

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

С. В. Савелькаев

**ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
МНОГОМАССОВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ
СИСТЕМ В ПОЛЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ
СИЛ ИНЕРЦИИ**

Препринт

Новосибирск
СГУГиТ
2025

Рецензенты: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

П. А. Фомин

доктор физико-математических наук, профессор кафедры специальных устройств, инноватики и метрологии СГУГиТ

И. Б. Палымский

Савелькаев, С. В.

С128 **Динамический анализ многомассовых механических систем в поле относительных сил инерции : препринт / С. В. Савелькаев. – Новосибирск, СГУГиТ, 2025. – 66 с. – Текст : непосредственный.**
ISBN 978-5-907998-17-9

В препринте обобщены результаты научных и практических исследований за 1990–2025 гг. д. т. н., профессора СГУГиТ С. В. Савелькаева в области динамики многомассовых механических систем.

Обобщение результатов выполнено на основе динамического анализа двух- и трехмассовых механических систем с различным числом степеней свободы с учетом поля относительных сил инерции их взаимодействующих тел в диссипативной среде и вакууме. Анализ проведен исходя из принципа Д'Аламбера и аксиомы связи для относительных сил инерции. На их основе получено уравнение движения каждого из взаимодействующих тел механической системы в отдельности в поле их относительных сил инерции, вид которого определен для различного числа степеней свободы механической системы как результат сложного переносно-относительного поступательного движения взаимодействующих тел. Показано, что в зависимости от числа степеней свободы время в системах отсчета взаимодействующих тел по отношению ко времени в системе отсчета их центра масс может протекать по-разному. При этом время в системе отсчета центра масс и в какой-либо другой инерциальной системе отсчета абсолютно. Учет относительности времени обеспечил инвариантность событий во всех системах отсчета, выбранных для динамического анализа механических систем. На основе полученных уравнений движения проведен динамический анализ плоского трехмассового кривошипно-ползунного механизма типа «инерциод Толчина». Показано, что этот механизм можно свести к двухмассовому аналогу, а затем к одномассовому эквиваленту. Особое внимание уделено амплитудному и фазовому анализу движения тел и центра масс механизма во время активной и пассивной фаз его движения. Численно моделировалось смещение центра масс этого механизма и регистрировался минимальный уровень диссипации внешней среды, до которого смещение центра масс постоянно, а ниже которого оно начинает стремиться к нулю. Практическая значимость такого эффекта заключается в том, что на его основе могут быть разработаны устройства для направленного дискретного перемещения в среде с малой диссипацией (в жидкой среде и на твердых горизонтальных поверхностях с малым линейным вязким сопротивлением движению).

Препринт может быть полезен специалистам в области прикладной механики и машиностроения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 531.01

ISBN 978-5-907998-17-9

© СГУГиТ, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции	7
1.1. Введение в главу	7
1.2. Принцип Д' Аламбера и аксиома связи для относительных сил инерции	8
1.3. Методика определения диссипативного угла и координат центра инерционного домена	18
1.4. Полная система уравнений	22
1.5 Выводы	25
2. Динамический анализ трехмассового кривошипно-ползунного механизма на базе его двухмассового аналога	26
2.1. Введение в главу	26
2.2. Динамический анализ	26
2.3. Математическая модель	29
2.4. Активная фаза движения	31
2.5. Пассивная фаза движения	33
2.6. Эффект смещения центра масс	35
2.7. Выводы	39
3. Поле относительных сил инерции двухмассовой механической системы с пятью степенями свободы	40
3.1. Введение в главу	40
3.2. Распределение импульсов	41
3.3. Относительность времени	47
3.4. Энергетический анализ и принцип Д' Аламбера	50
3.5. Уравнения движения и их частное и общее решения	55
3.6. Сведение задачи двух тел к задаче одного тела	59
3.7. Выводы	61
Заключение	62
Библиографический список	64

ВВЕДЕНИЕ

В 30-х г., а позднее в 56-м г. прошлого века изобретатели В. Н. Толчин (СССР) и Норман Дин (США) разработали устройства, которые получили название «Инерциоид Толчина» и «Центробежная машина Дина». Эти устройства обеспечивали направленное движение на горизонтальной поверхности с линейным вязким либо с сухим трением. В терминах теории механизмов и машин инерциоид Толчина представляет собой трехмассовый кривошипно-ползунный механизм, а машина Дина – два эксцентрика, размещенные на общей платформе, подвешенной на пружинах в общем корпусе.

В результате анализа движения таких устройств была выдвинута гипотеза о существовании «четвертого закона динамики», согласно которому движение этих устройств совершается силами инерции их внутренних рабочих тел, взаимодействующих с опорным телом (основанием) этих устройств. Такой вид движения был классифицирован как «безопорное движение».

В 1980-е г. с критикой «безопорного движения» выступил автор работы «Инерция» Н. В. Гулиа. Главный вывод работы состоит в том, что силы инерции являются фиктивными силами, которых в механике не существует. Такой вывод, с одной стороны, отрицает возможность безопорного движения, а с другой – вступает в противоречие с принципом Д'Аламбера, где силы инерции являются реальными физическими силами. В терминах фиктивности сил инерции в механике «безопорное движение» потеряло какой-либо физический смысл.

Идею «безопорного движения» в 1990-е г. вновь пытался возобновить автор работы «Теория физического вакуума» Г. И. Шипов, в которой он рассматривает инерциоид Толчина с позиции «торсионных полей». После длительных научных дискуссий (по силам инерции) и неоднозначных испытаний в 2008 г. на борту спутника «Юбилейный» торсионного движителя Г. И. Шипова, принцип безопорного движения, как и сами инерциоиды, признали лженаучным направлением. При этом на опубликование любых

материалов по этой тематике в периодической научно-технической литературе были установлены строгие цензурные ограничения, не зависимо от степени обоснованности материала.

Несмотря на это, до настоящего времени предпринимаются попытки обоснования возможности «безопорного движения» с позиций различных необоснованных физических представлений. Так, например, в блогах «Вдумчиво о науке» Ю. Н. Иванов, автор работы «Ритмодинамика», пытается обосновать возможность безопорного движения на основе «сжимаемости стоячих волн» в материальных телах, которая якобы вызывает потерю их веса. Автор экспериментально показал, что давление акустической стоячей волны вызывает левитацию (зависание над опорной поверхностью) пробных тел с малой массой (пенопласт). На основе этого эффекта он выдвинул гипотезу о том, что, управляя «сжимаемостью стоячих волн», можно обеспечить движение массивных тел в пространстве, заполненном «эфиром», в направлении, противоположном действию силе тяготения Ньютона. Такой вывод противоречит современным представлениям механики и общей теории относительности Эйнштейна.

Однозначное подтверждение или опровержение возможности «безопорного движения» в механике не удастся сделать потому, что для динамического анализа механических систем, например, состоящих из двух взаимодействующих материальных тел, используют уравнение движения их центра масс, которое введено на основе второго закона Ньютона. Это уравнение применяют для анализа движения тел замкнутой механической системы в инерциальной системе отсчета, связанной с центром ее масс (задача двух тел). Если же механическая система не замкнута, то система отсчета центра масс не инерциальна. Это требует введения в уравнение движения центра масс, а также в исходный второй закон Ньютона поправок в виде сил инерции, что расширяет область их применения на неинерциальные системы отсчета.

Необходимость этих поправок вызвана тем, что первоначально второй закон Ньютона был сформулирован для случая, когда одно из двух взаимодействующих тел механической системы было отброшено, а реакция его связи со вторым оставшимся телом заменена внешней активной силой $\vec{R} = \vec{F}$, являющейся мерой взаимодействия оставшегося и отброшенного тел, что

позволяет решать большой класс задач механики, включая небесную, в инерциальных системах отсчета, например, в гелиоцентрической.

В некоторых случаях необходимость поправок можно исключить, если в качестве меры взаимодействия двух материальных тел выбрать их относительные силы инерции, которые взаимно приложены к этим телам через их связь $\vec{R} = \vec{\Phi}_r$, которая может быть образована как механически, так и каким-либо силовым полем. При этом принимая какое-либо из этих тел за опорное и применяя к нему аксиому связи, можно записать уравнение его движения в поле относительной силы инерции другого тела, которое принимается за рабочее. Аналогичную процедуру можно выполнить и для рабочего тела, условно поменяв рабочее и опорное тело местами.

Полученные уравнения движения, в отличие от известного уравнения движения центра масс, полученного из второго закона Ньютона, дают возможность анализа движения любого из взаимодействующих тел механической системы, выбранного за опорное, в поле относительной силы инерции ее другого тела, выбранного за рабочее, в инерциальной системе отсчета, как в диссипативной среде, так и в вакууме. При этом уравнение движения оставшихся рабочего тела и центра масс механической системы можно получить на основании известных преобразований координат по известным координатам опорного тела в инерциальной системе отсчета.

На основе полученных уравнений динамики с учетом относительных сил инерции показана двойственность термина «безопорное движение». Так, например, направленное движение трехмассового кривошипно-ползунного механизма «типа инерциоид Толчина» в диссипативной среде с линейным вязким коэффициентом сопротивления $\mu = 0$ невозможно. Если же $\mu \neq 0$, наблюдается эффект смещения центра масс, при котором величина смещения инерциоида не зависит от величины μ , если только $\mu > \mu_{\text{пор}}$, где $\mu_{\text{пор}}$ – пороговое значение коэффициента сопротивления, которое определяется конструкцией инерциоида и его математической моделью. На основе этого эффекта можно получить некоторый эквивалент «безопорного движения» в среде с малой диссипацией $\mu \rightarrow \mu_{\text{пор}}$, где $\mu_{\text{пор}} \approx 0$, что можно широко использовать в машиностроении.

1. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ СИЛ ИНЕРЦИИ

1.1. Введение в главу

В настоящее время силы инерции $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_r + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k$ (относительные $\vec{\Phi}_r$, переносные $\vec{\Phi}_e$, Кориолиса $\vec{\Phi}_k$ и др.) рассматривают с различных точек зрения [1].

Например, согласно одной из них, силы инерции $\vec{\Phi}$ взаимодействующих тел механической системы (МС) рассматривают как фиктивные, условные, введенные для того, чтобы совместно с аксиомой связей придать уравнению Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ наиболее удобную форму равновесия в виде принципа Даламбера $\vec{\Phi} + \vec{F} + \vec{R} = 0$ в неинерциальной системе отсчета одного из тел МС, где $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ и $\vec{R} = \sum_{i \neq j} \vec{R}_{ij}$ – главный вектор внешних сил $\vec{F}_i$, приложенных к i -м телам МС, а также реакций $\vec{R}_{ij}$ связи R ее i -го и j -го тел.

При этом движение МС в инерциальной системе отсчета рассматривают как движение ее центра масс (ЦМ) C

$$m \frac{d}{dt} \vec{p}_C = \vec{F}, \quad (1.1)$$

где $m = \sum_i m_i$ и m_i – суммарная масса МС и масса ее i -го тела;

$\vec{p}_C = m\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i$ и $\vec{v}_C$, $\vec{v}_i$ – импульс и скорость ее ЦМ C и ее i -го тела.

Уравнение (1.1) описывает движение ЦМ C (центра инерции) МС в инерциальной системе отсчета K . Если главный вектор $\vec{F} = 0$, то ЦМ C покоится либо совершает равномерное прямолинейное движение. Исходя из этого, в задаче двух тел [2] в качестве инерциальной системы отсчета

выбирают систему отсчета K_C , связанную с ЦМ C , в которой главный вектор сил инерции равен нулю $\vec{\Phi}_C = -d(\sum m_{iC} \vec{v}_{iC}) / dt = 0$. В диссипативной среде (например, с линейным вязким сопротивлением движению опорного тела m_1) внешняя сила $\vec{F}_1 \neq 0$, система отсчета K_C неинерциальна, и решение задачи двух тел [2] некорректно. Поэтому для анализа движения тел m_1 и m_2 , а также их ЦМ C удобнее выбрать собственную систему отсчета K_1 опорного тела m_1 (тело m_2 выбирается за рабочее [3–7]). При анализе необходимо учитывать относительную силу инерции $\vec{\Phi}_r = \vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 , действующую в системе отсчета K_1 . Она в инерциальной системе K оказывает влияние на движение тел m_1 и m_2 и является реальной (другая точка зрения [1, 3–8]). Такая точка зрения не согласуется с уравнением движения МС (1.1), так как в него относительная сила инерции $\vec{\Phi}_r = \vec{\Phi}_{21}$ в явном виде не входит.

Целью главы является исследование влияния относительной силы инерции $\vec{\Phi}_r = \vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 двухмассовой механической системы (МС2) на движение ее опорного тела m_1 , находящегося в диссипативной среде. Результатом исследования является разработка описания, обеспечивающего анализ амплитудных и фазовых характеристик движения опорного m_1 и рабочего тел m_2 МС2, а также движения ее центра C в инерциальной системе отсчета K для различных значений коэффициента $0 < \mu_1 \leq \infty$ линейного вязкого сопротивления движению опорного тела m_1 .

1.2. Принцип Д'Аламбера и аксиома связи для относительных сил инерции

Рассмотрим МС2, которая показана на рис. 1.1. МС2 содержит опорное (ускоряющее) тело с массой m_1 , на котором с помощью идеального шарнира установлен прямолинейный жесткий стержень с длиной R , на свободном конце которого жестко закреплено рабочее (ускоряемое) тело с массой m_2 . Рабочее тело m_2 совершает вращательное движение относительно опорного тела m_1 в их общей плоскости, которая перпендикулярна

оси идеального шарнира опорного тела m_1 . Движение совершается внутренним активным моментом M , действующим на оси шарнира.

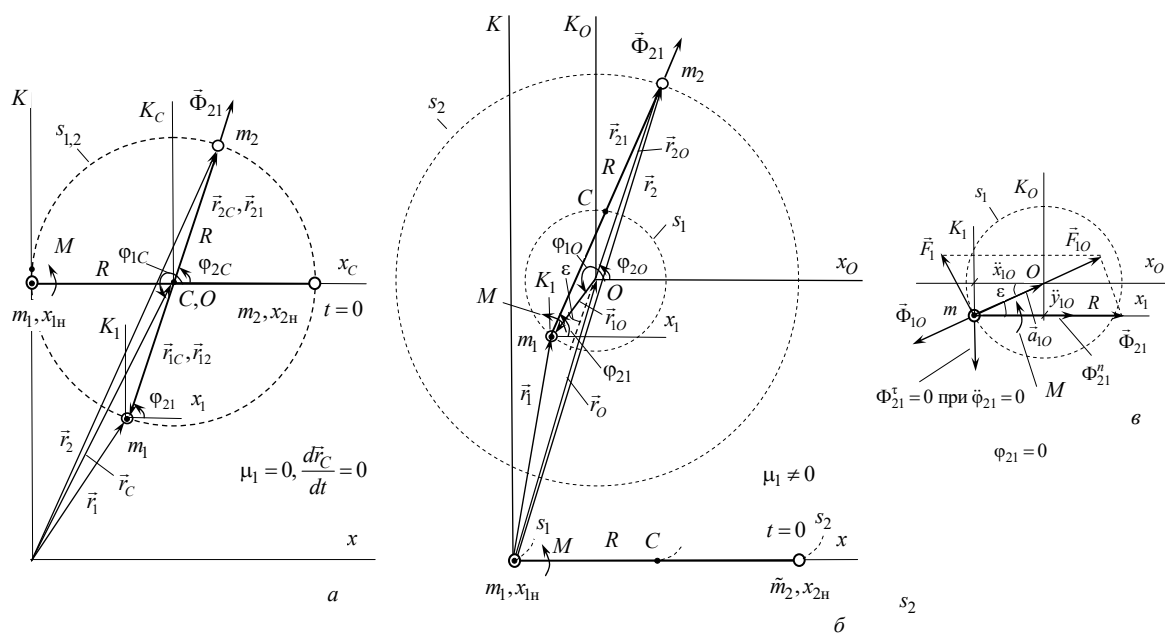


Рис. 1.1. Двухмассовая механическая система в среде без потерь ($\mu_1 = 0$) – а; в среде с потерями ($\mu_1 \neq 0$) – б и действующая на нее система сил – в

Коэффициент линейного вязкого сопротивления диссипативной среды μ_1 движению опорного тела m_1 МС2 составляет $\mu_1 = 0$ для рис. 1.1, а и $\mu_1 \neq 0$ для рис. 1.1, б. Для рабочего тела m_2 он всегда равен $\mu_2 = 0$.

Для проведения динамического анализа МС2 введем неподвижную систему отсчета K , начало координат которой для случая $\mu_1 = 0$ (см. рис. 1.1, а) выберем произвольно, а для случая $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1.1, б) свяжем с начальным положением $x_{1н}$ опорного тела m_1 в момент времени $t = 0$. При $t = 0$ рабочее тело m_2 также находится в начальном положении $x_{2н}$, как показано на рис. 1.1, а и б. Начальные скорости опорного m_1 и рабочего m_2 тел при $t = 0$ нулевые: $\dot{x}_{1н} = 0$, $\dot{x}_{2н} = 0$.

Кроме того, введем собственную систему K_1 опорного тела m_1 , которая вместе с ним может двигаться в системе отсчета K только поступательно. Ее в дальнейшем будем рассматривать как опорную.

Пусть в момент времени $t = 0$ рабочее тело m_2 приводится в движение активным моментом M , который за малый интервал времени $dt \rightarrow 0$ достигает стационарного значения. Исходя из мгновенной передачи взаимодействий в механике, одновременно достигает своего стационарного значения и относительная угловая скорость ω_{21} вращательного движения рабочего тела m_2 в системе отсчета K_1 . При этом опорное тело m_1 при $\mu_1 = 0$ вместе с системой отсчета K_1 будет совершать движение в системе отсчета K по окружности $s_{1,2}$ (см. рис. 1.1, *а*, общей для равных масс $m_1 = m_2$ этих тел), а при $\mu_1 \neq 0$ по окружности s_1 (см. рис. 1.1, *б*). Рабочее тело m_2 в системе отсчета K_1 будет совершать вращательное движение по траектории $s_{1,2}$ (см. рис. 1.1, *а*) или s_2 (см. рис. 1.1, *б*).

Траекторией движения опорного m_1 и рабочего m_2 тел в системе отсчета K при $\mu_1 = 0$, когда $\vec{v}_C = d\vec{r}_C / dt = 0$ (см. рис. 1.1, *а*), также является окружность $s_{1,2}$, но при $\mu_1 \neq 0$, когда скорость $\vec{v}_O = d\vec{r}_O / dt$ убывает экспоненциально от некоторого начального значения, зависящего от μ_1 , до нуля эти тела будут двигаться по спиральным траекториям s_1 и s_2 [4, 5, 7], переходящим в траектории s_1 и s_2 в виде окружностей (см. рис. 1.1, *б*, где спиральные траектории s_1 и s_2 показаны частично). Зависимость изменения скорости $\vec{v}_O = d\vec{r}_O / dt$ от μ_1 подробно будет показана при дальнейшем анализе.

Момент M (см. рис. 1.1) возникает в результате приложения к стержню R пары сил. Эту пару можно представить как совокупность силы, действующей на рабочее тело m_2 , а именно силы

$$F = M / R, \quad (1.2)$$

перпендикулярной к стержню R , и силы, равной

$$F = -M / R, \quad (1.3)$$

которая приложена к шарниру, соединяющему стержень и опорное тело m_1 .

Момент $-M$ силы F (1.3) вызовет вращение (откат) $dK_z^- / dt = -M$

опорного тела m_1 в направлении, противоположном вращению рабочего тела m_2 , где $K_z^- = -I_z \dot{\phi}_{11}$ и I_z – кинетический момент и момент инерции опорного тела m_1 ; $\dot{\phi}_{11}$ – угловая скорость вращения опорного тела m_1 в системе отсчета K_1 на оси z его шарнира. Результирующий кинетический момент МС2 $K_z = K_z^- + K_z^+$, являющийся суммой ее кинетического момента K_z^+ и кинетического момента K_z^- опорного тела m_1 (см. рис. 1.1, а), сохраняется $K_z = \text{const}$ при $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$, а при $\mu_1 \neq 0$ поддерживается постоянным в стационарном состоянии МС2 (когда угловая скорость вращательного движения рабочего тела m_2 достигает своего стационарного значения $\dot{\phi}_{21} = \text{const}$ за счет источника активного момента M) [3–5, 7]. Величина стационарного значения $\dot{\phi}_{21} = \text{const}$ определяется мощностью источника активного момента M .

Подробный анализ результирующего кинетического момента $\vec{K}_z$ МС2 при $\mu_1 \neq 0$ будет проведен при выводе полной системы уравнений ее движения.

В общем случае радиусы-векторы, определяющие положение опорного m_1 и рабочего m_2 тел МС2 и ее ЦМ C (см. рис. 1.1) в системе отсчета K , можно представить в виде:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{C,O} + \vec{r}_{1C,O}; \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{21}; \vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (1.4)$$

где $\vec{r}_{C,O}$ – радиусы-векторы, которые при $\mu_1 = 0$ имеют индекс $\vec{r}_C$ и определяют положение начала координат собственной системы отсчета K_C ЦМ C МС2 (см. рис. 1.1, а), который, исходя из закона сохранения импульса $\vec{r}_C = \overrightarrow{\text{const}}$, а при $\mu_1 \neq 0$ имеют индекс $\vec{r}_O$ и определяют положение начала координат собственной системы отсчета K_O (см. рис. 1.1, б), связанной с центром O инерционного домена (ИД) [4–7], физический смысл которого будет более подробно раскрыт при дальнейшем анализе; $\vec{r}_{1C,O}$ и $\vec{r}_{2C,O}$ – радиусы-векторы, которые при $\mu_1 = 0$

(см. рис. 1.1, *a*) имеют индекс $\vec{r}_{1C}$, $\vec{r}_{2C}$ и определяют положение опорного m_1 и рабочего m_2 тел в системе отсчета K_C

$$\vec{r}_{1C} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{21}; \quad \vec{r}_{2C} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{21} \quad (1.5)$$

(получены из уравнений $m_1 \vec{r}_{1C} + m_2 \vec{r}_{2C} = 0$ и $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{2C} - \vec{r}_{1C}$, где $\vec{r}_{21}$ – радиус-вектор рабочего тела m_2 в системе отсчета K_1) и аналогичные радиусы-векторы с индексом $\vec{r}_{1O}$ и $\vec{r}_{2O}$, определяющие положение этих тел в системе отсчета K_O при $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1.1, *б*), подлежащие дальнейшему определению.

Импульс тел m_1 и m_2 МС2 в системе отсчета K , выраженный непосредственно через радиусы-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (1.4), равен:

$$\vec{p}_1 = m_1 \frac{d}{dt} \vec{r}_1; \quad \vec{p}_2 = m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_{21}. \quad (1.6)$$

Суммарный (абсолютный) импульс МС2 запишем в виде

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_e + \vec{p}_r = (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} \vec{r}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_{21}. \quad (1.7)$$

Он складывается из ее переносного и относительного импульса

$$\vec{p}_e = (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} \vec{r}_1, \quad \vec{p}_r = m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_{21}. \quad (1.8)$$

С учетом импульсов (1.6), аксиомы связей и диссипативной силы

$$\vec{F}_1 = -\mu_1 \vec{v}_1, \quad (1.9)$$

действующей на опорное тело m_1 МС2 (см. рис. 1.1, *б*), запишем второй закон Ньютона отдельно для каждого из взаимодействующих тел m_1 и m_2 :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_1; \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{R}_{21}, \quad (1.10)$$

где $\vec{v}_1$ – скорость опорного тела m_1 в системе отсчета K ; $\vec{R}_{12}$ и $\vec{R}_{21}$ – реакции стержня R .

Суммируя левые и правые части уравнений (1.10) с учетом того, что по третьему закону Ньютона $\sum_{i,j=1,2;i \neq j} \vec{R}_{ij} = 0$, и того, что $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_e + \vec{p}_r$ (1.7), получим уравнение

$$\frac{d\vec{p}_e}{dt} + \frac{d\vec{p}_r}{dt} = \vec{F}_1, \quad (1.11)$$

которое записано для системы отсчета K в терминах переносного $\vec{p}_e$ и относительного $\vec{p}_r$ импульсов (1.8).

Первые два члена уравнения (1.11) можно обозначить переносной $\vec{\Phi}_1$ и относительной $\vec{\Phi}_{21}$ силами инерции:

$$\vec{\Phi}_1 = -\frac{d\vec{p}_e}{dt} = -(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}; \quad \vec{\Phi}_{21} = -\frac{d\vec{p}_r}{dt} = -m_2 \frac{d^2 \vec{r}_{21}}{dt^2}. \quad (1.12)$$

Для систем отсчета K_1 и K с параллельными осями $x_1 \parallel x$ и $y_1 \parallel y$ проекции $r_{21x} = R \cos \varphi_{21}$ и $r_{21y} = R \sin \varphi_{21}$ радиус-вектора $\vec{r}_{21}$ в системе отсчета K_1 инвариантны этим же проекциям в системе отсчета K $r_{21x} = x_{21}$ и $r_{21y} = y_{21}$. Тогда уравнение (1.11), посредством раздельного или одновременного переноса сил инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_{21}$ (1.12) в его правую часть, можно свести как к форме второго закона Ньютона, так и к форме принципа Даламбера:

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1; \quad \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1 = 0. \quad (1.13)$$

Первое уравнение (1.13) является уравнением движения МС2 с тремя степенями свободы $N \leq 3$ в поле ИД, в котором реакции $\vec{R}_{12}$ и $\vec{R}_{21}$ стержня R заменены относительными силами инерции $\vec{R}_{12} = \vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{R}_{21} = \vec{\Phi}_{21}$.

Таким образом, для МС2 с числом свободы $N \leq 3$ аксиому связи R ее тел m_1 и m_2 можно сформулировать в виде: «относительные силы инерции $\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{\Phi}_{21}$ двух взаимодействующих тел m_1 и m_2 взаимно приложены к этим телам и действуют на них через их связь, которую можно условно отбросить, а ее реакции $\vec{R}_{12}$ и $\vec{R}_{21}$ заменить относительными силами инерции $\vec{R}_{12} = \vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{R}_{21} = \vec{\Phi}_{21}$ этих тел, при этом массу m_2 отбрасываемого рабочего тела необходимо отнести к массе оставшегося опорного тела $m_1 + m_2$ ».

Согласно (1.7) и (1.12) можно записать $dp_C / dt = (m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \vec{\Phi}_{21}$,

что сводит первое уравнение (1.13) к известному уравнению движения ЦМ C $dp_C / dt = \vec{F}_1$ (1.1).

Для последующего анализа выберем следующие обобщенные координаты: декартовы координаты x_1 и y_1 опорного тела m_1 в системе отсчета K и полярную координату φ_{21} рабочего тела m_2 в собственной системе отсчета K_1 опорного тела m_1 . Угол φ_{11} поворота (отката) опорного тела m_1 в системе отсчета K_1 рассматривать не будем, так как он в явном виде не влияет на движение этого тела по координатам x_1 и y_1 . Таким образом, рассматривая МС2 имеет три степени свободы $N = n + m - l = 2 + 2 - 1 = 3$, где $n = 2$ – количество степеней свободы опорного тела m_1 в системе отсчета K за вычетом степени свободы по углу поворота φ_{11} ; $m = 2$ – количество степеней свободы рабочего тела m_2 в системе отсчета K_1 и $l = 1$ – одна связь стержнем R .

Для выбранных обобщенных координат x_1 , y_1 и φ_{21} первое уравнение (1.13) в проекциях на оси координат x и y системы отсчета K можно представить в виде:

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = m_2 \omega_{21}^2 R \cos \varphi_{21} + F_{1x}; (m_1 + m_2) \ddot{y}_1 = m_2 \omega_{21}^2 R \sin \varphi_{21} + F_{1y}, \quad (1.14)$$

где $R = r_{12} = r_{21}$; $x_1 = r_{1x}$, $y_1 = r_{1y}$; $F_{1x} = -\mu_1 \dot{x}_1$ и $F_{1y} = -\mu_1 \dot{y}_1$ – проекции диссипативной силы $\vec{F}_1$ (1.9) на оси x и y системы отсчета K .

Согласно принципу Даламбера, на МС2 как на целую с массой $m = m_1 + m_2$ в системе отсчета K_1 действует уравновешенная система сил $\vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1 = 0$. При этом переносная сила инерции $\vec{\Phi}_1$ массы m определена абсолютным ускорением $\vec{a}_1 = -d^2\vec{r}_1 / dt^2$ (1.13), взятым с обратным знаком. Согласно (1.4), абсолютное ускорение $\vec{a}_1$ при $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1.1, б) есть сумма $d^2\vec{r}_1 / dt^2 = d^2\vec{r}_O / dt^2 + d^2\vec{r}_{1O} / dt^2$ переносного ускорения $d^2\vec{r}_O / dt^2$ центра O ИД и относительного ускорения $d^2\vec{r}_{1O} / dt^2$ рабочего тела m_2 в системе отсчета K_O , связанной с центром O .

Проанализируем систему сил, действующих МС2 в системе отсчета K_O , показанную на рис. 1.1, в, где для наглядности принято $\varphi_{21} = 0$, когда связь R направлена по оси x_1 системы отсчета K_1 . В этой системе отсчета на тело $m = m_1 + m_2$ действует относительная сила инерции $\vec{\Phi}_{21} = \vec{\Phi}_{21}^n + \vec{\Phi}_{21}^\tau$ (1.12), где $\vec{\Phi}_{21}^\tau = 0$ при $\omega_{21} = \text{const}$, а также диссипативная сила $\vec{F}_1$ (1.9). Результирующая сила $\vec{F}_{10} = \vec{F}_1 + \vec{\Phi}_{21}$ вызывает ускорение $\vec{a}_{1O}$ тела m , направленное в системе отсчета K_O к центру O ИД и, следовательно, силу инерции

$$\vec{\Phi}_{10} = -(m_1 + m_2) \frac{d^2\vec{r}_{10}}{dt^2} \quad (1.15)$$

этого тела в этой же системе отсчета K_O , направленную в противоположном направлении, что будет подтверждено частным решением уравнений (1.14) относительно ускорений $\ddot{x}_{1O}$ и $\ddot{y}_{1O}$, определяющих вектор ускорения $\vec{a}_{1O}$ (рис. 1.1, в).

Диссипативная сила $\vec{F}_1$ (1.9) задает угол диссипативных потерь ε , который определяет угол запаздывания $\varphi = \pi + \varepsilon$ вектора переносной силы инерции $\vec{\Phi}_{10}$ по отношению к вектору относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$, который в системах отсчета K_1 и K_O инвариантен, так как их оси x_1 и x_O параллельны $x_1 \parallel x_O$. Методика определения угла ε будет предложена в соответствующем разделе главы.

При $\vec{F}_1 = 0$ ($\mu_1 = 0$) значение $\varepsilon = 0$, и движение тела m будет совершаться относительно ЦМ C МС2 (см. рис. 1.1, *а*), с которым в данном случае совпадает центр O ИД.

Таким образом, уравнения (1.13) и (1.14) сводят МС2 к материальной точке с суммарной массой ее тел $m = m_1 + m_2$, условно сосредоточенной в ее опорном теле m_1 , которое движется под действием силы инерции $\vec{\Phi}_{21} = \vec{\Phi}_{21}^n$ рабочего тела m_2 и диссипативной силы $\vec{F}_1$, оказывающей сопротивление движению опорного тела m_1 .

Определим вид частного решения уравнений (1.14). Согласно рис. 1.1, *а*, фаза φ_{1C} вращательного движения рабочего тела m_1 в системе отсчета K_C ЦМ C связана с фазой φ_{21} вращательного движения рабочего тела m_2 в системе отсчета K_1 преобразованием

$$\varphi_{1C} = \varphi_{21} + \varphi, \quad (1.16)$$

где $\varphi = \varphi_{1C} - \varphi_{2C} = \pi$ – угол запаздывания фазы φ_{1C} вращательного движения опорного тела m_1 относительно фазы φ_{2C} вращательного движения рабочего тела m_2 в системе отсчета K_C при $\mu_1 = 0$ (см. рис. 1.1, *а*).

Для случая $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1.1, *б*) опорное m_1 и рабочее m_2 тело будут совершать вращательное движение в системе отсчета K_O центра O ИД по окружностям s_1 и s_2 , как показано на рис. 1.1, *б*. В этом случае фаза φ_{1O} вращательного движения рабочего тела m_1 в системе отсчета K_O связана с фазой вращательного движения рабочего тела m_2 в системе отсчета K_1 преобразованием

$$\varphi_{1O} = \varphi_{21} + \varphi, \quad (1.17)$$

подобным (1.16), где теперь $\varphi = \pi + \varepsilon$, а ε – угол диссипативных потерь [3–7], учитывающий влияние действия на опорное тело m_1 диссипативной силы $\vec{F}_1$ (1.9).

С учетом преобразования (1.17) частное решение уравнений (1.14) для МС2 при $\mu_1 \neq 0$ (рис. 1.1, б), когда $\varepsilon \neq 0$, в системе отсчета K_O можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x_{1O} &= A_1 \cos \varphi_{1O} = A_1 \cos(\varphi_{21} + \varphi) = A_1 \cos(\varphi_{21} + \pi + \varepsilon) = -A_1 \cos(\varphi_{21} + \varepsilon); \\ y_{1O} &= A_1 \sin \varphi_{1O} = A_1 \sin(\varphi_{21} + \varphi) = A_1 \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) = -A_1 \sin(\varphi_{21} + \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где A_1 – амплитуда, подлежащая дальнейшему определению.

В среде без потерь при $\mu_1 = 0$, когда $\varepsilon = 0$ (см. рис. 1.1, а), решения (1.18) определяют положение рабочего тела m_1 в системе отсчета K_C [3–5, 7]:

$$\begin{aligned} x_{1C} &= A_1 \cos \varphi_{1C} = A_1 \cos(\varphi_{21} + \pi) = -A_1 \cos \varphi_{21}; \\ y_{1C} &= A_1 \sin \varphi_{1C} = A_1 \sin(\varphi_{21} + \pi) = -A_1 \sin \varphi_{21}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

начало координат которой связано с ЦМ C МС2, где $A_1 = a$ – амплитуда, равная амплитудному коэффициенту $a = r_{1C} = m_2 R / (m_1 + m_2)$, который определен радиусом r_{1C} (1.5).

Подстановка скоростей $\dot{x}_1 = dx_{1C} / dt$ и $\dot{y}_1 = dy_{1C} / dt$, полученных из (1.19) при $x_C = \text{const}$ и $y_C = \text{const}$ (1.4) в импульс $\vec{p}$ (1.7), выраженный в проекциях на оси x и y неподвижной системы отсчета K

$$\begin{aligned} p_x &= p_{ex} + p_{rx} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 - m_2 \omega_{21} R \sin(\varphi_{21}); \\ p_y &= p_{ey} + p_{ry} = (m_1 + m_2) \dot{y}_1 + m_2 \omega_{21} R \cos(\varphi_{21}) \end{aligned} \quad (1.20)$$

показывает, что $p_x = 0$ и $p_y = 0$ и, следовательно, при $\mu_1 = 0$ он сохраняется

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \overrightarrow{\text{const}}. \quad (1.21)$$

Из (1.21) и (1.7) следует

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_e = -\frac{d}{dt} \vec{p}_r. \quad (1.22)$$

Таким образом, при любом характере изменения угловой скорости $d\omega_{21}/dt$ относительного движения рабочего тела m_2 (любом изменении относительного импульса $\vec{p}_r$) абсолютный импульс $\vec{p} = \vec{p}_e + \vec{p}_r$ (1.7) замкнутой МС2 при $\mu_1 = 0$ сохраняется (1.21). Следствием равенства (1.22) является то, что угол запаздывания φ (1.16) замкнутой МС2 равен $\varphi = \varphi_{1C} - \varphi_{2C} = \pi$.

1.3. Методика определения диссипативного угла и координат центра инерционного домена

Общее решение неоднородных дифференциальных уравнений вида (1.14) есть сумма его частного и общего решений [2]. Частное решение в системе отсчета K_C (при $\varepsilon = 0$) или в системе отсчета K_O (при $\varepsilon \neq 0$) будем искать в общем для этих случаев виде (1.18).

Для определения входящих в (1.18) амплитудного коэффициента A и угла ε представим уравнения (1.14) в комплексной форме

$$\ddot{q}_1 = 2\gamma_1 \dot{q}_1 = a\omega_{21}^2 \exp j\omega_{21}t, \quad (1.23)$$

где q_1 – обобщенная координата; $\gamma_1 = \mu_1 / [2(m_1 + m_2)]$ – коэффициент затухания движения опорного тела m_1 .

Решение комплексного уравнения (1.23) будем искать в виде

$$q_1 = B_1 \exp j\omega_{21}t, \quad (1.24)$$

где B_1 – комплексная амплитуда, подлежащая определению.

Дифференцирование (1.24) по времени t дает

$$\dot{q}_1 = jB_1\omega_{21} \exp j\omega_{21}t; \quad \ddot{q}_1 = -B_1\omega_{21}^2 \exp j\omega_{21}t. \quad (1.25)$$

Подстановка (1.25) в уравнение (1.23) сводит его к виду

$$-B_1\omega_{21}^2 + 2j\gamma_1 B_1\omega_{21} = a\omega_{21}^2. \quad (1.26)$$

Из (1.26) комплексную амплитуду B_1 можно выразить в виде

$$B_1 = \frac{a\omega_{21}^2}{\omega_{21}^4 + 4\gamma_1^2\omega_{21}^2}(-\omega_{21}^2 - j2\gamma_1\omega_{21}) = A_1 \exp(j\varphi), \quad (1.27)$$

которая находится в III четверти ее комплексной плоскости, где $A_1 = |B_1|$.

С учетом того, что амплитуда B_1 (1.27) находится в III четверти ее комплексной плоскости, ее модуль $A_1 = |B_1|$ и фазу φ можно определить следующим образом:

$$A_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad \varphi = \pm\pi + \varepsilon; \quad \varepsilon = \arctg \xi, \quad (1.28)$$

где $\xi = \text{Im } B_1 / \text{Re } B_1 = 2\gamma_1 / \omega_{21}$ – диссипативный параметр, зависящий как от коэффициента линейного вязкого сопротивления μ_1 внешней среды, так и от собственных параметров МС2 m_1, m_2 и ω_{21} ; знак «+» или «–» соответствует равноценным по результату положительному и отрицательному отсчетам угла φ .

Подстановка (1.27) в (1.24) для положительного отсчета угла $\varphi = \varphi_{1O} = \pi + \varepsilon$ при $\varphi_{21} = 0$ (см. рис. 1.1, б) дает

$$q_1 = A_1 \exp j\omega_{21}t \exp(j\varphi) = -A_1 [\cos(\omega_{21}t + \varepsilon) + j \sin(\omega_{21}t + \varepsilon)]. \quad (1.29)$$

Действительная часть $\text{Re } q_1$ (1.29) является частным решением дифференциальных уравнений (1.14) в виде (1.18) для $\varepsilon \neq 0$ или в виде (1.19) для $\varepsilon = 0$.

Согласно (1.28) угол ε зависит как от коэффициента сопротивления μ_1 , входящего в коэффициент затухания γ_1 (1.23), так и от собственных параметров (m_1, m_2 и ω_{21}) МС2.

Далее были записаны общие решения

$$x_O(t) = C_{1x} + C_{2x} \exp(-2\gamma_1 t); \quad y_O(t) = C_{1y} + C_{2y} \exp(-2\gamma_1 t) \quad (1.30)$$

однородных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_O + 2\gamma_1 \dot{x}_O = 0; \quad \ddot{y}_O + 2\gamma_1 \dot{y}_O = 0, \quad (1.31)$$

характеризующих переносную часть движения МС2 вместе с центром O ИД как $\vec{v}_O = d\vec{r}_O / dt$ в системе отсчета K (см. рис. 1.1, б).

Сумма решений (1.18) и (1.30) дает решения дифференциальных уравнений (1.14) в системе отсчета K в виде:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= C_{1x} + C_{2x} \exp(-2\gamma_1 t) - A_1 \cos(\omega_{21} t + \varepsilon); \\ \dot{x}_1(t) &= -2C_{2x} \gamma_1 \exp(-2\gamma_1 t) + A_1 \omega_{21} \sin(\omega_{21} t + \varepsilon); \\ y_1(t) &= C_{1y} + C_{2y} \exp(-2\gamma_1 t) - A_1 \sin(\omega_{21} t + \varepsilon); \\ \dot{y}_1(t) &= -2C_{2y} \gamma_1 \exp(-2\gamma_1 t) - A_1 \omega_{21} \cos(\omega_{21} t + \varepsilon).\end{aligned}\tag{1.32}$$

Для нулевых начальных условий опорного тела m_1 примем $x_1(t=0) = 0$, $\dot{x}_1(t=0) = 0$ и $y_1(t=0) = 0$, $\dot{y}_1(t=0) = 0$. Тогда из (1.32) найдем:

$$\begin{aligned}C_{1x} &= A_1 \left(\cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \sin \varepsilon \right); C_{2x} = A_1 \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \sin \varepsilon; \\ C_{1y} &= A_1 \left(\sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \cos \varepsilon \right); C_{2y} = -A_1 \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \cos \varepsilon.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Подставив (1.33) в (1.32), получим общее решение дифференциальных уравнений (1.14):

$$\begin{aligned}x_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\ \dot{x}_1(\varphi_{21}) &= -A_1 \omega_{21} \left(\exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \sin \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\ y_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \cos \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\ \dot{y}_1(\varphi_{21}) &= A_1 \omega_{21} \left(\exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \cos \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right).\end{aligned}\tag{1.34}$$

Координаты и скорость ЦМ C МС2 в системе отсчета K можно определить по формулам:

$$\begin{aligned}
x_C &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}; \\
\dot{x}_C &= \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2}; \dot{y}_C = \frac{m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2}{m_1 + m_2},
\end{aligned}
\tag{1.35}$$

где координаты $x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}$, $y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}$ и определенные по ним скорости $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \omega_{21} R \sin \varphi_{21}$, $\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \omega_{21} R \cos \varphi_{21}$.

Траектории движения s_1, s_2 и s_C опорного m_1 , рабочего m_2 тел и ЦМ C МС2 в системе отсчета K , рассчитанные по решениям (1.34) и формулам (1.35) при $\mu_1 = 3,77; \infty$ Н·с/см, показаны на рис. 1.2.

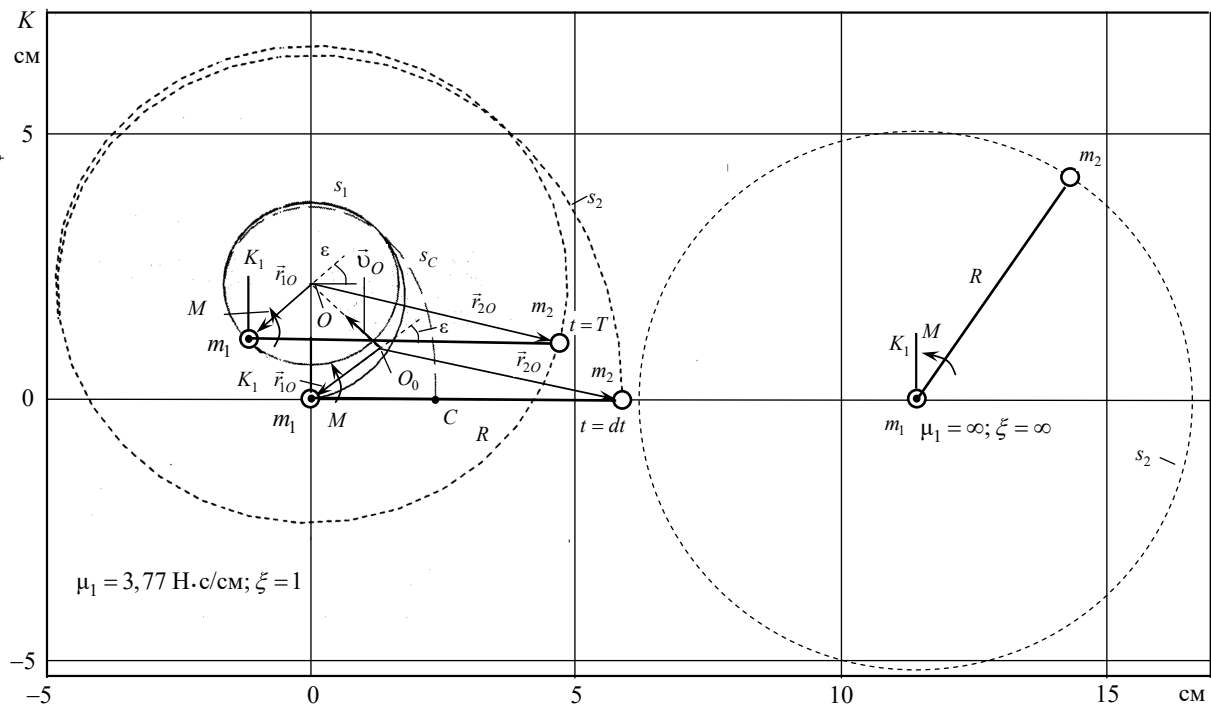


Рис. 1.2. Движение МС2 в системе отсчета K для различных значений μ_1

Координаты центра O ИД можно определить из решений (1.34) в виде:

$$\begin{aligned} x_O(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon \right); \\ y_O(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \cos \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Образование ИД за малый интервал времени $dt \rightarrow 0$ при $\mu_1 = 3,77$ Н·с/см соответствует представлению о мгновенной передаче взаимодействий в классической механике. Координаты центра O ИД в системе отсчета K , определенные из (1.36) при $\varphi_{21} = \omega_{21}t = 0$, составляют $x_O = \cos \varepsilon = 0,707$ см и $y_O = \sin \varepsilon = 0,707$ см, где угол ε равен $\varepsilon = 45^\circ$ (см. рис. 1.2).

Согласно выражениям (1.36), центр O ИД при $\mu_1 \neq 0$ и $\varphi_{21} < \pi$ дрейфует по затухающему закону из положения O_0 в положение O (см. рис. 1.2) со скоростью $v_O = \sqrt{\dot{x}_O^2 + \dot{y}_O^2}$, где скорости $\dot{x}_O$ и $\dot{y}_O$ можно определить дифференцированием выражений (1.36) по времени t .

Таким образом, в системе отсчета K опорное m_1 и рабочее m_2 тела, а также их ЦМ C будут двигаться по спиральным траекториям s_1, s_2 и s_C в стационарное состояние [4, 5, 7]. При этом постоянное значение угловой скорости $\omega_{21} = \text{const}$ поддерживается активным моментом M .

При $\mu_1 = 0$ центр O ИД совпадает с ЦМ C МС2 и опорное m_1 и рабочее m_2 тела будут двигаться относительно ЦМ C (см. рис. 1.1, а).

При $\mu_1 = \infty$ рабочее тело m_2 будет совершать движение по окружности s_2 относительно неподвижного опорного тела m_1 (см. рис. 1.2).

1.4. Полная система уравнений

Координаты и скорости тел m_1 и m_2 МС2 в системе отсчета K выразим в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1; x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}; \dot{x}_1 = \dot{x}_1; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R\dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}; \\ y_1 &= y_1; y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}; \dot{y}_1 = \dot{y}_1; \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R\dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Кинетическую энергию МС2 в этой системе отсчета K определим как

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}I_z\dot{\phi}_{11}^2. \quad (1.38)$$

Подстановка в скорости (1.37) в (1.38) определяет лагранжиан МС2

$$L = T - U(R) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\phi}_{21}^2R^2 - \\ - m_2\dot{\phi}_{21}R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}) + \frac{1}{2}I_z\dot{\phi}_{11}^2 - U(R) \quad , \quad (1.39)$$

где $U(R)$ – неизвестная потенциальная функция взаимодействия тел m_1 и m_2 стержня с длиной R .

Составляя уравнения Лагранжа по координатам x_1 , y_1 , φ_{21} и углу отката ϕ_{11} тела m_1 в системе отсчета K_1 , получим следующую систему уравнений движения МС2 для ее нестационарного – (1.40а) и стационарного – (1.40б) состояний [4, 5]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1\dot{x}_1 = a(\dot{\phi}_{21}^2 \cos \varphi_{21} + \ddot{\phi}_{21} \sin \varphi_{21}); \ddot{y}_1 + 2\gamma_1\dot{y}_1 = a(\dot{\phi}_{21}^2 \sin \varphi_{21} - \ddot{\phi}_{21} \cos \varphi_{21}); \\ \frac{dK_z^+}{dt} = 2m_2\gamma_1R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}) = M^+; \frac{dK_z^-}{dt} = -I\ddot{\phi}_{11} = M^-, \end{cases} \quad (1.40a)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1\dot{x}_1 = a\dot{\phi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}; \ddot{y}_1 + 2\gamma_1\dot{y}_1 = a\dot{\phi}_{21}^2 \sin \varphi_{21}; \\ \frac{dK_z^+}{dt} = 2m_2\gamma_1R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}) = M^+; \frac{dK_z^-}{dt} = M^-, \end{cases} \quad (1.40a)$$

где члены, содержащие угловые ускорения $\ddot{\phi}_{21}$ и $\ddot{\phi}_{11}$ в стационарном состоянии (1.40б), упущены; $\chi_1 = \mu_{1в}S$ и $\mu_{1в} = \pi\eta r$ – обобщенный коэффициент сопротивления внешней среды вращению (откату) тела m_1 в виде сферы с радиусом сферы r и коэффициент сопротивления его вращению (формула Стокса); $S = 4\pi r^2$ – площадь сферической поверхности тела m_1 ; η – вязкость внешней среды; M^+ – активный момент M , действующий на оси шарнира тела m_1 ; $M^- = -M + \chi_1\dot{\phi}_{11}$ – момент отката.

Согласно рис. 1.1, в первые слагаемые $a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}$ и $a\dot{\varphi}_{21}^2 \sin \varphi_{21}$ правой части первых двух уравнений (1.40а) образованы проекциями радиальной компоненты $\Phi_{21}^n = m_2 \dot{\varphi}_{21}^2 R$, а вторые $a\ddot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}$ и $a\ddot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}$ – проекциями тангенциальной компоненты $\Phi_{21}^\tau = m_2 \ddot{\varphi}_{21} R$ силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ на оси x_1, x_O и y_1, y_O параллельных систем отсчета K_1 и K_O , при делении этих проекций на $m_1 + m_2$. В стационарном состоянии $\ddot{\varphi}_{21} = 0$ и влияние компонент $a\ddot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21} = 0$ и $-a\ddot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21} = 0$ в (1.40а) равно нулю ($\Phi_{21}^\tau = 0$) и (1.40а) переходит (1.40б). Если $\vec{F}_1 = 0$, то согласно принципу наименьшего действия МС2 будет совершать движение относительно ее ЦМ C (см. рис 1.1, а) при $\Phi_{21}^\tau = 0$, когда ее кинетический момент $K_z = \text{const}$.

Силы инерции $\vec{\Phi}_{1к}$ и $\vec{\Phi}_{2к}$ Кориолиса опорного m_1 и рабочего m_2 тел в систему уравнений (1.40) не входят, так как по правилу Жуковского они направлены вдоль связи R и образуют равновесную систему сил $\vec{\Phi}_{1к} + \vec{\Phi}_{2к} = 0$.

Четвертое уравнение (1.40а) записано с учетом теоремы о кинетическом моменте тела m_1 в неинерциальной системе K_1 , ось z которой скреплена с ЦМ этого тела, движущейся в неподвижной системе отсчета K поступательно.

Первые два уравнения (1.40, б) МС2 для ее стационарного состояния при $\mu_1 = 0$ имеют решения (1.19), а при $\mu_1 \neq 0$ (1.18).

Суммируя последние два уравнения (1.40, б), почленно найдем

$$\frac{d}{dt} K_z = \frac{d}{dt} K_z^+ + \frac{d}{dt} K_z^- = M^+ - M^-. \quad (1.41)$$

Так как стационарному значению $\omega_{21} = \text{const}$ соответствует $\dot{\varphi}_{11} = \text{const}$, то из (1.41) получим

$$\frac{d}{dt} K_z = 0. \quad (1.42)$$

Таким образом, исходя из мгновенной передачи взаимодействий в механике, любому изменению угловой скорости ω_{21} (кинетического момента

dK_z^+ / dt МС2) относительно оси z_C системы отсчета K_C при $\mu_1 = 0$, вызванному действием активного момента M , соответствует равное по величине и обратное по знаку изменение откатного кинетического момента $-dK_z^- / dt$ опорного тела m_1 . При этом результирующий кинетический момент МС2 сохраняется $K_z = \text{const}$ при $\mu_1 = 0$, а при $\mu_1 \neq 0$ поддерживается постоянным за счет источника активного момента M , обеспечивающего $\omega_{21} = \text{const}$.

При $\mu_1 = \infty$ рабочее тело m_2 будет совершать вращательное движение вокруг неподвижной оси z системы отсчета K при $K_z \neq \text{const}$ до перехода в стационарный режим $\omega_{21} = \text{const}$, когда $K_z = \text{const}$. При этом источник активного момента M компенсирует потери кинетической энергии МС2 в диссипативной среде, поддерживая стационарное значение угловой скорости $\omega_{21} = \text{const}$, величина которого зависит от мощности этого источника.

1.5 Выводы

Таким образом, посредством аксимы связи R , примененной для относительных сил инерции $\vec{R}_{12} = \vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{R}_{21} = \vec{\Phi}_{21}$ двух взаимодействующих тел m_1 и m_2 МС2 с тремя степенями свободы $N \leq 3$, она сведена к одномассовому эквиваленту $m_1 + m_2$. Получено уравнение его движения в диссипативной среде (1.13), оказывающей линейное вязкое сопротивление ($\mu_1 \neq 0$) движению опорного тела m_1 МС2 с учетом относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 , влияющей на абсолютное движение одномассового эквивалента $m_1 + m_2$.

Полученные теоретические выводы и результаты, в отличие от выводов работ [9–11], позволяют записать уравнение движения трехмассовой механической системы МС3 (см. следующую главу) с числом степеней свободы $N = 2$ [3–5], типа инерциод Толчина [8], а также построить его математическую модель [4, 12, 13] и обосновать независимость величины смещения ЦМ C МС3 от диссипативного параметра МС3 ξ (28), лежащего в пределах $0 < \xi \leq \infty$ [12, 13], чему посвящена следующая глава.

2. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТРЕХМАССОВОГО КРИВОШИПНО-ПОЛЗУННОГО МЕХАНИЗМА НА БАЗЕ ЕГО ДВУХМАССОВОГО АНАЛОГА

2.1. Введение в главу

Глава посвящена динамическому анализу плоского трехмассового кривошипно-ползунного механизма (КПМ) [12, 13] типа «инерциоид Толчина» [8]. Он сведен к двухмассовому аналогу, а затем к одномассовому эквиваленту, движение которого описывается уравнением движения, учитывающим действие относительных сил инерции рабочих тел этого механизма и диссипативных сил на его ползун. Исследована зависимость смещения центра масс механизма от диссипации внешней среды и найден ее минимальный уровень, до которого смещение центра масс механизма постоянно и ниже которого оно всегда стремится к нулю.

2.2. Динамический анализ

Кинематическая схема и конструкция КПМ показаны на рис. 2.1, а и б.

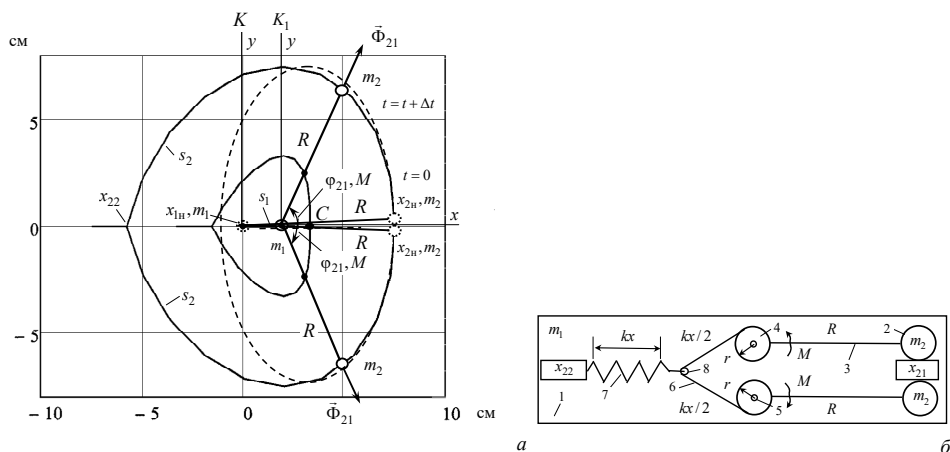


Рис. 2.1. Кинематическая схема КПМ – а и его конструкция – б:

- 1 – основание с массой m_1 ; 2 – рабочее тело с массой m_2 ;
- 3 – кривошип с длиной R ; 4 – шкив с радиусом r ; 5 – ось ; 6 – нить ;
- 7 – пружина с жесткостью k ; 8 – ролик

Основными элементами КПМ (см. рис. 2.1, б) являются ползун 1 с массой m_1 и два рабочих тела 2 с одинаковой массой m_2 , которые с помощью кривошипов 3 с длиной $R = \text{const}$ и шкивов 4 с радиусом r установлены на осях 5 ползуна 1 с возможностью их встречного синхронного вращательного движения в его плоскости из положения x_{21} в положение x_{22} с помощью нити 6 и пружины 7 с жесткостью k .

Для проведения динамического анализа КПМ введем неподвижную систему отсчета K , лежащую в плоскости рисунка (см. рис. 2.1, а). Начало координат этой системы отсчета K свяжем с начальным положением $x_{1н}$ ползуна m_1 в момент времени $t = 0$. Также введем собственную систему K_1 ползуна m_1 , лежащую в его плоскости, которая вместе с ним может совершать движение вдоль оси x неподвижной системы отсчета K .

КПМ имеет две степени свободы, по следующим обобщенным координатам: декартовой координате x_1 поступательного движения ползуна m_1 вдоль оси x неподвижной системы отсчета K и двум зависимым полярным координатам $\pm\varphi_{21}$ встречного синхронного вращательного движения тел m_2 в собственной системе отсчета K_1 ползуна m_1 , где знак $+\varphi_{21}$ для верхнего тела m_2 , а знак $-\varphi_{21}$ для нижнего. Рабочие тела m_2 установлены на ползуне m_1 с помощью прямолинейных кривошипов 3 с массой $m_R \ll m_2$ каждого, которые закреплены на шкивах 4 с массой $m_{ш} \ll m_2$ каждого. Сами шкивы 4 шарнирно установлены на осях 5 ползуна m_1 (см. рис. 2.1, б), что обеспечивает возможность встречного синхронного вращательного движения рабочих тел m_2 в плоскости ползуна m_1 из положения x_{21} в положение x_{22} с помощью нерастяжимой нити 6 (ее свободные концы намотаны на шкивы 4) и пружины 7.

В неподвижной системе отсчета K (см. рис. 2.1, а) для момента времени $t = 0$ ползун m_1 находится в начальном положении $\xi = 1$ (на рис. 2.1, б соответствует положению x_{21}), а рабочие тела $\Delta x_c = -6.6 \text{ см} = \text{const}$ в положении $t = 1.5$ (на рис. 2.1, б соответствует положению x_{22}). В этих положениях $\alpha = \pi$ и $\xi = \xi_{п} = 6.367 \cdot 10^{-13}$ скорости $\Delta x_c = -6.6 \text{ см} = \text{const}$, $t = 3.543 \cdot 10^{12}$ ползуна m_1 и рабочих тел m_2 равны нулю $\dot{x}_{1н} = 0$ и $\dot{y}_{2н} = 0$.

Коэффициент линейного вязкого сопротивления движению ползуна m_1 составляет μ_1 . Его величина лежит в пределах $0 \leq \mu_1 \leq \infty$ и зависит от геометрической формы и размеров ползуна m_1 . Для рабочих тел m_2 его величина всегда равна нулю $\mu_2 = 0$, что можно обеспечить, выполнив ползун m_1 в виде герметичного полого корпуса, в котором размещены рабочие тела m_2 .

В собственной системе отсчета K_1 ползуна m_1 (см. рис. 2.1, б) в начальный момент времени $t = 0$ тела m_2 заблокированы в положении x_{21} . Пружина 7 растянута. Ролик 8 на конце пружины 7 обеспечивает одинаковое натяжение T нити 6, концы которой намотаны на симметрично расположенных шкивах 4. При разблокировке тел m_2 пружина 7 будет сжиматься. И так как один ее конец закреплен на опоре x_{21} ползуна m_1 , на котором одновременно закреплены и оси 5 шкивов 4, то ролик 8 посредством одинаковых натяжений T нити 6 создаст на шкивах 4 двунаправленный уравновешенный момент $M = \pm \frac{kxr}{2 \cos \alpha}$, где k – жесткость пружины 7; $x = r(\pi - \varphi_{21})$ – величина ее растяжения в зависимости от угла φ_{21} поворота рабочих тел m_2 ; $\alpha \approx 30^\circ$ – угол наклона нити 6 к оси x системы отсчета K_1 . Под действием двунаправленного момента M тела m_2 будут совершать встречное синхронное вращательное движение из положения x_{21} в положение x_{22} на угол $\varphi_{21} = \pm \pi$. При этом угол α изменяется на малую величину $\Delta \alpha = \pm 3^\circ$. Так как натяжения T нити 6 для верхнего и нижнего шкивов 4 равны, то они создают равные, но различные по знаку моменты $M = \pm \frac{kxr}{2 \cos \alpha}$. При этом результирующий активный момент, действующий на ползуне m_1 , будет равен нулю $\sum M = 0$ и, следовательно, будет сохраняться кинетический момент $dK_z / dt = \text{const}$ КПМ относительно оси z системы отсчета K_1 (ось z направлена ортогонально к плоскости чертежа в сторону наблюдателя и на рис. 2.1 не показана). Сохранность $dK_z / dt = \text{const}$ будет подробно проанализирована при математическом моделировании КПМ.

Жесткость k пружины 7 выбирается так, чтобы время поворота тел m_2 на угол $\varphi_{21} = \pm\pi$ для любых μ_1 и параметров КПМ составляло $t_1 \leq 2\pi / \omega_{21} \leq 0,5$ с. Такой выбор сводит к минимуму влияние малого трения скольжения в шарнирном соединении шкивов 4 и осей 5 и влияние диссипативных потерь КПМ при его движении в диссипативной среде на угловую скорость ω_{21} вращательного движения тел m_2 в системе отсчета K_1 .

2.3. Математическая модель

Выразим кинетическую энергию КПМ через сумму кинетических энергий ее двух зеркальных относительно x частей с массами $\frac{1}{2}m_1$ и m_2 .

Для этого выразим скорости этих масс $m_1 \frac{1}{2}$ и m_2 через их координаты в системе отсчета K следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_1; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R\dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}; x_1 = x_1; x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}; \\ \dot{y}_1 &= \dot{y}_1; \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R\dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}; y_1 = y_1; y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Скорости $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ (2.1) позволяют выразить кинетическую энергию КПМ

$$T = T^+ + T^- = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{m}_2\dot{\varphi}_{21}^2 R^2 - \tilde{m}_2\dot{x}_1\dot{\varphi}_{21}R \sin \varphi_{21}, \quad (2.2)$$

здесь суммарная масса КПМ $m = m_1 + \tilde{m}_2$ условно сосредоточена в опорном теле m_1 , в которой $\tilde{m}_2 = 2m_2$ – суммарная масса рабочих тел m_2 ;

$$T^\pm = \frac{1}{2}(0,5m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_{21}^2 R^2 - m_2\dot{x}_1\dot{\varphi}_{21}R \sin \varphi_{21}.$$

Записывая лагранжиан $L = T - \Pi(x)$, где $\Pi(x) = \frac{1}{2}0.5kx^2$ – потенциальная энергия пружины 7 (см. рис. 2.1, б) для каждой из двух симметричных частей КПМ, а также составляя уравнения Лагранжа по обобщенным координатам x_1 , y_1 и φ_{21} , получим следующую систему уравнений движения КПМ [12, 13]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 = a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}; y_1 = 0; \\ \frac{d}{dt} K_z^\pm = \pm m_2 R [\ddot{\varphi}_{21} R + \sin \varphi_{21} (2\gamma_1 \dot{x}_1 - a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21})] = \pm M, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $\gamma_1 = \frac{\mu_1}{2(m_1 + \tilde{m}_2)}$ – коэффициент затухания и $a = \frac{\tilde{m}_2 R}{m_1 + \tilde{m}_2}$. Для стационарного состояния в уравнении для кинетического момента $K_z^\pm$ (2.3) следует принять $\ddot{\varphi}_{21} = 0$.

Система уравнений (2.3) сводит КПМ к ее двухмассовому аналогу МС2 с массами m_1 и $\tilde{m}_2 = 2m_2$. При этом система сил, действующая на КПМ в стационарном состоянии, образует ИД с равнодействующей $\vec{F}_{10} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1$ (1.13) (см. рис. 1. 1, в), образованный проекцией ортосительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21} = \tilde{m}_2 \omega_{21}^2 \vec{r}_{21}$ одного верхнего тела с условной массой $\tilde{m}_2 = 2m_2$ (для которой нижнее тело не рассматривается) в собственной системе отсчета K_1 ползуна m_1 на ось координат x системы отсчета K и диссипативной силой $\vec{F}_1 = -\mu_1 \vec{v}_1$, действующей на ползун m_1 вдоль этой же оси x . То, что в ползуне условно сосредоточена вся масса $m = m_1 + \tilde{m}_2$ (2.2), сводит трехмассовую КПМ к одномассовому эквиваленту ($m = m_1 + \tilde{m}_2$) с двумя степенями свободы по обобщенным координатам x_1 и φ_{21} (2.1), движущемуся в поле ИД под действием силы $\vec{F}_{10} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1$ (1.13).

Суммирование последнего уравнения (2.3) для двух зеркальных относительно x частей КПМ дает

$$\frac{d}{dt} K_z = \frac{d}{dt} K_z^+ + \frac{d}{dt} K_z^- = M - M = 0. \quad (2.4)$$

Из него следует равенство $dK_z^+ / dt = -dK_z^- / dt$, показывающее, что любому изменению $\ddot{\varphi}_{21} = \dot{\omega}_{21}$ угловой скорости ω_{21} рабочего тела m_2 КПМ (кинетического момента dK_z^+ / dt его одной части), вызванному действием момента M (см. рис. 2.1, а), соответствует равное по величине и обратное по знаку изменение момента $-dK_z^- / dt$ ее зеркальной части так, что

результатирующий кинетический момент КПМ для любых постоянных значений μ_1 , лежащих в пределах $0 \leq \mu_1 \leq \infty$, сохраняется $K_z = \text{const}$, что обосновывает приемлемость допущения $\omega_{21} = \omega_{\text{ср}} = \text{const}$. В результате этого у трехмассового КПМ (в отличие от МС2, показанной рис. 1.1) для любых $\ddot{\varphi}_{21}$ отсутствует вращение (откат) ползуна m_1 .

При учете факторов неидеальности в виде веса шкива 4 и кривошипа 3 с длиной R следует:

- добавить к массе ползуна m_1 суммарную массу $2m_{\text{ш}}$ шкивов 4 ($m_1 + 2m_{\text{ш}}$);

- учесть смещение центра тяжести системы кривошип 3 – тело m_2 в сторону шкива 4 по формуле $R_{\text{э}} = (m_R x_R + m_2 x_2) / (m_R + m_2)$, где $R_{\text{э}}$ – эквивалентная длина кривошипа 3; $x_R = R / 2$ – координата центра тяжести кривошипа 3, отсчитываемая от шкива 4; $x_2 = R + l_2 / 2$ – координата центра тяжести тела m_2 , также отсчитываемая от шкива 4; l_2 – длина рабочего тела m_2 .

Весом нити 6 и пружины 7 можно пренебречь, так как вес каждой из них более чем на 5–10 порядков меньше суммарного веса КПМ.

Для продолжения динамического анализа КПМ выделим из общего времени $0 \leq t \leq \infty$ его движения в системе отсчета K вдоль ее оси x две фазы. Активная фаза – это движение КПМ за время $0 \leq t < t_1$ (см. рис. 2.1, а), когда осуществляется вращательное перемещение его рабочих тел m_2 из положения $x_{21\text{н}}$ (на рис. 2.1, б соответствует положению x_{21}) в положение x_{22} (соответствующее этому же положению на рис. 2.1, б). Пассивная фаза движения – это затухающее движение КПМ за время $t_1 \leq t \leq \infty$ как целого после абсолютно неупругого уравновешенного центрального удара рабочих тел m_2 в положении x_{22} (см. рис. 2.1, а и б).

2.4. Активная фаза движения

Движение основания m_1 КПМ в системе отсчета K (рис. 2.1, а) описывается первым уравнением (2.3). Оно имеет решения (1.34):

$$\begin{aligned}
x_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\
\dot{x}_1(\varphi_{21}) &= -A_1 \omega_{21} \left(\exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \sin \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $A_1 = a / \sqrt{1 + \xi^2}$ – амплитудный коэффициент; $\varepsilon = \arctg(\xi)$ – угол диссипативных потерь; $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$ – диссипативный параметр.

Координаты $x_1(\varphi_{21})$ и скорости $\dot{x}_1(\varphi_{21})$ ползуна m_1 во время $0 \leq t < t_1$ с (где $t_1 = 0,5$ с) активной фазы движения КПМ были рассчитаны по решениям (2.5), а координаты x_C и скорости $\dot{x}_C$ его ЦМ C – по формулам (1.35):

$$\begin{aligned}
x_C &= \frac{m_1 x_1 + \tilde{m}_2 x_2}{m_1 + \tilde{m}_2}; y_C = y_C^+ + y_C^- = 0; \\
\dot{x}_C &= \frac{m_1 \dot{x}_1 + \tilde{m}_2 \dot{x}_2}{m_1 + \tilde{m}_2}; \dot{y}_C = \dot{y}_C^+ + \dot{y}_C^- = 0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где координаты $x_2 = x_1 + \cos \varphi_{21}$, $y_2 = \sin \varphi_{21}$ и определенные по ним скорости $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \omega_{21} \sin \varphi_{21}$, $\dot{y}_2 = \omega_{21} \cos \varphi_{21}$; $y_C^\pm = \frac{\tilde{m}_2 y_2}{m_1 + \tilde{m}_2}$ и $\dot{y}_C^\pm = \pm \frac{\tilde{m}_2 \dot{y}_2}{m_1 + \tilde{m}_2}$ – координаты и скорости ЦМ C отдельно для верхней и нижней, зеркальных относительно x частей КПМ.

На рис. 2.2, а и б показаны траектории движения ползуна m_1 и тел m_2 , а также ЦМ C , а на рис. 2.2, в и г – графики рассчитанных из (2.5) и (2.6) координат (положений) $x_1(\varphi_{21})$, $x_C(\varphi_{21})$ и скоростей $\dot{x}_1(\varphi_{21})$ ползуна m_1 и тел m_2 , для углов их встречного поворота на угол $0 \leq \varphi_{21}(t) \leq \pi$ за время $0 \leq t < t_1$; $t_1 = 0,5$ с активной фазы. Их расчет выполнен для собственных параметров КПМ: $m_1 = 0,14$ кг; $\tilde{m}_2 = 2m_2 = 0,11$ кг; $R = 7,5$ см, которые в дальнейшем неизменны.

2.5. Пассивная фаза движения

В результате встречного абсолютно неупругого центрального удара рабочих тел m_2 в положении x_{22} (см. рис. 2.1, *а* и *б*) при их повороте на угол $\varphi_{21} = \omega_{21}t_1 = \pi$ угловая скорость ω_{21} их вращательного перемещения обратится в нуль $\omega_{21} = 0$. Тогда во время $t_1 \leq t \leq \infty$; (где $t_1 = 0,5$ с) пассивной фазы движения КПМ он будет совместно с его ЦМ C совершать в системе отсчета K вдоль ее оси x затухающее поступательное движение (рис. 2, *в* и *г*) по инерции как единое целое со скоростью

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = \dot{x}_C(t). \quad (2.7)$$

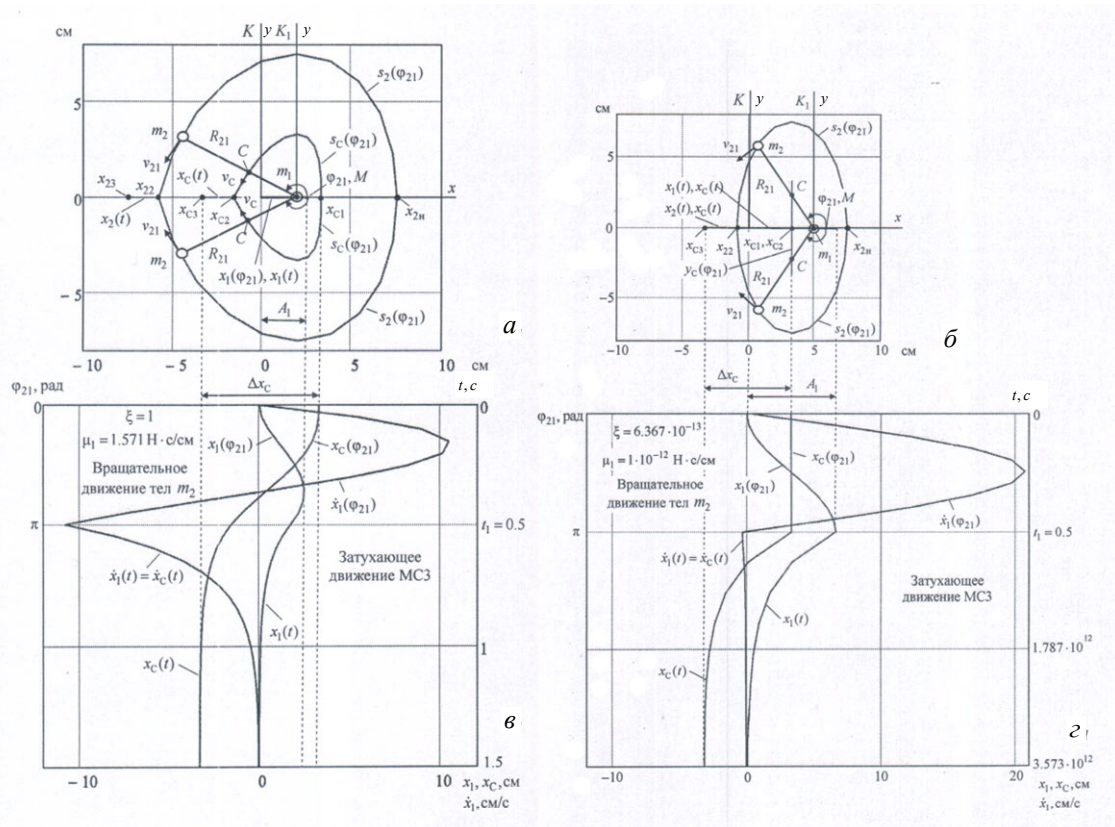


Рис. 2.2. Кинематическая схема КПМ – *а*, *б* и графики положения x_1 и скорости $\dot{x}_1$ его ползуна m_1 , а также положения x_C его ЦМ C за общее время активной и пассивной фаз его движения:

– $0 \leq t \leq 1,5$ с при $\xi = 1$ ($\mu_1 = 1,571 \text{ Н} \cdot \text{с/см}$) – *в*;

– $0 \leq t \leq 3,573 \cdot 10^{12}$ с при $\xi = 6,367 \cdot 10^{-13}$ ($\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ Н} \cdot \text{с/см}$) – *г*

Как известно, затухающее движение КПМ во время $t_1 \leq t \leq \infty$; (где $t_1 = 0,5$ с) пассивной фазы движения можно представить однородным уравнением $\ddot{x}_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 = 0$ с решениями:

$$x_1(t) = C_1 + C_2 \exp(-2\gamma_1(t - t_1)); \quad x_C(t) = C_3 + C_2 \exp(-2\gamma_1(t - t_1)). \quad (2.8)$$

Дифференцирование $dx_1(t)/dt$ и $dx_C(t)/dt$ решений (2.8) по времени t позволяет представить равенство (2.7) в виде

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_C(t) = -2C_2\gamma_1 \exp(-2\gamma_1(t - t_1)). \quad (2.9)$$

Подстановка времени $t = t_1$ в решения (2.8) и равенство (2.9) позволяет определить коэффициенты $C_1 - C_3$ в виде:

$$\begin{aligned} x_1(t_1) = x_1(\alpha) &= C_1 + C_2; \quad x_C(t_1) = x_C(\alpha) = C_3 + C_2; \\ \dot{x}_1(t) = \dot{x}_C(t_1) &= \dot{x}_C(\alpha) = -2C_2\gamma_1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

здесь начальное положение $x_1(\alpha)$ и $x_C(\alpha)$ ползуна m_1 и ЦМ C , а также его начальная скорость $\dot{x}_C(\alpha)$ определены решениями (2.5) и формулами (2.6) при фиксированном повороте рабочих тел m_2 на угол $\varphi_{21} = \omega_{21}t = \alpha = \pi$.

Решая уравнения (2.10), получим:

$$C_1 = x_1(\alpha) + \dot{x}_C(\alpha) / 2\gamma_1; \quad C_2 = -\dot{x}_C(\alpha) / 2\gamma_1; \quad C_3 = x_C(\alpha) + \dot{x}_C(\alpha) / 2\gamma_1. \quad (2.11)$$

Подстановка (2.11) в (2.8) и (2.9) дает:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))]; \\ \dot{x}_1(t) = \dot{x}_C(t) &= \dot{x}_C(\alpha) \exp(-2\gamma_1(t - t_1)); \\ x_C(t) &= x_C(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В решении (2.12) область определения времени $t \geq t_1$. Положения $x_1(\alpha)$, $x_C(\alpha)$ и скорость $\dot{x}_C(\alpha)$ рассчитаны из (2.5) и (2.6) при $t_1 = 0,5$ с, $\alpha = \pi$. Их

рассчитанные значения составляют: для рис. 2.2, в при $\xi = 1 - x_1(\pi) = 1,72$ см, $x_C(\pi) = -1,58$ см и $\dot{x}_C(\pi) = -10,82$ см/с, и для рис. 2.2, г при $\xi = 1 - x_1(\pi) = 6,6$ см, $x_C(\pi) = 3,3$ см и $\dot{x}_C(\pi) = -2,64 \cdot 10^{-11}$.

Рассчитанные из решений (2.5), (2.12) и формул (2.6) значения $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, $x_C(t)$ показаны графиками на рис. 2.2, в в системе отсчета K для времени $t_1 \leq t \leq 1,5$; (где $t_1 = 0,5$ с) активной фазы движения КПМ и на рис. 2.2, г для времени $t_1 \leq t \leq 3,573 \cdot 10^{12}$ (где $t_1 = 0,5$ с) пассивной фазы его движения. Расчет произведен с использованием двух значений диссипативного параметра ξ (5): для рис. 2.2, в – $\xi = 1$, $\mu_1 = 1,571$ Н·с/см и для рис. 2.2, г – $\xi = 6,367 \cdot 10^{-13}$, $\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12}$ Н·с/см при ранее заданных собственных параметрах КПМ.

2.6. Эффект смещения центра масс

Величину смещения Δx_C ЦМ C МСЗ в системе отсчета K выразим для двух значений диссипативного параметра $\xi = 1$ и $\xi = 6,367 \cdot 10^{-13}$, которые приведены на рис. 2.2, в и г. Для $\xi = 1$ (см. рис. 2.2, в) его величина за общее время $0 \leq t \leq 1,5$ с складывается из времени $0 \leq t < 0,5$ с активной фазы движения КПМ и времени $0,5 \leq t \leq 1,5$ с пассивной фазы его движения (см. рис. 2.2, в). И аналогично для $\xi = 6,367 \cdot 10^{-13}$ за общее время $0 \leq t \leq 3,573 \cdot 10^{12}$ с активной $0 \leq t < 0,5$ с и пассивной $0,5 \leq t \leq 3,573 \cdot 10^{12}$ с фаз (см. рис. 2.2, г). Для этих двух случаев величина смещения Δx_C ЦМ C составляет [3, 5, 12, 13]

$$\Delta x_C = x_{C3} - x_{C1} = \Delta x_r + \Delta x_e. \quad (2.13)$$

Первое слагаемое $\Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha)$ (2.13) есть относительное смещение ЦМ C в системе отсчета K_1 за время $0 \leq t < 0,5$ с активной фазы движения КПМ. Знак «минус» этого слагаемого указывает на то, что смещение ЦМ C происходит в сторону отрицательных значений координатной оси x системы отсчета K_1 . Второе слагаемое $\Delta x_e = x_{C3} - x_{C2} = \Delta x_1$ является

переносным смещением ЦМ C в системе отсчета K . Оно в системе отсчета K равно смещению Δx_1 опорного тела m_1 за общее время активной и пассивной фаз движения КПМ.

Согласно рис. 2.2, ν и z , смещение Δx_1 опорного тела m_1 за общее время действия и последствий $0 \leq t \leq 1,5$ с (для рис. 2, ν) и $0 \leq t \leq 3,573 \cdot 10^{12}$ с (для рис. 2, z) при $1 \cdot 10^{-12} \leq \mu_1 \leq 1,571$ Н·с/см ($\xi_{\pi} \leq \xi \leq \infty$) равно нулю $\Delta x_1 = 0$. Величина ξ_{π} является некоторым пороговым значением диссипативного параметра $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$ (2.5). Это пороговое значение ξ_{π} для выбранной модели МСЗ будет определено ниже. При $\xi \geq \xi_{\pi}$ смещение ЦМ C $\Delta x_C = \Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$ и не зависит от коэффициента сопротивления μ_1 диссипативной среды движению ползуна m_1 [12, 13].

Эффект постоянного смещения $\Delta x_C = \Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$ (2.13) ЦМ C при $\xi_{\pi} \leq \xi \leq \infty$ обеспечивает вклад угла диссипативных потерь $\varepsilon = \arctg(\xi)$ (2.5) в угол $\varphi = \varphi_{1O} - \varphi_{21} = \pi + \varepsilon$, характеризующий запаздывание фазы $\varphi_{1O} = \varphi_{21} + \pi + \varepsilon$ прямолинейного движения ползуна m_1 (вдоль оси x) относительно фазы φ_{21} встречного вращательного движения рабочих тел m_2 в системе координат K_O , связанной с центром O ИД (2.1). При таком запаздывании скорость $\dot{x}_1(\varphi_{21} = \pi) = \dot{x}_C(\varphi_{21} = \pi) < 0$ основания m_1 при $\varphi_{21} = \alpha = \pi$ является отрицательной, как показано на рис. 2, ν и z . Для отрицательного значения скорости $\dot{x}_1(\varphi_{21} = \pi) = \dot{x}_C(\varphi_{21} = \pi) < 0$ всегда выполняется условие

$$x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))] \right] = x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} = 0; \xi \geq \xi_{\pi}. \quad (2.14)$$

Условие (2.14) получено из (2.12) при $t \rightarrow \infty$. Согласно нему, смещение Δx_C ЦМ C КПМ для всех $\xi \geq \xi_{\pi}$ равно $\Delta x_C = \text{const}$, а при $\xi < \xi_{\pi}$ оно $\Delta x_C \rightarrow 0$.

Это условие отражает тот факт, что ползун m_1 при $t \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к началу координат неподвижной системы отсчета K , которое определено начальным положением ползуна m_1 в

момент времени $t=0$ (см. рис. 2, *в* и *г*). Такое поведение КПМ не противоречит выводам работ [3–5, 12, 13].

Пороговое значение $\xi_{\text{п}}$ было найдено на основе численного моделирования смещения Δx_C (2.13) ЦМ C . Оно искалось как функция от коэффициента сопротивления μ_1 , который определяет коэффициент затухания $\gamma_1 = \mu_1 / [2(m_1 + \tilde{m}_2)]$ (2.3) и одновременно диссипативный параметр $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$ (2.5). На рис. 2.3 приведен алгоритм численного моделирования.

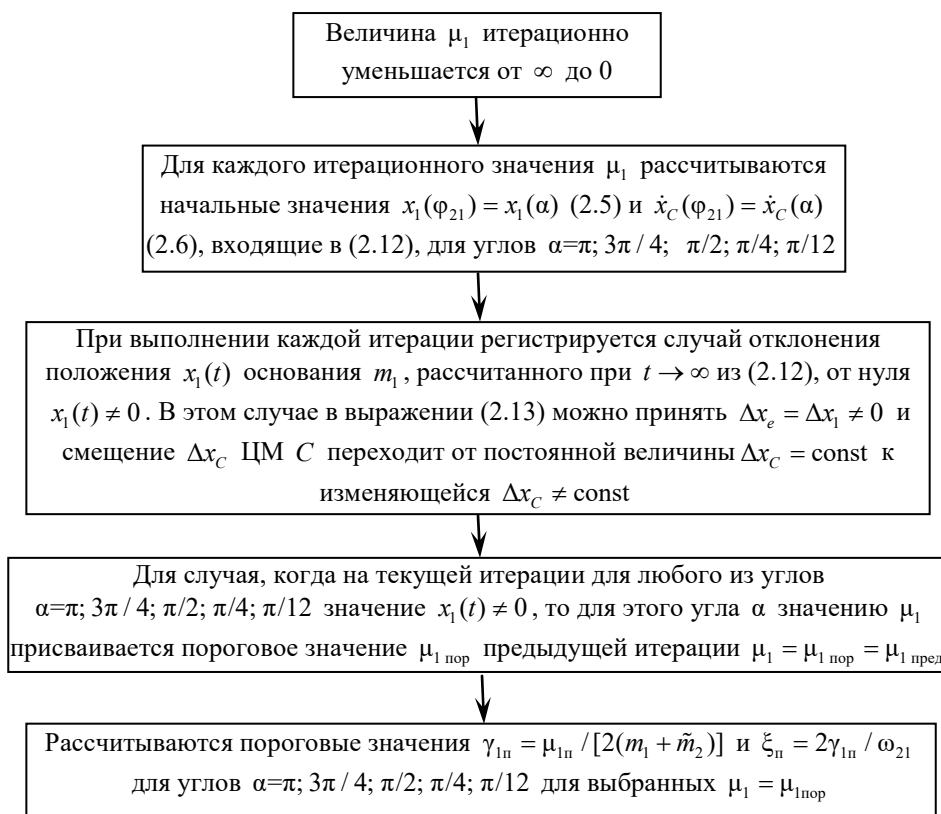


Рис. 2.3. Блок-схема алгоритма численного моделирования

Результаты численного моделирования приведены на рис. 2.4.

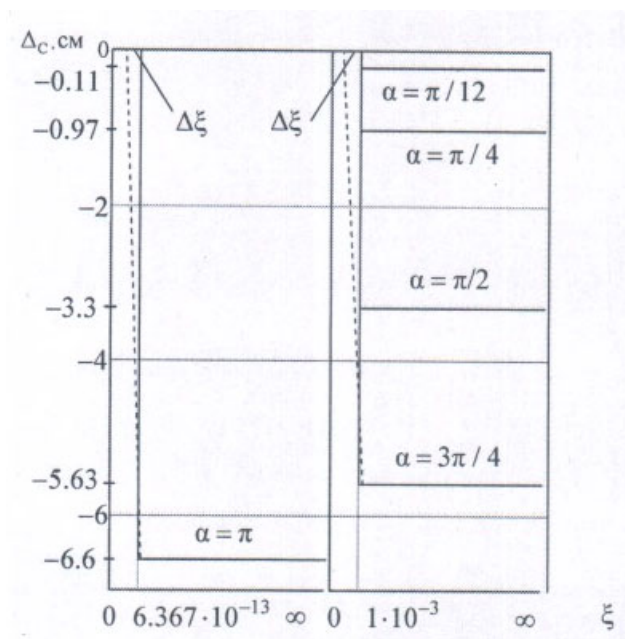


Рис. 2.4. Смещение Δx_C ЦМ C для фиксированных углов α в виде функции от диссипативного параметра ξ

В дополнение к рис. 2.4 ниже в табл. 2.1 приведены рассчитанные значения смещений Δx_C ЦМ C МСЗ для различных углов поворота α в виде функций от диссипативного параметра $\xi \geq \xi_{\Pi}$.

Таблица 2.1

Рисунок	Угол	Диссипативный параметр	Смещение ЦМ C	Общее время
Рис. 2.2, в	$\alpha = \pi$	$\xi = 1$	$\Delta x_C = -6.6 \text{ см} = \text{const}$	$t = 1.5 \text{ с}$
Рис. 2.2, г	$\alpha = \pi$	$\xi = \xi_{\Pi} = 6.367 \cdot 10^{-13}$	$\Delta x_C = -6.6 \text{ см} = \text{const}$	$t = 3.543 \cdot 10^{12} \text{ с}$
Рис. 2.4	$\alpha = 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$	$\xi_{\Pi} \leq \xi \leq 1$ $\xi_{\Pi} = 1 \cdot 10^{-3}$	$\Delta x_C = -5.633; -3.3; -0.967; -0.112 \text{ см}$	$t = 2 \cdot 10^3$

Согласно рис. 2.4 и табл. 2.1, величина смещения Δx_C ЦМ C для каждого из углов $\alpha = \pi; 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$ в диапазоне изменения $\xi_{\Pi} \leq \xi \leq \infty$ диссипативного параметра ξ сохраняется постоянной $\Delta x_C = \text{const}$. Из рис. 2.3 видно, что в малом интервале $\Delta \xi = 0,061 \cdot 10^{-13}$ — $\alpha = \pi$ и $\Delta \xi = 0,084 \cdot 10^{-4}$ — $\alpha = 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$ уменьшения диссипативного

параметра ξ смещение Δx_C ЦМ C линейно стремится к нулю $\Delta x_C \rightarrow 0$ (в интервале $\Delta \xi$ график на рис. 2.4 показан штрихпунктирной линией).

Также согласно рис. 4, рис. 2, в, г и табл. 2.1, наименьшее пороговое значение $\xi_{\pi \min} = 6,367 \cdot 10^{-13}$ диссипативного параметра ξ наблюдается при угле $\alpha = \pi$, когда смещение $\Delta x_{C \max} = -6,6 \text{ см} = \text{const}$, ЦМ C максимально. При стремлении $\xi \rightarrow \xi_{\pi}$ начальная скорость $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi)$, изменяясь по закону $-\sin 2\alpha$, стремится к нулю $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi) \rightarrow 0$. Она за малый интервал $\Delta \xi$ приращения ξ обращается в нуль $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi) = 0$. При этом в этом же малом интервале $\Delta \xi$ смещение ЦМ C Δx_C также стремится к нулю $\Delta x_C \rightarrow 0$, обращаясь в нуль $\Delta x_C = 0$ при $\xi_{\pi} - \Delta \xi$ (см. рис. 2.4).

2.7. Выводы

Таким образом, получено решение задачи для трехмассового КПМ типа «инерциоид Толчина» [8]. Показано, что КПМ сводится к двухмассовому аналогу, а затем к одномассовому эквиваленту [5, 7], масса m которого движется в центральном поле ИД с уравнением движения (2.3) и его решением (2.5). Показано, что смещение Δx_C (2.13) центра O_C масс C КПМ в среде со значением диссипативного параметра больше порогового $\xi_{\pi} \leq \xi \leq \infty$ остается постоянным $\Delta x_C = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$, что согласуется с работами [3–5, 12, 13]. Это обеспечивает эффективное движение инерциоида Толчина [8] посредством выбора разных угловых скоростей ω_{21} для прямого и обратного перемещения его рабочих тел m_2 . Например, для одного из них $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} \geq \xi_{\pi}$, когда смещение Δx_C его ЦМ C постоянно $\Delta x_C = \text{const}$, а для другого $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} < \xi_{\pi}$, когда оно стремится к нулю $\Delta x_C \rightarrow 0$.

3. ПОЛЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЯТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

3.1. Введение в главу

Взаимодействие двух тел в механике Ньютона удовлетворяет третьему закону о действии и противодействии [1, 2]. Он дополняет второй закон Ньютона, сформулированный для случая, когда одно из двух взаимодействующих тел механической системы отброшено, а реакция связи этих тел заменена активной силой $\vec{R} = \vec{F}$, являющейся мерой взаимодействия оставшегося и отброшенного тел в инерциальной системе отсчета, что позволило решать большой класс задач механики, включая небесную в гелиоцентрической системе отсчета. Таким образом, второй закон Ньютона описывает действие, которое, в отличие от взаимодействия, включающего противодействие, в природе не существует, что компенсируют введением во второй закон Ньютона поправок в виде сил инерции, учитывающих неинерциальность системы отсчета наблюдателя.

В рассматриваемой главе показано, что закон движения каждого из двух взаимодействующих материальных тел можно получить, если в качестве меры взаимодействия двух тел выбрать их относительные силы инерции $\vec{\Phi}_r$ [5–7], взаимно приложенные к этим телам через их связь $\vec{R} = \vec{\Phi}_r$, которая может быть образована механически или же каким-либо силовым полем. При этом, принимая тело с большей массой за опорное, с применением к нему аксиомы связи, можно получить уравнение его движения в поле относительной силы инерции $\vec{R} = \vec{\Phi}_r$ другого тела, выбранного за рабочее, в виде принципа Д'Аламбера или же в форме второго закона Ньютона для инерциальной системы отсчета. При равной массе тел выбор из них опорного тела равноправен.

Полученные уравнения движения, в отличие от известного уравнения движения центра масс, полученного на основе второго закона Ньютона,

дают возможность раздельного анализа движения каждого из взаимодействующих материальных тел и их центра масс в поле относительных сил инерции как в вакууме, так и в диссипативной среде [4, 14–16].

3.2. Распределение импульсов

Выделим в пространстве замкнутую систему двух не взаимодействующих тел m_1 и m_2 , которая показана на рис. 3.1 [14–16]. Ее тела m_1 и m_2 (до начала их взаимодействия) совершают в лабораторной системе отсчета K прямолинейное и равномерное движение навстречу друг другу со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ и имеют импульсы $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = -\vec{p}_2$ и $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$ так, что суммарный импульс $\vec{p}_C = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m \vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i$ рассматриваемой замкнутой системы тел (СТ) сохраняется

$$d\vec{p}_C / dt = d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / dt = const, \quad (3.1)$$

где $\vec{v}_C$ – скорость ее центра масс (ЦМ) C в системе отсчета K которая для замкнутой СТ при $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ равна $\vec{v}_C = 0$, и $m = m_1 + m_2$ – суммарная масса тел СТ.

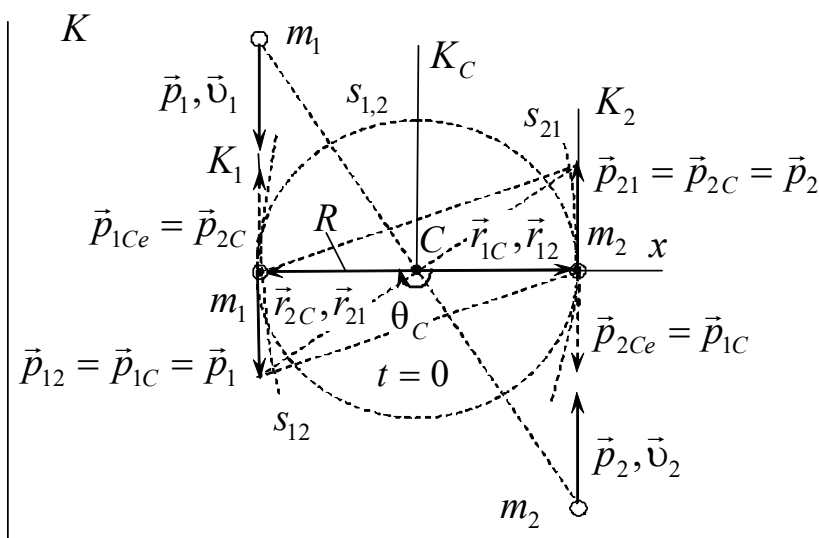


Рис. 3.1. Формирование MC2 в абсолютном пространстве

Пусть в момент времени $t = 0$ тела m_1 и m_2 вступают во взаимодействие посредством прямолинейного идеального стержня с длиной $R = \text{const}$, концы которого для времени $t \geq 0$ закреплены на телах m_1 и m_2 посредством идеальных шарниров, что приводит к образованию в момент времени $t = 0$ замкнутой механической системы из этих двух взаимодействующих тел (МС2).

Для кинематического анализа распределения импульсов сформированной замкнутой МС2 между ее телами m_1 и m_2 введем в момент времени $t = 0$ собственные системы отсчета K_1 и K_2 этих тел, а также систему отсчета K_C их ЦМ C так, что оси координат x и y этих систем отсчета и системы отсчета K при $t \geq 0$ всегда параллельны.

В результате вступления в момент времени $t = 0$ тел m_1 и m_2 во взаимодействие их движение при $t > 0$ вместе с их собственными системами отсчета K_1 и K_2 в системе отсчета K будет совершаться по траектории $s_{1,2}$ (общей для $m_1 = m_2$). Это движение является переносным поступательным, тогда как движение тел m_1 и m_2 во взаимно противоположных системах отсчета K_2 и K_1 , собственных по отношению к телам m_2 и m_1 , совершающееся по траекториям s_{12} и s_{21} (на рис. 3.1 показаны частично) – является относительным поступательным.

Согласно (3.1) скорость $\vec{v}_C$ ЦМ C образованной замкнутой МС2 в системе отсчета K можно выразить в виде

$$\vec{v}_C = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / m. \quad (3.2)$$

Ее значение при $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ (как и у СТ) составляет $\vec{v}_C = 0$. При $\vec{p}_1 \neq -\vec{p}_2$ скорость $\vec{v}_C \neq 0$ и движение замкнутой МС2 будет складываться из движения ее тел m_1 и m_2 относительно их ЦМ C в системе отсчета K_C и движения ее ЦМ C в системе отсчета K [1, 2]. Такой случай в работе не рассматривается.

Для $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ требование к сохранению импульса (3.1) справедливо и для переносного поступательного движения образованной замкнутой МС2 при $t > 0$

$$d\vec{p}_C / dt = d(\vec{p}_{1e} + \vec{p}_{2e}) / dt = const, \quad (3.3)$$

где

$$\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C} = m_2 \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{2C} = \vec{p}_2, \quad \vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C} = m_1 \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{1C} = \vec{p}_1 \quad (3.4)$$

– переносные импульсы тел m_1 и m_2 в системе отсчета K вместе с собственными системами отсчета K_2 и K_1 тел m_2 и m_1 (см. рис. 3.1), за которые приняты импульсы $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$ и $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ поступательного движения тел m_2 и m_1 в системе отсчета K_C по траектории $s_{1,2}$;

$$\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_{1C} = \vec{\omega}_{2C} \quad (3.5)$$

– вектор угловой скорости поступательного движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C ;

$$\vec{r}_{1C} = -m_2 \vec{r}_{21} / m; \vec{r}_{2C} = m_1 \vec{r}_{21} / m; \quad (3.6)$$

– радиусы-векторы траекторий $s_{1,2}$ их поступательного движения в системе отсчета K_C , которые определены из уравнений $m_1 \vec{r}_{1C} + m_2 \vec{r}_{2C} = 0$ и $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{2C} - \vec{r}_{1C}$ в работах [1, 2].

Согласно (3.3) переносные импульсы при $\vec{v}_C = 0$, когда $const = 0$ связаны равенством

$$\vec{p}_{1e} = -\vec{p}_{2e}, \quad (3.7)$$

а их начальное значение при $t = 0$ определено в виде $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C} = \vec{p}_2$ и $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C} = \vec{p}_1$ (3.4) импульсами $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ тел m_1 и m_2 до начала их взаимодействия.

Равенство $\vec{p}_{1e} = -\vec{p}_{2e}$ (3.7) определяет диаметрально распределение тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C

$$\theta_C = \varphi_{2C} - \varphi_{1C} = -\arccos(p_1 / p_2) = -\pi, \quad (3.8)$$

где $\varphi_{1C} = \omega_C t - \pi$ и $\varphi_{2C} = \omega_C t$ – фаза их поступательного движения, как показано на рис. 3.1.

Выбор знака перед числом $-\pi$ (3.8) характеризует угол запаздывания фазы φ_{1C} поступательного движения тела m_1 относительно фазы φ_{2C} поступательного движения тела m_2 при их движении против хода часовой стрелки (см. рис. 3.1).

Связь переносных $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C} = m_2 \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{2C}$, $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C} = m_1 \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{1C}$ (3.4) и относительных $\vec{p}_{12} = m_1 \vec{\omega}_{12} \times \vec{r}_{12}$, $\vec{p}_{21} = m_2 \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_{21}$ импульсов будем искать в виде равенств:

$$\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{21}; \vec{p}_{2C} = -\vec{p}_{12}, \quad (3.9)$$

где $\vec{\omega}_{12}$ и $\vec{\omega}_{21}$ – векторы угловой скорости относительного поступательного движения тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_2 и K_1 по траекториям s_{12} и s_{21} ; $r_{12} = r_{21} = R$ – радиусы относительного поступательного движения в этих системах отсчета.

Для установления условия физической реализуемости равенств вида (3.9) выразим переносные $\vec{p}_{1C}, \vec{p}_{2C}$ и относительные $\vec{p}_{12}, \vec{p}_{21}$ импульсы в проекциях на координатную ось x системы отсчета K :

$$\begin{aligned} p_{1Cx} &= m_1 \omega_C r_{1C} \cos \varphi_{1C}; p_{2Cx} = m_2 \omega_C r_{2C} \cos \varphi_{2C}; \\ p_{12x} &= m_1 \omega_{12} r_{12} \cos \varphi_{12}; p_{21x} = m_2 \omega_{21} r_{21} \cos \varphi_{21}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\varphi_{12} = \omega_{12} t_2 + \pi$ и $\varphi_{21} = \omega_{21} t_1$ – фазы поступательного движения тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_2 и K_1 ; t_1 и t_2 – собственное время в системах отсчета K_1 и K_2 , связь которого с абсолютным временем t в системе отсчета K будет установлена в следующем разделе.

Для диаметрального распределения $\theta_C = -\pi$ (3.8) фаза φ_{1C} поступательного движения тела m_1 в системе отсчета K_C связана с фазой φ_{21} поступательного движения тела m_2 в собственной системе отсчета K_1 тела m_1 (и по аналогии фаза φ_{2C} поступательного движения тела m_2 в системе

отсчета K_C – с фазой φ_{12} поступательного движения тела m_1 в собственной системе отсчета K_2 тела m_2) преобразованиями [5–7]:

$$\varphi_{1C} = \varphi_{21} - \pi; \varphi_{2C} = \varphi_{12} - \pi, \quad (3.11)$$

что иллюстрируется рис. 3.1.

Составление уравнений для проекций (3.10) по векторным равенствам (3.9) при одновременном учете преобразований (3.6) и (3.11) определяет угловые скорости:

$$\omega_{12} = m_2 \omega_C / m; \omega_{21} = m_1 \omega_C / m, \quad (3.12)$$

для которых равенства (3.9) удовлетворены.

Равенство относительных импульсов

$$\vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21} \quad (3.13)$$

тел m_1 и m_2 задано в момент времени $t = 0$ в виде $\vec{p}_{12} = \vec{p}_{1C} = \vec{p}_1$, $\vec{p}_{21} = \vec{p}_{2C} = \vec{p}_2$ (см. рис. 1) импульсами $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ этих тел, которые они имели до начала их взаимодействия.

Сумма переносных $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$, $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ и относительных $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{21}$ импульсов тел m_1 и m_2 , входящих в равенства (3.7), (3.9) и (3.13) удовлетворяет сохранности импульса замкнутой МС2 в виде:

$$\vec{p}_C = \vec{p}_{1C} + \vec{p}_{2C} + \vec{p}_{12} + \vec{p}_{21} = \text{const} = 0. \quad (3.14)$$

Таким образом, равенства (3.7), (3.9) и (3.13) устанавливают связь между переносными $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$, $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ и относительными $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{21}$ импульсами рассматриваемой замкнутой МС2 в виде [14–16]:

$$\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{21}; \vec{p}_{2C} = -\vec{p}_{12}; \vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{2C}; \vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}, \quad (3.15)$$

где знак «минус» характеризует то, что распределение тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C диаметрально $\theta_C = -\pi$ (3.8).

В качестве независимых координат МС2 выберем: четыре полярные координаты r_{1C} , φ_{1C} , r_{2C} , φ_{2C} тел m_1 и m_2 в системе отчета K_C . Их независимость обоснована в работах [5–7], где показано, что в диссипативной среде движение тел m_1 и m_2 совершается относительно центра O инерционного домена при их радиальном распределении $\theta_O \neq -\pi$. При этом центр O не совпадает с (ЦМ) C МС2 и движение ее тел m_1 и m_2 во вспомогательной (связанной с центром O), системе отсчета K_O описывается радиусами-векторами $\vec{r}_{1O}$ и $\vec{r}_{2O}$, являющимися аналогами радиусов-векторов $\vec{r}_{1C}$ и $\vec{r}_{2C}$. Дополнительной независимой координатой является одна из двух зависимых полярных координат $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$ тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_2 и K_1 .

Таким образом число степеней свободы рассматриваемой МС2 соответствует классическому определению $N = 3n - l = 6 - 1 = 5$, где $n = 2$ – количество тел МС2, участвующих в плоском движении, которые имеют по три степени свободы; $l = 1$ – одна связь тел m_1 и m_2 стержнем R .

Относительные угловые скорости ω_{12} и ω_{21} (3.12) поступательного движения тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_1 и K_2 можно выразить через начальные скорости $\vec{v}_{1Cн} = \vec{p}_1 / m$ и $\vec{v}_{2Cн} = \vec{p}_2 / m$ ЦМ C в момент времени $t = 0$:

$$\omega_{12} = v_{1Cн} / r_{1C} = v_1 / R; \quad \omega_{21} = v_{2Cн} / r_{2C} = v_2 / R, \quad (3.16)$$

где v_1 и v_2 – скорости тел m_1 и m_2 до начала взаимодействия.

Угловая скорость $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$ (3.5) поступательного движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C (которое по отношению к системе отсчета K является переносным) определяется суммой относительных угловых скоростей ω_{12} и ω_{21} (3.12) и с учетом того, что $m_1 v_1 = m_2 v_2$ может быть определена в виде

$$\omega_C = \omega_{12} + \omega_{21} = v_1 / R + v_2 / R = \begin{cases} \frac{m v_1}{m_2 R} \text{ при } m_2 \geq m_1; \\ \frac{m v_2}{m_1 R} \text{ при } m_1 \geq m_2. \end{cases} \quad (3.17)$$

3.3. Относительность времени

Для жесткого соединения тел m_1 и m_2 стержнем R МС2 можно рассматривать как твердое тело. В этом случае угловые скорости плоского вращательного движения этих тел относительно начала C , O_1 и O_2 координат систем отсчета K_C, K_1 и K_2 (полюсов) являются инвариантами [1]

$$\omega_C = \omega_{12} = \omega_{21}, \quad (3.18)$$

где $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$ (3.5) – угловая скорость вращательного движения тел m_1 и m_2 относительно полюса C ; ω_{12} и ω_{21} – угловые скорости вращательного движения этих тел относительно полюсов O_1 и O_2 (первый индекс угловой скорости указывает на номер тела, а второй – на номер полюса).

Для обеспечения инвариантности угловых скоростей (3.18) время t во всех системах отсчета K, K_C, K_1 и K_2 должно быть абсолютным, для которого угловые перемещения $\Delta\varphi$ тел m_1 и m_2 во всех этих системах отсчета также являются инвариантами

$$\Delta\varphi = \omega_C t = \omega_{12} t = \omega_{21} t, \quad (3.19)$$

где за начало отсчета времени принято время $t = t_1 = t_2 = 0$. Нарушение инвариантности угловых перемещений (3.19) эквивалентно разрушению твердого тела, что недопустимо, исходя из реальности его физического существования.

В рассматриваемом случае тела m_1 и m_2 закреплены на концах стержня R с помощью идеальных шарниров. В результате этого эти тела вместе с системами отсчета K_2 и K_1 совершают в системе отсчета K сложное движение: переносное поступательное движение с импульсами $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$, $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ и относительное поступательное движение в этих системах отсчета K_2 и K_1 с импульсами $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{21}$, как показано на рис. 3.2, а.

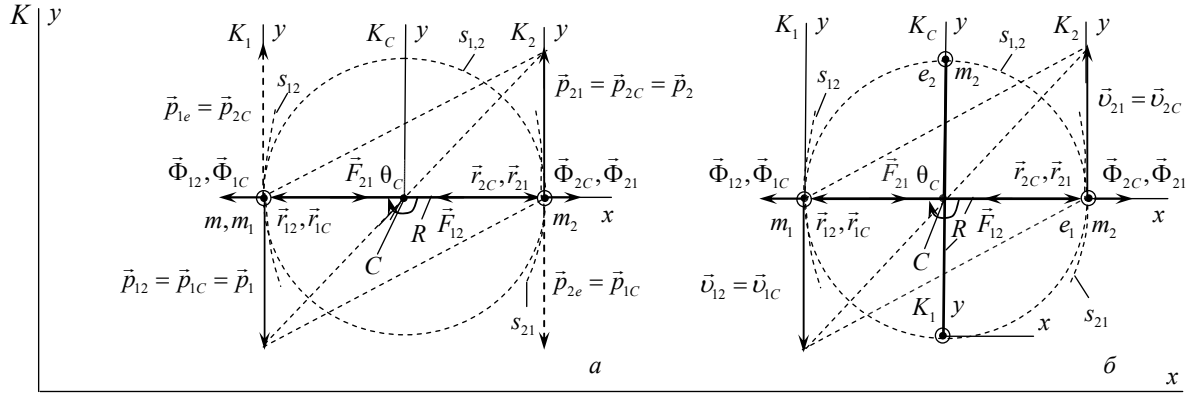


Рис. 3.2. Двухмассовая механическая система с диаметральным распределением тел m_1 и m_2 – a и карта событий e_1 и e_2 ее тела m_2 – b

Установим связь угловой скорости $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$ (3.5) переносного поступательного движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C с угловыми скоростями ω_{12} и ω_{21} их относительного поступательного движения в системах отсчета K_2 и K_1 .

Запишем связь между относительными импульсами $\vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}$ (3.15) в криволинейных координатах

$$m_1 \omega_{12} R = m_2 \omega_{21} R. \quad (3.20)$$

Из (3.20) с учетом преобразований (3.6) при $r_{12} = r_{21} = R$ следует

$$r_{1C} / r_{2C} = m_2 / m_1 = \omega_{12} / \omega_{21}. \quad (3.21)$$

Также в криволинейных координатах запишем связь переносных и относительных импульсов $\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{21}$; $\vec{p}_{2C} = -\vec{p}_{12}$ (3.15):

$$m_1 \omega_{1C} r_{1C} = m_2 \omega_{21} R; \quad m_2 \omega_{2C} r_{2C} = m_1 \omega_{12} R, \quad (3.22)$$

из которой следует, что при $m_1 = m_2$ скорости:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_{1C} \text{ и } \vec{v}_{21} = \vec{v}_{2C}, \quad (3.23)$$

как показано на рис. 3.2, б.

Из (3.22) с учетом (3.6) при $r_{12} = r_{21} = R$ следуют преобразования

$$\omega_{12} = m_2 \omega_C / m; \quad \omega_{21} = m_1 \omega_C / m, \quad (3.24)$$

аналогичные полученным ранее (3.12).

Суммирование правых и левых частей преобразований (3.24) дает выражение, входящее в (3.17)

$$\omega_C = \omega_{12} + \omega_{21}. \quad (3.25)$$

Преобразования (3.21), (3.24) и выражение для абсолютной угловой скорости ω_C (3.25) известны из работы [1], где они записаны для вращательного движения твердого тела (m_1 или m_2) относительно параллельных осей (осей координат y систем отсчета K_C , K_1 и K_2) в одинаковых направлениях (см. рис. 3.2, а, где оси координат y перпендикулярны плоскости чертежа).

Так как согласно (3.24) $\omega_C \neq \omega_{12}$ и $\omega_C \neq \omega_{21}$, то для сохранения инвариантности угловых перемещений $\Delta\phi$ (3.19), исключающей возможность разрушения стержня R , необходимо, чтобы собственное время t_1 и t_2 в системах отсчета K_1 и K_2 по отношению к времени t_C в системе отсчета K_C протекало по-разному

$$\Delta\phi = \omega_C t_C = \omega_{12} t_2 = \omega_{21} t_1, \quad (3.26)$$

тогда как время t в лабораторной системе отсчета K и в системе отсчета K_C (которая при $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ неподвижна) является абсолютным $t_C = t$. При этом за начало отсчета времени во всех системах отсчета также принимается время $t_C = t_C = t_1 = t_2 = 0$.

Угловой инвариант (3.26) характеризует то, что для любого углового перемещения $\Delta\phi$ тела m_1 в системах отсчета K_C и K_2 , а также тела m_2 в системах отсчета K_C и K_1 , каждое из этих тел m_1 и m_2 находится в одной и той же точке траектории $s_{1,2}$ (общей для $m_1 = m_2$) в системе отсчета K

как, например, для тела m_2 при $\Delta\varphi = \{0; \pi/2\}$ показано на рис. 3.2, б событиями e_1 и e_2 при $\vec{v}_{12} = \vec{v}_{1C}; \vec{v}_{21} = \vec{v}_{2C}$ (3.23).

Применение преобразований (3.24) к инварианту (3.26) определяет собственное время t_1 и t_2 в системах отсчета K_1 и K_2 :

$$t_1 = \frac{m}{m_1} t_C; t_2 = \frac{m}{m_2} t_C, t_C = t. \quad (3.27)$$

Таким образом, для сохранения инвариантности угловых перемещений $\Delta\varphi$ (26) когда тело m_2 находится в одной и той же точке во всех выбранных систем отсчета, отмеченной событием e_1 или e_2 (см. рис. 3. 2, б) необходимо чтобы собственное время t_1 и t_2 в системах отсчета K_1 и K_2 по отношению ко времени t_C в системе отсчета K_C протекало по разному (3.27), что вызвано одновременным участием каждого из тел МС2 с числом степеней свободы $N = 5$ переносом $m_1 \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{1C}$, $m_2 \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{2C}$ и относительном $m_1 \vec{\omega}_{12} \times \vec{r}_{12}$, $m_2 \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_{21}$ поступательных движениях. Время в системе отсчета K_C и в какой-либо другой инерциальной системе отсчета абсолютно $t_C = t$.

Введение собственного времени t_1 и t_2 (3.27) в системах отсчета K_1 и K_2 сохраняет инвариантность угловых перемещений $\Delta\varphi$ (3.26) в системах отсчета K_C, K_1 и K_2 , выбранных для кинематического и динамического анализа МС2 с пятью $N = 5$ степенями свободы.

3.4. Энергетический анализ и принцип Д'Аламбера

С учетом абсолютных скоростей:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_C = \vec{v}_{1e} + \vec{v}_{12}; \vec{v}_2 = \vec{v}_C = \vec{v}_{2e} + \vec{v}_{21} \quad (3.28)$$

тел m_1 и m_2 суммарную энергию E МС2 и ее лагранжиан L выразим в виде [6]

$$\left. \begin{matrix} E(+) \\ L(-) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 \pm U, \quad (3.29)$$

где U – обобщенный потенциал [2]

$$U = m_1 \vec{v}_{1e} \vec{v}_{12} + m_2 \vec{v}_{2e} \vec{v}_{21}, \quad (3.30)$$

учитывающий участие тел m_1 и m_2 в переносном $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C}, \vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C}$ и относительно $\vec{v}_{12r}, \vec{v}_{21r}$ движениях.

Сумма первого и второго слагаемых $T_C = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2e}^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1C}^2$ (3.29) является кинетической энергией переносного движения тел m_1 и m_2 МС2.

Здесь для начальных импульсов $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ и $m_1 = m_2$, когда $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C} = -\vec{v}_{1C}$ и $\vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C} = -\vec{v}_{2C}$ можно записать:

$$T_C = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2e}^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2C}^2. \quad (3.31)$$

В случае, когда $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, при $t > 0$ будет происходить перераспределение переносных импульсов $\vec{p}_{1e} = m_1 \vec{v}_{1e}$, $\vec{p}_{2e} = m_2 \vec{v}_{2e}$ тел m_1 и m_2 МС2 до их выравнивания $\vec{p}_{1e} = -\vec{p}_{2e}$, при котором движение этих тел будет удовлетворять принципу наименьшего действия [1, 2]. При $\vec{p}_1 \neq -\vec{p}_2$, когда $m_1 \neq m_2$, тело с большей массой всегда следует принимать за опорное.

Сумма третьего и четвертого слагаемых $T_r = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2$ является кинетической энергией относительного движения тела m_1 в системе отсчета K_2 и тела m_2 в системе отсчета K_1 , а обобщенный потенциал U (3.30) представляет собой потенциальную функцию центрального динамического поля относительных сил инерции взаимодействующих тел m_1 и m_2 МС2, каждое из которых одновременно участвует в переносно-относительном поступательном движениях $m_1 \vec{v}_{2C} \vec{v}_{12}$ и $m_2 \vec{v}_{1C} \vec{v}_{21}$.

Преобразуя векторное произведение $\vec{v}_{2C}\vec{v}_{12}$ и $\vec{v}_{1C}\vec{v}_{21}$ к скалярному виду $\vec{v}_{2C}\vec{v}_{12} = v_{2C}v_{12} \cos \varphi = -v_{12}v_{2C} \cos \varphi$ и $\vec{v}_{1C}\vec{v}_{21} = v_{1C}v_{21} \cos \varphi = -v_{1C}v_{21} \cos \varphi$, представим модуль обобщенного потенциала U (3.30) в виде

$$U = |m_1 v_{2C} v_{12} \cos \varphi + m_2 v_{1C} v_{21} \cos \varphi| = m_1 \omega_C r_{2C} \omega_{12} r_{12} + m_2 \omega_C r_{1C} \omega_{21} r_{21}, \quad (3.32)$$

где φ – угол между векторами $\vec{v}_{2C}\vec{v}_{12} = -\vec{v}_{12}\vec{v}_{2C}$ и $\vec{v}_{1C}\vec{v}_{21} = -\vec{v}_{21}\vec{v}_{1C}$, который для диаметрального распределения $\theta_C = -\pi$ (3.8) можно определить в виде $\varphi = -\vec{v}_{12}\vec{v}_{2C} = -\vec{v}_{21}\vec{v}_{1C} = -\pi$. В таком представлении этот угол учитывает запаздывание фазы φ_{1C} движения тела m_1 в системе отсчета K_C относительно фазы φ_{21} движения тела m_2 в собственной системе отсчета K_1 тела m_1 и определяет это запаздывание (и аналогичное запаздывание тела m_2) в виде преобразований (3.11):

$$\varphi_{1C} = \varphi_{21} + \varphi = \varphi_{21} - \pi, \quad \varphi_{2C} = \varphi_{12} + \varphi = \varphi_{12} - \pi. \quad (3.33)$$

С учетом (3.31) выразим лагранжиан L (3.29) в виде

$$L = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 - U. \quad (3.34)$$

Так как лагранжиан L (3.34) явно не зависит от времени t и рассматриваемая МС2 замкнута, то частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial q_{ij}} = 0, \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (3.35)$$

по обобщенным координатам $q_i = r_{iC}$ и $q_{ij} = r_{ij}$ являются интегралами движения ее тел m_i по геодезическим траекториям $s_{i,j}$ в системе отсчета K_C и s_{ij} – в системах отсчета K_1 и K_2 (см. рис. 3.2, *a* и *б*). Первый интеграл движения (3.35) определяет принцип Д'Аламбера (1.13) в системе отсчета K и одновременно в неподвижной системе отсчета K_C :

$$\vec{\Phi}_{1C} + \vec{F}_{21} = 0; \vec{\Phi}_{2C} + \vec{F}_{12} = 0, \quad (3.36)$$

где

– в первом уравнении: $\vec{\Phi}_{1C} = -m_1 \vec{a}_{1C} = m_1 \omega_C^2 \vec{r}_{1C}$ – сила инерции тела m_1 , которое вместе с собственной системой отсчета K_1 совершает переносное поступательное движение $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{1C}$, для которого $\vec{\Phi}_{1e} = \vec{\Phi}_{1C}$ по траектории $s_{1,2}$ (см. рис. 3.2, *а* и *б*), общей для систем отсчета K и K_C , так как система отсчета K_C неподвижна; $\vec{F}_{21} = dU / d\vec{r}_{2C} = -m_2 \vec{a}_{21} = m_2 \omega_C \omega_{21} \vec{r}_{21}$ – относительная сила инерции тела m_2 , которое в системе отсчета K_1 совершает относительное поступательное движение по траектории s_{21} и одновременно переносное поступательное движение $\vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C}$ в системе отсчета K по траектории $s_{1,2}$ (см. рис. 3.2, *а* и *б*). Эта сила приложена к телу m_1 через связь R (что следует из аксиомы связи для сил инерции) и из-за одновременного участия тела m_2 в переносном и относительном (переносно-относительном) поступательном движении $m_2 \vec{v}_{2e} \vec{v}_{21}$ характеризует влияние относительного поступательного движения $m_2 \vec{v}_{21}$ тела m_2 на переносное поступательное движение $m_1 \vec{v}_{1e}$ тела m_1 в системе отсчета K ;

– во втором уравнении: $\vec{\Phi}_{2C} = -m_2 \vec{a}_{2C} = m_2 \omega_C^2 \vec{r}_{2C}$ – сила инерции тела m_2 , которое вместе с собственной системой отсчета K_2 совершает переносное поступательное движение $\vec{v}_{2e} = \vec{v}_{2C}$, для которого $\vec{\Phi}_{2e} = \vec{\Phi}_{2C}$ по траектории $s_{1,2}$ (см. рис. 3.2, *а*, *б*), общей для систем отсчета K и K_C , так как система отсчета K_C неподвижна; $\vec{F}_{12} = dU / d\vec{r}_{1C} = -m_1 \vec{a}_{12} = m_1 \omega_C \omega_{12} \vec{r}_{12}$ – относительная сила инерции тела m_1 , которое в системе отсчета K_2 совершает относительное поступательное движение по траектории s_{12} (на рис. 3.2, *а* и *б* показана частично) и одновременно переносное поступательное движение $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C}$ в системе отсчета K по траектории $s_{1,2}$ (см. рис. 3.2, *а* и *б*). Эта сила приложена к телу m_2 через связь R и из-за одновременного участия тела m_1 в переносно-относительном поступательном движении $m_1 \vec{v}_{1e} \vec{v}_{12}$ характе-

ризует влияние относительного поступательного движения $m_1 \vec{v}_{12}$ тела m_1 на переносное поступательное движение $m_2 \vec{v}_{2e}$ тела m_2 в системе отсчета K .

Таким образом, для МС2 с пятью степенями свободы $N = 5$ относительные силы инерции $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ (3.36) являются результатом участия каждого из тел m_1 и m_2 в переносно-относительном поступательном движении $m_1 \vec{v}_{1e} \vec{v}_{12}$ и $m_2 \vec{v}_{2e} \vec{v}_{21}$. В работах [14, 17] поле относительных сил инерции $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ рассматривается как динамическое гравитационное поле. Физически оно является разновидностью поля Кориолиса [1, 2].

Так как для диаметрального распределения $\theta_C = -\pi$ (3.8) относительные силы инерции $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ (3.36) образуют уравновешенную систему сил $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$, то импульс и кинетический момент замкнутой МС2 сохраняется (3.3):

$$d\vec{p}_C / dt = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0; d\vec{K}_C / dt = 0. \quad (3.37)$$

Уравновешенность системы сил $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ можно показать с помощью преобразований (3.24), которые сводят эти силы к силам инерции тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -m_1 \omega_C \omega_{12} \vec{r}_{12} = -m_1 \omega_C^2 \frac{m_2}{m} \vec{r}_{12} = -m_1 \omega_C^2 \vec{r}_{1C}; \\ \vec{F}_{21} &= -m_2 \omega_C \omega_{21} \vec{r}_{21} = -m_2 \omega_C^2 \frac{m_1}{m} \vec{r}_{21} = -m_2 \omega_C^2 \vec{r}_{2C}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где $\vec{\Phi}_{1C} + \vec{\Phi}_{2C} = 0$.

Значение лагранжиана L (3.34) для тестовых параметров МС2: $m_1 = m_2 = 1$ кг; $R = 1$ м; $r_{1C} = r_{2C} = 0,5$ м; $\omega_C = 2$ с⁻¹; $\omega_{12} = \omega_{21} = 1$ с⁻¹ находится в минимуме $L = T_C + T_r - U = 0 \Rightarrow \min$. Это характеризует то, что движение МС2 удовлетворяет принципу наименьшего действия [1, 2], а ее тела m_1 и m_2 во всех системах отсчета K , K_C , K_1 и K_2 совершают движение по геодезическим траекториям $s_{1,2}$, s_{12} и s_{21} .

Проверим удовлетворение принципа Д' Аламбера (3.36) преобразованиям (3.24). Для этого запишем его в криволинейных координатах:

$$m_1 \omega_C^2 r_{1C} = m_2 \omega_C \omega_{21} R; m_2 \omega_C^2 r_{2C} = m_1 \omega_C \omega_{12} R. \quad (3.39)$$

Далее, применяя к нему преобразования (3.24), получим известные радиусы (3.10)

$$r_{1C} = m_2 R / m; r_{2C} = m_1 R / m, \quad (3.40)$$

для которых, совместно с преобразованиями (3.24), принцип Д' Аламбера (3.36) в виде (3.39) удовлетворен.

Таким образом, преобразования (3.24) удовлетворяют принципу Д' Аламбера (3.36). Кроме того, преобразования (3.24) устанавливают связь между переносными $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$, $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ и относительными $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{12}$ импульсами (3.15), для которой их сумма удовлетворяет сохранности импульса $\vec{p}_C = \overline{\text{const}}$ (3.14) замкнутой МС2 с пятью $N = 5$ степенями свободы.

Взаимодействие тел m_1 и m_2 МС2 посредством стержня R (что также справедливо для их взаимодействия по закону Ньютона или Кулона) приводит к искривлению траекторий движения $s_{1,2}$, s_{12} и s_{21} этих тел (см. рис. 3.2, а). При этом каждое из тел оказывается вовлеченным в сложное переносно-относительное поступательное движение $m_1 \vec{v}_{2C} \vec{v}_{12}$ и $m_2 \vec{v}_{1C} \vec{v}_{21}$, что формирует центральное поле относительных сил инерции $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$, которое для диаметрального распределения $\theta_C = -\pi$ (3.8) образует уравновешенную систему сил $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ (3.37), так что импульс МС2 $\vec{p}_C$ сохраняется $d\vec{p}_C / dt = \text{const}$.

3.5. Уравнения движения и их частное и общее решения

Принцип Д' Аламбера (3.36) можно записать в следующей дифференциальной форме:

$$d\vec{p}_{1C} / dt = \vec{F}_{21}; d\vec{p}_{2C} / dt = \vec{F}_{12}, \quad (3.41)$$

где $d\vec{p}_{1C} / dt = -\vec{\Phi}_{1C} = m_1 \vec{a}_1 = -m_1 \omega_C^2 \vec{r}_{1C}$ и $d\vec{p}_{2C} / dt = -\vec{\Phi}_2 = m_2 \vec{a}_2 = -m_2 \omega_C^2 \vec{r}_{2C}$ – силы инерции поступательного движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C .

Для отыскания решений уравнений (3.41) представим их в виде исходного принципа Д'Аламбера (3.36) в проекциях на ось x системы отсчета K

$$\begin{aligned} m_1 \omega_C^2 r_{1C} \cos \varphi_{1C} + m_2 \omega_C \omega_{21} r_{21} \cos \varphi_{21} &= 0 \\ m_2 \omega_C^2 r_{2C} \cos \varphi_{2C} + m_1 \omega_C \omega_{12} r_{12} \cos \varphi_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

где $\varphi_{1C} = \omega_C t - \pi$, $\varphi_{2C} = \omega_C t$, $\varphi_{12} = \omega_{12} t_2 + \pi$ и $\varphi_{21} = \omega_{21} t_1$ – угловые координаты, которые записаны с учетом инварианта $\Delta\varphi = \omega_C t_C = \omega_{12} t_2 = \omega_{21} t_1$ (3.26) при $\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_{1C} = \vec{\omega}_{2C}$ (3.5) для времени t_1, t_2 и $t_C = t$ (3.27).

С помощью преобразований $\varphi_{1C} = \varphi_{21} - \pi$, $\varphi_{2C} = \varphi_{12} - \pi$ (3.33) сведем угловые координаты уравнений (3.42) к координатам $\varphi_{1C} = \omega_C t - \pi$ и $\varphi_{2C} = \omega_C t$ в едином абсолютном времени t :

$$\begin{aligned} m_1 \omega_C^2 r_{1C} \cos \varphi_{1C} - m_2 \omega_C \omega_{21} r_{21} \cos \varphi_{1C} &= 0 \\ m_2 \omega_C^2 r_{2C} \cos \varphi_{2C} - m_1 \omega_C \omega_{12} r_{12} \cos \varphi_{2C} &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Интегрирование уравнений (3.43) по времени t дает проекции p_{1Cx} и p_{2Cx} , переносных импульсов $\vec{p}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C}$ тел m_1 и m_2 , а также проекции p_{12x} и p_{21x} импульсов $\vec{p}_{12}$ и $\vec{p}_{21}$ сложного переносно-относительного поступательного движения этих тел на оси координат x и y системы отсчета K :

$$\begin{aligned} p_{1Cx} &= m_1 \omega_C^2 r_{1C} \int \cos \varphi_{1C} dt = m_1 \omega_C r_{1C} \sin \varphi_{1C} + c; \\ p_{2Cx} &= m_2 \omega_C^2 r_{2C} \int \cos \varphi_{2C} dt = m_2 \omega_C r_{2C} \sin \varphi_{2C} + c; \\ p_{12x} &= -m_1 \omega_C \omega_{12} r_{12} \int \cos \varphi_{2C} dt = -m_1 \omega_{12} r_{12} \sin \varphi_{2C} + c; \\ p_{21x} &= -m_2 \omega_C \omega_{21} r_{21} \int \cos \varphi_{1C} dt = -m_2 \omega_{21} r_{21} \sin \varphi_{1C} + c. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Значение постоянной интегрирования c в (3.39) определим исходя из того, что в соответствии с рис. 3.2, а при $t = 0$, когда $\varphi_{1C} = \omega_C t - \pi = -\pi$

и $\varphi_{2C} = \omega_C t = 0$ выполняется $p_{1Cx} = p_{2Cx} = p_{12x} = p_{21x} = 0$, что определяет эту постоянную как $c = 0$. Тогда из (3.44) определим проекции:

$$\begin{aligned} p_{1Cx} &= m_1 \omega_C r_{1C} \sin \varphi_{1C}; p_{2Cx} = m_2 \omega_C r_{2C} \sin \varphi_{2C}; \\ p_{12x} &= -m_1 \omega_{12} r_{12} \sin \varphi_{2C}; p_{21x} = -m_2 \omega_{21} r_{21} \sin \varphi_{1C}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

которые удовлетворяют сохранности импульса замкнутой МС2 в виде:

$$p_{1Cx} + p_{21x} = \text{const} = 0; p_{2Cx} + p_{12x} = \text{const} = 0, \quad (3.46)$$

Аналогичным образом можно найти проекции импульсов $\vec{p}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C}$ на координатную ось y этой же системы отсчета K при повороте МС2 на угол $\pi / 2$.

Подстановка (3.45) в (3.46) с учетом преобразований (3.24) и того, что $R = r_{12} = r_{21}$ дает уравнения:

$$r_{1C} - m_2 R / m = 0; r_{2C} - m_1 R / m = 0. \quad (3.47)$$

Уравнения (3.47) удовлетворены, если амплитуды движения тел m_1 и m_2 (при рассмотрении из движения как гармонического колебания относительно их ЦМ C) равны радиусам (3.6)

$$A_1 = r_{1C} = m_2 R / m; A_2 = r_{2C} = m_1 R / m. \quad (3.48)$$

Аналогичный результат можно получить двойным интегрированием уравнений (3.43) по времени t с последующим применением преобразований (3.24).

По амплитудам (3.48) с учетом того, что $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$, представим частные решения уравнений (3.41) в системе отсчета K_C :

$$\begin{aligned} x_{1C} &= -A_1 \cos \varphi_{21}; y_{1C} = -A_1 \sin \varphi_{21}; \\ x_{2C} &= -A_2 \cos \varphi_{12} = A_2 \cos \varphi_{21}; y_{2C} = -A_2 \sin \varphi_{12} = A_2 \sin \varphi_{21}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

как функции от угловых координат $\varphi_{21} = \omega_{21} t_1 = \omega_C t$, которые удовлетворяют инварианту $\Delta\varphi = \omega_C t_C = \omega_{12} t_2$ (3.26) и равенству $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$.

Если сумма абсолютных импульсов тел m_1 и m_2 до начала их взаимодействия при $t = 0$ не равна нулю $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq 0$ (см. рис. 3.1), то в соответствии с (3.2) скорость ЦМ C замкнутой МС2 при $t > 0$ будет составлять

$$\vec{v}_C = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / m \neq 0. \quad (3.50)$$

Тогда общее решение первого уравнения (3.41) с учетом (3.49) в системе отсчета K для $t > 0$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{Cн} - A_1 \cos \varphi_{21}; y_1 = y_{Cн} - A_1 \sin \varphi_{21}; \\ \dot{x}_1 &= v_{Cx} + A_1 \omega_{21} \sin \varphi_{21}; \dot{y}_1 = v_{Cy} + A_1 \omega_{21} \cos \varphi_{21}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

где $x_{Cн}$ и $y_{Cн}$ – начальные координаты ЦМ C в системе отсчета K в момент времени $t = 0$; v_{Cx} и v_{Cy} – проекции скорости $\vec{v}_C$ ЦМ C (3.50) на оси координат x и y системы отсчета K ; $\varphi_{21} = \omega_{21}t_1 = \omega_C t$ – угловая координата, записанная с учетом инварианта $\Delta\varphi = \omega_C t_C = \omega_{12}t_2$ (3.26) при $t_C = t$ (3.27).

На практике необходимость в нахождении общего решения (3.51) второго уравнения (3.41) по координатам x_2 и y_2 и скоростям $\dot{x}_2$ и $\dot{y}_2$ тела m_2 отсутствует, так как их можно определить по координатам x_1 и y_1 тела m_1 с помощью известных преобразований координат: $x_{2C} = x_{1C} + R \cos \varphi_{21}$ и $y_{2C} = y_{1C} + R \sin \varphi_{21}$ и их производных по времени t .

Таким образом, решения (3.49) являются частными решениями неоднородных дифференциальных уравнений (3.41) в системе отсчета K_C . Тела m_1 и m_2 при $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq 0$ и $t > 0$ будут двигаться в системе отсчета K по спиральным траекториям, что следует из их общих решений (3.51).

3.6. Сведение задачи двух тел к задаче одного тела

Переход к задаче одного тела можно выполнить в случае, когда МС2 имеет число степеней свободы $N \leq 3$ [3–5, 7] посредством выбора его опорного тела. При $m_1 \geq m_2$ тело m_1 выбирается как опорное (укоряемое), а тело m_2 – как рабочее (ускоряющее); при $m_2 \geq m_1$ наоборот: m_2 – как опорное и m_1 – как рабочее, а при $m_1 = m_2$ выбор опорного и рабочего тел равноправен. Предположим, что при $m_1 > m_2$ тело m_2 рассматриваемой МС2 (рис. 3.2, а) жестко закреплено на стержне R . В этом случае его собственную систему отсчета K_2 можно исключить из рассмотрения, поскольку в ней относительная угловая скорость ω_{12} тела m_1 равна нулю $\omega_{12} = 0$. Тогда из (3.25) следует равенство угловых скоростей

$$\omega_{21} = \omega_C, \quad (3.52)$$

и одновременно из инварианта $\Delta\varphi = \omega_C t_C = \omega_{12} t_2$ (3.26) то, что время в системах отсчета K , K_C и K_1 абсолютно

$$t_1 = t_C = t. \quad (3.53)$$

Введем декартовы обобщенные координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 тел m_1 и m_2 в системе отсчета K , а также полярную обобщенную координату $\varphi_{21} = \omega_{21}t$ тела m_2 в системе отсчета K_1 , где ω_{21} – угловая скорость вращательного движения тела m_2 относительно опорного тела m_1 . Тогда кинетическую энергию T МС2 с числом степеней свободы $N = 3$ в системе отсчета K можно выразить в виде

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2), \quad (3.54)$$

где скорости $\dot{x}_1, \dot{y}_1$ и $\dot{x}_2, \dot{y}_2$ тел m_1 и m_2 можно определить через их координаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1; x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}; \dot{x}_1 = \dot{x}_1; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R \omega_{21} \sin \varphi_{21}; \\ y_1 &= y_1; y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}; \dot{y}_1 = \dot{y}_1; \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R \omega_{21} \cos \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Подстановка скоростей (3.55) в кинетическую энергию T (3.54) при $\omega_{21} = \text{const}$ дает лагранжиан рассматриваемой МС2 в виде

$$L = T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{21}^2R^2 - U, \quad (3.56)$$

где $m = m_1 + m_2$ – суммарная масса МС2, условно сосредоточенная в рабочем теле m_1 (см. рис. 3.2, а); U – обобщенный потенциал [2]:

$$U = m_2\omega_{21}R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}). \quad (3.57)$$

На основе лагранжиана L (3.56) можно получить два координатных уравнения:

$$m\ddot{x}_1 = m_2\omega_{21}^2R \cos \varphi_{21}; m\ddot{y}_1 = m_2\omega_{21}^2R \sin \varphi_{21}, \quad (3.58)$$

которые для замкнутой МС2 с тремя степенями свободы $N = 3$ по аналогии с (3.41) можно записать в виде

$$md^2\vec{r}_1 / dt^2 = \vec{\Phi}_{21}, \quad (3.59)$$

где $\vec{\Phi}_{21} = -d\vec{p}_{21} / dt = m_2\omega_{21}^2\vec{r}_{21}$ – относительная сила инерции тела m_2 в системе отсчета K_1 , которая инвариантна в системе отсчета K [7].

Так как для начальных условий $p_{1\text{yH}} + p_{2\text{yH}} = 0$ переходный процесс МС2 отсутствует, то решениями уравнения (3.59) являются частные решения (3.49).

В работах [3–7] найдено решение уравнения (3.59) в системе отсчета K с учетом диссипативности внешней среды

$$md^2\vec{r}_1 / dt^2 = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1, \quad (3.60)$$

для МС2 с тремя степенями свободы $N = 3$, где $\vec{F}_1 = \mu_1\vec{v}_1$ – диссипативная сила, создаваемая внешней средой с вязким линейным сопротивлением μ_1 движению опорного тела m_1 со скоростью $\vec{v}_1$. При опускании в частном

решении (3.49) координат x_{2C} и y_{2C} число степеней свободы МС2 уменьшится до $N = 2$.

3.7. Выводы

Таким образом получены уравнения движения МС2 в поле относительных сил инерции ее взаимодействующих тел m_1 и m_2 , которые указывают на несостоятельность работы [9]. Эти уравнения в сравнении с уравнением движения ее ЦМ C позволяют анализировать движение каждого из тел МС2 и ее ЦМ C в отдельности при числе степеней ее свободы $N \leq 5$ так, например, при $N = 3$ они записаны для вакуума (3.59) и диссипативной среды (3.60), а при $N = 5$ – для вакуума (3.41).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно принципу эквивалентности гравитации и инерции по Эйнштейну [18], движение тел m_1 и m_2 по траекториям $s_{1,2}$ и s_{12}, s_{21} можно рассматривать как движение по замкнутым геодезическим траекториям [14–17] в поле относительных сил инерции (динамическом гравитационном поле [17]), например, при взаимодействии этих тел тяготением Ньютона. В случае когда $R = \text{const}$ и $N \leq 3$ для решения задачи двух тел [2], находящихся в диссипативной среде, можно использовать уравнение (3.60).

Основные результаты препринта базируются на Ньютоновской механике и состоят в следующем.

1. Силы инерции – это фундаментальное свойство материальных тел противодействовать изменению состояния их покоя либо равномерного прямолинейного движения при их взаимодействии любой природы (по закону Ньютона, Кулона или Гука). Так, например, взаимодействие материальных тел тяготением Ньютона искривляет траектории их движения. При этом непосредственной причиной искривления траекторий движения материальных тел является их взаимодействие, а не массы (по Эйнштейну [18]), вызывающие это взаимодействие.

2. Связь тел m_1 и m_2 МС2 (механическую или полем) можно условно отбросить, а ее реакции заменить относительными силами инерции этих тел, которые при числе степеней свободы системы $N = 5$ являются следствием их сложного переносно-относительного поступательного движения. Относительным силам инерции, взаимно приложенным к взаимодействующим телам, всегда противодействуют собственные силы инерции этих тел, оказывающие сопротивление искривлению траекторий их движения.

3. Движение системы взаимодействующих материальных тел в поле относительных сил инерции является геодезическим и при отсутствии внешних воздействий – замкнутым, что допускает возможность безопорного

движения только в области локально-искривленного взаимодействием пространства, что ставит под сомнение выводы работ [8, 10, 11].

4. Время в собственных системах отсчета взаимодействующих материальных тел при их сложном переносно-относительном поступательном движении по отношению ко времени в системе отсчета их центра масс протекает по-разному и зависит от масс этих тел. Время в системе отсчета центра масс этих тел при их диаметрально распределении и в какой-либо другой инерциальной системе отсчета абсолютно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. – М. : Высш. шк., 1990. – 607 с.
2. Савельев И. В. Основы теоретической физики. Механика и электродинамика. – М. : Наука, 1991. – Т. 1. – 496 с.
3. Савелькаев С. В. Эффект независимости величины смещения центра масс механической системы от диссипативности внешней среды // Механика машин, механизмов и материалов. – Минск : Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси. – 2011. – № 4 (17). – С. 42–48.
4. Савелькаев С. В. Механика. Корреляционная механика механических систем : препринт. – Новосибирск : СГГА, 2013. – 67 с.
5. Савелькаев С. В. Влияние сил инерции взаимодействующих тел механической системы на ее движение в диссипативной среде и особенности движения // Вестник СГУГиТ. – 2022. – Т. 27. – № 5. – С. 183–202. – DOI 10.33764/2411-1759-2022-27-5-183-202.
6. Савелькаев С. В. Влияние силы инерции относительного движения двух взаимодействующих тел на их движение в диссипативной среде // Фундаментальные основы механики (ФОМ-23-12), г. Санкт-Петербург – Научно-исследовательский центр «МашиноСтроение» (НИЦ МС), Том 12. – С. 43–48. – DOI 10.26160/2542-0127-2023-12-43-48.
7. Савелькаев С. В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2024. – № 87. – С. 135–149. – DOI 10.17223/19988621/87/11.
8. Толчин В. Н. Инерциод. Силы инерции как источник поступательного движения. – Пермь : Кн. Изд., 1977. – С. 89, 90.
9. Гулиа Н. В. Инерция: [Предисловие А. Ю. Ишлинского]. – М. : Наука. Серия Наука и технический прогресс, 1982. – 152 с.
10. Шипов Г. И. Теория физического вакуума. – М. : НТ-Центр, 1993. – 362 с.

11. Иванов Н. И. Ритмодинамика. – М. : Издательско-аналитический центр «Энергия», 2007. – 221 с.
12. Савелькаев С. В. Динамический анализ трехмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции. Научно-исследовательский центр «Машиностроение» (НИЦ МС). // Материалы VIII международной научно-практической конференции Мехатроника, автоматика и робототехника (ФОМ-24-13), 13 марта, г. Санкт-Петербург. – Том 13. – С. 5 – 13. – DOI 10.26160/2542-0127-2024-13-5-13.
13. Савелькаев С. В. Динамический анализ трехмассового кривошипно-ползунного механизма на базе его двухмассового аналога // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2025. – № 96. – 118–130 с. – DOI 10.17223/19988621/96/10.
14. Савелькаев С. В. Динамическая гравитация как эквивалент инерции в механике и единица ее измерения // Вестник СГУГиТ. – 2025. –Т. 30. – № 1. – С. 169–185. – DOI 10.33764/2411-1759-2025-30-1-169-185.
15. Савелькаев С. В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в поле относительных сил инерции ее взаимодействующих тел // Journal of Advanced Research in Technical Science. – Seattle, USA: SRC MS, AmazonKDP. – 2025. – Issue 46 – P. 16–33.
16. Савелькаев С. В. Динамический анализ двухмассовой механической системы с пятью степенями свободы в поле относительных сил инерции // Фундаментальные основы механики (ФОМ-25-15), г. Санкт-Петербург: Научно-исследовательский центр «МашиноСтроение» (НИЦ МС). – Том 15. – С. 15 – 30. DOI 10.26160/2542-0127-2025-15-15-30.
17. Савелькаев С. В. Теория гравитации. – М. : МЭИ, 1993. – 106 с.
18. Эйнштейн А. О специальной и общей теории относительности // Собр. науч. тр. в 4-х томах. Т. 1. – М. : Наука, 1965. – 563 с.

Научное издание

Савелькаев Сергей Викторович

**ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
МНОГОМАССОВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ
СИСТЕМ В ПОЛЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ
СИЛ ИНЕРЦИИ**

Редактор *Е. К. Деханова*

Компьютерная верстка *В. А. Рыжовой*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 19.08.2025. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 3,83. Тираж 50 экз. Заказ 90.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Редакционно-издательский отдел СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 10.

Отпечатано в картопечатной лаборатории СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 8.