответствует множество комбинаций состояний ОУ, которые описываются различными каноническими описаниями. Выбор канонического описания для модели ВВ для схемы ее состояний рассмотрен в следующем примере.

Пример 3.

Составить уравнения состояния для САУ, динамика которой описывается ДУ

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \frac{1}{2}\dot{u} + 4u\,. \tag{4.9}$$

Здесь $\dot{u} \neq 0$ и, следовательно, нельзя использовать простой канонический порядок, для которого $y = x_1$. Существует большое разнообразие способов выбора вида канонического порядка. По одному из них необходимо составить схему модели ВВ (4.9) в переменных состояния, которая приведена на рис. 4.1.

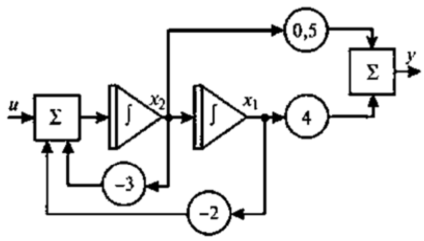


Рис. 4.1. Схема переменных состояния

Из этой схемы получим систему уравнений в пространстве состояния:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2;\\
&\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u;\\
&y = 4x_1 + \frac{1}{2}x_2.
\end{aligned}$$

Эта система уравнений в матричной форме имеет вид:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u.$$

Следовательно,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0{,}5 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица D со значением $D \neq [0]$ может быть только в случае $m = n$.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПФ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВВ И ВСВ

Рассмотрим заграждающий (режекторный) фильтр (РФ), показанный на рис. 5.1.

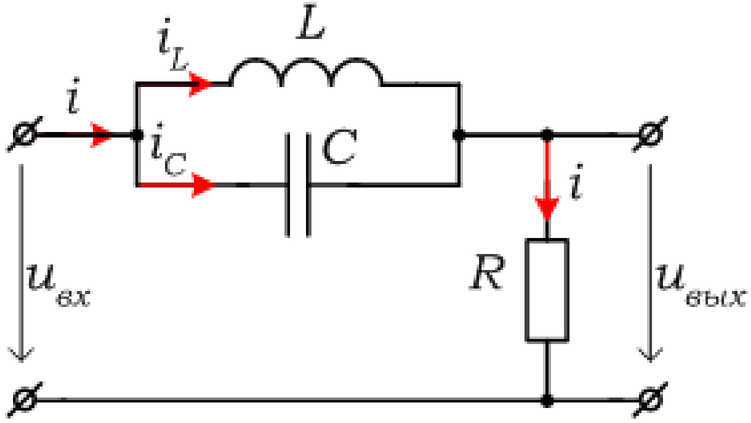


Рис. 5.1. Электрическая схема РФ

Значения RLC элементов: R □ 20 Ом; $L = 0{,}1$ Гн; $C = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ Ф.

Пример 1. Способ определения ПФ через модель ВСВ с переходом к модели ВВ

В качестве переменных состояния РФ, показанного на рис. 5.1, выберем напряжение $u_C = x_1$ на емкости C и ток $i_C = x_2$ на индуктивности C. Также полагаем, что $u_{\text{вх}} = u; u_{\text{вых}} = y$.

Запишем три уравнения по законам Кирхгофа:

$$i = i_C + i_L; \tag{5.1}$$

$$u_C + Ri = u_{\text{вх}}; \tag{5.2}$$

$$L\frac{di_L}{dt} = u_C, \text{ так как } u_L = u_C \tag{5.3}$$

для мгновенных значений этих переменных.

Наименование	Напряжение	Ток	Сопротивление
Резистор R	$u_R = Ri_R$	$i_R = \frac{u_k}{R}$	$R = \frac{u_k}{i_k}$
Индуктивность L	$u_L = L\frac{di_L}{dt}$	$i_L = \frac{1}{L}\int u_L dt$	$Z_L = j\omega L$
Емкость C	$u_C = \frac{1}{C}\int i_C dt$	$i_C = C\frac{du_C}{dt}$	$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{2\pi fC}$

Подставляя выражение для мгновенного тока $i_C = C\frac{du_C}{dt}$ из вышеприведенной таблицы в уравнение (5.1), найдем

$$i = C\frac{du_C}{dt} + i_L. \tag{5.4}$$

Из (5.2) при подстановке в него (5.4) получим первое уравнение состояния

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC}u_C - \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{RC}u_{\text{вх}}. \tag{5.5}$$

Второе уравнения состояния получим непосредственно из (5.3)

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}u_C. \tag{5.6}$$

Уравнение для выходного напряжения по закону Кирхгофа запишем в виде

$$u_{\text{вых}} = u_C + u_{\text{вх}} \text{ или } u_{\text{вых}} = u_C + 0 \cdot i_L + u_{\text{вх}}. \tag{5.7}$$

Проведя в (5.5)–(5.7) замену вида $\frac{du_C}{dt} \to \dot{x}_1; u_C \to x_1; i_L \to x_2;$ $u_{\text{вх}} \to u; \frac{du_L}{dt} \to \dot{x}_2; u_{\text{вых}} \to y$, получим ДУ РФ в пространстве выбранных переменных состояния

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{RC}x_1 - \dfrac{1}{C}x_2 + \dfrac{1}{RC}u; \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{L}x_1; \\ y = -x_1 + u. \end{cases} \tag{5.8}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} u; \qquad (5.9)$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 1 \cdot u.$$

Согласно (5.8), матрицы A, B, C и D можно записать в виде

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}; D = 1. \tag{5.10}$$

Подставим исходные значения RLC элементов в матрицы (5.10):

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{20 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}} & -\dfrac{1}{0{,}5 \cdot 10^{-3}} \\ \dfrac{1}{0{,}1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & -2 \cdot 10^{-3} \\ 10 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}; D = 1.$$

Определим передаточную функцию РФ по формуле (3.22).

Составим вначале матрицу $(pE - A)$

$$(pE - A) = \begin{bmatrix} p + 100 & 2 \cdot 10^{-3} \\ -10 & p \end{bmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения полученной матрицы. Учитывая, что первая цифра индекса определяется номером вычеркиваемой строки, а вторая – номером вычеркиваемого столбца, получим

$$\Delta_{11} = p; \Delta_{12} = (-1)^{1+2}(-10) = 10; \Delta_{21} = (-1)^{2+1}(2 \cdot 10^3) = -2 \cdot 10^3;$$
$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}(p+100) = p+100.$$

Для получения союзной матрицы нужно заменить каждый элемент матрицы $(pE - A)$ его алгебраическим дополнением, а затем полученную матрицу трансформировать. В результате получим

$$(pE - A)^+ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -2 \cdot 10^3 \\ 10 & p+100 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ (3.22):

$$C(pE - A)^+ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & -2 \cdot 10^3 \\ 10 & p+100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -2 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = -100p.$$

Определитель матрицы $(pE - A)$

$$\det(pE - A) = \begin{bmatrix} p+100 & 2 \cdot 10^{-3} \\ -10 & p \end{bmatrix} = p^2 + 100p + 20\,000.$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{C(pE - A)^+ B}{\det(pE - A)} + D = \frac{-100p}{p^2 + 100p + 20\,000} + 1 = \frac{p^2 + 20\,000}{p^2 + 100p + 20\,000}. \quad (5.11)$$

Для перехода к модели ВВ преобразуем ПФ к виду

$$p^2 y(t) + 100py(t) + 20\,000y(t) = p^2 u(t) + 20\,000u(t).$$

После замены $p \to \dfrac{d}{dt}$ получим модель ВВ РФ

$$\ddot{y} + 100\dot{y} + 20\,000y = \ddot{u} + 20\,000u. \quad (5.12)$$

Пример 2. Способ определения ПФ через модель ВВ

Для составления модели ВВ используем систему уравнений вида (5.1)–(5.2), уравнение (5.2) которой с учетом того, что $u_C = u_L$, выразим дважды через их мгновенные значения, приведенные в таблице из примера 1:

$$i = i_C + i_L;$$
$$\frac{1}{C}\int i_C dt + Ri = u_{\text{вх}};$$
$$L\int \frac{di_L}{dt} + Ri = u_{\text{вх}}.$$

Дважды продифференцируем второе уравнение и исключим из него i_C с помощью первого уравнения:

$$\frac{1}{C}\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\frac{di_L}{dt} + R\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{d^2 u_{\text{вх}}}{dt^2}.$$

В это уравнение подставим выражение для производной тока индуктивности $\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u_{\text{вх}}$, найденное из третьего уравнения. В результате получим выражение

$$\frac{1}{C}\frac{di}{dt} + \frac{R}{LC}i - \frac{1}{LC}u_{\text{вх}} + R\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{d^2 u_{\text{вх}}}{dt^2}.$$

Применяя закон Ома в виде $u_{\text{вых}} = Ri$, составим модель ВВ РФ:

$$\frac{d^2 u_{\text{вых}}}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du_{\text{вых}}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{\text{вых}} = \frac{d^2 u_{\text{вх}}}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_{\text{вх}}. \qquad (5.13)$$

Обозначение $u_{\text{вх}} = u$ и $u_{\text{вых}} = y$ сводит (5.13) к виду

$$\ddot{y} + \frac{1}{RC}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \ddot{u} + \frac{1}{LC}u. \qquad (5.14)$$

Подстановка заданных значений RLC элементов в (5.14) дает

$$\ddot{y} + 100\dot{y} + 20000y = \ddot{u} + 20000u. \qquad (5.15)$$

Полученные модели ВВ (5.12) и (5.15), полученные в примерах 1 и 2, совпадают.

Для определения ПФ введем обозначение $\dot{y} \to py$ и $\ddot{y} \to p^2 y$, где $p = \frac{d}{dt}$. Тогда из (5.15) получим

$$W(p)=\frac{y(t)}{u(t)}=\frac{p^2+20\,000}{p^2+100p+20\,000}. \tag{5.16}$$

Полученные ПФ РФ (5.12) и (5.16), полученные в примерах 1 и 2, совпадают.

Пример 3. Способ определения ПФ и модели ВВ на основе теории цепей

Получить передаточную функцию и дифференциальное уравнение РФ относительно входного $u(t) = U_{вх}(t)$ и выходного $y(t) = U_{вых}(t)$ в операторной форме.

Преобразуем исходную схему электрической цепи (см. рис. 5.1) к расчетной (рис. 5.2), где комплексные сопротивления $Z_L = j\omega L$ $Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}$ индуктивности L и емкости C записаны в операторной форме с заменой $p \to j\omega$.

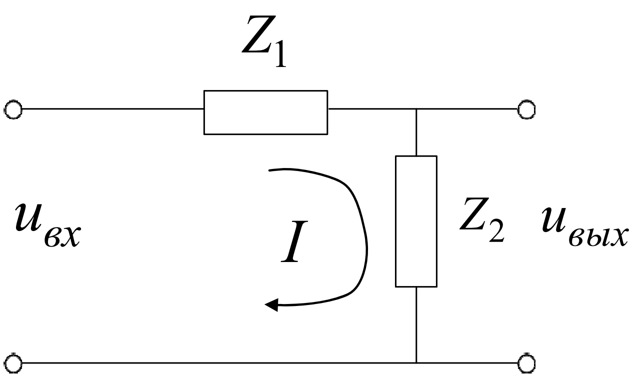


Рис. 5.2. Расчетная схема

Выражения для сопротивлений Z_1 (для параллельного соединения индуктивности L и емкости C) и Z_2 запишем в виде

$$Z_1=\left(pC+\frac{1}{pL}\right)^{-1}=\frac{pL}{p^2T_1^2+1}, Z_2=R, \tag{5.17}$$

где $T_1 = \sqrt{LC}$ – постоянная времени контура LC, определяющая его резонансную частоту $\omega = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Значение тока, протекающего по последовательной цепи $Z_1 = Z_1(p), Z_2 = Z_2(p)$ (см. рис. 5.2), по закону Ома в операторной форме равно

$$I(p) = \frac{u_{\text{вх}}}{Z_1(p) + Z_2(p)}. \qquad (5.18)$$

Тогда напряжение на выходе расчетной схемы можно определить в виде

$$u_{\text{вых}} = I(p) Z_2(p). \qquad (5.19)$$

Подставив (5.18) в (5.19) получим ПФ расчетной схемы (см. рис. 5.2)

$$\mathrm{W}(p) = \frac{u_{\text{вых}}}{u_{\text{вх}}} = \frac{\mathrm{Z}_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}. \qquad (5.20)$$

Отметим, что полученную передаточную функцию $\mathrm{W}(p)$ (5.20), полученную для расчетной схемы (см. рис. 5.2), можно использовать для большого класса электрических схем. Например, если $Z_1(p) = Z_2(p) = R$, то $\mathrm{W}(p) = k = \dfrac{1}{2}$ является коэффициентом передачи делителя напряжения, а если $Z_1(p) = R$ и $Z_2(p) = \dfrac{1}{pC}$, то $\mathrm{W}(p) = \dfrac{k}{Tp+1} = \dfrac{1}{Tp+1}$ – передаточная функция RC цепи с постоянной времени $T = RC$.

Подставив в (5.20) выражения для $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ (5.17), найдем выражение для ПФ РФ (см. рис. 5.1) в операторной форме

$$\mathrm{W}(p) = \frac{u_{\text{вых}}}{u_{\text{вх}}} = \frac{p^2 T_1^2 + 1}{p^2 T_1^2 + pT_2 + 1} = \frac{p^2 + T_1^{-2}}{p^2 + pT_1^{-2} T_2 + T_1^{-2}}, \qquad (5.21)$$

где $T_2 = \dfrac{L}{R}$ – постоянная времени LR цепи, входящей в РФ.

Из (5.21) при замене $u_{\text{вх}} \to u$ и $u_{\text{вых}} \to y$ можно получить следующее уравнение:

$$(p^2T_1^2 + pT_2 + 1)y(p) = (p^2T_1^2 + 1)u(p). \qquad (5.22)$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $p = \frac{d}{dt}$ и $p^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ – оператор дифференцирования, получим искомую модель ВВ

$$T_1^2 \frac{d^2y}{dt^2} + T_2 \frac{dy}{dt} + y = T_1^2 \frac{d^2u}{dt^2} + u \qquad (5.23)$$

или

$$T_1^2 \ddot{y}(t) + T_2 \dot{y}(t) + y(t) = T_1^2 \ddot{u}(t) + u(t). \qquad (5.24)$$

Проведя нормировку (деления обеих частей на T_1^2), приведем модель ВВ (5.23) к нормированному виду

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1 y = \ddot{u} + bu, \qquad (5.25)$$

где $a_2 = \frac{T_2}{T_1^2}; a_1 = b = \frac{1}{T_1^2}$.

Так как $\ddot{u} \neq 0$ и $b \neq 0$ от модели ВВ (5.25) к модели ВСВ с помощью простого канонического вида.

Пример 4. Непосредственный способ определения ПФ и модели ВВ и ВСВ на основе теории цепей

Определить передаточную функцию электрической цепи, приведенную на рис. 5.3, при $R_1 = R_2 = 1$ кОм; $R_3 = 2$ кОм; $C_1 = C_2 = 1$ мкФ.

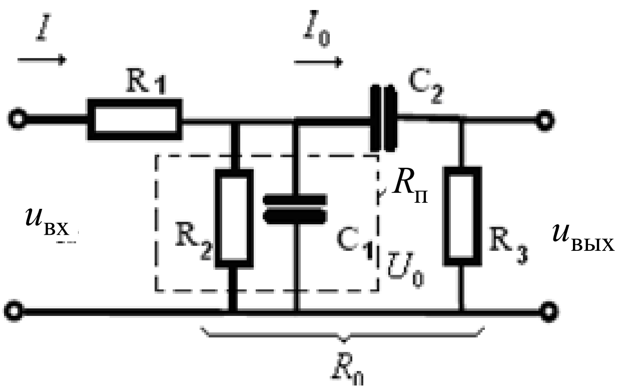


Рис. 5.3. Эквивалентная схема электрической цепи

Выходной величиной будем считать напряжение на выходе цепи, т. е. y □ $u_{\text{вых}}$; входным воздействием – напряжение на входе u □ $u_{\text{вх}}$. Физическими законами, в силу которых развиваются процессы в объекте, являются законы Киргофа и Ома.

Определим сопротивление $R_{\text{п}}$ параллельного соединения (на рис. 5.3 обведено пунктиром)

$$R_{\text{п}} = \frac{R_2}{R_2 C_1 p + 1}.$$

Определим сопротивление контура в виде параллельного соединения сопротивлений $R_{\text{п}}$ и $\frac{1}{C_2 p} + R_3$:

$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{п}}} + \frac{1}{\frac{1}{C_2 p} + R_3}}.$$

Ток до разветвления по закону Ома равен

$$I = \frac{u_{\text{вх}}}{R_1 + R_0} = \frac{u_{\text{вх}}((R_2 C_1 p + 1)(R_3 C_2 p + 1) + R_2 C_2 p)}{R_1(R_2 C_1 p + (R_3 C_2 p + 1)(R_2 C_1 p + 1)) + R_2(R_3 C_2 p + 1)}.$$

Ток после разветвления равен

$$I_0 = \frac{u_{\text{вх}}}{\frac{1}{C_2 p} + R_3} = \frac{u_{\text{вх}} R_2 C_2 p}{R_1(R_2 C_1 p + (R_3 C_2 p + 1)(R_2 C_1 p + 1)) + R_2(R_3 C_2 p + 1)}.$$

Запишем выходное напряжение

$$u_{\text{вых}} = I_0 R_3 = \frac{u_{\text{вх}} R_2 R_3 C_2 p}{R_1(R_2 C_1 p + (R_3 C_2 p + 1)(R_2 C_1 p + 1)) + R_2(R_3 C_2 p + 1)}.$$

Тогда ПФ рассматриваемой электрической цепи по напряжению можно представить в виде

$$W(p)=\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}=\frac{R_2R_3C_2p}{R_1(R_2C_1p+(R_3C_2p+1)(R_2C_1p+1))+R_2(R_3C_2p+1)}=$$
$$=\frac{2000p}{2000p^2+6000p+2000}=\frac{p}{p^2+3p+1}.$$

Перейдем к дифференциальному уравнению электрической цепи в операторной форме

$$U_{\text{вых}}(p^2+3p+1)=U_{\text{вх}}p.$$

Подстановка $p=\frac{d}{dt}$ и замена $U_{\text{вых}}\to y$ и $U_{\text{вх}}\to u$ дает дифференциальное уравнение рассматриваемой электрической цепи во временной области

$$\ddot{y}+3\dot{y}+y=\dot{u}. \tag{5.26}$$

Перейдем от модели ВВ (5.26) к модели ВСВ с помощью простого канонического описания.

Простое каноническое описание для порядка модели ВВ (5.26) $n=2$ можно записать в виде $x_1=y$, $x_2=\dot{y},\ldots,$, где $x_n=\dot{x}_{n-1}$. Тогда

$$\begin{cases} x_1=y; \\ x_2=\dot{x}_1=\dot{y}; \\ \dot{x}_2=\ddot{y}. \end{cases} \tag{5.27}$$

Подставив состояния (5.27) в (5.26), получим второе уравнение ВСВ

$$\dot{x}_2=-x_1-3x_2+2\dot{u}. \tag{5.28}$$

Кроме того, из (5.27) получим остальные уравнения:

$$\begin{aligned} &x_2=\dot{x}_1\Rightarrow\dot{x}_1=x_2 \ - \text{ это первое уравнение;} \\ &x_1=y\Rightarrow y=x_1 \ - \text{ это последнее третье.} \end{aligned} \tag{5.29}$$

Объединив три полученные уравнения (5.28) и (5.29), получим ДУ в переменных состояния

$$\dot{x}_1 = x_2;$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 + \dot{u};$$
$$y = x_1.$$

Матрицы A, B и C имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНЬЕВ

Используются для описания звеньев САУ. Они определяют взаимосвязь между параметрами периодических сигналов на входе и выходе звена.

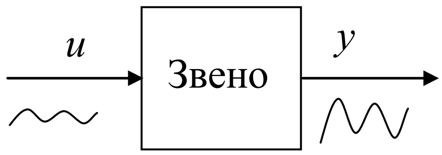


Рис. 6.1. Звено САУ

Если входное воздействие изменяется по закону $u = A_1 \cos(\omega t)$, то на выходе в установившемся режиме у устойчивого объекта будет также гармонический сигнал той же частоты ω, но с другой амплитудой со сдвигом по фазе

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi). \tag{6.1}$$

Для нахождения взаимосвязи между *u* и *y* можно воспользоваться передаточной функцией

$$W(p) = k \frac{d_m p^m + \ldots + 1}{c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} \ldots + 1}.$$

Выполнив замену $p \to j\omega$, получим

$$W(j\omega) = k \frac{d_m (j\omega)^m + \ldots + 1}{c_n (j\omega)^n + c_{n-1} (j\omega)^{n-1} \ldots + 1}. \tag{6.2}$$

После преобразований найдем обобщенную частотную характеристику

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \mathrm{Re}(\omega) + j\,\mathrm{Im}(\omega), \tag{6.3}$$

которая показывает, как звено пропускает сигналы различной частоты $W(j\omega)=\frac{y}{u}$.

При частотном анализе могут дополнительно рассматриваться следующие характеристики, полученные из $W(j\omega)$ (6.3):

1) $\mathrm{Re}(\omega)$ – вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

2) $\mathrm{Im}(\omega)$ – мнимая частотная характеристика (МЧХ);

3) $A(\omega)=\sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega)+\mathrm{Im}^2(\omega)}$ – амплитудная частотная характеристика (АЧХ);

4) $\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}$ – фазовая частотная характеристика (ФЧХ);

5) $W(j\omega)=\mathrm{Re}(\omega)+j\,\mathrm{Im}(\omega)$ – амплитудная фазочастотная характеристика (АФЧХ);

6) $L(\omega)=20LgA(\omega)$ – логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ).

Обобщенную частотную характеристику (6.3) $W(j\omega)=\mathrm{Re}(\omega)+j\,\mathrm{Im}(\omega)$ (6.3) также записывают в виде $W(j\omega)=R(\omega)+Q(\omega)$, где:

$R(\omega)=\mathrm{ReW}(j\omega)$ – вещественная частотная функция;

$Q(\omega)=\mathrm{ImW}(j\omega)$ – мнимая частотная функция, графики которых ВЧХ и МЧХ соответственно, а саму частотную характеристику в таком обозначении называют амплитудной фазово-частотной характеристикой (АФЧХ).

При гармоническом воздействии в устойчивых системах после окончания переходного процесса выходная величина y (6.1) также изменяется по гармоническому закону, но с другими амплитудой и фазой. При этом отношение амплитуд выходной и входной величин равно модулю, а сдвиг фазы – аргументу частотной передаточной функции. Значит, физический смысл частотных характеристик заключается в том, что АЧХ показывает изменение отношения амплитуд, а ФЧХ – сдвиг фазы выходной величины в зависимости от частоты входного гармонического сигнала.

Для исследования частотных свойств объекта или системы удобно использовать графическое представление перечисленных частотных характеристик.

В общем случае обобщенная частотная характеристика $W(j\omega)$ (6.3) может быть представлена на комплексной плоскости, когда каждому значению ω_i соответствует вектор $W(j\omega_i)$. Его длина (модуль) равна $A(\omega)$, а угол, образованный этим вектором с действительной положительной осью, – $\varphi(\omega)$. При изменении ω от 0 до ∞ конец этого вектора прочерчивает на комплексной плоскости кривую (рис. 6.2), которой характеризуется амплитудно-фазовая характеристика (АФХ).

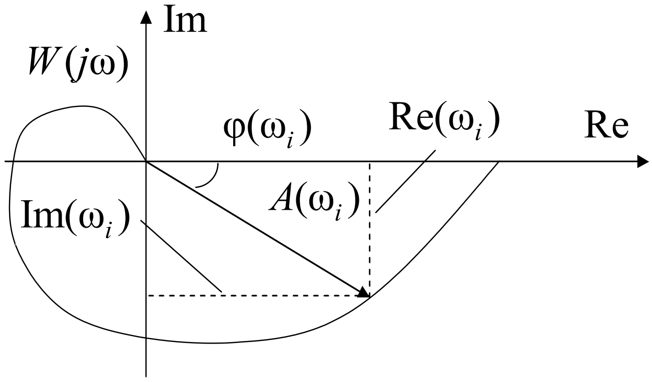


Рис. 6.2. Пример АФХ

Кроме АФХ можно построить все остальные частотные характеристики: ВЧХ, МЧХ, АЧХ, ФЧХ.

Пример. Для ОУ в виде апериодического звена с заданной передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1} \tag{6.4}$$

построить АФХ, ВЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ, где $T = \dfrac{1}{a_0}$ – постоянная времени; $k = \dfrac{b}{a_0}$ – коэффициент усиления.

Запишем выражение для обобщенной частотной характеристики $W(j\omega)$ (6.2), сделав в передаточной функции $W(p)$ (6.4) замену $p \to j\omega$:

$$W(j\omega)=\frac{k}{jT\omega+1}=\frac{k(1-jT\omega)}{1+T^2\omega^2}=\frac{k}{1+T^2\omega^2}-j\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}; \tag{6.5}$$

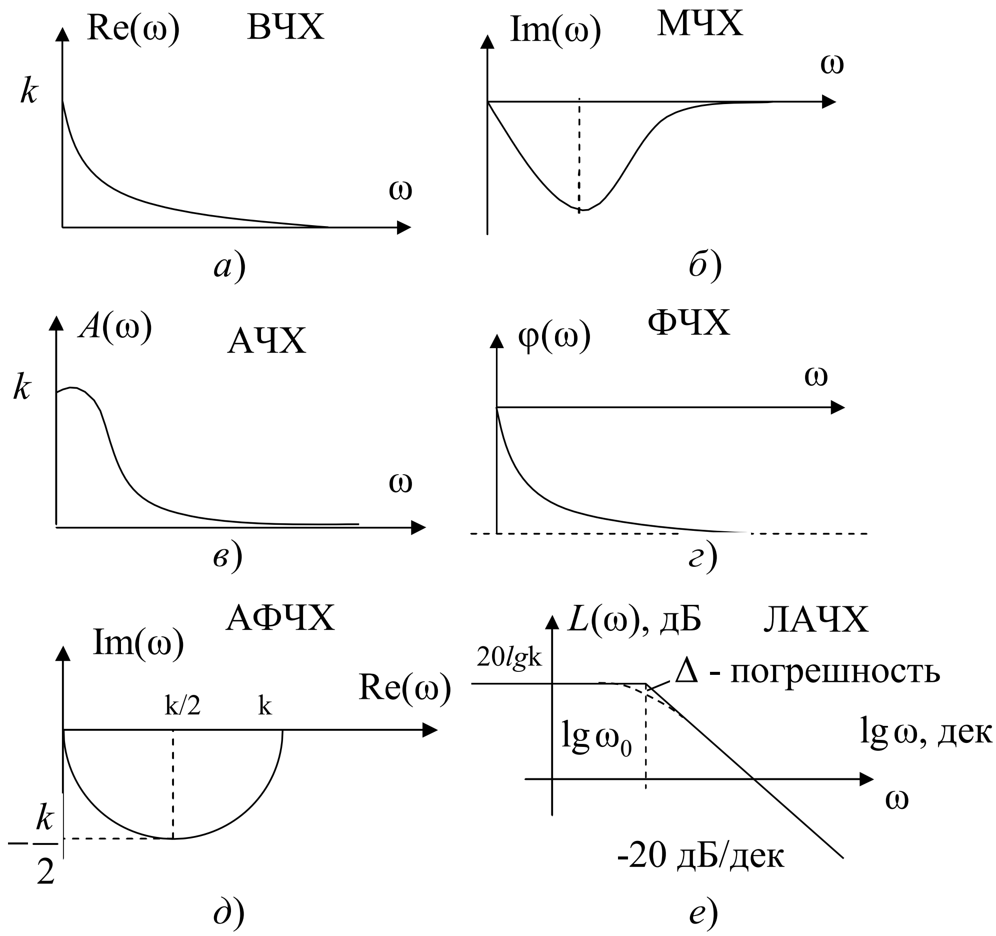
$$\mathrm{Re}(\omega)=\frac{k}{1+T^2\omega^2}; \tag{6.6}$$

$$\mathrm{Im}(\omega)=-\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}; \tag{6.7}$$

$$A(\omega)=\sqrt{\left(\frac{k}{1+T^2\omega^2}\right)^2+\left(\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{k^2(1+T^2\omega^2)}{(1+T^2\omega^2)^2}}=\frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}; \tag{6.8}$$

$$\varphi=\mathrm{arctg}\,(-T\omega). \tag{6.9}$$

Графики ВЧХ (6.6), МЧХ (6.7), АЧХ (6.8), ФЧХ (6.9) и АФЧХ (6.10) как функции от частоты ω показаны на рис. 6.3, *а–д*.



6.3. Графики: *а*) ВЧХ; *б*) МЧХ; *в*) АЧХ; *г*) ФЧХ; *д*) АФЧХ; *е*) ЛАЧХ

Кроме того, строят ЛАЧХ звена. С учетом (6.8) ЛАЧХ апериодического звена можно записать в виде

$$L(\omega) = 20LgA(\omega) = 20Lg(k) - 10Lg(T^2\omega^2 + 1). \tag{6.10}$$

Единицей измерения $L(\omega)$ является децибел, а единицей измерения $lg(\omega)$ – декада. Декада – это интервал, на котором частота изменяется в 10 раз. При изменении частоты в 10 раз говорят, что она изменилась на декаду.

При построении асимптотической ЛАЧХ будем отдельно рассматривать области высоких и низких частот, на каждой из которых ЛАЧХ будем аппроксимировать своей асимптотой (рис. 6.3, *е*):

1) при $\omega << \frac{1}{T}$ – вместо точной ЛАЧХ (6.10) можно рассмотреть

$$L_1(\omega) = 20Lg(k); \tag{6.11}$$

2) при $\omega >> \frac{1}{T}$ – $$L_2(\omega) = 20Lg(k) - 10Lg(T\omega). \tag{6.12}$$

На частоте $\omega_0 = \frac{1}{T}$, которая называется собственной частотой апериодического звена (частотой сопряжения),

$$L_1(\omega) = L_2(\omega) \tag{6.13}$$

Наибольшая погрешность Δ аппроксимации Δ будет на частоте сопряжения ω_0.

Мы рассмотрели основные динамические характеристики САУ, которые в дальнейшем будут использованы для исследования свойств объектов и СУ. Введенные характеристики отражают их поведение не только в динамике, но и в статике, поскольку статистический режим представляет собой предел переходных процессов.

Обратим внимание на то, что ни одна математическая модель не может точно отражать свойства физической системы, как бы ни повышали ее сложность с целью уточнения. Поэтому обычно стремятся получить модель, которая достаточно адекватно отражает свойства физического устройства и не является слишком сложной.

7. ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

Для расчета различных САУ их обычно разбивают на отдельные элементы, динамическими характеристиками которых являются дифференциальные уравнения не выше 2-го порядка. Различные по своей природе элементы могут описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями, поэтому их относят к определенным классам, называемым динамическими звеньями.

Изображение системы в виде совокупности типовых звеньев с указанием связи между ними называется структурной схемой.

Типы структурных схем:

1) в дифференциальных уравнениях;

2) в передаточных функциях.

Структурный метод позволяет наглядно представить взаимосвязь элементов и оценить свойства переходных и статических процессов. Структурный метод настолько широко используется в практике проектирования, что может считаться одним из «языков», на котором обсуждаются свойства САУ.

Пропорциональное (усилительное) звено

Его поведение (рис. 7.1) описывает уравнение

$$y = Ku, \tag{7.1}$$

где K – коэффициент усиления.

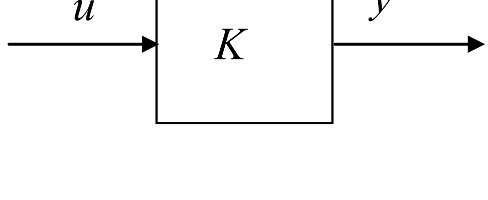


Рис. 7.1. Пропорциональное звено

Пример: безынерциальный усилитель, механические редукторы, многие датчики сигналов. Они имеют ПФ

$$W(p) = \frac{y}{u} = K\,. \tag{7.2}$$

Переходная характеристика (рис. 7.2) – реакция на скачкообразное входное воздействие 1(t).

$$h(t) = K \cdot 1(t)\,.$$

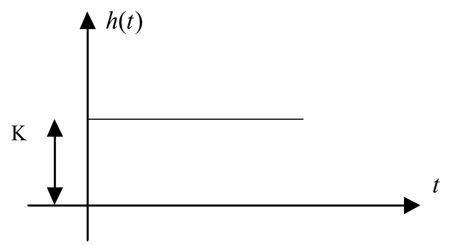


Рис. 7.2. График переходной характеристики

Импульсная переходная функция (рис. 7.3).

$$g(t) = K\delta(t)\,.$$

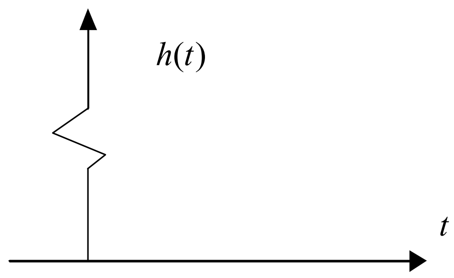


Рис. 7.3. График импульсной переходной характеристики

Частотные характеристики (рис. 7.4, *а*, *б*): $p \to j\omega$;

$$W(j\omega) = K\,; \tag{7.3}$$

$$\mathrm{Re}(\omega) = K; \mathrm{Im}(\omega) = 0; \tag{7.4}$$

$$A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega)} = \mathrm{Re}(\omega) = K; \tag{7.5}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)} = 0. \tag{7.6}$$

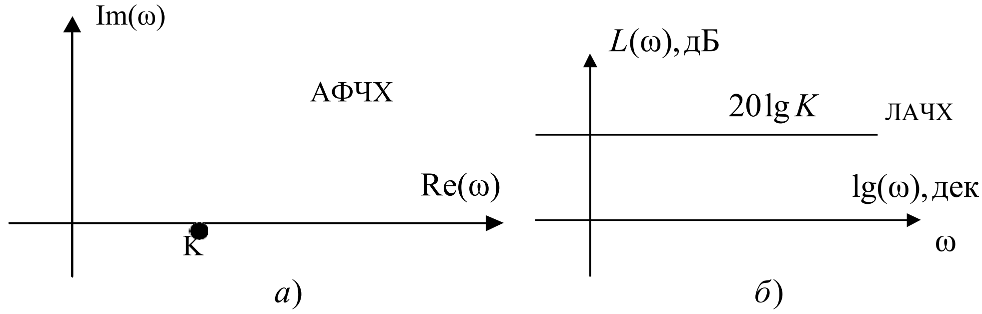


Рис. 7.4. Частотные характеристики: *а*) АФЧХ; *б*) ЛАЧХ пропорционального звена

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K. \tag{7.7}$$

Из выражений (7.5) и (7.6) и рис. 7.3 следует, что пропорциональное звено пропускает входные сигналы без искажений.

Дифференцирующее звено

Его поведение (рис. 7.5) описывает уравнение

$$y = K\dot{u}. \tag{7.8}$$

$$W(p) = \frac{y}{u} = Kp \Rightarrow \text{при } p \to j\omega \; W(j\omega) = Kj\omega. \tag{7.9}$$

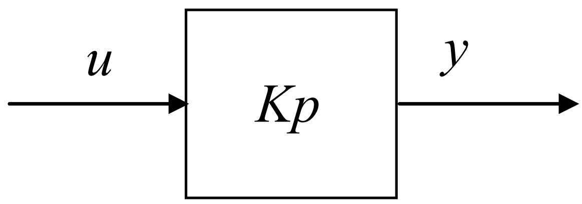


Рис. 7.5. Дифференцирующее звено

Пример: тахогенератор постоянного тока.

Переходная характеристика (рис. 7.6)

$$h(t) = \int_0^{\tau} g(\tau)d\tau = K\delta(t) \tag{7.10}$$

имеет вид δ-функции

$$\dot{h}(t) = \delta(t).$$

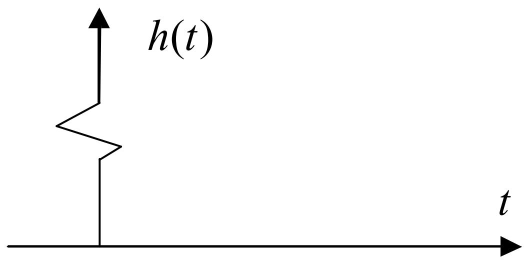


Рис. 7.6. Переходная характеристика

Импульсная переходная функция (рис. 7.7)

$$g(t) = K\dot{\delta}(t) \tag{7.11}$$

представляет собой «дуплет» δ-функции.

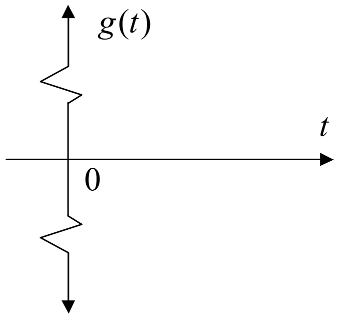


Рис. 7.7. Импульсная переходная характеристика

Частотные характеристики (рис. 7.8): $p \to j\omega$;

$$W(j\omega) = jK\omega; \tag{7.12}$$

$$\mathrm{Re}(\omega) = 0; \mathrm{Im}(\omega) = K\omega; \tag{7.13}$$

$$A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Im}^2(\omega)} = \mathrm{Im}(\omega) = K\omega; \tag{7.14}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)} = 90^0. \tag{7.15}$$

Согласно (7.15) на всех частотах имеется постоянный фазовый сдвиг. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (см. рис. 7.8):

$$L(\omega) = 20\lg K\omega = 20\lg K + 20\lg\omega. \tag{7.16}$$

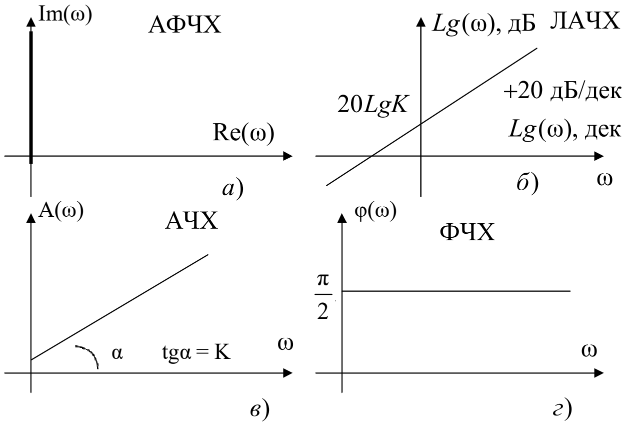


Рис. 7.8. Графики: *а*) АФЧХ; *б*) ЛАЧХ; *в*) АЧХ; *г*) ФЧХ

Из графиков рис. 7.8, *б* и *в* видно, что дифференцирующее звено усиливает высокочастотные сигналы.

Интегрирующее звено

Интегрирующее звено показано на рис. 7.9.

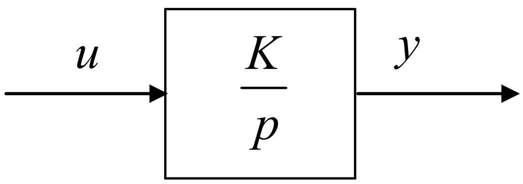


Рис. 7.9. Интегрирующее звено

Его поведение описывает уравнение

$$y = K\int_0^\infty u(\tau)d\tau + y(0)\,. \tag{7.17}$$

Пример: операционный усилитель в режиме интегрирования.

$$\dot{y} = Ku, W(p) = \frac{y}{u} = \frac{K}{p}\,. \tag{7.18}$$

Характеристическое уравнение $A(0) = p = 0$. Оно имеет единственный корень (полюс) $p = 0$.

Переходная характеристика (рис. 7.10)

$$h(t) = K\int_0^t 1(\tau)d\tau = Kt\cdot 1(t)\ - \tag{7.19}$$

это линейно возрастающая функция.

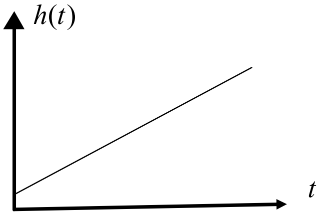


Рис. 7.10. Переходная характеристика

Импульсная переходная функция (рис. 7.11)

$$\mathrm{g}(t) = K\int_0^t \delta(\tau)d\tau = K \cdot 1(t) \; - \tag{7.20}$$

это ступенчатая функция.

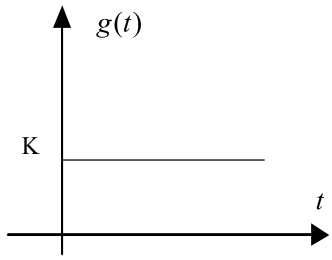


Рис. 7.11. Импульсная переходная характеристика

Частотные характеристики (рис. 7.12): $p \to j\omega$;

$$W(j\omega) = -j\frac{K}{\omega}; \tag{7.21}$$

$$\mathrm{Re}(\omega) = 0; \mathrm{Im}(\omega) = -\frac{K}{\omega}; \tag{7.22}$$

$$A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Im}^2(\omega)} = \mathrm{Im}(\omega) = \frac{K}{\omega}; \tag{7.23}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)} = -90^\circ. \tag{7.24}$$

Согласно (7.24) звено имеет постоянный фазовый сдвиг, который не зависит от частоты.

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (см. рис. 7.12):

$$L(\omega) = 20\lg\frac{K}{\omega} = 20\lg K - 20\lg\omega\,. \qquad (7.25)$$

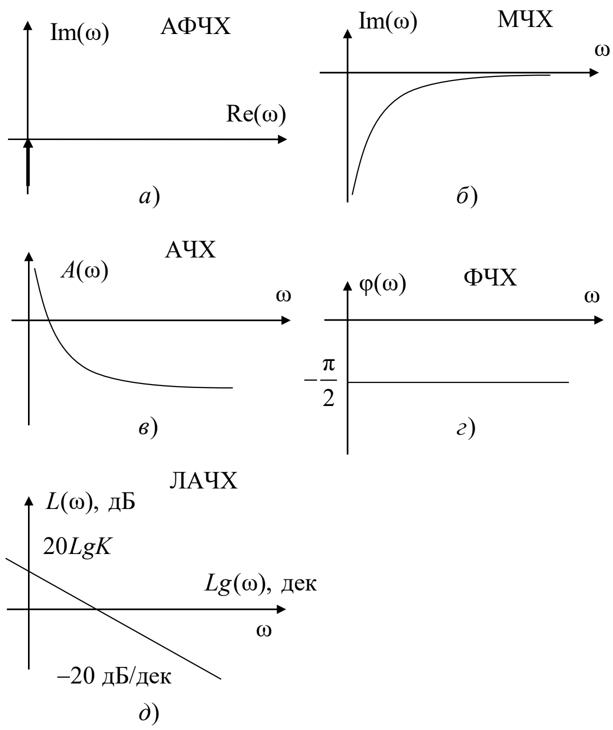


Рис. 7.12. Графики: *а*) АФЧХ; *б*) МЧХ; *в*) АЧХ; *г*) ФЧХ; *д*) ЛАЧХ

Согласно рис. 7.12, *д* рассматриваемое звено усиливает низкочастотные сигналы и ослабляет высокочастотные.

Апериодическое звено

Рассмотрено в разд. 6.

Форсирующее звено

Характеризуется уравнением

$$y = K_1 u + K_2 \dot{u}\,. \qquad (7.26)$$

Его можно представить как сумму уравнений пропорционального (7.1) и дифференцирующего (7.8) звеньев

$$W(p) = \frac{y}{u} = K_1 + K_2 p = K(1 + Tp), \tag{7.27}$$

где $K = K_1$ – коэффициент усиления; $T = \frac{K_1}{K_2}$ – постоянная времени.

Передаточная функция (7.27) содержит полином, корень которого $n = \frac{1}{T}$ называется нулем форсирующего звена.

Переходная характеристика

$$h(t) = K_1 \cdot 1(t) + K_2 \delta(t). \tag{7.28}$$

Импульсная переходная функция

$$\mathrm{g}(t) = \dot{h}(t) = K_1 \delta(t) + K_2 \delta(t). \tag{7.29}$$

Частотные характеристики (рис. 7.13): $p \to j\omega$;

$$W(j\omega) = K(1 + jT\omega); \tag{7.30}$$

$$\mathrm{Re}(\omega) = K; \mathrm{Im}(\omega) = KT\omega; \tag{7.31}$$

$$A(\omega) = \sqrt{K^2 + (KT\omega)^2} = K\sqrt{1 + T^2\omega^2}; \tag{7.32}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(T\omega) \text{ в пределе } \varphi(\infty) = \frac{\pi}{2}. \tag{7.33}$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20\lg K + 10\lg(1 + \mathrm{T}^2\,\omega^2). \tag{7.34}$$

Строим асимптотическую ЛАЧХ (см. рис. 7.13).

1. $\omega << \frac{1}{T}$ $\quad L_1(\omega) = 20\lg K$;

2. $\omega \gg \dfrac{1}{T}$ $\quad L_2(\omega) = 20\lg(T\omega)$.

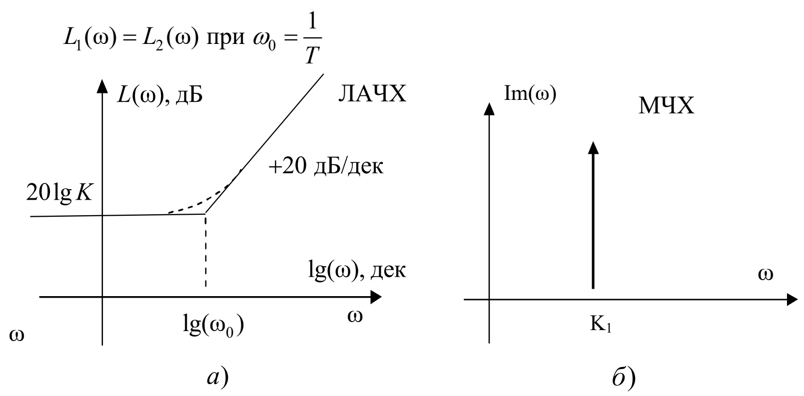


Рис. 7.13. Графики: *а*) ЛАЧХ; *б*) МЧХ

Звено второго порядка

Такое звено характеризуется уравнением

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = bu, \tag{7.35}$$

которое можно записать в стандартном виде

$$T^2\ddot{y} + 2dT\dot{y} + y = Ku, \tag{7.36}$$

где $T = \dfrac{1}{\sqrt{a_0}}$ – постоянная времени; d – коэффициент демпфирования, который определяет склонность переходных процессов к колебаниям; $2dT = \dfrac{a_1}{a_0}$; $K = \dfrac{b}{a_0}$ – коэффициент усиления.

Заменой $p \to \dfrac{d}{dt}$ преобразуем уравнение (7.36) к операторной форме

$$T^2 p^2 y + 2dTpy + y = Ku. \tag{7.37}$$

Тогда передаточную функцию можно записать в виде

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}$$

и выразить ее характеристический полином

$$A(p) = T^2 p^2 + 2dTp + 1. \qquad (7.38)$$

Он имеет 2 полюса, которые в зависимости от d могут быть вещественными или комплексно-сопряженными.

1. $d \geq 1$, корни полинома (7.38) вещественные и положительные. Обозначим их $p_1 = \lambda_1$ и $p_2 = \lambda_2$.

Переходная характеристика

$$h(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} + K. \qquad (7.39)$$

2. $0 \leq d < 1$, корни полинома (7.38) комплексно-сопряженные: $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$. При $d = 0$ получаем $p_{1,2} = \pm j\beta$.

В случае $0 < d < 1$ звено второго порядка называют колебательным с переходной характеристикой

$$h(t) = c_1 e^{-\alpha t}(\cos\beta t + c_2) + K \cdot 1(t). \qquad (7.40)$$

Колебательность переходного процесса (рис. 7.14) будет тем больше, чем меньше d в пределе при $d = 0$ будут иметь место незатухающие колебания.

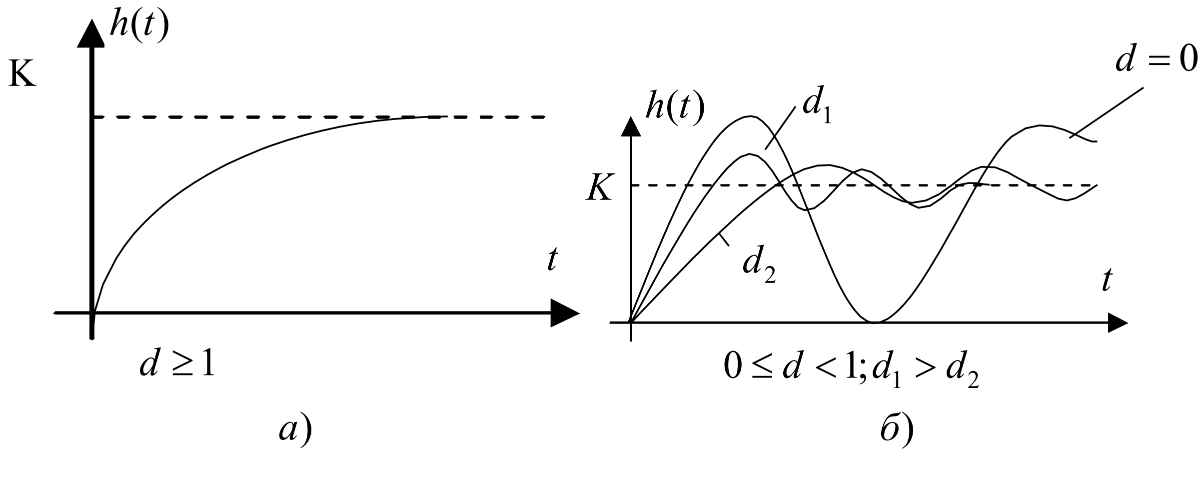


Рис. 7.14. Графики переходной характеристики $h(t)$: *а*) для параметра $d \geq 1$; *б*) $0 \leq d < 1$ – *б*)

Частотные характеристики: $p \to j\omega$;

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j2dT\omega + (-\mathrm{T}^2\omega^2)} = \frac{-K(\mathrm{T}^2\omega^2 + j2dT\omega - 1)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}; \tag{7.41}$$

$$\mathrm{Re}(\omega) = \frac{K(1 - \mathrm{T}^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}; \tag{7.42}$$

$$\mathrm{Im}(\omega) = \frac{2Kd\mathrm{T}\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}. \tag{7.43}$$

На основе (7.42) и (7.43) построим АЧХ и рассмотрим характерные точки: $\omega = 0, \omega = \frac{1}{T}, .., \omega \to \infty$ (рис. 7.15). Ее внешний вид существенно зависит от коэффициента демпфирования d.

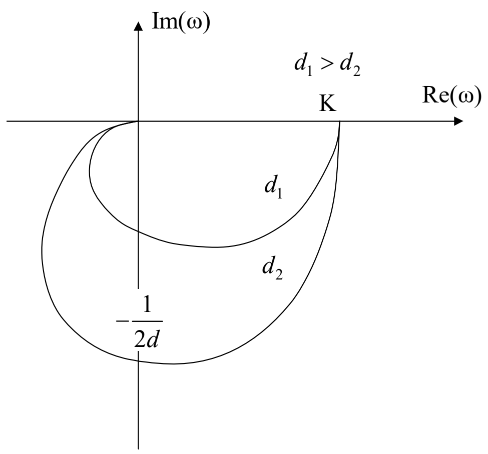
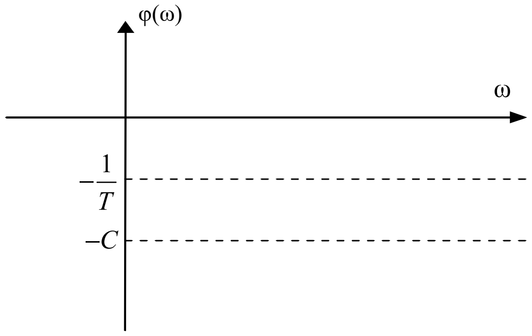


Рис. 7.15. Графики АЧХ для различных параметров $d_1 > d_2$

График ФЧХ показан на рис. 7.16.

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}}; \tag{7.44}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{2dT\omega}{1 - T^2\omega^2}. \tag{7.45}$$



$$\omega = 0 \quad \varphi(\omega) \to 0$$
$$\omega \to 0 \quad \varphi(\omega) \to -C$$

Рис. 7.16. Графики асимптотической ФЧХ

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{(1 + \mathrm{T}^2\,\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}\,. \qquad (7.46)$$

Строим асимптотическую ЛАЧХ (рис. 7.17) в области низких и высоких частот (ОНЧ и ОВЧ):

1. ОНЧ $\omega \ll \frac{1}{T}$ $\qquad L_1(\omega) = 20\lg K$;
2. ОВЧ $\omega \gg \frac{1}{T}$ $\qquad L_2(\omega) = 20\lg(\mathrm{T}\,\omega) - 40\lg(\mathrm{T}\,\omega)$.

$L_1(\omega_0) = L_2(\omega_0) \quad \omega_0 = \frac{1}{T}$.

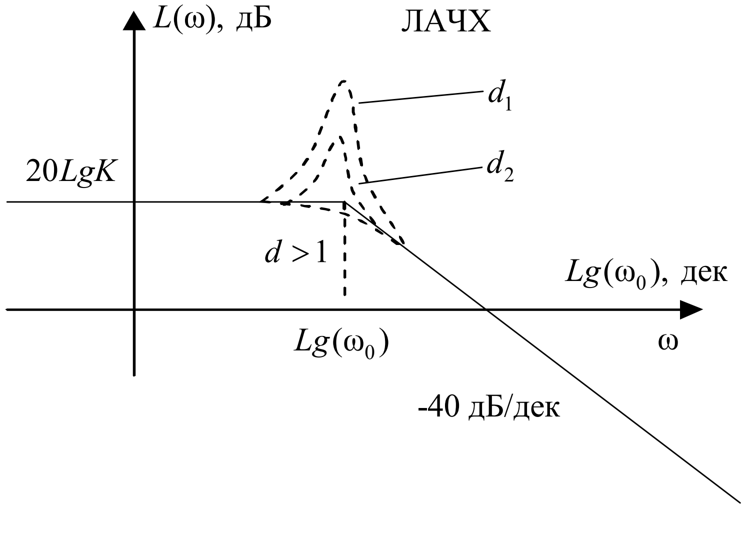


Рис. 7.17. Графики асимптотической ЛАЧХ

Как видно из графика, наибольшее существенное отличие истинной ЛАЧХ от асимптотической наблюдается на частоте $\omega = \omega_0$.

Для $0,3 \le d \le 1$ можно построить упрощенную асимптотическую ЛАЧХ. Рассмотрим снова отдельно два участка в области ОНЧ и ОВЧ.

1. ОНЧ $\omega << \dfrac{1}{T}$ $\quad L_1(\omega) = 20\lg K$;

2. ОВЧ $\omega >> \dfrac{1}{T}$ $\quad L_2(\omega) = 20\lg(\mathrm{T}\omega) - 40\lg(\mathrm{T}\omega)$.

При $d < 0,3$ асимптотическую характеристику для ОНЧ можно принять за истинную и построить как для пропорционального звена. При $d > 1$ корни характеристического уравнения вещественные и передаточную функцию можно записать в виде

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dTp + 1} = K \frac{1}{(T_1 p + 1)} \frac{1}{(T_2 p + 1)}, \qquad (7.47)$$

где $T_1 = \dfrac{1}{\lambda_1}$ и $T_2 = \dfrac{1}{\lambda_2}$ – постоянные времени двух апериодических звеньев. В этом случае ЛАЧХ имеет два излома на частотах $\omega_1 = \dfrac{1}{T_1}$ и $\omega_2 = \dfrac{1}{T_2}$ и может быть получена суммированием ЛАЧХ двух апериодических звеньев (рис. 7.18).

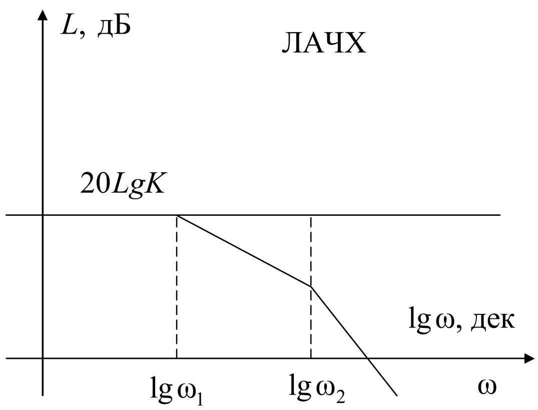


Рис. 7.18. Графики асимптотической ЛАЧХ для пропорционального и двух апериодических звеньев

8. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ САУ

Структурная схема – это графическая модель, в которой каждому элементу ставится в соответствии его динамическая характеристика.

Структурная схема может быть построена на основе дифференциальных уравнений или передаточной функции *W(p)*. Переход от дифференциального уравнения или передаточной функции *W(p)* к схеме может иметь несколько вариантов решения. В структурную схему входят блоки и сумматоры.

Обратная задача имеет единственное решение.

8.1. Структурные преобразования

Способы представления структурной схемы на основе $W(p)$.

8.1.1. Последовательное соединение

Последовательное соединение показано на рис. 8.1.

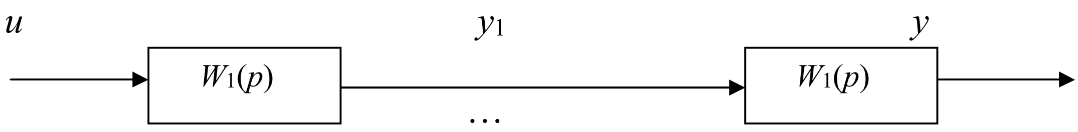


Рис. 8.1. Последовательное соединение

Передаточные функции:

$$W_1(p) = \frac{y_1}{u}, W_2(p) = \frac{y}{y_1},$$

откуда

$$y = W_2(p)y_1;\ y_1 = W_1(p)\mathrm{u} \Rightarrow y = W_1(p)W_2(p)u$$

или

$$W(p)=W_1(p)W_2(p).$$

В общем случае

$$W(p)=\prod_{i=1}^{k}W_k(p). \qquad (8.1)$$

Передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций всех звеньев.

8.1.2. Параллельное соединение звеньев

Параллельное соединение показано на рис. 8.2.

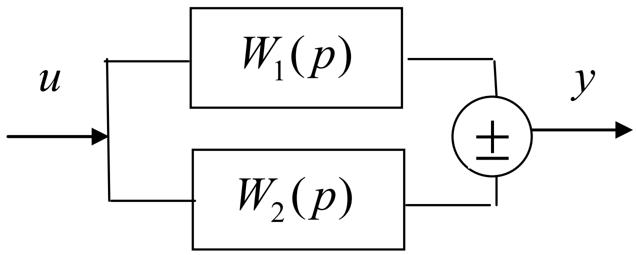


Рис. 8.2. Параллельное соединение

Выходные сигналы звеньев

$$y_1=W_1(p)u; y_1=W_1(p)u.$$

Суммарный «+» или разностный «–» сигнал на выходе

$$y=y_1\pm y_2=W_1(p)\pm W_2(p), \qquad (8.2)$$

где при коротком замыкании, например, второго звена следует принять $W_2(p)=1$.

Передаточная при параллельном суммировании k звеньев

$$W(p) = \sum_{i=1}^{k} W_k(p)\,. \qquad (8.3)$$

Таким образом, передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев, взятых со знаком «+» при суммировании. Если какое-либо звено вычитается, оно берется со знаком «–».

8.1.3. Обратная связь

Выражение для выходной переменной системы с отрицательной обратной связью (знак «–» в сумматоре на рис. 8.3):

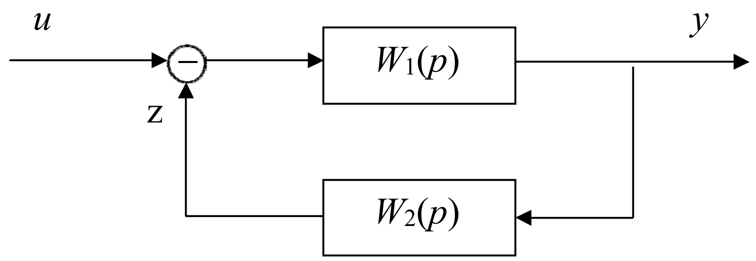


Рис. 8.3. Отрицательная обратная связь

$$y = W_1(p)(u - z) = W_1(p)(u - W_2(p)y)\,.$$

Откуда

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}\,. \qquad (8.4)$$

Таким образом, передаточная функция системы с отрицательной обратной связью равна дроби, в числителе которой стоит передаточная функция прямого канала $W_1(p)$, а в знаменателе – сумма единицы и произведения передаточныхфункций прямого и обратного каналов связи.

При положительной обратной связи (в этом случае в сумматоре на рис. 8.3 будет стоять знак «+») передаточная функция равна

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}\,. \qquad (8.5)$$

8.1.4. Правило переноса

В некоторых случаях для получения общей передаточной функции системы с помощью структурных преобразований удобнее было бы перенести точку приложения сигнала через звено ближе к входу или выходу.

Правило: передаточная функция системы должна оставаться неизменной.

Рассмотрим ситуацию, когда точка приложения сигнала переносится через звено ближе к выходу. Исходная схема представлена на рис. 8.4.

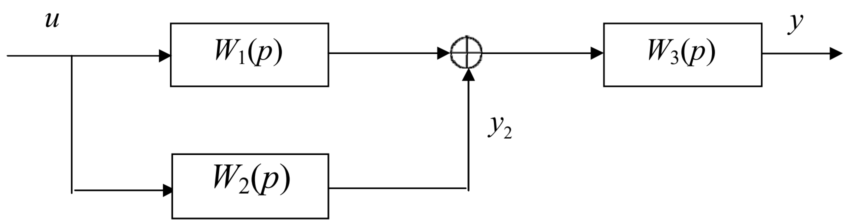


Рис. 8.4. Исходная структурная схема

Передаточная функция структурной схемы –

$$W(p) = (W_1(p) + W_2(p))W_3(p) = W_1(p)W_3(p) + W_2(p)W_3(p) . \qquad (8.6)$$

Последнее выражение передаточной функции (8.6) можно представить структурной схемой (рис. 8.5).

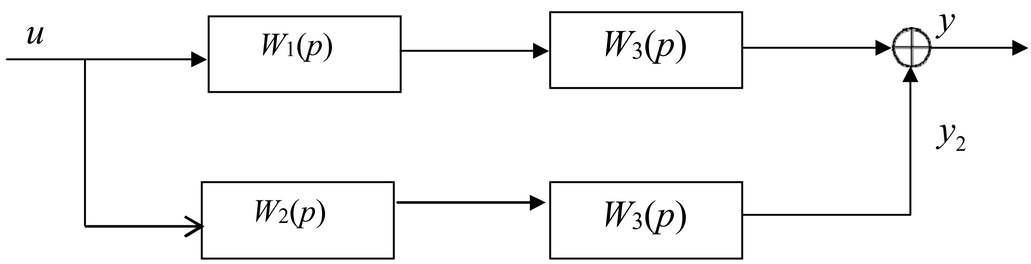


Рис. 8.5. Структурная схема с переносом точки приложения сигнала y_2 ближе к выходу

Из структурной схемы, показанной на рис. 8.5, следует, что при переносе точки приложения сигнала y_2 ближе к выходу в переносимый канал добавляется передаточная функция $W_3(p)$.

Правило: при переносе точки приложения сигнала ближе к выходу системы в переносимый канал следует добавить передаточную функцию звена, через которое переносится сигнал.

2. Рассмотрим ситуацию, когда точка приложения выходного сигнала y_3 звена с ПФ $W_3(p)$ переносится через это звено ближе к входу.

Представим исходную структурную схему, показанную на рис. 8.6, в виде, показанном на рис 8.7.

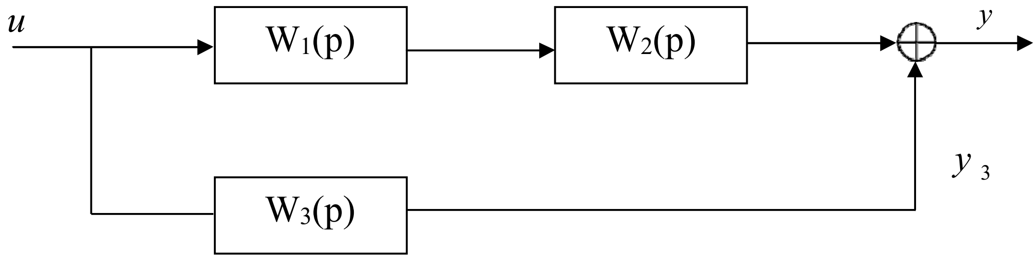


Рис. 8.6. Исходная структурная схема

Ее передаточная функция

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) + W_3(p). \tag{8.7}$$

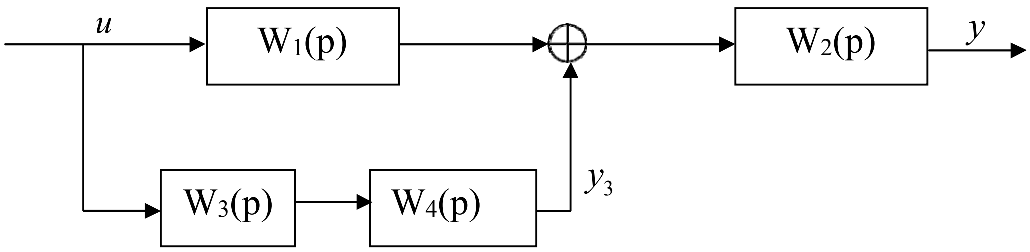


Рис. 8.7. Структурная схема с переносом точки приложения сигнала ближе ко входу

Ее передаточная функция –

$$W(p) = (W_1(p) + W_3(p)W_4(p))W_2(p). \tag{8.8}$$

Так как передаточные функции (8.7) и (8.8) обеих структурных систем должны быть одинаковы, запишем

$$W_1(p)W_2(p) + W_3(p) = (W_1(p) + W_3(p)W_4(p))W_2(p),$$

что это выполняется при

$$W_4(p) = W_2^{-1}(p).$$

Таким образом, структурную схему рис. 8.7 можно представить в виде, показанном на рис. 8.8.

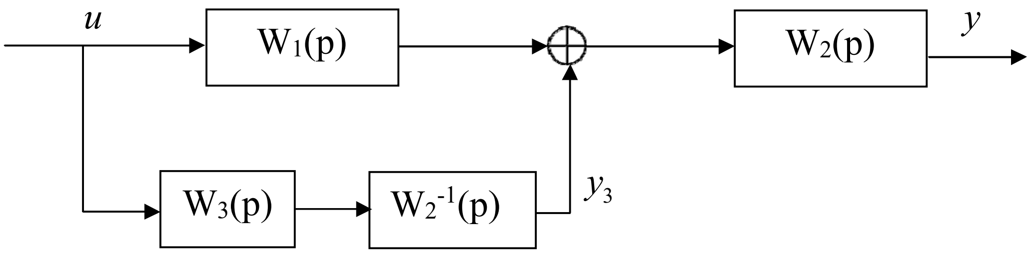


Рис. 8.8. Структурная схема с переносом сигнала y_3
ближе ко входу

Правило: при переносе точки приложения сигнала ближе ко входу структурной схемы через звено в переносимый канал схемы следует добавить передаточную функцию, обратную передаточной функции звена, через которое осуществляется перенос.

Пример. Определить обобщенную передаточную функцию структурной схемы, показанной на рис. 8.9.

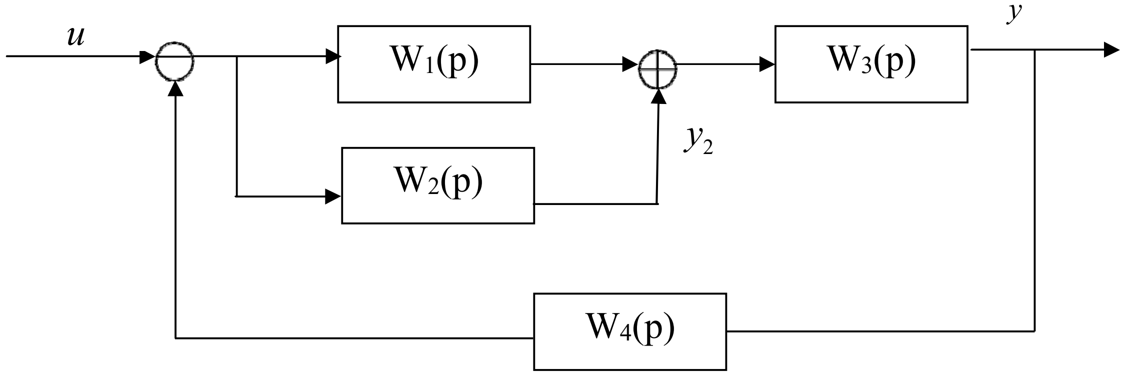


Рис. 8.9. Исходная структурная схема

Перенесем выходной сигнал y_2 звена с передаточной функцией $W_2(p)$ к выходу рассматриваемой структурной схемы. Тогда ее канал можно представить с помощью выражения (8.5) в виде одного звена с обратной связью, как показано на рис. 8.10.

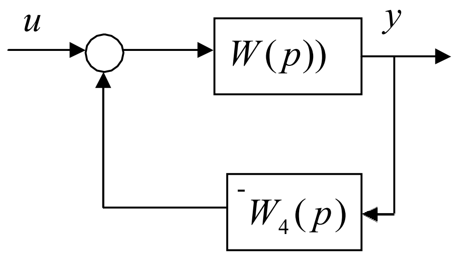


Рис. 8.10. Приведенная структурная схема

Здесь $W(p) = W_1(p)W_3(p) + W_2(p)W_3(p)$ – передаточная функция канала.

Применяя к приведенной структурной схеме (см. рис. 8.10) выражение для отрицательной обратной связи (8.4), получим

$$W(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)W_4(p)} = \frac{W_1(p)W_3(p) + W_2(p)W_3(p)}{1 + (W_1(p)W_3(p) + W_2(p)W_3(p))W_4(p)}. \qquad (8.9)$$

8.2. Переход от моделей ВСВ и ВВ к структурным схемам

8.2.1. Построение структурной схемы по модели ВСВ

Рассмотрим одноканальный объект, поведение которого описываются моделью ВСВ (2.6)

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu; \\ y &= CX + Du. \end{aligned} \qquad (8.10)$$

Проинтегрируем уравнение состояния (первое уравнение) по времени и определим переменные состояния и выхода в виде

$$\begin{cases} X(t) = X(0) + \int_0^t (AX + Bu)d\tau; \\ y(t) = CX(t). \end{cases} \qquad (8.11)$$

Уравнение (8.11) является основанием для составления схемы, показанной на рис 8.11.

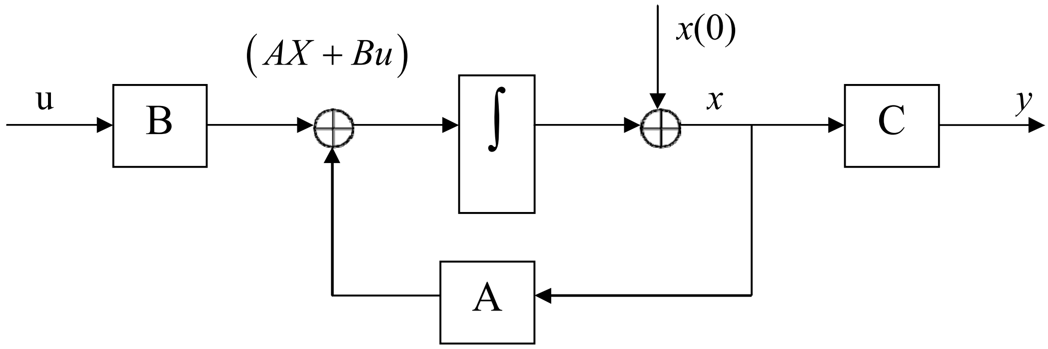


Рис. 8.11. Структурная схема по модели ВСВ вида (8.11)

Структурную схему, соответствующую уравнениям (8.11), удобнее изображать с выходных переменных y, причем выходные и входные переменные объекта желательно располагать на одной горизонтальной прямой.

Пример 1. Изобразить структурную схему объекта, модель которого задана системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2; \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 5x_2 + 2u; \\ y = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Предварительно проинтегрируем два первых уравнения:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t (-x_1 + 2x_2)dt; \\ x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t (-3x_1 - 5x_2 + 2u)dt; \\ y = x_1 + x_2. \end{cases} \qquad (8.12)$$

В соответствии с интегральными уравнениями (8.12) составим структурную схему системы (рис. 8.12).

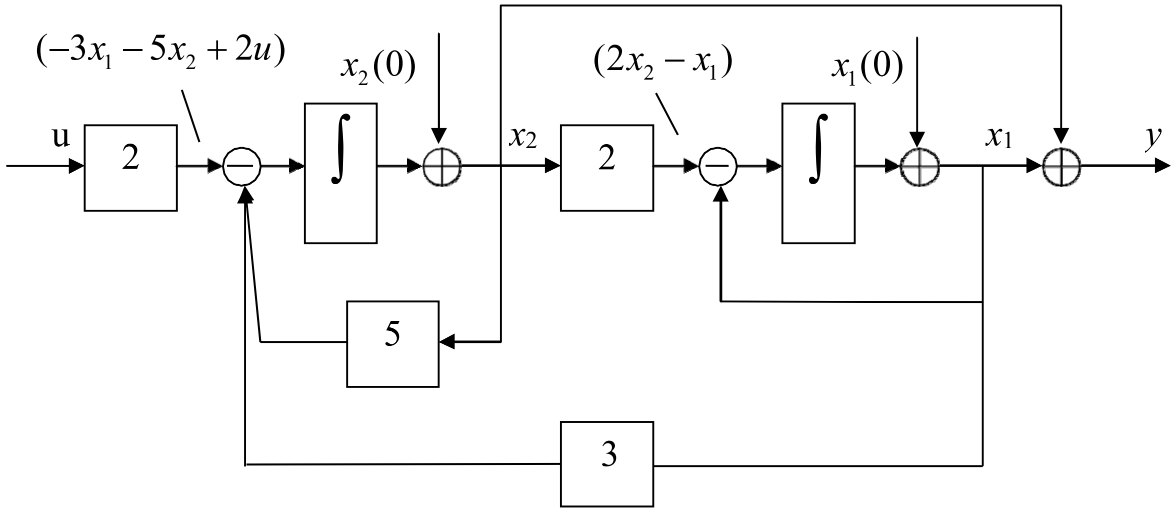


Рис. 8.12. Структурная схема объекта по модели ВСВ

Пример 2. Изобразить структурную схему объекта, модель ВСВ которого имеет вид

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2; \\
\dot{x}_2 = x_3; \\
\dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + u; \\
y = x_1 + x_2 + 2x_3.
\end{cases}
\tag{8.13}
$$

Введем обозначение $p = \dfrac{d}{dt}$. Тогда из (8.13) в операторной форме получим

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{1}{p} x_2); \\
x_2 = \dfrac{1}{p} x_3; \\
x_3 = \dfrac{1}{p}(-2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + u); \\
y = x_1 + x_2 + 2x_3.
\end{cases}
\tag{8.14}
$$

По операторной форме составим структурную схему системы.

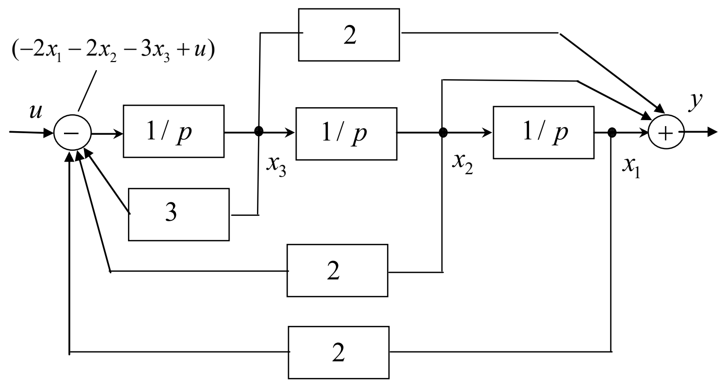


Рис. 8.13. Структурная схема объекта по модели ВСВ

8.2.2. Построение структурной схемы по модели ВВ

Структурную схему одноканального объекта можно составить по модели ВВ (2.7)

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u \,.$$

Разрешим его относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = -a_1 y -, \ldots, -a_{n-1} y^{(n-2)} - a_n y^{(n-1)} + bu \,.$$

Проинтегрировав это выражение n раз, получим

$$\begin{cases} y^{n-1}(t) = y^{n-1}(0) + \int\limits_o^t y^{(n)}(t)dt; \\ \ldots \\ \dot{y}(t) = \dot{y}(0) + \int\limits_o^t \ddot{y}(t)dt; \\ y(t) = y(0) + \int\limits_o^t (-a_1 y -, \ldots, -a_{n-1} y^{(n-2)} - a_n y^{(n-1)} + bu)dt. \end{cases} \qquad (8.15)$$

Системе уравнений (8.15) соответствует структурная схема, показанная на рис 8.14.

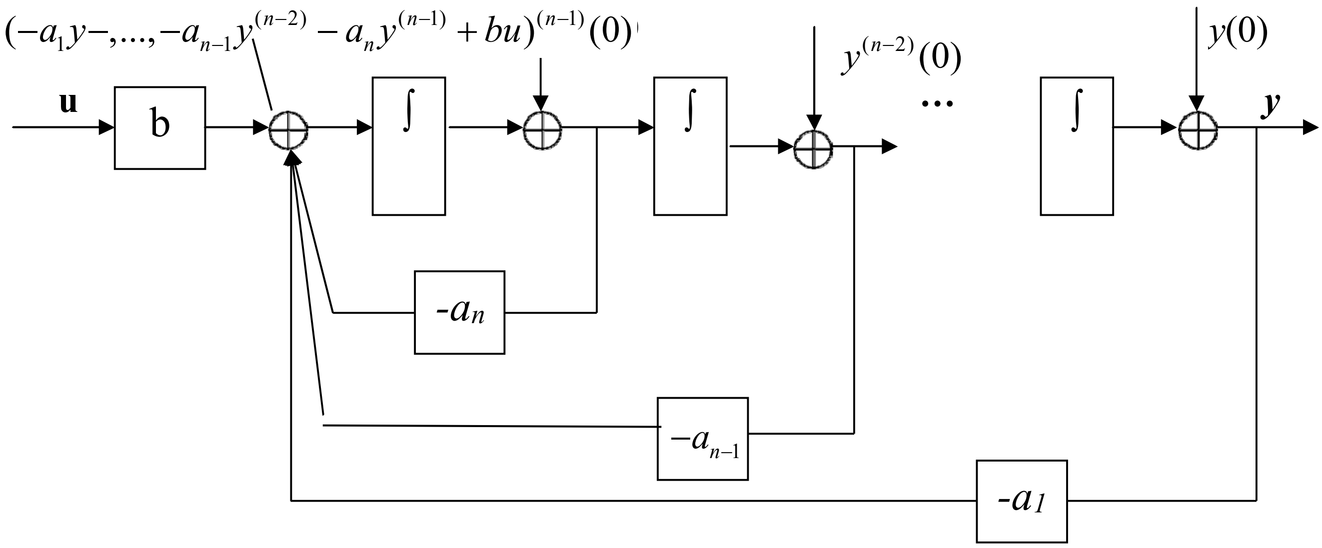


Рис. 8.14. Структурная схема объекта по модели ВВ

Как видим, одноканальный объект управления, поведение которого описывается уравнением (8.14), структурно всегда можно представить в виде цепочки из n последовательно соединенных интеграторов с обратными связями.

Пример. Составить структурную схему объекта, модель ВВ которого имеет вид

$$2\ddot{y} + 0.5\dot{y} + y = 6u. \tag{8.16}$$

Начальные условия: $\ddot{y}(0) = \ddot{y}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, y(0) = y_0$.

Выразим старшую производную

$$2\ddot{y} = -0.5\dot{y} - y + 6u.$$

Изобразим схему получения сигнала (с использованием рис. 8.14). С помощью усилительного звена с коэффициентом усиления 6 получим сигнал u. Также с помощью усилительного звена с коэффициентом усиления 0,5 получаем сигнал $\dot{y}$. Построим теперь прямую цепь схемы (рис. 8.15), последовательно преобразовывая сигнал $\ddot{y}$ интегрирующими звеньями. Добавляя на выходах интегрирующих звеньев соответствующие начальные условия, получаем часть прямой цепи схемы, в которой присутствуют выходной сигнал y и его производные $\ddot{y}, \dot{y}$. Изображаем сумматор, выходным сигналом которого служит $2\ddot{y}$. Выходной сигнал сумматора $2\ddot{y} = -0.5\dot{y} - y + 6u$.

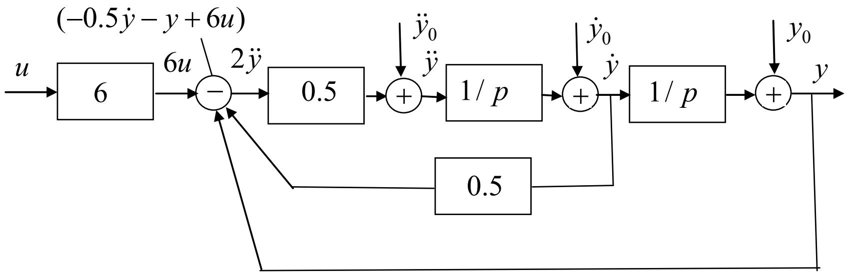


Рис. 8.15. Структурная схема объекта по модели ВВ

8.2.3. Переход от передаточной функции к каноническому описанию

Рассмотрим объект управления, описываемый ПФ:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} +,\ldots,+ b_0}{p^n + a_n p^{n-1} +,\ldots,+ a_1}, m < n. \qquad (8.17)$$

Существует два варианта перехода от ПФ к модели ВСВ.

Предварительно представим (8.17) в виде произведения двух ПФ:

$$1.\quad W(p) = \frac{1}{p^n + a_n p^{n-1} +,\ldots,+ a_1}(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} +,\ldots,+ b_0); \qquad (8.18)$$

$$2.\quad W(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} +,\ldots,+ b_0)\frac{1}{p^n + a_n p^{n-1} +,\ldots,+ a_1}. \qquad (8.19)$$

Каждому из этих представлений (8.18) и (8.19) соответствует своя простая модель ВСВ в переменных состояниях, которая называется канонической формой.

Первая каноническая форма

Она соответствует форме $W(p)$ (8.18). Введем переменную z и представим ее структурной схемой (рис. 8.16).

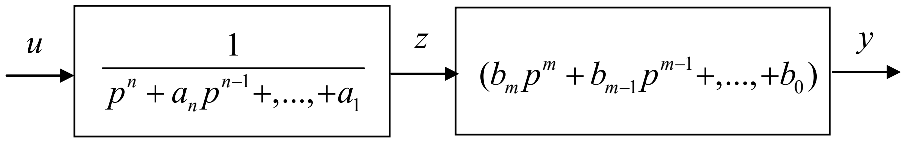


Рис. 8.16. Первая каноническая форма

Для каждого звена системы запишем операторные уравнения:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{p^n + a_n p^{n-1}+,\dots,+a_1}\right) u = z; \\ (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1}+,\dots,+b_0) z = y. \end{cases} \qquad (8.20)$$

Из первого уравнения (8.20) выразим старшую производную

$$p^n z = u - a_n p^{n-1} z -,\dots,- a_1 z\,. \qquad (8.21)$$

Выражение (8.21) позволяет представить первое уравнение (8.20) в виде цепочки n интеграторов с обратными связями, а выходная переменная y формируется в соответствии со вторым уравнением (8.20) как сумма переменной z и ее m производных.

Используя структурные преобразования, получим структурную схему системы, показанную на рис. 8.17.

Таким образом, структурная схема, соответствующая ПФ *W(p)* (8.17) состоит из цепочки n интеграторов, где n-порядок системы. Причем в обратной связи находятся коэффициенты знаменателя исходной *W(p)* (8.18), а в прямой связи – коэффициенты полинома ее числителя.

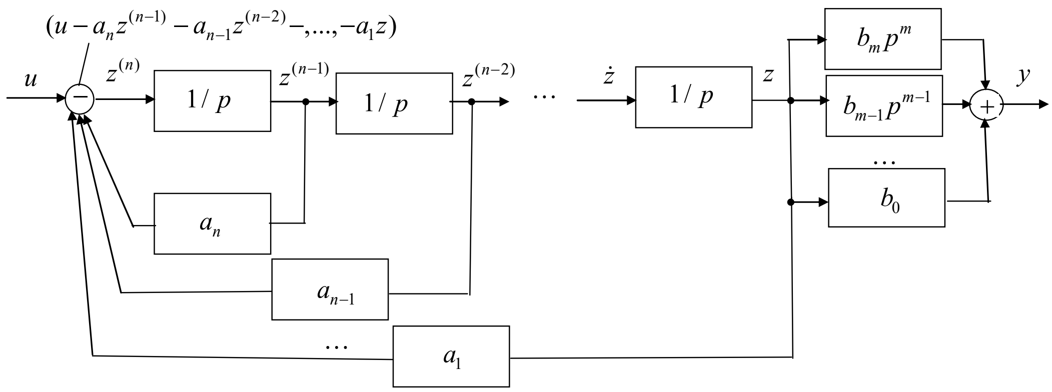


Рис. 8.17. Структурная схема, полученная из первой канонической формы

Обратный переход

Перейдем от полученной структурной схемы (рис. 8.17) к модели ВСВ. Для этого выход каждого интегратора примем за переменную состояния:

$$x_1 = z, x_2 = \dot{z}, ..., x_n = z^{(n-1)}. \tag{8.22}$$

С учетом (8.22) запишем дифференциальные уравнения состояния и уравнение выхода системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dots \\ \dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 -, ..., -a_n x_n + u; \\ y = b_0 x_1 + b_1 x_2 +, ..., + b_m x_{m-1}. \end{cases} \tag{8.23.1}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

$$Y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1,...,b_m & 0,...,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

где матрицы A, B и C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1,...,b_m & 0,...,0 \end{bmatrix}.$$

Модель системы в переменных состояния (8.23.1) называют первой (простой) канонической формой.

Пример. Изобразить структурную схему, соответствующую первой канонической форме для системы (8.20), модель которой описывается:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{5p^2 + 2p + 7}{p^3 + 3p^2 + 4p + 1}.$$

Операторные уравнения с учетом (8.20) можно представить в виде:

$$\begin{cases} (p^3 + 3p^2 + 4p + 1)z = u; \\ (5p^2 + 2p + 7)z = y. \end{cases} \tag{8.23.2}$$

Старшая производная

$$\dddot{z} = -3\ddot{z} - 4\dot{z} - z + u$$

или

$$\dddot{z} = -3x_3 - 4x_2 - x_1 + u. \tag{8.24}$$

Уравнение (8.24) совместно с вторым уравнением (8.23.2) образует систему уравнений

$$\begin{cases} \dddot{z} = -3\ddot{z} - 4\dot{z} - z + u; \\ y = 5\ddot{z} + 2\dot{z} + 7z, \end{cases}$$

определяющей структурную схему (рис. 8.18).

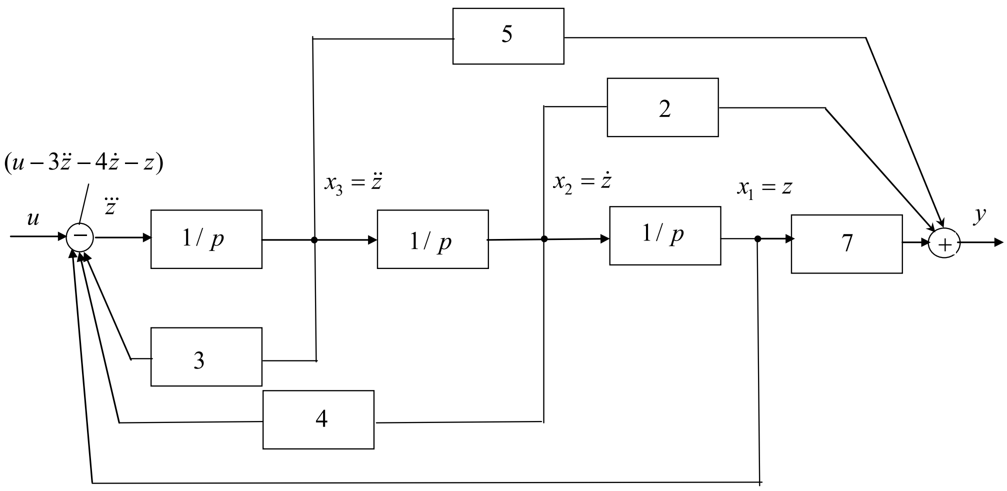


Рис. 8.18. Структурная схема, составленная по ПФ

Обратный переход

Вернемся к переменной z:

$$z = x_1; \dot{z} = x_2; \ddot{z} = x_3.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dddot{z} = -3\ddot{z} - 4\dot{z} - z + u; \\ y = 5\ddot{z} + 2\dot{z} + 7z \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dddot{z} + 3\ddot{z} + 4\dot{z} + z = u; \\ y = 5\ddot{z} + 2\dot{z} + 7z. \end{cases} \tag{8.25}$$

Замена в (8.25) вида $\dfrac{d}{dt} = p$ дает

$$\begin{cases} p^3 z + 3p^2 z + 4pz + z = u; \\ y = 5p^2 z + 2pz + 7z, \end{cases}$$

откуда

$$W_1(p) = \frac{z}{u} = \frac{1}{p^3 + 3p^2 + 4p + 1};$$

$$W_2(p) = \frac{y}{z} = 5p^2 + 2p + 7;$$

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{5p^2 + 2p + 7}{p^3 + 3p^2 + 4p + 1}.$$

Вторая каноническая форма

Применяется форма $W(p)$ (8.19) аналогично рассмотренным выше примерам первой канонической формы.

8.3. Область применения структурного метода

Этот метод удобен при расчете линейных автоматических систем, но имеет свои ограничения. Метод предполагает использование передаточных функций, поэтому может применяться при нулевых начальных условиях.

При использовании структурного метода необходимо придерживаться следующего правила: при любом преобразовании системы ее порядок не должен уменьшаться, т. е. недопустимо сокращение одинаковых множителейв числителе и знаменателе $W(p)$.

Сокращая одинаковые множители, мы тем самым выбрасываем из системы реально существующие звенья.

9. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Основные понятия

Устойчивость – это способность системы возвращаться в исходное состояние после снятия внешних воздействий. Существуют три формы равновесия (рис. 9.1):

а) устойчивая – при $t \to \infty$ шарик возвращается в устойчивое положение $y(t) \to 0$;

б) неустойчивая – при $t \to \infty$ шарик переходит в неустойчивое положение $y(t) \to \infty$;

в) безусловная – при $t \geq 0$ шарик для любого отклонения положения от начального всегда находится в положении равновесия $y(t) = y_0 = \text{const}$.

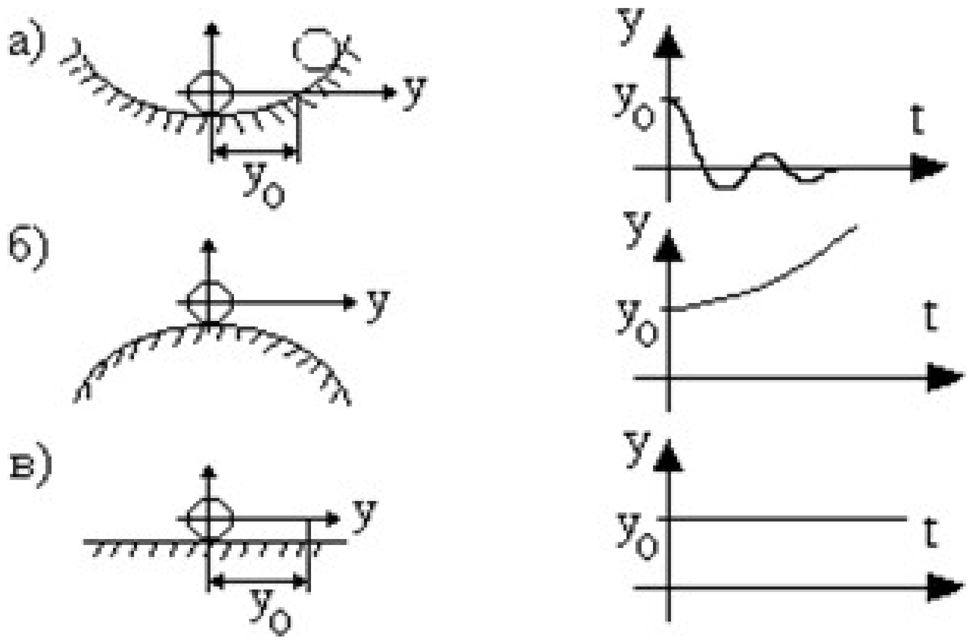


Рис. 9.1. Виды устойчивости

Физически устойчивость САУ означает, что при ограниченном входном воздействии выходной сигнал также ограничен и процессы в системе стремятся к определенному значению при любых начальных условиях.

Потеря устойчивости системы приводит к ее неработоспособности.

Одним из основных режимов работы САУ является равновесный (статический) режим.

Равновесный режим – такой, при котором переменные состояния с течением времени не меняются:

$$\dot{X} = 0 .$$

Определение: система называется устойчивой, если при любом отклонении $\Delta = X - X^0$ от равновесного состояния X^0 она с течением времени всегда возвращается в исходное равновесное состояние X^0:

$$\lim_{t \to \infty} \Delta(t) = 0 . \tag{9.1}$$

Согласно определению (9.1), устойчивость линейной САУ определяется только ее структурой и параметрами и не зависит от величины внешних воздействий и начальных условий.

Переходные характеристики $h(t)$ и $g(t)$ (рис. 9.2) устойчивых САУ стремятся к пределу:

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = k ; \tag{9.2}$$

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0 . \tag{9.3}$$

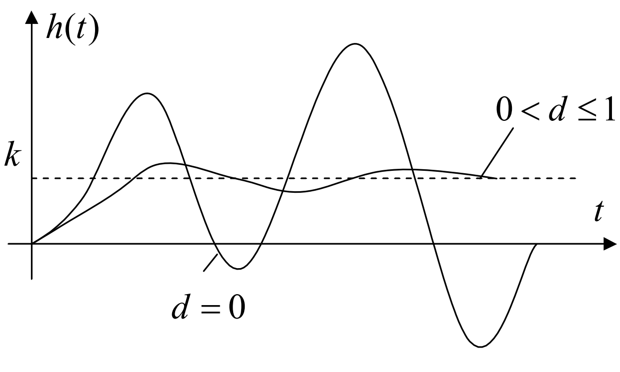


Рис. 9.2. Переходная характеристика САУ второго порядка при параметре $d = 0$ (незатухающая колебательная система) и $0 < d \le 1$ (колебательная система)

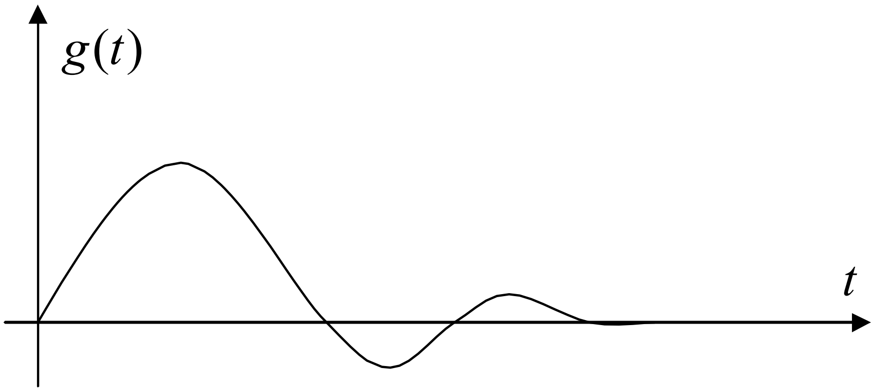


Рис. 9.3. Импульсная переходная характеристика

9.1. Условия устойчивости линейных систем

Согласно определению (9.1) устойчивость линейных САУ не зависит от внешних воздействий и начальных условий. Следовательно, анализ их устойчивости можно провести на основе анализа характеристического уравнения

$$A(p) = a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0, \qquad (9.4)$$

полученного из полинома $A(p)$ передаточной функции (3.7)

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{(m-1)} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \ldots + a_1 p + a_0}; n \geq m.$$

9.1.1. Необходимое условие устойчивости

У устойчивой линейной системы все коэффициенты характеристического уравнения (9.4) должны быть положительными. Это является необходимым, но недостаточным условием устойчивости системы, поэтому необходима дополнительная проверка.

9.1.2. Необходимое и достаточное условие устойчивости линейной системы

Линейная система будет устойчива только тогда, когда все корни λ_i характеристического уравнения (9.4) будут иметь отрицательную вещественную часть (рис. 9.4).

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0; i = \overline{1,n}. \quad (9.5)$$

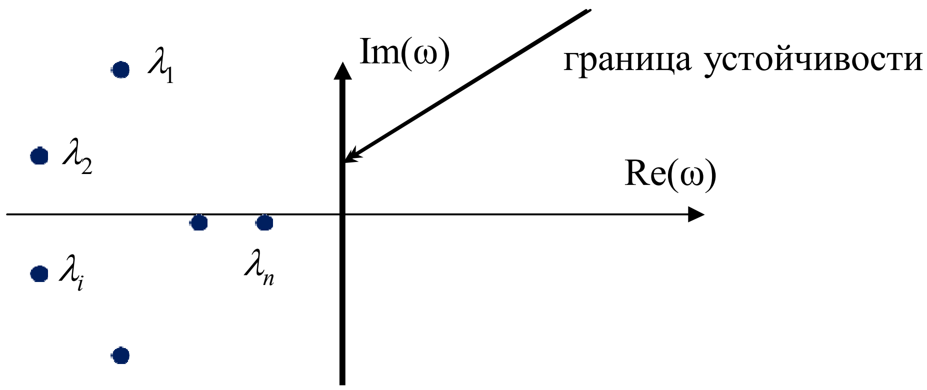


Рис. 9.4. Корни λ_i характеристического уравнения на комплексной плоскости

Пример 1. Проверить устойчивость системы.

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1}.$$

Характеристическое уравнение $A(p) = Tp + 1 = 0$.

Корень: $\lambda = -\dfrac{1}{T}$, который при $T > 0$ будет вещественным и отрицательным.

Таким образом, $T > 0$ является необходимым и достаточным условием устойчивости системы.

Пример 2. Проверить устойчивость системы 2-го порядка.

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}.$$

Характеристическое уравнение

$$A(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = T^2 p^2 + 2dTp + 1 = 0. \qquad (9.6)$$

Корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2dT \pm 2T\sqrt{d^2-1}}{2T^2} = -\frac{d}{T} \pm \frac{\sqrt{d^2-1}}{T};$$

$\mathrm{Re}\{\lambda_{1,2}\} < 0$ при $T > 0$ и $d > 0$.

Таким образом, *положительность коэффициентов* a_2, a_1 и a_0 *характеристического уравнения* (9.6) *является одновременно необходимым и достаточным условием устойчивости систем 2-го порядка.*

9.2. Критерии устойчивости

9.2.1. Критерий устойчивости Гурвица

Для устойчивой линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы все n диагональных миноров матрицы Гурвица были положительными; n – порядок характеристического полинома (3.2).

По этому алгебраическому критерию условия устойчивости сводятся к выполнению ряда неравенств, связывающих коэффициенты характеристического полинома (3.2) (знаменателя ПФ (3.7)):

$$A(p) = a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \ldots + a_1 p + a_0; \qquad (9.7)$$

Матрица Гурвица размерностью $n \times n$ составляется из коэффициентов характеристического полинома

$$H^{(n\times n)} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & \ldots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_2 & a_0 \end{pmatrix}, \qquad (9.8)$$

где на главной диагонали (сверху вниз) выписываются по порядку коэффициенты $(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0)$. Первая строка заполняется от коэффициента a_{n-1} к коэффициенту a_{n-3} через один вправо. Отсутствующие коэффициенты заполняются нулями. Вторая строка заполняется от коэффициента a_n к коэффициенту a_{n-2} через один вправо. Отсутствующие коэффициенты заполняются нулями. Последующие две строки получаются из двух первых сдвигом их на один столбец, а следующие две строки – сдвигом их на два столбца и т. д. Каждый освободившийся столбец заполняется нулями.

Критерий: для устойчивости линейных САУ необходимо и достаточно, чтобы все диагональные миноры матрицы Гурвица были положительными.

$$\Delta_i > 0; i = \overline{1,n}, \tag{9.9}$$

где Δ_i – диагональные миноры матрицы Гурвица:

$\Delta_1 = a_{n-1} > 0$;

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{pmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{pmatrix} > 0;$$

$$\dots$$

$\Delta_n = \det H = a_0 \Delta_{n-1} > 0$.

Поскольку Δ_{n-1} должен быть положительным, то последнее условие соответствует требованию $a_0 > 0$.

Следствие: условие границы устойчивости:

$$\begin{cases} \Delta_n = \det H = a_0 \Delta_{n-1} = 0; \\ \Delta_i > 0; i = \overline{1,(n-1)}. \end{cases} \tag{9.10}$$

Условие (9.10) распадается на два

$$
\begin{aligned}
&1.\begin{cases} a_0 = 0; \\ \Delta_i > 0; i = \overline{1,(n-1).} \end{cases} \\
&2.\begin{cases} \Delta_{n-1} = 0; \\ \Delta_i > 0; i = \overline{1,(n-1).} \end{cases}
\end{aligned}
\qquad (9.11)
$$

Первое условие соответствует границе апериодической устойчивости, когда один из полюсов равен нулю, а второе – границе колебательной устойчивости, когда два комплексно сопряженных корня расположены на мнимой Im оси.

Пример 1. Составим матрицы Гурвица H и ее миноры Δ_i для систем порядка $n=2$, $n=3$ и $n=4$.

Для систем третьего порядка ($n=2$):

$$A(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0; \qquad (9.12)$$

$$H^{(3\times3)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{pmatrix},$$

откуда $\Delta_1 = a_1$; $\Delta_2 = a_1 a_0$.

Для систем третьего порядка ($n=3$):

$$A(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0; \qquad (9.13)$$

$$H^{(3\times3)} = \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\Delta_1 = a_2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3;$$

$$\Delta_3 = a_0 \Delta_2.$$

Для систем четвертого порядка ($n=4$):

$$A(p)=a_4p^4+a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0;$$

$$H^{(4\times4)}=\begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1=a_3;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix}=a_3a_2-a_1a_4;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}=a_3a_1a_2-a_3^2a_0-a_1^2a_4=a_1(a_2a_3-a_1a_4)-a_0a_3^2;$$

$$\Delta_4=a_0\Delta_3.$$

Пример 2. Проверить с помощью критерия Гурвица устойчивость системы с характеристическим уравнением вида (9.12) при $a_3=1$:

$$A(p)=p^3+a_2p^2+a_1p+a_0;$$

$$H^{(3\times3)}=\begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1=a_3>0;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix}=a_1a_2-a_0>0\Rightarrow a_1a_2>a_0;$$

$$\Delta_3=a_0\Delta_2\Rightarrow a_0>0.$$

Таким образом, для критерия $\Delta_i>0; i=\overline{1,n}$ (9.9) условием устойчивости системы порядка $n=3$ является $a_1a_2>a_0$.

9.2.2. Критерий устойчивости Михайлова

В этом графо-аналитическом критерии также используют характеристический полином (3.2) (знаменателя ПФ (3.7)):

$$A(p) = a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \ldots + a_1 p + a_0 .$$

На основе этого характеристического полинома заменой $p = j\omega$, получают характеристический комплекс

$$A(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1 j\omega + a_0 = X(\omega) + jY(\omega) . \qquad (9.14)$$

Характеристический комплекс $A(j\omega)$ (9.14) позволяет построить на комплексной плоскости кривую, которую называют *годографом Михайлова.*

Критерий: для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова $A(j\omega)$ при $\omega = \overline{0,\infty}$ начинался на вещественной оси в точке a_1 и проходил последовательно против часовой стрелки n квадрантов комплексной плоскости, не обращаясь в нуль и стремясь к ∞ в n-м квадранте.

Условия границы устойчивости (годограф должен пересекать начало координат) (рис. 9.5):

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\omega_0 = 0; \\ \mathrm{Im}\,\omega_0 = 0. \end{cases} \qquad (9.15)$$

где ω_0 – частота незатухающих колебаний, которые возникают в системе на границе устойчивости. Годографы для неустойчивых САУ показаны на рис. 9.6.

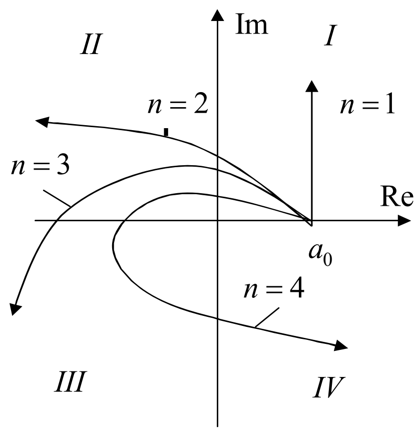


Рис. 9.5. Годографы Михайлова для устойчивых линейных САУ n-го порядка

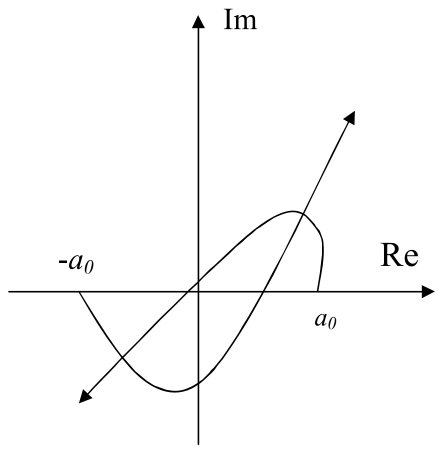


Рис. 9.6. Годографы Михайлова для неустойчивых линейных САУ

Пример. Проверить устойчивость замкнутой САУ, структурная схема которой показана на рис. 9.7.

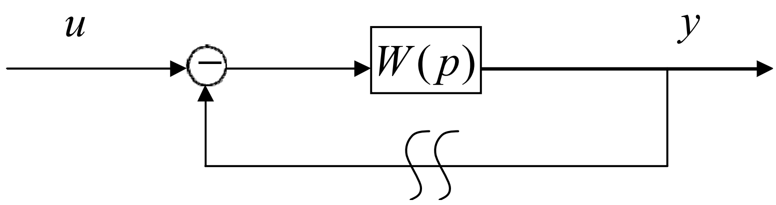


Рис. 9.7. Структурная схема

$W(p) = \dfrac{2}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$ – передаточная функция разомкнутой САУ.

Передаточная функция замкнутой САУ (с отрицательной обратной связью)

$$W_{-}(p) = \frac{2}{p^3 + 2p^2 + 2p + 3}.$$

Характеристический комплекс

$$A(j\omega) = (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 3 = \mathrm{Re}(\omega) + j\,\mathrm{Im}(\omega),$$

где $\mathrm{Re} = 3 - \omega^2$ и $\mathrm{Im}(\omega) = (2\omega - \omega^3)$.

Расчет годографа Михайлова приведен в таблице, а его график – на рис. 9.8

ω	0	1	1,22	1,41	…	∞
Re_F (ω)	3	1	0	–1	…	–∞
Im_F (ω)	0	1	0,61	0	…	–∞

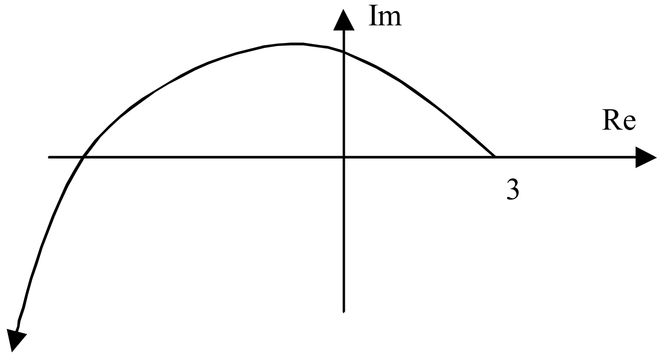


Рис. 9.8. Годограф Михайлова

Анализируемая система устойчива.

9.2.3. Критерий устойчивости Найквиста

Критерий Найквиста позволяет определить устойчивость системы с ООС (так называемой *замкнутой системы*) по амплитудно-фазовой частотной характеристике *разомкнутой системы*. АФХЧ разомкнутой системы снимаем экспериментально или получаем на основе передаточной функции.

Рассмотрим этот критерий для замкнутой САУ, структурная схема которой показана на рис. 9.7.

Запишем передаточную функцию (3.7) этой же устойчивой разомкнутой системы (без обратной связи):

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{(m-1)} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \ldots + a_1 p + a_0}; n \geq m. \qquad (9.16)$$

Осуществив в этой ПФ замену вида $p \to j\omega$, получим амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы

$$W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \mathrm{Re}(\omega) + j\,\mathrm{Im}(\omega). \qquad (9.17)$$

Критерий Найквиста: для устойчивости замкнутой системы необходимо идостаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика устойчивой разомкнутой системы при изменении ω от 0 до бесконечности не охватывала точку с координатами $\{-1; j0\}$.

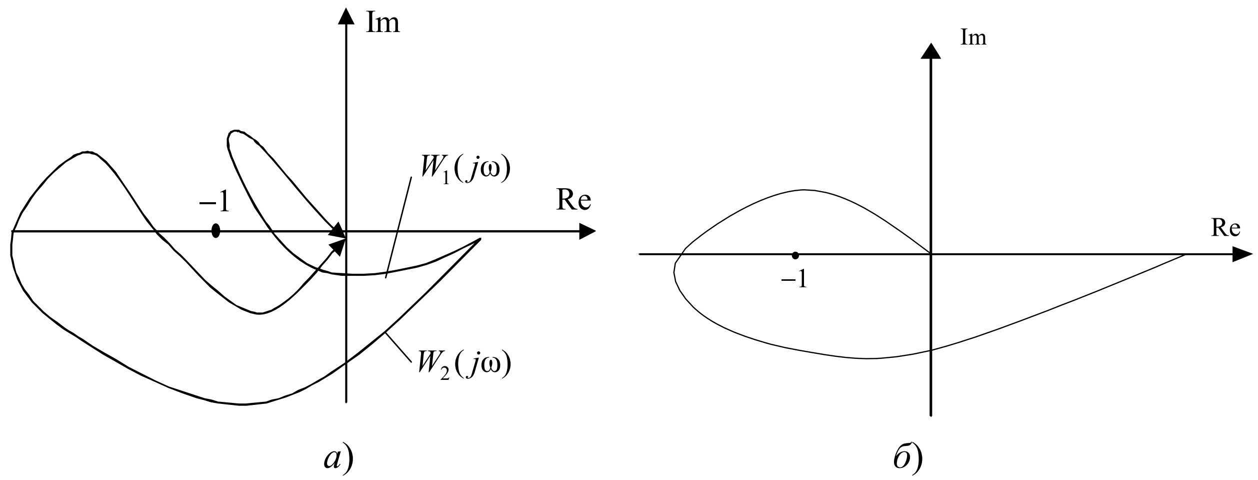


Рис. 9.9. Амплитудно-фазовая характеристика САУ: *а*) устойчивой; *б*) неустойчивой

Разомкнутая система может быть неустойчивой, однако это не означает, что и замкнутая система будет неустойчива. В такой ситуации следует использовать *видоизмененную формулировку критерия Найквиста:* замкнутая система будет устойчива тогда и только тогда, когда амплитудно-фазовая характеристика неустойчивой разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞ охватывает точку $\{-1;\ j\ 0\}$ в положительном направлении r раз, где r – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы с положительной вещественной частью.

Критерий Найквиста можно применять, если разомкнутая система имеет в своем составе интегратор, т. е. находится на границе устойчивости (рис. 9.10).

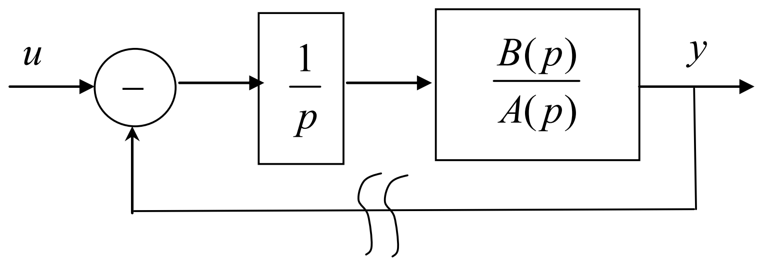


Рис. 9.10. САУ с интегрирующим звеном $\frac{1}{p}$

В этом случае ПФ $W(p)$ разомкнутой САУ можно записать в виде

$$W(p)=\frac{B(p)}{pA(p)}, \tag{9.18}$$

где $A(p)$ – характеристический полином устойчивой САУ.

АФХ разомкнутой системы W(jω) будет иметь неопределенность при ω = 0: A(0→∞, а φ(0) скачком изменится на 180°.

Для получения определенности характеристику при построении дополняют полуокружностью бесконечно большого радиуса так, чтобы она начиналась на положительной вещественной полуоси. Такое дополнение АФХ разомкнутой системы позволяет использовать исходную формулировку критерия Найквиста.

Условия границы устойчивости. Замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, если при некоторой чистоте $\omega = \omega_0$ АФХ разомкнутой системы проходит через точку $\{-1; j0\}$ (рис. 9.11).

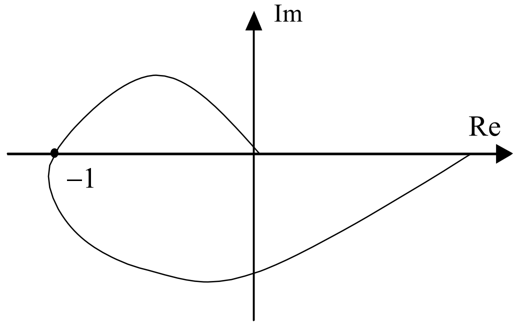


Рис. 9.11. АФХ замкнутой САУ на границе устойчивости

Аналитическая запись условия границы устойчивости

$$1+W(j\omega_0)=0. \qquad (9.19)$$

Рассмотрим САУ с отрицательной обратной связью, содержащей звено с ПФ $W_2(p)\neq 1$ (рис. 9.12).

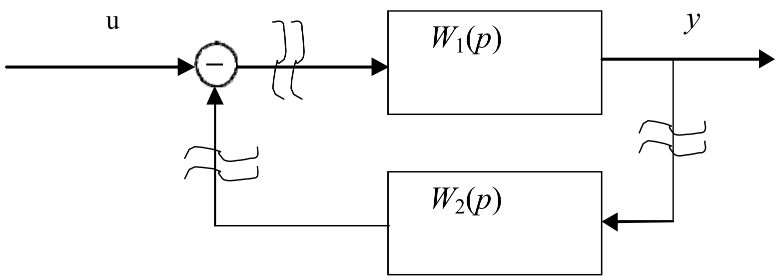


Рис. 9.12. САУ отрицательной обратной связью

Сначала получим $W(p)$ разомкнутой САУ. Для этого разорвем связь произвольным образом, а выход и вход САУ будем рассматривать в месте разрыва:

$$W(p)=W_1(p)W_2(p). \qquad (9.20)$$

Далее следует использовать соответствующую формулировку критерия.

Пример. Проверить устойчивость системы (рис. 9.13) с помощью критерия Найквиста.

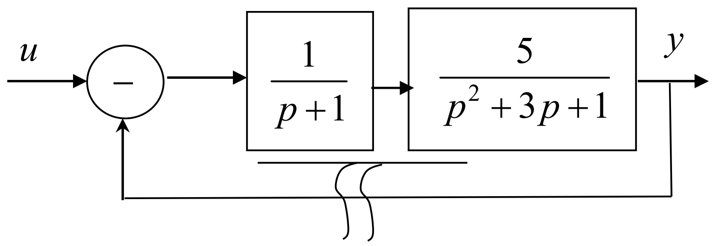


Рис. 9.13. Структурная схема САУ

Передаточная функция разомкнутой САУ

$$W(p) = \frac{10}{p^2 + 4p^2 + 4p + 1}. \tag{9.21}$$

Матрица Гурвица:

$$H = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix};$$

$\Delta_1 = 4 > 0$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0$;

$\Delta_3 = 1 \cdot 15 > 0$.

По критерию Гурвица разомкнутая САУ устойчива.

Выполнив в ПФ (9.21) замену вида $p \to j\omega$, получим

$$W(j\omega)=\frac{10}{p^3+4p^2+4p+1}=\frac{10}{(j\omega)^3+4(j\omega)^2+4(j\omega)+1}=$$

$$=\frac{10(1-4\omega^2)}{(1-4\omega^2)^2+(4\omega-4\omega^3)^2}-j\frac{10(4\omega^2-4\omega^3)}{(1-4\omega^2)^2+(4\omega-4\omega^3)^2}.$$

Изменяем ω от 0 до ∞.

ω	0	0,5	2	∞
Im(ω)	0	–16/3	0	0
Re(ω)	10	0	–2/3	0

График АФХ САУ показан на рис. 9.14.

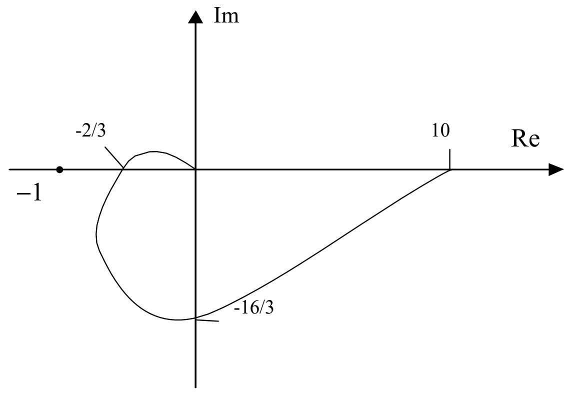


Рис. 9.14. АФХ САУ

АФХ не охватывает точку $\{-1; j0\}$ => САУ устойчива.

9.2.4. Метод D-разбиения

При разработке САУ бывает необходимо знать нетолько запас устойчивости, но и всю область устойчивости по параметрам.

Метод D-разбиения позволяет построить область устойчивости в плоскости одного или двух параметров САУ.

Рассмотрим суть метода по одному параметру D (например, $D=a_{n-1}$), который входит в характеристический полином (3.2)

$$A(p) = a_n p^{(n)} + Dp^{(n-1)} + \ldots + a_1 p + a_0 \qquad (9.22)$$

линейно. Остальные коэффициенты a_n, …, a_1 и a_0 этого полинома считают постоянными.

Согласно определению границы устойчивости (9.15) по критерию Михайлова (9.15) можно записать уравнение этой границы, преобразовав характеристический полином к виду

$$A(p) = N(p) + DM(p) = 0. \qquad (9.23)$$

Осуществив в (9.23) замену вида $p \to j\omega$ и разрешив относительно параметра D, получим его комплексное представление

$$D(j\omega) = -\frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} = \mathrm{Re}(\omega) + j\mathrm{Im}(\omega).$$

При изменении ω от $-\infty$ до ∞, конец вектора на комплексной плоскости описывает кривую D-разбиения. Кривая D-разбиения представляет границу устойчивости (рис. 9.15).

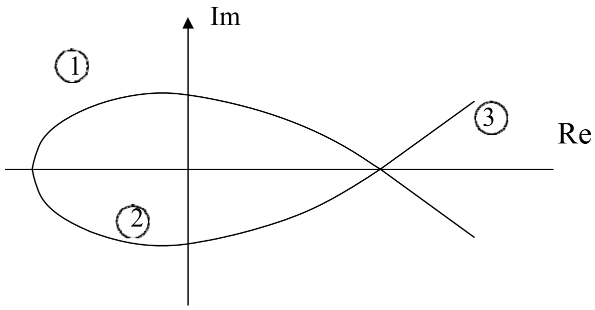


Рис. 9.15. Кривая D-разбиения

Она симметрична относительно Re-оси, поэтому достаточно построить ее часть, соответствующую положительным значениям частоты ω, а вторую получим отображением.

Кривая разбивает комплексную плоскость на несколько подобластей с различным соотношением корней.

Для определения области устойчивости нужно выбрать по одному значению D в каждой из них и проверить устойчивость системы. Если система устойчива при конкретном D, то она будет устойчива при всех его значениях из этой области.

Обычно в качестве параметра D фигурирует реальный параметр системы (коэффициент усиления, постоянная времени t и т. п.), который может иметьтолько вещественное значение. Представление комплексным выражением D(jω) носит формальный характер, а область устойчивости ограничивается отрезком вещественной оси.

Пример. Определить область устойчивости замкнутой САУ по коэффициенту усиления K (рис. 9.16).

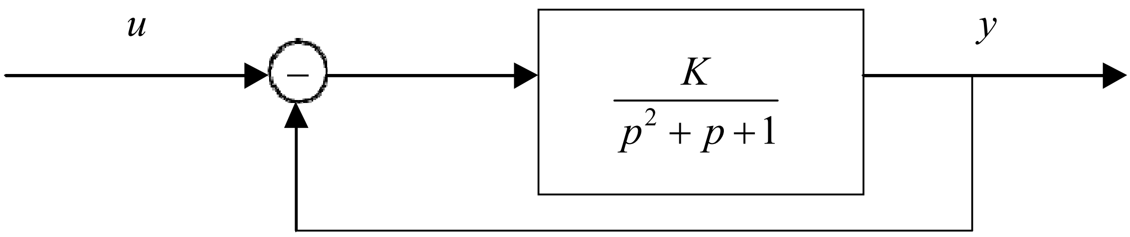


Рис. 9.16. Структурная схема САУ с отрицательной обратной связью

ПФ АСУ с трицательной обратной связью

$$W_{-}(p)=\frac{\dfrac{K}{p^2+p+1}}{1+\dfrac{K}{p^2+p+1}}=\frac{K}{p^2+p+K+1}.$$

Характеристический полином

$$A(p)=p^2+p+K+1. \qquad (9.24)$$

Осуществив в (9.24) замену вида $p \to j\omega$ и $K \to D$ с разрешением относительно D, получим

$$D(j\omega) = \omega^2 - j\omega - 1 = (\omega^2 - 1) - j\omega\,.$$

ω	0	1	2	…	∞
Re(ω)	–1	0	3	…	∞
Im(ω)	0	–1	–2	…	–∞

График кривой разбиения показан на рис. 9.17.

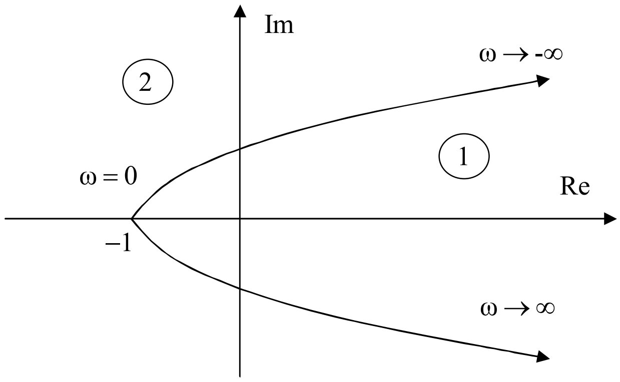


Рис. 9.17. Кривая разбиения

Выберем по одному вещественному значению из областей 1 и 2 и оценим устойчивость. Для системы второго порядка необходимо и достаточно, чтобы $a_i > 0 \Rightarrow$ 1 – область устойчивости ($-1 \le K \le \infty$).

10. КАЧЕСТВО ПРОЦЕССОВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

О качестве работы САУ можно судить по показателям качества регулирования. Прямые показатели качества регулирования оцениваются непосредственно по переходной характеристике САУ, в других случаях оценки качества регулирования являются косвенными.

10.1. Прямые показатели качества регулирования

Прямые показатели качества регулирования САУ оцениваются непосредственно по ее переходной характеристике (рис. 10.1).

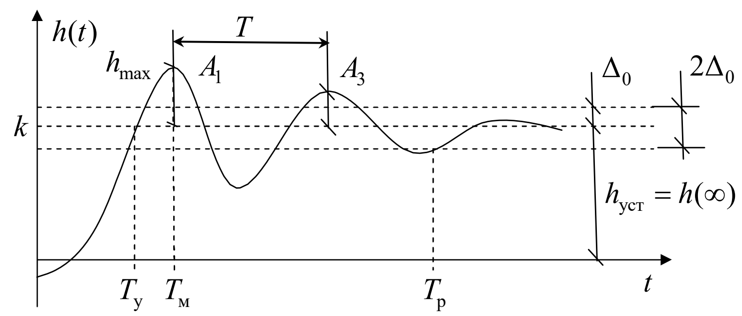


Рис. 10.1. Переходная характеристика САУ

1. Ошибка регулирования $\Delta(t)$

$$\Delta(t)=g(t)-y(t). \tag{10.1}$$

Ошибка регулирования при $t \to \infty$ превращается в статическую ошибку

$$\Delta_0=\lim_{t\to\infty}\Delta(t)=\Delta(\infty).$$

2. Время регулирования $T_р$ – интервал времени, когда значение между переходной характеристикой и стабилизировавшимся значением от начала процесса меньше статической ошибки

$$\left|h(t)-h(\infty)\right| \le \Delta_0, \text{ где } \Delta_0 = 0{,}05h(\infty).$$

По достижении времени регулирования процесс останавливается. Таким образом, время регулирования $T_р$ на практике характеризует быстродействие САУ – время завершения переходного процесса $T_п = T_р$.

3. Время достижения первого максимума $T_м$ – интервал времени от начала процесса до максимального значения переходной характеристики. Определяют для колебательных процессов.

4. Время достижения устойчивого состояния $T_у$ – интервал времени от начала процесса, когда переходная характеристика впервые выходит на установившееся значение. Определяют для колебательных процессов.

5. Перерегулирование σ определяет колебательные свойства АСУ

$$\sigma = \frac{h_{max} - h(\infty)}{h(\infty)}100\% = \frac{A_1}{h(\infty)}100\%.$$

Величина перерегулирования устойчивых АСУ составляет от 10 до 30 %.

6. Степень затухания ψ описывает интенсивность затухания процессов в ссистеме

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \frac{A_3}{A_1}.$$

Незатухающий процесс: $\psi = 0 \Rightarrow A_1 = A_3$.

Апериодический процесс: $\psi = 1 \Rightarrow A_3 = 0$.

Устойчивый процесс: $0 < \psi \le 1$.

7. Количество полуколебаний N определяет качество колебательного процесса. Процесс должен завершится после двух-трех полуколебаний.

8. Собственный период колебаний T определяет интервал между двумя первыми максимумами. Собственная частота процесса определена периодом колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

9. Логарифмический декремент затухания d определяет скорость затухания колебательного процесса по первому и второму максимуму переходной характеристики

$$d = \ln \frac{h_{\max 1}}{h_{\max 2}}.$$

10.2. Анализ статистических режимов

Статический (установившийся) режим работы линейнойСАУ – это режим, в котором переменные состояния X с течением времени не изменяются:

$$\dot{X} = 0. \tag{10.2}$$

В зависимости от величины статической ошибки Δ^0 выделяют три типа систем:

– статические;
– астатические;
– следящие.

10.2.1. Статические системы

Статическая САУ – это система, функционирование которой всегда приводит к возникновению статической ошибки (рис. 10.2).

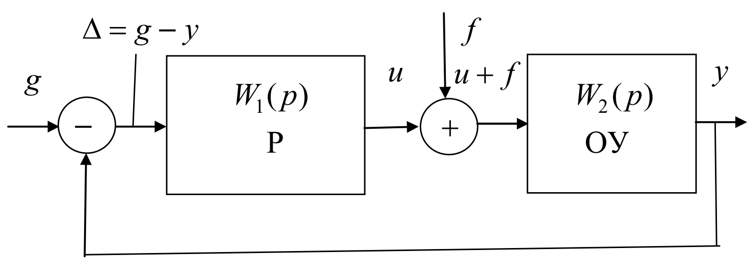


Рис. 10.2. Статическая САУ

Ошибку регулироваия (10.1) можно выразить в виде

$$\Delta = g - y = g - W_2(p)(f + u) = g - W_2(p)(f + W_1(p)\Delta). \qquad (10.3)$$

После преобразований получим

$$\Delta = \Delta_g + \Delta_f, \qquad (10.4)$$

где

$$\Delta_g = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)} g;$$

$$\Delta_f = -\frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} f.$$

Таким образом, полная ошибка регулирования складывается из двух составляющих Δ_g и Δ_f, первая из которых порождена входным воздействием g, а вторая – возмущением f. Этот факт соответствует принципу суперпозиции (он справедлив для линейных систем): реакция системы на несколько внешних воздействий представляет собой сумму реакций на каждое входное воздействие в отдельности.

Передаточные функции $W_1(p)$ *и* $W_2(p)$ не содержат в своем составеинтегралов. В статическом режиме ($p = 0$) они вырождаются в коэффициенты усиления: регулятора $K_1 = W_1(p = 0)$ и объекта управления $K_2 = W_2(p = 0)$.

В статике (полагая $p = 0$) получаем полную статическую ошибку:

$$\Delta^0 = \Delta_g^0 + \Delta_f^0, \qquad (10.5)$$

где

$$\Delta_g^0 = \frac{1}{1 + K_1 K_2} g;$$

$$\Delta_f^0 = -\frac{K_2}{1 + K_1 K_2} f.$$

Произведение $K = K_1 K_2$ – общий коэффициент усиления, характеризующий глубину обратной связи.

Таким образом, в статических АСУ всегда присутствует отличная от нуля статическая ошибка Δ^0 (10.5), которую всегда стремятся уменьшить.

Статическая ошибка по водному воздействию Δ_g^0 определяется коэффициентом K, а ошибка по возмущению Δ_f^0 зависит только от K_1.

С целью уменьшения полной статической ошибки Δ^0 (10.5) необходимо увеличивать общий коэффициент *k*, но при этом до такой степени, чтобы устойчивость системы сохранялась. Таким образом, требования точности и устойчивости являются противоположными.

В системах стабилизации, когда требуется выполнить свойства

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = g \text{ при } g = \text{const},$$

можно путем масштабирования входного сигнала уменьшить статическую ошибку. При этом коэффициент K_1 следует выбирать из условия заданной Δ_f^0.

Пример 1. Для АСУ, структурная схема которой приведена на рис. 10.2, определить полную статическую ошибку, если переходные функции равны

$$W_1(p) = \frac{25}{p+1};\ W_2(p) = \frac{10}{p^2 + 4p + 1}.$$

Ошибку регулирования можно выразить в виде

$$\Delta = g - y = g - W_2(p)(f + u) = g - W_2(p)(f + W_1(p)\Delta).$$

После преобразований получим

$$\Delta = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)} g - \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} f,$$

откуда при $K_1 = W_1(p=0) = 25; K_2 = W_2(p=0) = 10$

$$\Delta^0 = \frac{1}{1+K_1K_2}g - \frac{K_2}{1+K_1K_2}f = \frac{1}{251}g - \frac{10}{251}f.$$

Пример 2. Для АСУ, структурная схема которой приведена на рис. 10.3, определить коэффициент усиления регулятора K_1 так, чтобы статическая ошибка не превышала значения $\Delta^0 \le 0{,}05g$.

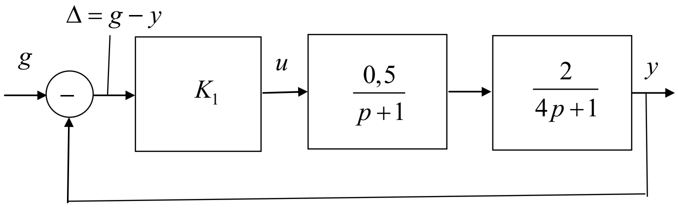


Рис. 10.3. Структурная схема САУ

Ошибку регулирования можно выразить в виде

$$\Delta = g - y = g - W_2(p)(f+u) = g - K_1(p)W_1(p)W_2(p)\Delta.$$

После преобразований получим

$$\Delta = \frac{1}{1+K_1(p)W_1(p)W_2(p)\Delta}g = \frac{1}{1+\frac{K_1}{(p+1)(4p+1)}}g = \frac{4p^2+5p+1}{4p^2+5p+(K_1+1)}g. \quad (10.6)$$

Из (10.6) при $p=0$ получим

$$\Delta^0 = \frac{1}{1+K_1}g. \quad (10.7)$$

Подставив (10.7) в $\Delta^0 \le 0{,}05g$, найдем

$$\frac{1}{1+K_1} \le 0{,}05 \text{ откуда } K_1 \ge 19.$$

Пример 3. Для АСУ, структурная схема которой приведена на рис. 10.2, определить коэффициент усиления K_1 так, чтобы статическая ошибка составляла $\Delta^0 \le 0{,}05f$ при $g = 0$, если переходные функции равны

$$W_1(p) = \frac{K_1}{p+1};\ W_2(p) = \frac{60}{p^2+4p+1}.$$

Ошибку регулирования можно выразить в виде

$$\Delta = g - y = g - W_2(p)(f+u) = g - W_2(p)(f + W_1(p)\Delta).$$

После преобразований получим

$$\Delta = \frac{1}{1+W_1(p)W_2(p)} g - \frac{W_2(p)}{1+W_1(p)W_2(p)} f,$$

откуда при $K_1 = W_1(p=0), K_2 = W_2(p=0) = 60$ и $g = 0$

$$\Delta^0 = \left| \frac{K_2}{1+K_1K_2} f \right| \cong \frac{1}{K_1} f. \tag{10.8}$$

Подставив (10.8) в $\Delta^0 \le 0{,}05f$, найдем

$$\frac{1}{K_1} \le 0{,}05, \text{ откуда } K_1 \ge 20.$$

10.2.2. Астатические системы

Астатические системы – это САУ, в которых отсутствует статическая ошибка, порожденная постоянным входным взаимодействием (рис. 10.4). Астатизм достигается путем введения в регулятор интегратора.

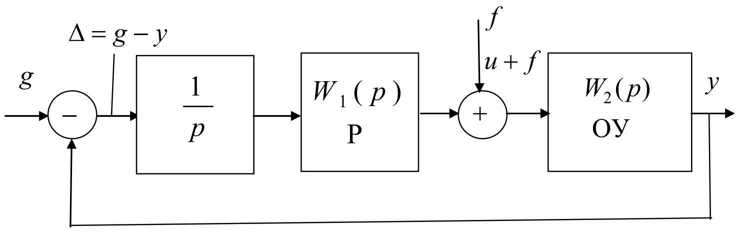


Рис. 10.4. Астатические САУ

Статическая ошибка

$$\Delta = g - y = g - W_2(p)[f + \frac{W_1}{p}\Delta]. \tag{10.9}$$

Для астатических систем представляет интерес *режим линейной заводки*, когда входной сигнал g представляет собой линейное воздействие

$$g(t) = g(0) + \int_0^t \eta dt \tag{10.10}$$

или в операторной форме

$$g = \frac{1}{p}\eta, \tag{10.11}$$

где $\eta = \text{const}$. Подставив (10.11) в (10.9), получим

$$\Delta = \frac{1}{p + W_1(p)W_2(p)}\eta - \frac{pW_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$

В статике $p = 0$ скоростная ошибка составляет

$$\Delta^0 = \frac{1}{K_1K_1}\eta. \tag{10.12}$$

Для уменьшения скоростной ошибки Δ^0 (10.12) можно масштабировать входное воздействие η или увеличить $K = K_1K_2$.

10.2.3. Следящие системы

В следящей системе выходная переменная должна отслеживать (повторять)изменения входной величины. В этих системах в ОУ присутствует интегратор в чистом виде (рис. 10.5).

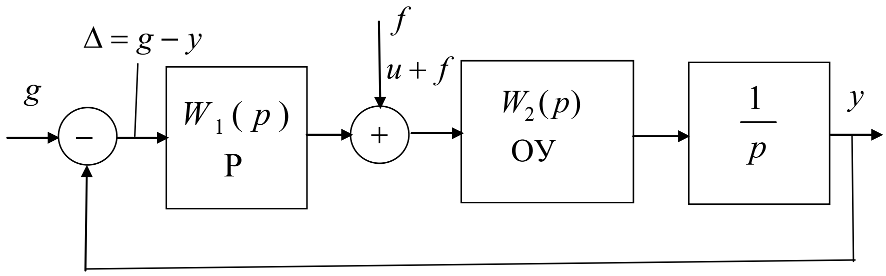


Рис. 10.5. Следящая САУ

Статическая ошибка

$$\Delta = g - y = g - \frac{W_2(p)}{p}[f + W_1\Delta]. \qquad (10.13)$$

В этих САУ также можно рассматривать *режим линейной заводки* (10.11).

Тогда

$$\Delta = \frac{1}{p + W_1(p)W_2(p)}\eta - \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$

В статике $p = 0$ ошибка

$$\Delta^0 = \frac{1}{K_1K_2}\eta - \frac{1}{K_1}f.$$

Режим линейной заводки используется для оценки точности следящих систем.

10.3. Косвенные показатели качества регулирования

В большинстве случаев аналитическое вычисление переходной характеристики СУ является трудоемкой задачей, поэтому используются *косвенные методы оценки качества регулирования:*

– частотные показатели;

– корневые показатели;

– интегральные показатели.

10.3.1. Частотный метод анализа

Качество переходного процесса в САУ можно исследовать непосредственно по ее *частотным характеристикам*.

Частотный метод анализа позволяет оценить реакцию систем на $g(t)$ при нулевых начальных условиях

Оценки качества переходного процесса по вещественной частотной характеристике

Оценка 01: начальное значение переходной характеристики соответствуетконечному значению ВЧХ (рис. 10.6).

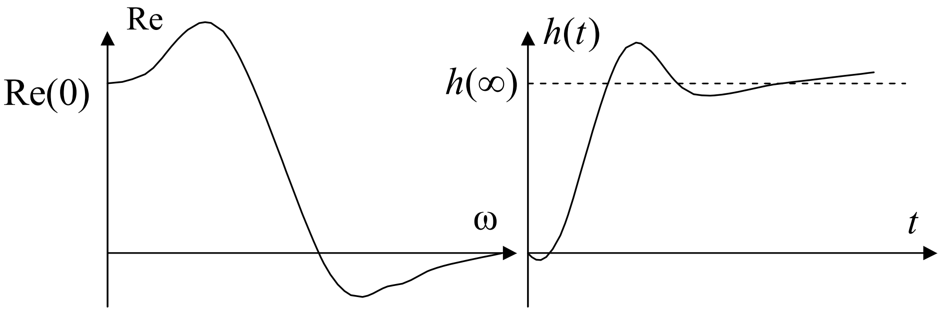


Рис. 10.6. ВЧХ $\mathrm{Re}(\omega)$ и переходная характеристика $h(t)$ САУ

Оценка 02: установившееся значение переходной характеристики равно начальному значению ВЧХ.

Оценка 03: если для частотных характеристик $\mathrm{Re}_1(\omega)$ и $\mathrm{Re}_2(\omega)$ справедливо $\mathrm{Re}_1(\omega) = m\,\mathrm{Re}_2(\omega)$ или $\mathrm{Re}_2(\omega) = \frac{1}{m}\mathrm{Re}_1(\omega)$, то аналогичное отношение будет связывать и переходные характеристики $h_2(t) = mh_1(t)$ или $h_2(t) = \frac{1}{m}h_1(t)$ (рис. 10.7).

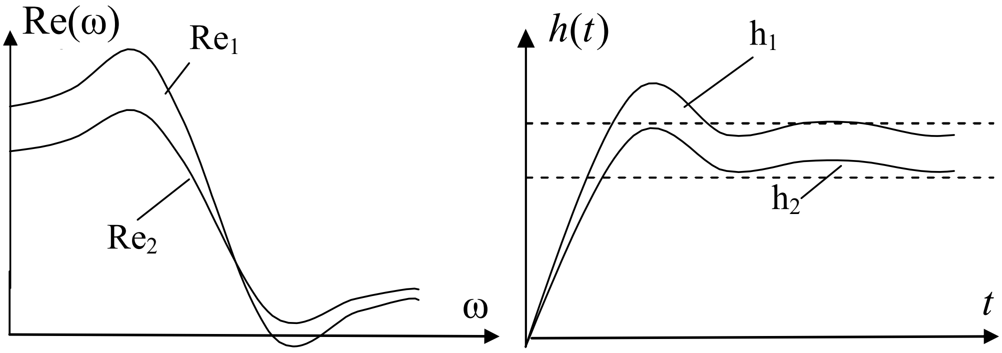


Рис. 10.7. ВЧХ $\mathrm{Re}(\omega)$ и переходная характеристика $h(t)$ САУ

Оценка 04: для $\mathrm{Re}_2(\omega) = \mathrm{Re}_1(m\omega)$ справедливо $h_2(\omega) = h_1(\frac{t}{m}\omega)$ (рис. 10.8).

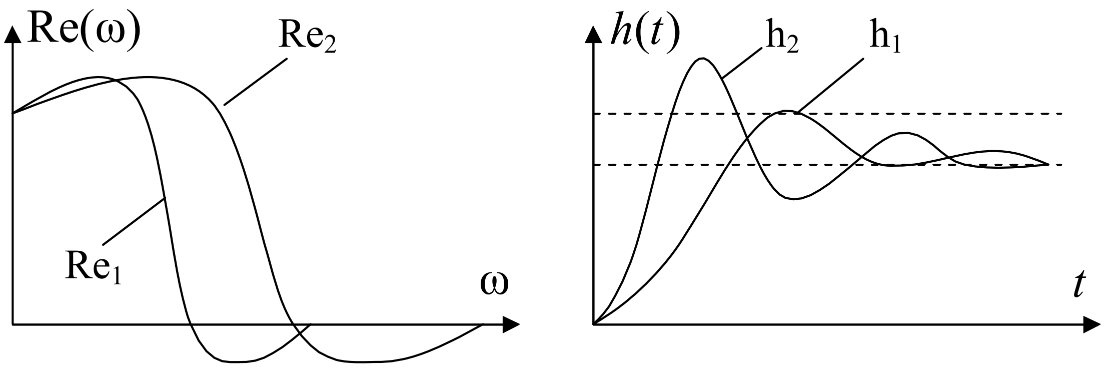


Рис. 10.8. ВЧХ $\mathrm{Re}(\omega)$ и переходная характеристика $h(t)$ САУ

Оценка 05: если R(ω) – положительная, не возрастающая, то перерегулирование меньше 18 % (σ < 18 %).

Оценка 06: $h(t)$ имеет монотонный характер, если $d\mathrm{Re}(\omega)/d\omega$ представляет собой отрицательную, убывающую по модулю непрерывную функцию.

Оценка 07: если Re(ω) – локально возрастающая функция, то перерегулирование σ можно приближенно оценить по формуле $\sigma < \frac{1{,}18\,\mathrm{Re}_{\max} - \mathrm{Re}(0)}{\mathrm{Re}(0)} 100\,\%$ (рис. 10.9).

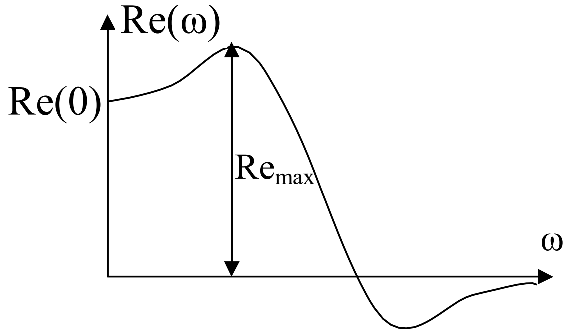


Рис. 10.9. ВЧХ Re(ω) САУ

Оценка 08: если на частоте $\omega = \omega_0$ Re(ω) терпит разрыв, то $h(t)$ будет иметьнезатухающие колебания этой частоты (рис. 10.10).

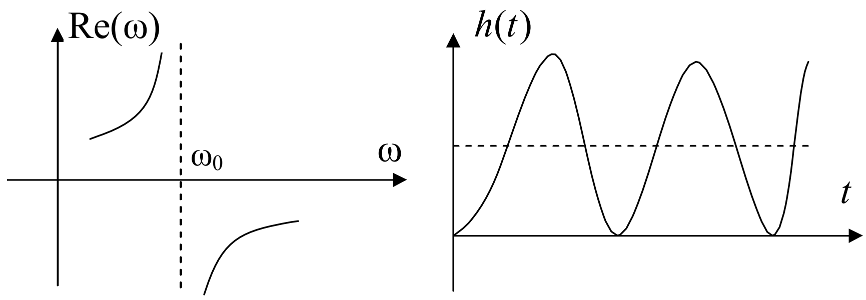


Рис. 10.10. ВЧХ Re(ω) и переходная характеристика $h(t)$ САУ

Оценка 09: в случае монотонной характеристики R*y*(ω) можно приближенно оценить время t переходного процесса: $T_{\text{п}} = \frac{k}{\omega_0}$, где $k = 1, .., 4$ (рис. 10.11).

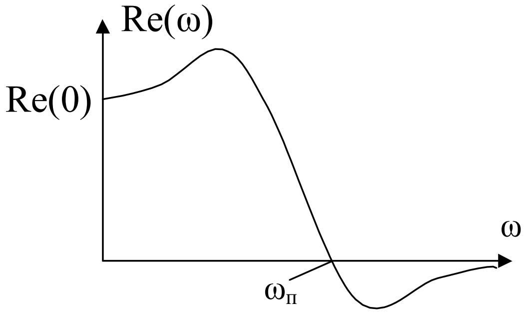


Рис. 10.11. ВЧХ Re(ω) САУ

Если R(ω) всегда > 0, то в качестве частоты $\omega_п$ выбирается частота, на которой $Re(\omega_п) = 0{,}5\ Re(0)$.

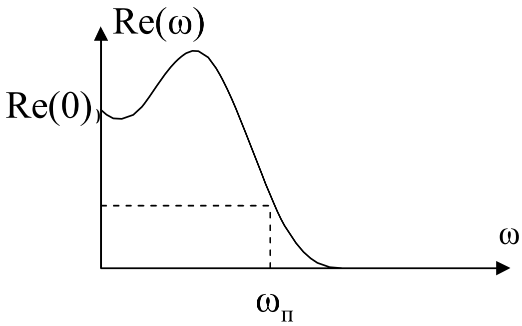


Рис. 10.12. ВЧХ Re(ω) САУ

Таким образом, с помощью оценок 01–09 можно приближенно оценить качество переходного процесса.

Корневой метод анализа

Здесь можно проследить реакцию системы на нулевые начальные условия. Он может применяться как для одноканальных, так и для многоканальных систем.

$$A(p) = p^n + a_{n-1}p^{(n-1)} +, ..., +a_1 p + a_0 .$$

Корни $A(p)$; $i = \overline{1,n}$: $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

Корни, расположенные ближе к мнимой оси, определяют длительность переходного процесса (рис. 10.13).

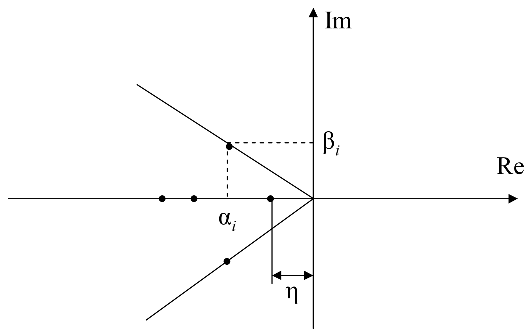


Рис. 10.13. Расположение корней на комплексной плоскости

Корневая оценка быстродействия (расстояние до мнимой оси)

$$\eta = \min |\operatorname{Re}\lambda_i|; i = \overline{1,n}$$

позволяет приближенно оценить длительность переходного процесса

$$T_{\text{п}} \cong \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\delta^0},$$

где δ^0 – относительная статическая ошибка.

Для $\delta^0 = 0{,}05$ можно воспользоваться оценкой $T_{\text{п}} \cong \frac{3}{\eta}$.

Колебательные процессы в системе будут только в том случае, если характеристическое уравнение содержит комплексно-сопряженные корни $\lambda_{i,i+1} = -\alpha_i \pm \beta_i$.

Показатель колебательности

$$\mu = \max_i \frac{\beta_i}{\alpha_i}.$$

Чем больше колебательность μ, тем более колебательный характер будет иметь переходный процесс.

При $\mu = \infty$ все полюса чисто мнимые, и в АСУ наблюдается переходныйпроцесс в виде незатухающих колебаний.

При $\mu = 0$ все корни вещественные, и в САУ будут протекать апериодические процессы.

Эмпирическим путем установлена взаимосвязь между колебательностью иперерегулированием в виде соотношения

$$\sigma = 100\exp(-\frac{\pi}{\mu})\,\%.$$

Пример. Определить длительность переходного процесса $T_{\text{п}}$ корневым методом в замкнутой АСУ с единичной отрицательной обратной связью, если передаточная функция разомкнутой АСУ имеет вид

$$W(p) = \frac{4(p+1)}{2p^2 + 3p + 1}.$$

Для замкнутой АСУ с отрицательной обратной связью передаточная функция имеет вид

$$W_{-}(p) = \frac{4(p+1)}{2p^2 + 7p + 2}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой АСУ

$$A(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 2p^2 + 7p + 2 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2};$$

$$\lambda_{1,2} = -1,25;\ -12,74.$$

Оба корня $\lambda_{1,2}$ вещественны и отрицательны. АСУ устойчива.

Расстояние до мнимой оси

$$\eta = \min|\operatorname{Re}\lambda_1| = 1{,}25$$

позволяет приближенно оценить длительность переходного процесса

$$T_\text{п} \cong \frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{\delta^0} = \frac{1}{1{,}25}\ln\frac{1}{0{,}05} = 2{,}4\,,$$

где $\delta^0 = 0{,}05$ – допустимая относительная статическая ошибка.

11. КАЧЕСТВО ПРОЦЕССОВ СИСТЕМ НИЗКОГО ПОРЯДКА

Проведение многих реально существующих объектов и систем можно описать уравнениями не выше третьего порядка. Поэтому важно установитьвзаимосвязь между параметрами математической модели и качеством протекающих в системах переходных процессов.

11.1. Система первого порядка

Переходный процесс определяют: K – коэффициент усиления; T – постоянная времени;

$$g = \text{const};$$

$y(t)$ – это экспонента, скорость затухания которой зависит от времени t (рис. 11.1).

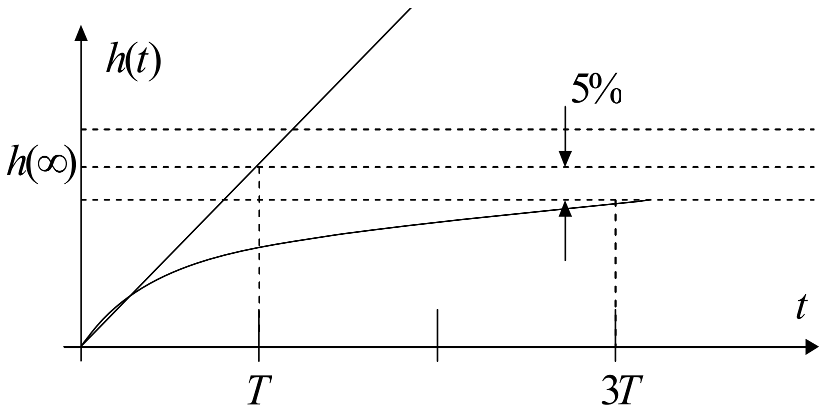


Рис. 11.1. Переходная характеристика

В статике

$$y_0 = W(0)g.$$

Переходный процесс можно считать закончившимся, когда выходная переменная достигает установившегося значения с точностью не менее 5 %.

Так как $A(p) = Tp + 1$ имеет корень $\lambda = -\frac{1}{T}$, то $\eta = \frac{1}{T}$.

Время переходного процесса

$$T_{\text{п}} \approx \frac{3}{\eta} = 3T .$$

Таким образом, K определяет установившееся значение переходных процессов, а постоянная времени T – их длительность.

11.2. Система второго порядка

Передаточная функция и выходной сигнал:

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}; y_0 = W(0)\mathrm{g} .$$

Время переходного процесса зависит от T и d.

В литературе переходный процесс в зависимости от d классифицируют так, как показано на рис. 11.2.

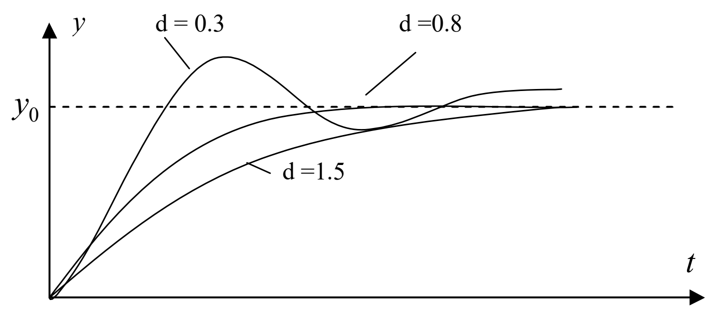


Рис. 11.2. Выходной сигнал

При $0{,}5 \le d \le 1$ длительность переходного процесса $T_{\text{п}} \approx 3T$.

Корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 1}}{T}.$$

При $d < 1$ корни комплексно сопряженные и наблюдается колебательность САУ

$$\mu = \frac{\sqrt{1 - d^2}}{d} = \mu(d).$$

Перерегулирование при этом определяют как

$d \geq 1$ – процессы имеют апериодический характер;

$d = 0$ – незатухающие колебания.

11.3. Система третьего порядка

Поведение АСУ третьего порядка описывает передаточная функция

$$W(p) = \frac{K}{T^3 p^3 + AT^2 p^2 + BTp + 1}.$$

Здесь переходные процессы определяют четыре параметра K, T, A и B.

Установившееся значение для выходной переменной $y(t)$ зависит от коэффициента усиления K, интенсивность процессов зависит от T, а колебательные свойства АСУ определяются параметрами A и B. Для исследования этой зависимости используется диаграмма Вышнеградского (1876 г.) на основе характеристического уравнения

$$T^3 p^3 + AT^2 p^2 + BTp + 1 = 0.$$

Исходя из того, что для переходного процесса постоянная времени T не влияет на колебательность, перейдем к нормированному характеристическому уравнению с заменой в нем оператора p другим оператором $q = Tp$

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0,$$

где A и B – параметры Вышнеградского. Они определяют колебательность и устойчивость АСУ. По критерию Гурвица должно быть

$$AB > 1.$$

Рассмотрим область значений A и B и нанесем границу устойчивости, AB=1. Разобьем ее на подобласти с разным расположением корней, а следовательно, и вида процессов (рис. 11.3).

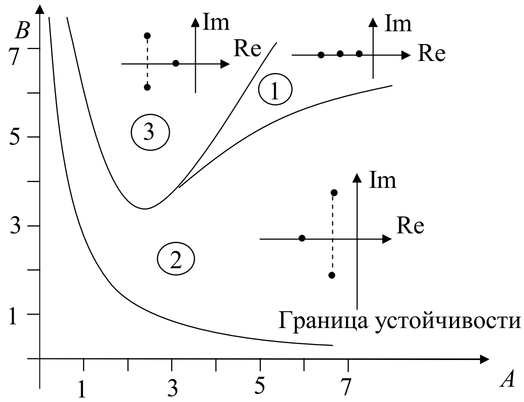


Рис. 11.3. Диаграмма Вишнеградского: 1–3 – области распределения корней

Характерный вид переходных процессов, соответствующих каждой подобласти, показан на рис. 11.4.

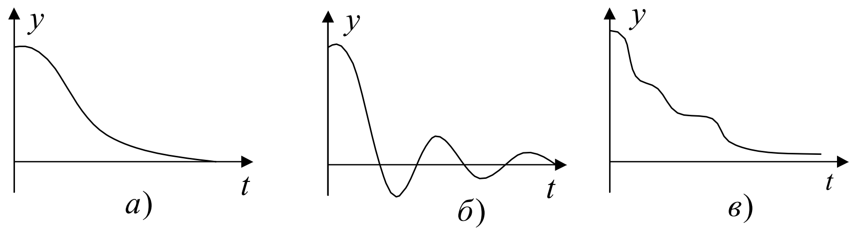


Рис. 11.4. Примеры процессов в АСУ: *а*) с вещественными корнями; *б*) с доминирующей парой комплексных корней; *в*) с доминирующим вещественным корнем

В ходе лекций обсуждались ключевые методы оценивания характера переходных процессов на основе динамических параметров системы. Качество модели определяется не только использованными методами анализа, но и точностью разработки математической модели

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Курс «Основы теории управления» рассматривается как составная часть технической кибернетики – науки построения технических систем. Математические методы и средства позволяют выявить основные свойства систем автоматического управления и дать рекомендации для их проектирования. Метод переменных состояния – один из основных современных методов анализа и синтеза систем автоматического управления.

В настоящем учебном пособии рассмотрены основные понятия метода переменных состояния. Показаны разновидности моделей систем в пространстве состояний, проведен анализ линейных систем автоматизированного управления по устойчивости и показателям качества. Рассмотрены методы их структурного анализа и синтеза. По каждой теме пособия приведены примеры решения практических заданий, что облегчает их самостоятельное выполнение обучающимися и усвоение материала курса. Особое внимание уделено построению математической модели в переменных состояния для звеньев системы управления в виде радиотехнических цепей, а также прямому и обратному переходу от модели в переменных состояния к дифференциальному уравнению (математической модели «вход-выход») и передаточной функции.

Учебное пособие является необходимым и достаточным для обучения по специальности 10.03.01 Информационная безопасность (уровень бакалавриата), а также может быть использовано по направлению подготовки 27.03.05 Инноватика (уровень бакалавриата).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ощепков А. Ю. Системы автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB. – СПб. : Лань, 2013. – 208 с.

2. Охорзин В. А., Сафонов К. В. Теория управления. – СПб. : Лань, 2014. – 224 с.

3. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами : учеб. пособие. – СПб. : Лань, 2017. – 292 с.

4. Курс видеолекций по теории автоматического управления [Электронный ресурс]. – URL: https://www.youtube.com /watch ?v=PHl9H_SmOg&list=PLFZ8DnYWqVaB_8DdV6S7m9eG7E27OYEd.

Учебное издание

Савелькаев Сергей Викторович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Редактор *О. В. Георгиевская*

Компьютерная верстка *Я. А. Филипповой*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.
Подписано в печать 09.06.2025. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 6,97. Тираж 150 экз. Заказ 62.
Гигиеническое заключение
№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02 от 10.12.2002.
Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.
Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, 108, Плахотного, 8.