

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»  
(СГУГиТ)

Ю. Ц. Батомункуев

# **ОПТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. ОПТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ**

Утверждено редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия для обучающихся по направлению  
подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика (уровень бакалавриата)

Новосибирск  
СГУГиТ  
2025

УДК 535  
Б284

Рецензенты: кандидат технических наук, доцент СГУГиТ *В. С. Корнеев*

кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой  
физики и химии НГАСУ *Е. П. Матус*

**Батомункуев, Ю. Ц.**

Б284     Оптическая физика. Оптические преобразователи световой волны :  
учебное пособие / Ю. Ц. Батомункуев. – Новосибирск : СГУГиТ,  
2025. – 76 с. – Текст : непосредственный.  
ISBN 978-5-907998-32-2

Учебное пособие подготовлено кандидатом технических наук, доцентом  
Ю. Ц. Батомункуевым на кафедре физики СГУГиТ.

Рассматривается раздел дисциплины «Оптическая физика», посвященный  
распространению и преобразованию света отражающими, преломляющими  
и дифрагирующими оптическими элементами.

Учебное пособие по дисциплине «Оптическая физика» предназначено для  
обучающихся по направлению подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформати-  
ка (уровень бакалавриата).

Рекомендовано к изданию кафедрой физики, Ученым советом Института  
оптики и технологий информационной безопасности СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 535

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	4
1. Основные термины и определения.....	5
2. Отражение света плоским зеркалом.....	11
3. Отражение света сферическим зеркалом.....	17
4. Преломление света линзой в приближении геометрической оптики.....	24
5. Преломление света на сферической границе двух прозрачных сред .....	30
6. Преломление света тонкой линзой.....	38
7. Преобразование световой волны дифракционными линзами .....	45
8. Преобразование световой волны голограммной линзой .....	53
9. Хроматические aberrации световой волны, вносимые линзами .....	60
10. Монохроматические aberrации световой волны, вносимые линзами.....	67
Заключение.....	74
Библиографический список.....	75

## **ВВЕДЕНИЕ**

В учебное пособие по части курса включен теоретический материал по дисциплине «Оптическая физика», предназначенный для обучающихся СГУГиТ.

В учебном пособии рассматриваются преобразования (изменения) световой волны отражающими, преломляющими и дифрагирующими оптическими элементами. Эти преобразования базируются на основе волновых представлений о свете. Для сравнения приводятся формулы сферических линз и зеркал, получаемые из теории геометрической оптики. В отличие от известных учебных курсов по физической оптике, в которых изучаются свойства лишь рефракционных линз, в данном учебном пособии рассматриваются плоские дифракционные и голографические линзы, которые в настоящее время производятся серийно и находят все более широкое практическое применение. Также в этом пособии более подробно излагаются границы применимости формул, описывающих преобразования световой волны зеркалами и линзами.

## 1. ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Световая волна (свет) – это электромагнитная волна, различаемая глазом человека. Видимый диапазон электромагнитного спектра составляет незначительную часть (менее 0,1 %) оптического диапазона спектра. Оптический диапазон спектра включает в себя видимый (0,38–0,78 мкм), инфракрасный (0,78–1 000 мкм), ультрафиолетовый (0,01–0,38 мкм) и мягкий рентгеновский диапазоны электромагнитного спектра ( $10^{-4}$ – $10^{-2}$  мкм). Инфракрасный диапазон, в свою очередь, подразделяется на ближний (0,78–1,4 мкм), коротковолновый (1,4–3 мкм), средний (3–8 мкм), длинноволновый (8–15 мкм) и удаленный (15–1 000 мкм) диапазоны. Ультрафиолетовый диапазон также подразделяется на ближний (0,3–0,4 мкм), средний (0,2–0,3 мкм), дальний (0,1–0,2 мкм) и экстремальный (0,01–0,1 мкм) диапазоны. Дальний и экстремальный ультрафиолетовые диапазоны вместе называют еще вакуумным ультрафиолетовым диапазоном, так как излучение этого диапазона (0,01–0,2 мкм) поглощается воздухом. Указанные значения длин волн относятся к волнам оптического диапазона в вакууме. Границы диапазонов и поддиапазонов спектра носят несколько условный характер, так как существуют варианты разбиения оптического диапазона с другими границами, особенно для инфракрасного и мягкого рентгеновского диапазонов.

Во всех этих областях оптического диапазона, несмотря на некоторые особенности, применяются одни и те же физические величины и законы для описания процессов распространения световой волны в средах и взаимодействия световой волны с физическими телами.

В настоящем учебном пособии ограничимся рассмотрением световой волны, т. е. оптического излучения видимого диапазона спектра.

Оптические элементы – это элементы, осуществляющие преобразование световой волны. К преобразованиям световой волны относятся изменение направления и величины скорости световой волны, изменение фор-

мы и размеров волнового фронта, изменение амплитуды (интенсивности), вектора поляризации, спектрального диапазона и других величин, характеризующих световую волну.

Классические оптические элементы подразделяются на рефлекторные, рефракционные, дифракционные, поляризационные. В последние годы интенсивно развиваются оптические элементы-формирователи, создающие заданное пространственное распределение амплитуды и фазы световой волны, оптические элементы-манипуляторы, преобразующие давление «вихревой» световой волны в механическое движение частиц и маленьких тел.

Оптическая система – это система, состоящая из одного или более оптических элементов, которые выполняют заданные преобразования световой волны. Например, оптическая система может преобразовать световую волну, отраженную от предмета таким образом, что она сформирует увеличенное или уменьшенное изображение предмета.

Пространство предметов – это часть пространства (или все пространство), в котором находятся реальные (мнимые) предметы и распространяется световая волна в направлении от предметов (к предметам).

Пространство изображений – это часть пространства (или все пространство), в котором находятся действительные или мнимые изображения предметов и распространяются световые волны, формирующие эти изображения. Пространство предметов и пространство изображений могут быть как раздельными, так и совмещенными.

В технической и учебной литературе часто используют другие термины. Так, линзовые оптические системы называются диоптическими системами, зеркальные оптические системы – катаоптическими, зеркально-линзовые системы – катадиоптическими системами.

Центрированная оптическая система – это система оптических элементов, центры кривизны поверхностей которых расположены на одной оси. Эта ось называется главной оптической осью. Оптические элементы, как правило, расположены перпендикулярно этой оптической оси. Центрированная оптическая система может состоять из двух и более центрированных подсистем.

Децентрированная оптическая система – это система оптических элементов, центры кривизны которых смещены, оптические оси элементов наклонены относительно главной оптической оси.

К классическим физическим теориям оптики, описывающим оптические элементы и системы, относятся геометрическая оптика и волновая оптика.

В геометрической оптике считается, что свет распространяется вдоль направленных линий (называемых лучами света). Распространение света в виде пучков лучей происходит в соответствии с законами геометрической оптики [1–3]:

- а) закона прямолинейного распространения лучей света;
- б) закона независимости лучей света;
- в) закона отражения лучей света от плоской поверхности;
- г) закона преломления лучей света на плоской границе двух сред.

Эти законы геометрической оптики (кроме закона независимости лучей света) являются следствиями принципа Ферма: принципа минимальности времени, затрачиваемого при распространении луча света от одной точки среды до другой, при этом свет может проходить через границы сред.

В геометрической оптике формулируется принцип обратимости лучей света, применяемый в случае преобразования оптическим элементом одной световой волны в одну световую волну. Если же оптический элемент преобразовывает одну волну в две или более волн, то принцип обратимости не применим. Законы геометрической оптики применимы к оптическим элементам, представляющим собой изотропные прозрачные среды и имеющим гладкие (полированные) поверхности.

В теории волновой оптики свет представляется в виде электромагнитной волны [4–9]. Распространение проходящей световой волны через оптические элементы (или отраженной световой волны от оптических элементов) описывается законами волновой оптики (законами дифракции, интерференции, поляризации, дисперсии т. д.). Законы геометрической оптики могут быть получены из волновых представлений о свете, если пренебречь длиной световой волны по сравнению с размерами тел.

Представление о лучах света используется и в теории волновой оптики для расчета оптического пути, пройденного световой волной в среде.

При этом лучи всегда перпендикулярны к волновой поверхности света. Любому участку волновой поверхности сферической расходящейся или сходящейся световой волны соответствует гомоцентрический пучок лучей, сходящихся в одну точку или расходящихся из одной точки, как показано на рис. 1.1.



Рис. 1.1. Пучки лучей: 1 – сходящийся гомоцентрический;  
2 – расходящийся гомоцентрический

В теории изображений, формируемых оптическими элементами, предполагается (согласно принципу Гюйгенса – Френеля), что каждая точка поверхности предмета испускает сферическую волну и от каждой точки предмета на оптический элемент падает гомоцентрический пучок лучей. Идеальная оптическая система преобразует эти пучки от точек предмета в гомоцентрические пучки, формирующие точки изображения предмета. Если изображение единственное, то каждой точке предмета соответствует только одна точка изображения. Эти точки называются сопряженными. Поверхности, образуемые сопряженными точками, называются сопряженными поверхностями.

Изображение, формируемое идеальной оптической системой, является идентичным или подобным предмету и отличается лишь размером.

Изопланарная оптическая система – оптическая система, в которой при смещении предмета его изображение перемещается, не изменяя формы и размеров.

Идеальными и изопланарными являются плоские зеркала и оптические системы из плоских зеркал. Идеальным и изопланарным оптическим



элементом является в параксиальной области плоскопараллельная пластина. Параксиальные лучи – это лучи света, распространяющиеся под малыми углами наклона вблизи главной оптической оси. Параксиальной областью оптического элемента называется область элемента, через которую проходят (от которой отражаются) параксиальные лучи света.

Раздел оптики, в котором изучаются законы и величины, характеризующие распространение параксиальных лучей в оптических элементах и в оптических системах, называется оптикой Гаусса.

При расчете и анализе оптических элементов широко применяется метод характеристической функции. Характеристическая функция – это функция, равная разности оптических путей очень узких пучков волн, выходящих из точки предмета и сходящихся в сопряженную точку изображения. При этом один из узких пучков проходит через центр оптического элемента, а другой – через произвольную точку этого элемента. Если значение характеристической функции равно нулю или меньше четверти рабочей длины волны, то изображение точки предмета имеет дифракционное качество и является безабберационным. По сути, характеристическая функция позволяет определить волновую абберацию – отклонение волнового фронта в произвольной точке оптического элемента от фронта сферической волны, сходящейся в точку изображения. Анализ изображающих свойств дифракционных оптических элементов осуществляется приравнением нулю первых членов разложения характеристической функции в ряд по малым параметрам. В качестве малых параметров выступают отношения поперечной координаты произвольной точки оптического элемента к расстояниям от этого элемента до предметной плоскости и до плоскости изображения. Для параксиальных точек оптического элемента (т. е. точек вблизи центра элемента) наибольший вклад в характеристическую функцию вносят первые члены разложения в ряд, зависящие в первой и во второй степени от расстояния между центром оптического элемента и его произвольной точкой. Поэтому для уменьшения величины характеристической функции приравняются нулю именно первые члены разложения. Из условий равенства нулю первых членов разложения характеристической функции принято определять координаты точки изоб-

ражения, причем точка изображения определяется как в меридиональной плоскости, так и в сагиттальной плоскости оптического элемента.

Следует отметить, что основные термины и определения величин, используемые в оптике, устанавливаются действующими Государственными стандартами СССР ГОСТ 7427–76. Геометрическая оптика и ГОСТ 7601–78. Физическая оптика [10, 11].

## 2. ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА ПЛОСКИМ ЗЕРКАЛОМ

Рассмотрим формирование изображения точек предмета плоским зеркалом. При освещении предмета световой волной согласно принципу Гюйгенса – Френеля от каждой  $j$ -й точки предмета распространяется сферическая волна

$$\vec{E}_j = \frac{\vec{A}_j}{r_j} e^{-ik_j r_j},$$

где  $\vec{E}_j$  и  $\frac{\vec{A}_j}{r_j}$  – соответственно световой вектор (вектор напряженности электрического поля) и амплитуда этого вектора в заданной точке световой волны;  $k_j$  – волновое число;  $r_j$  – модуль радиус-вектора, направленного от точки предмета (источника волны) до заданной точки световой волны. Знак минус перед фазой  $k_j r_j$  световой волны указывает, что сферическая волна является расходящейся.

Построим рис. 2.1, на котором укажем плоское зеркало и плоскость предмета, расположенную на расстоянии  $s$  от поверхности зеркала.

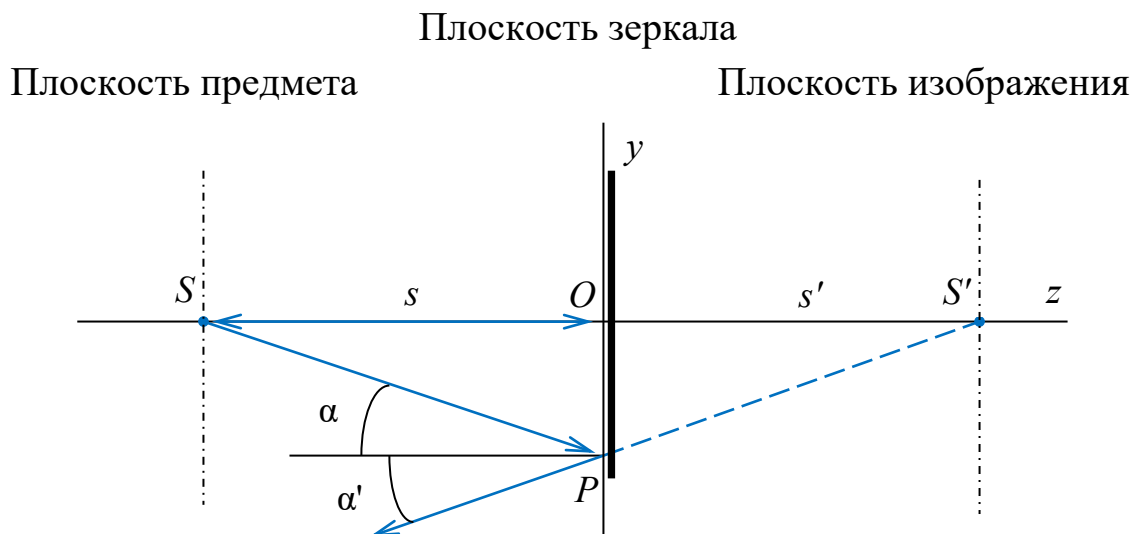


Рис. 2.1. Схема построения изображения  $S'$  осевой точки  $S$  предмета

Проведенная перпендикулярно к поверхности зеркала через осевую точку  $S$  предмета и точку  $O$  зеркала ось координат  $Oz$  является оптической осью зеркала.

Рассмотрим световую волну, распространяющуюся из осевой точки  $S$  предмета в направлении зеркала. Определим изображение осевой точки  $S$ , формируемое плоским зеркалом, и формулу плоского зеркала, используя сначала законы геометрической оптики.

Проведем из осевой точки  $S$  предмета луч света перпендикулярно к поверхности плоского зеркала, как показано на рис. 2.1. Этот луч отразится назад. Проведем из этой же точки  $S$  еще один луч в произвольную точку  $P$  поверхности зеркала. Угол падения луча в точке  $P$  обозначим  $\alpha$ , а угол отражения  $\alpha'$ . Продолжим в обратном направлении луч, отраженный в точке  $P$  (на рис. 2.1 это показано штрихами), до пересечения в точке  $S'$  с оптической осью  $Oz$ . Точка  $S'$  будет изображением осевой точки  $S$  предмета, то есть точки  $S'$  и  $S$  являются сопряженными. Расстояние от зеркала до точки изображения  $S'$  обозначим  $s'$ .

Из равенства углов падения  $\alpha$  и отражения  $\alpha'$  следует, что треугольники  $SOP$  и  $OS'P$  на рис. 2.1 равны. Поэтому расстояния  $s$  (от зеркала до осевой точки  $S$  предмета) и  $s'$  (от зеркала до осевой точки  $S'$  изображения) равны. Применяя эти рассуждения к каждой точке предмета, получаем из закона отражения формулу плоского зеркала: *расстояние  $s$  от каждой точки предмета до плоского зеркала равно расстоянию  $s'$  от зеркала до сопряженной точки изображения предмета*

$$s = s'. \quad (2.1)$$

Эта формула позволяет очень быстро определять положение действительных и мнимых изображений, формируемых плоскими зеркалами. Примеры формирования изображений плоскими зеркалами представлены на рис. 2.2 *а, б*, из которых следует, что линейный коэффициент увеличения  $\beta_y$  и  $\beta_z$  плоского зеркала равен

- вдоль оси  $Oy$ :  $\beta_y = 1$ ;
- вдоль оптической оси  $Oz$ :  $\beta_z = -1$ .

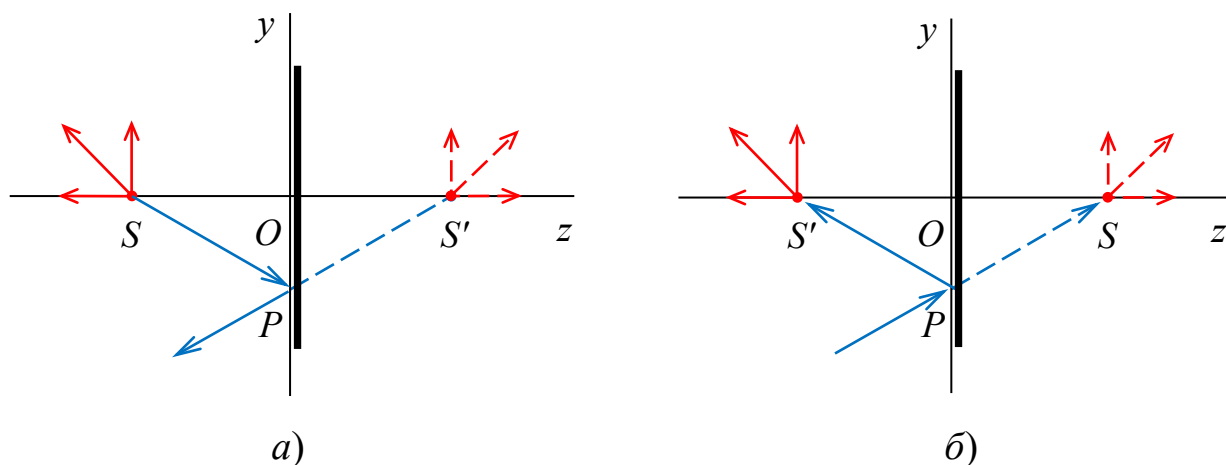


Рис. 2.2. Формирование изображений плоскими зеркалами:  
 а) точка  $S$  – осевая точка реального (действительного) предмета,  
 точка  $S'$  – осевая точка мнимого изображения предмета;  
 б) точка  $S$  – осевая точка мнимого предмета,  
 точка  $S'$  – осевая точка действительного изображения предмета

Таким образом, плоское зеркало обладает свойством формирования мнимого и действительного изображения (см. рис. 2.2, а, б). Плоское зеркало формирует мнимое (действительное) изображение предмета на противоположной стороне зеркала и на таком же удалении от поверхности зеркала. С помощью плоского зеркала можно повернуть или перевернуть изображение предмета на  $180^\circ$ , при этом у предмета и у изображения форма и размеры остаются одинаковыми.

Плоское зеркало формирует безаберрационное (неискаженное) изображение всех мельчайших деталей предмета, если не учитывать влияние краев зеркала, то есть считать плоское зеркало бесконечным.

В теории геометрической оптики учет краев зеркала приводит к ограничению его поля зрения, в то время как в теории волновой оптики учет краев зеркала приводит к фундаментальным особенностям в отраженной от него волне и в мнимом (действительном) изображении точек предмета.

Рассмотрим влияние краев плоского зеркала на формирование изображения точек предмета на примере осевой точки  $S$  (см. рис. 2.1). Для этого запишем характеристическую функцию  $V$  плоского зеркала для волны из осевой точки  $S$  предмета. Эта характеристическая функция  $V$  представляет собой волновую аберрацию отраженной от зеркала световой волны и может быть представлена в виде

$$V = \sqrt{s^2 + y^2} - \sqrt{s'^2 + y^2} - (s - s'), \quad (2.2)$$

где  $y$  – координата произвольной точки  $P$  зеркала.

Условие формирования идеального изображения плоским зеркалом может быть сформулировано следующим образом: модуль характеристической функции (2.2) должен быть меньше или равен четверти длины волны света

$$\left| \sqrt{s^2 + y^2} - \sqrt{s'^2 + y^2} - (s - s') \right| \leq \lambda / 4, \quad (2.3)$$

где  $\lambda$  – длина световой волны.

Разлагая в ряд квадратные корни в (2.3), получаем для параксиальной области зеркала (при  $y \ll s, y \ll s'$ ) условия

$$-\frac{\lambda}{4} \leq \frac{y^2}{2} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s'} \right) \leq \frac{\lambda}{4}$$

или

$$\frac{1}{s} - \frac{\lambda}{2y^2} \leq \frac{1}{s'} \leq \frac{1}{s} + \frac{\lambda}{2y^2}. \quad (2.4)$$

Из условий (2.4) при длине световой волны  $\lambda$  много меньше координаты  $y$  следуют условия формирования безабберационного изображения предмета плоским зеркалом

$$s \left( 1 - \frac{s\lambda}{2y^2} \right) \leq s' \leq s \left( 1 + \frac{s\lambda}{2y^2} \right). \quad (2.5)$$

Следствия из условия (2.5):

1) учет размеров зеркала приводит к формированию изображения не в одной плоскости, перпендикулярной оптической оси, а в области пространства некоторой протяженностью вдоль оптической оси зеркала, т. е. имеет место неопределенность  $\Delta s' = \pm s^2 \lambda / 2y^2$  положения плоскости изображения;

2) при равенстве нулю длины волны света ( $\lambda = 0$ ), т. е. в приближении геометрической оптики, получаем формулу (2.1) плоского зеркала  $s = s'$ ;

3) для бесконечного зеркала (координата  $y$  точки  $P$  зеркала стремится к бесконечности) из условий (2.5) следует формула (2.1) плоского зеркала

$$s = s'.$$

Оценим численно величину неопределенности  $\Delta s' = s^2 \lambda / 2y^2$  при следующих заданных величинах для квадратных зеркал:

$$1) s = 100 \text{ мм}, \lambda = 5 \cdot 10^{-4} \text{ мм}, y = 50 \text{ мм},$$

$$\Delta s' = \frac{\lambda s^2}{2y^2} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 100^2}{2 \cdot 50^2} = 10^{-3} \text{ мм};$$

$$2) s = 100 \text{ мм}, \lambda = 5 \cdot 10^{-4} \text{ мм}, y = 5 \text{ мм},$$

$$\Delta s' = \frac{\lambda s^2}{2y^2} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 100^2}{2 \cdot 5^2} = 0,1 \text{ мм}.$$

Таким образом, при длине и ширине плоского зеркала по 100 мм и расположении предмета и мнимого изображения на расстоянии 100 мм величина неопределенности  $\Delta s'$  плоскости изображения порядка длины волны света, поэтому ею можно пренебречь. Тогда как для зеркала, имеющего длину и ширину по 10 мм, получаем величину неопределенности положения плоскости изображения  $\Delta s' = 0,1$  мм. Этой величине соответствует точка в виде пятна размером 20 мкм, т. е. каждая точка предмета на его изображении, сформированном плоским зеркалом, расплывается в пятно размером (диаметром) 20 мкм.

Из условия (2.3) получаем, что формирующая изображение точки предмета световая волна обладает неопределенностью фазы, что соответствует волновой абберрации порядка  $\lambda/4$ . Таким образом, учет краев зеркала приводит к фундаментальной неопределенности фазы монохроматической предметной волны при формировании ею изображения предмета.

### Оптические зеркальные системы

На рис. 2.3, *а*, *б* представлены два примера оптических систем из двух плоских зеркал. Зеркальные системы предназначены для переноса и наклона оптической оси, переноса в заданную точку пространства изоб-

ражения предмета, переворота и наклона изображения на заданный угол. Плоские зеркала используются в оптических устройствах наблюдения, в интерференционных и дифракционных приборах.

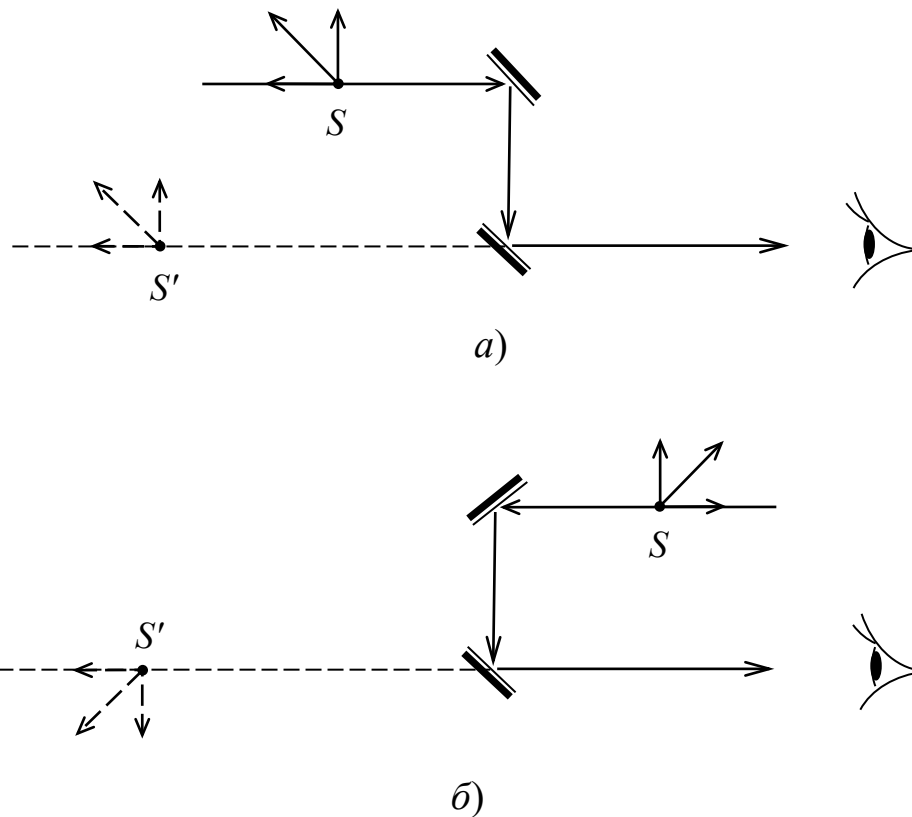


Рис. 2.3. Схемы оптических систем из двух плоских зеркал для формирования: *а)* мнимого неперевернутого изображения  $S'$  предмета; *б)* мнимого перевернутого изображения  $S'$

Системы из плоских зеркал используются для уменьшения габаритов оптических систем устройств.

Часто на практике используется полупрозрачное зеркало для разделения одной световой волны на две (прошедшую и отраженную) с заданными значениями амплитуд. Полупрозрачное зеркало позволяет в отраженном свете сформировать второе (дополнительное) изображение предмета.

Примеры применения плоских зеркал, полупрозрачных зеркал в оптических системах рассматриваются в рамках учебных дисциплин «Теория оптических приборов» и «Прикладная оптика».



### 3. ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА СФЕРИЧЕСКИМ ЗЕРКАЛОМ

Рассмотрим преобразование световой волны сферическим зеркалом на примере сферического вогнутого зеркала, представленного на рис. 3.1. Точка  $O$  является центром поверхности сферического зеркала. Через эту точку  $O$  и центр кривизны  $R$  поверхности зеркала проведем ось  $Oz$ , являющуюся оптической осью сферического зеркала. Плоский предмет расположим перпендикулярно оптической оси на расстоянии  $s$  от центра  $O$  поверхности зеркала. Для описания распространения расходящейся из осевой точки  $S$  предмета сферической световой волны до зеркала и отраженной от зеркала волны, формирующей изображение точки предмета, воспользуемся сначала представлениями геометрической оптики.

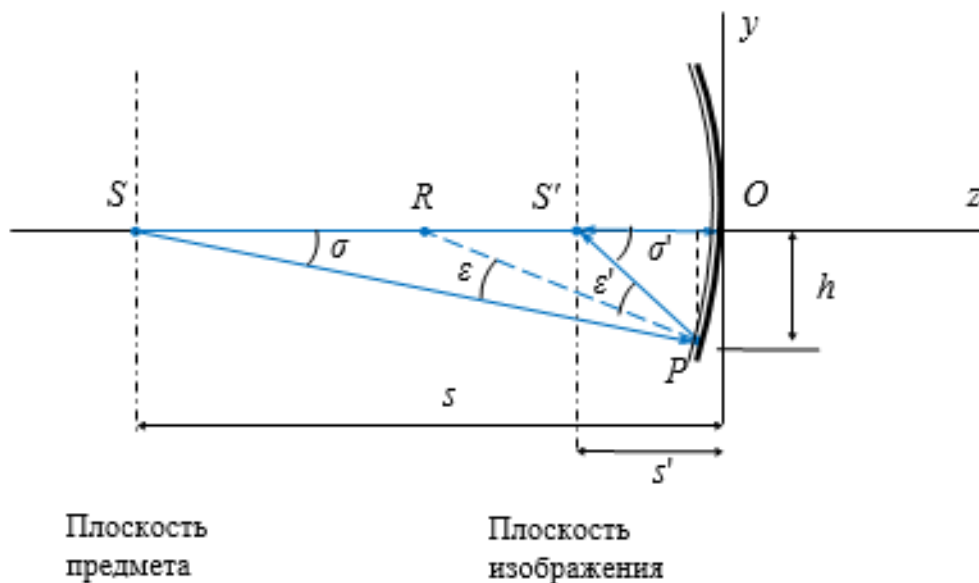


Рис. 3.1. Схема построения изображения  $S'$  осевой точки  $S$  предмета вогнутым сферическим зеркалом

Проведем два луча света из осевой точки  $S$  предмета. Первый луч направим вдоль оптической оси и в точке  $O$  зеркала этот луч отразится

в обратном направлении. Второй луч направим в произвольную точку  $P$  зеркала, как показано на рис. 3.1. Отразившись от зеркала, второй луч пересечет оптическую ось в точке  $S'$ . Эта точка является изображением точки  $S$  предмета. Расстояние от точки  $O$  зеркала до точки  $S'$  изображения обозначим  $s'$ . На рис. 3.1 углы  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  соответственно являются углом падения и углом отражения, а углы  $\sigma$  и  $\sigma'$  – апертурными углами.

Выведем формулы, связывающие между собой радиус кривизны  $r = |RO|$  сферической поверхности зеркала, с расстояниями  $s$  и  $s'$  – характеристиками сферической волны, испускаемой точкой предмета, и волны, формирующей изображение этой точки предмета.

Из треугольников  $SPR$ ,  $RPS'$  на рис. 3.1 по теореме синусов получаем соотношения:

$$\frac{\sin \sigma}{r} = \frac{\sin \varepsilon}{s - r}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\sin \sigma'}{r} = \frac{\sin \varepsilon'}{r - s'}. \quad (3.2)$$

В параксиальном приближении  $\sin \sigma \approx \sigma$ ,  $\sin \sigma' \approx \sigma'$ ,  $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ ,  $\sin \varepsilon' \approx \varepsilon'$  и из формулы (3.1) получаем величину угла падения

$$\varepsilon = \frac{(s - r)h}{rs}, \quad (3.3)$$

где  $h \approx \sigma s$  – расстояние от точки  $P$  до оптической оси (см. рис. 3.1).

Из формулы (3.2) в параксиальном приближении следует

$$\varepsilon' = \frac{(r - s')h}{rs'}, \quad (3.4)$$

где расстояние  $h \approx \sigma' s'$  (см. рис. 3.1).

Учитывая закон отражения  $\varepsilon = \varepsilon'$  и приравнивая формулы (3.3) и (3.4), получаем

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{r}. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) является формулой вогнутого сферического зеркала с радиусом кривизны  $r$  и записывается обычно в виде

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}. \quad (3.6)$$

Следствия из формулы (3.6).

1. При падении плоской волны на сферическое зеркало ( $s \rightarrow \infty$ ) расстояние  $s'$  равно фокусному расстоянию  $f$ , т. е. фокусное расстояние сферического зеркала равно половине радиуса кривизны  $r$  сферической поверхности зеркала и отраженная световая волна становится сферически сходящейся в точке фокуса.

2. Оптическая сила  $D$  сферического зеркала равна

$$D = \frac{1}{f} = \frac{2}{r}.$$

3. При  $s = r$  получаем, что  $s' = r$ , т. е., если предметную плоскость поместить в центр кривизны сферического зеркала, то плоскость изображения будет совпадать с плоскостью предмета (изображение предмета в параксиальной области будет совпадать с самим предметом).

4. Если величина расстояния  $s$  больше половины радиуса  $r$  сферической поверхности зеркала, то отраженная световая волна является сходящейся сферической волной и формирует точку действительного изображения предмета.

5. При приближении величины расстояния  $s$  к половине радиуса  $r$  сферической поверхности зеркала величина расстояния  $s'$  стремится к бесконечности и отраженная световая волна становится плоской.

6. Если величина расстояния  $s$  меньше половины радиуса  $r$  сферической поверхности зеркала, то отраженная световая волна является расходящейся сферической волной и формирует точку мнимого изображения предмета за сферическим зеркалом (величина  $s'$  становится отрицательной).

7. При приближении величины  $s$  к нулю величина  $s'$  также стремится к нулю, величиной оптической силы при этом можно пренебречь, т. е. при приближении точек предмета вплотную к зеркалу изображение этих точек также приближается к зеркалу.

Рассмотрим вывод формулы (3.6) вогнутого сферического зеркала методом характеристической функции.

Запишем формулу поверхности сферического зеркала в плоскости координат  $yOz$

$$(z - r)^2 + y^2 = r^2. \quad (3.7)$$

где  $y$  и  $z$  – координаты точки  $P$  поверхности сферического зеркала.

В параксиальном приближении ( $y$  и  $z \ll r$ ) формула (3.7) может быть представлена в виде

$$z = \frac{y^2}{2r}. \quad (3.8)$$

Условие формирования идеального (безабберационного) изображения оптическим элементом точки предмета можно сформулировать следующим образом: *сферическая световая волна, выходящая из точки предмета, должна собираться (отражаться) оптическим элементом и формировать сопряженную точку изображения, причем разности оптических путей всех узких пучков света, вышедших из точки предмета, проходящих оптический элемент (отражающихся от оптического элемента) и сходящихся в сопряженной точке изображения, должны быть не более четверти длины волны света.*

Для количественного описания изображающих свойств сферического зеркала и особенностей преобразования световой волны сферическим зеркалом рассмотрим его характеристическую функцию. Для осевой точки предмета и сопряженной точки изображения характеристическая функция  $V$  зеркала с учетом (3.7) и (3.8) представляется (в параксиальной области) в виде

$$V = \sqrt{\left(s - \frac{y^2}{2r}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(s' - \frac{y^2}{2r}\right)^2 + y^2} - (s + s') \approx \frac{y^2}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} - \frac{2}{r} \right). \quad (3.9)$$

При равенстве характеристической функции  $V$  (3.9) нулю получаем формулу сферического зеркала, совпадающую с (3.6)

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}. \quad (3.10)$$

Учитывая условие формирования идеального изображения

$$-\frac{\lambda}{4} \leq \frac{y^2}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} - \frac{2}{r} \right) \leq \frac{\lambda}{4}, \quad (3.11)$$

получаем, что

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{s} - \frac{\lambda}{2y^2} \leq \frac{1}{s'} \leq \frac{2}{r} - \frac{1}{s} + \frac{\lambda}{2y^2}. \quad (3.12)$$

Из условий (3.12) следует, что формула (3.10) справедлива для сферического зеркала бесконечных размеров (координата точек зеркала  $y \rightarrow \infty$ ).

При конечном размере зеркал (координата  $y \gg \lambda$ ) из (3.12) следует, что имеет место неопределенность продольной координаты положения плоскости изображения

$$s' = s'_0 \pm \Delta s',$$

где  $s'_0 = \frac{rs}{2s-r}$  – расстояние от центра сферического зеркала до плоскости изображения, соответствующего условию (3.10);

$$\Delta s' = \frac{\lambda(rs)^2}{2y^2(2s-r)^2} \text{ – величина неопределенности положения плоскости}$$

изображения вдоль оптической оси сферического зеркала.

Для падающей плоской волны ( $s \rightarrow \infty$ ) величина неопределенности фокусного расстояния  $f = 0,5r$  сферического зеркала (вдоль оптической оси) равна

$$\Delta s' = \frac{\lambda r^2}{8y^2} = \frac{\lambda f^2}{2y^2}. \quad (3.13)$$

Величина неопределенности поперечной координаты фокуса задается из (3.13) выражением

$$\Delta y'_o = \frac{\Delta s' y}{f} = \frac{\lambda f}{2y}. \quad (3.14)$$

Оценим величины неопределенности  $\Delta s'$  (3.13) и  $\Delta y'_o$  (3.14) при:

1)  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ,  $f = 0,5 \text{ м}$  и  $y = 0,025 \text{ м}$ :

$$\Delta s' = \frac{\lambda f^2}{2y^2} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5^2}{2 \cdot 0,025^2} = 10^{-4} \text{ м} = 100 \text{ мкм},$$

$$\Delta y'_o = \frac{\lambda f}{2y} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5}{2 \cdot 0,025} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 5 \text{ мкм};$$

2)  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ,  $f = 0,5 \text{ м}$  и  $y = 0,005 \text{ м}$ :

$$\Delta s' = \frac{\lambda f^2}{2y^2} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5^2}{2 \cdot 0,005^2} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,5 \text{ мм},$$

$$\Delta y'_o = \frac{\lambda f}{2y} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5}{2 \cdot 0,005} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,025 \text{ мм}.$$

Получаем, что при уменьшении относительного отверстия  $2y/f$  сферического зеркала в 5 раз неопределенность продольного положения плоскости изображения увеличивается в 25 раз, а неопределенность поперечного положения увеличивается в 5 раз.

Рассмотрим характеристическую функцию  $V$  для внеосевой точки предмета в первом приближении

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\left(s - \frac{y^2}{2r}\right)^2 + (y - y_o)^2} + \sqrt{\left(s' - \frac{y'^2}{2r}\right)^2 + (y - y'_o)^2} - (s + s') \approx \\ &\approx \frac{yy'_o}{s'} - \frac{yy_o}{s}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

При равенстве нулю характеристической функции (3.15) получаем, что коэффициент линейного увеличения  $\beta$  сферического зеркала равен

$$\beta = \frac{y'_o}{y_o} = \frac{s'}{s}. \quad (3.16)$$

Для формирования идеального изображения внеосевой точки предмета сферическим зеркалом должно выполняться условие

$$-\frac{\lambda}{4} \leq \frac{yy'_o}{s'} - \frac{yy_o}{s} \leq \frac{\lambda}{4}$$

или

$$\frac{s'y_o}{s} - \frac{s'\lambda}{4y} \leq y'_o \leq \frac{s'y_o}{s} + \frac{s'\lambda}{4y}. \quad (3.17)$$

Из (3.17) следует, что формула (3.16) выполняется для бесконечных сферических зеркал (при  $y \rightarrow \infty$ ). Но так как радиус  $r$  кривизны сферического зеркала имеет конечный размер, получаем, что для внеосевой точки предмета имеет место неопределенность поперечной координаты изображения этой точки предмета, равная

$$\Delta y'_o = \frac{s'\lambda}{4y}. \quad (3.18)$$

Из (3.18) следует, что неопределенность изображения внеосевых точек предмета меньше неопределенности осевой точки предмета.

Таким образом, учет размеров (краев) сферического зеркала приводит к тому, что любая точка изображения предмета (в параксиальной области сферического зеркала) имеет конечный размер, называемый дифракционным размером точки изображения и определяемый формулами (3.14) и (3.18). Этот факт является следствием имеющей место неопределенности фазы световой волны, формирующей изображение предмета [12].

Из выражения (3.16) следует, что в параксиальной плоскости сферического зеркала коэффициент линейного увеличения  $\beta$  в каждой точке плоскости изображения один и тот же. Из выражений (3.10) и (3.16) следует, что в параксиальной области плоскость изображения, перпендикулярная оптической оси, сопряжена с плоскостью предмета, также перпендикулярной этой оптической оси. Таким образом, в параксиальной плоскости сферическое зеркало, формирующее плоское изображение и удовлетворяющее условиям (3.11) и (3.17), является идеальным оптическим элементом.

## 4. ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА ЛИНЗОЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Рассмотрим формулы, в соответствии с которыми линза преобразует расходящуюся световую волну от предмета в волну, формирующую изображение этого предмета.

Известно, что толстая линза может быть представлена в виде двух сопряженных параллельных плоскостей, перпендикулярных ее оптической оси, на которых имеет место преломление световой волны (рис. 4.1). Предполагается, что в результате преломления между этими плоскостями распространяется плоская световая волна параллельно оптической оси. Если предмет поместить в одной из этих плоскостей, то изображение предмета с увеличением, равным единице, формируется во второй плоскости. Эти две плоскости называются главными плоскостями линзы. Главная плоскость, которую световая волна проходит сначала, называется передней главной плоскостью, а вторая плоскость является задней главной плоскостью.

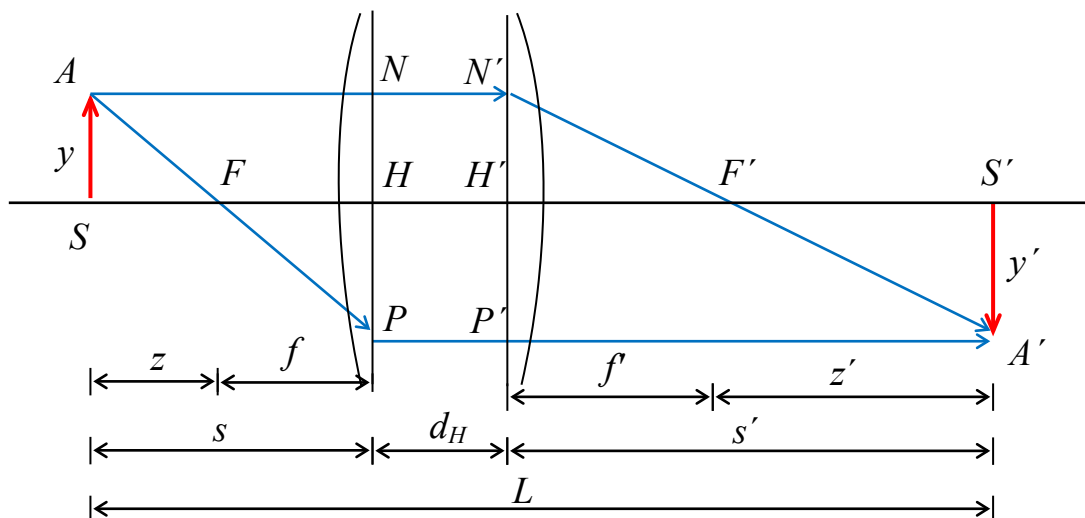


Рис. 4.1. Модельное представление толстой линзы, формирующей изображение предмета



На рис. 4.1 представлена модель толстой линзы, формирующей действительное изображение точки  $A$  предмета с координатой  $y$ . Точки  $H$  и  $H'$  пересечения передней и задней главных плоскостей с оптической осью называются соответственно передней и задней главными точками линзы. Переднее фокусное расстояние  $f$  – это расстояние вдоль оптической оси между передней главной точкой  $H$  и передним фокусом  $F$ . Заднее фокусное расстояние  $f'$  – это расстояние между задней главной точкой  $H'$  и задним фокусом  $F'$ . Расстояние от предмета до переднего фокуса  $F$  обозначено  $z$ , расстояние от заднего фокуса  $F'$  до изображения обозначено  $z'$ . Расстояния  $s$  и  $s'$  – это расстояния от главных точек  $H$  и  $H'$  соответственно до предмета (предметной плоскости) и изображения (плоскости изображения), как показано на рис. 4.1 [4].

Из точки  $A$  предмета проведем два луча: первый луч параллельно оптической оси, а второй луч – через передний фокус  $F$ . Далее первый луч проходит через переднюю главную плоскость линзы в точке  $N$ , преломляется на задней главной плоскости в точке  $N'$  и проходит через задний фокус  $F'$  линзы. Второй луч преломляется на передней главной плоскости в точке  $P$  и далее распространяется параллельно оптической оси. Точка пересечения  $A'$  первого и второго луча является изображением точки  $A$  предмета.

Из подобия треугольников  $SAF$  и  $FHP$  на рис. 4.1 следует

$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{z}, \quad (4.1)$$

а из подобия треугольников  $S'A'F'$  и  $F'H'N'$

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{f'}. \quad (4.2)$$

Приравнивая (4.1) и (4.2), получаем известную формулу Ньютона

$$zz' = ff'.$$

Учитывая, что  $z = s - f$  и  $z' = s' - f'$  из (4.1) и (4.2), можем записать

$$\frac{f}{s - f} = \frac{s' - f'}{f'}$$

или

$$ss' = s'f + sf'. \quad (4.3)$$

Поделив выражение (4.3) на  $ss'$ , получаем формулу отрезков

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1. \quad (4.4)$$

Для линзы, находящейся в оптически однородной среде, передний и задний фокусные расстояния равны  $f = f'$ . В этом случае формула отрезков (4.4) представляется в виде

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = D, \quad (4.5)$$

где  $D$  – оптическая сила линзы.

Следствия из формулы (4.5).

1. Если предмет удалить на бесконечное расстояние от линзы ( $s \rightarrow \infty$ ), то она сформирует изображение в задней фокусной плоскости. От каждой точки предмета на линзу будет падать плоская световая волна, а прошедшая линзу световая волна станет сферической волной, сходящейся в точку изображения.

2. Если предмет (предметную плоскость) поместить в передний фокус линзы ( $s = f$ ), то изображение будет формироваться линзой на бесконечности  $s' \rightarrow \infty$ , т. е. расходящаяся из точки предмета световая волна после прохождения линзы станет плоской световой волной.

3. Если предмет находится от линзы на расстоянии  $s$ , большем фокусного расстояния  $f$ , то прошедшая через линзу световая волна является сходящейся сферической волной и формирует точку действительного изображения предмета.

4. Если предмет (предметная плоскость) находится на расстоянии  $s$ , меньшем фокусного расстояния линзы, то прошедшая линзу световая волна является расходящейся сферической волной и формирует точку мнимого изображения предмета (величина  $s'$  становится отрицательной).

5. При приближении предмета вплотную к линзе, когда величина расстояния  $s$  приближается к нулю, величина  $s'$  также стремится к нулю, так как в (4.5) величиной оптической силы линзы можно пренебречь, т. е. при приближении предмета к линзе изображение предмета также приближается к линзе.

Коэффициент поперечного увеличения  $\beta_y$  из (4.1) и (4.2) равен

$$\beta_y = \frac{y'}{y} = \frac{f}{s-f} = \frac{s'-f'}{f'}. \quad (4.6)$$

Из формулы (4.6) следует, что

$$s = f \left( 1 + \frac{1}{\beta_y} \right),$$

$$s' = f'(1 + \beta_y). \quad (4.7)$$

При делении выражений для  $s$  и  $s'$  в (4.7) друг на друга получаем

$$\frac{s'}{s} = \frac{f'}{f} \beta_y,$$

или

$$\beta_y = \frac{fs'}{f's}. \quad (4.8)$$

Таким образом, коэффициент поперечного увеличения  $\beta_y$  равен

$$\beta_y = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s},$$

при одинаковых величинах переднего и заднего фокусных расстояний ( $f=f'$ ).

Коэффициент углового увеличения  $\beta_a$  равен

$$\beta_a = \frac{y'}{s'} \frac{s}{y} = \beta_y \frac{s}{s'} = \frac{f}{f'}. \quad (4.9)$$

При  $f = f'$  из (4.9) следует, что коэффициент углового увеличения  $\beta_a = 1$ .

Коэффициент продольного увеличения  $\beta_z$  равен

$$\beta_z = \frac{\Delta s'}{\Delta s}, \quad (4.10)$$

где  $\Delta s'$  – малое изменение расстояния  $s'$  ( $\Delta s' \ll s'$ ), а  $\Delta s$  – малое изменение расстояния  $s$  ( $\Delta s' \ll s'$ ).

Подставляя в формулу отрезков (4.4) вместо величин  $s$  и  $s'$  соответственно  $s + \Delta s$  и  $s' - \Delta s'$ , получаем

$$1 = \frac{f}{s + \Delta s} + \frac{f'}{s' - \Delta s'} \approx \frac{f}{s} \left( 1 - \frac{\Delta s}{s} \right) + \frac{f'}{s'} \left( 1 + \frac{\Delta s'}{s'} \right),$$

или в виде инварианта

$$\frac{f \Delta s}{s^2} = \frac{f' \Delta s'}{s'^2}. \quad (4.11)$$

Из (4.11) коэффициент продольного увеличения  $\beta_z$  равен

$$\beta_z = \frac{\Delta s'}{\Delta s} = \frac{f s'^2}{f' s^2} = \frac{f'}{f} \left( \frac{f s'}{f' s} \right)^2 = \frac{\beta_y^2}{\beta_a}. \quad (4.12)$$

Таким образом, из (4.12) получаем связь коэффициентов увеличения  $\beta_y, \beta_z, \beta_a$

$$\beta_y^2 = \beta_z \beta_a.$$

Недостатками рассмотренной модели толстой линзы являются отсутствие в приведенных формулах явных зависимостей передних и задних фокусных расстояний от показателя преломления, радиусов кривизны сферических поверхностей линзы, от габаритных размеров линзы – диаметра, толщины линзы, т. е. от всех важнейших ее характеристик.

В качестве примера применения полученных формул рассмотрим определение фокусного расстояния толстой линзы.

Чтобы воспользоваться формулами (4.7) для определения фокусных расстояний  $f, f'$  или расстояний  $s, s'$ , необходимо знать расположение главных точек  $H$  и  $H'$  толстой линзы.

Рассмотрим толстую линзу, находящуюся в воздухе и имеющую фокусные расстояния  $f = f'$ .

На рис. 4.1 расстояние  $L$  между предметом и изображением с учетом выражений (4.7) равно

$$L = s + s' + d_H = 2f + f \left( \beta_y + \frac{1}{\beta_y} \right) + d_H, \quad (4.13)$$

где  $d_H$  – расстояние между главными точками  $H$  и  $H'$ . Отметим, что расстояние  $d_H$  постоянно и не зависит от положения предмета и изображения. Действительно, расстояние между передним и задним фокусами линзы постоянно. Переднее и заднее фокусные расстояния, отсчитываемые от главных плоскостей линзы, тоже не изменяются, поэтому пространственное расположение главных плоскостей и расстояние  $d_H$  между ними не изменяются.

Записывая выражение (4.13) для двух разных расстояний  $L_1$  и  $L_2$  и вычитая эти выражения, получаем, что фокусное расстояние  $f$  толстой линзы можно вычислить по формуле

$$f = \frac{L_1 - L_2}{\beta_{1y} - \beta_{2y} + \frac{1}{\beta_{1y}} - \frac{1}{\beta_{2y}}},$$

где  $L_1, L_2$  – расстояния между предметом и изображением соответственно при коэффициентах поперечного увеличения  $\beta_{1y}$  и  $\beta_{2y}$ , как показано на рис. 4.2.

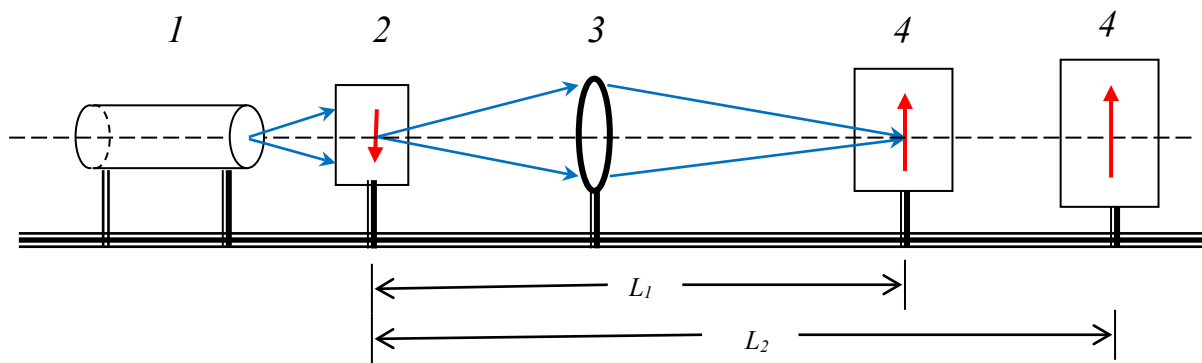


Рис. 4.2. Схема установки для определения фокусного расстояния  $f$  толстой линзы: 1 – источник света; 2 – предмет; 3 – толстая линза; 4 – экран

## 5. ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА НА СФЕРИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕ ДВУХ ПРОЗРАЧНЫХ СРЕД

Рассмотрим распространение световой волны через сферическую поверхность с радиусом  $r_1$ , ограничивающую две прозрачные среды с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  ( $n_2 > n_1$ ).

На рис. 5.1 представим схему формирования сферической поверхностью  $O_1P_1$  мнимого изображения точечного источника  $S_1$  световой волны. Из точки  $S_1$  (на оптической оси  $O_1z$ ) проведем два луча: первый вдоль оптической оси, а второй – в произвольную точку  $P_1$  сферической поверхности. Угол падения второго луча в точке  $P_1$  обозначим  $\varepsilon_1$ , а угол преломления  $\varepsilon_1'$  (как показано на рис. 5.1). Продолжая преломленный в точке  $P_1$  луч в обратном направлении, определяем на оптической оси точку  $S_1'$  – мнимое изображение точки  $S_1$ . Апертурные углы отклонения относительно оптической оси падающего и преломленного луча в точке  $P_1$  обозначим  $\sigma_1$  и  $\sigma_1'$ . Точка  $R_1$  является центром сферической поверхности.

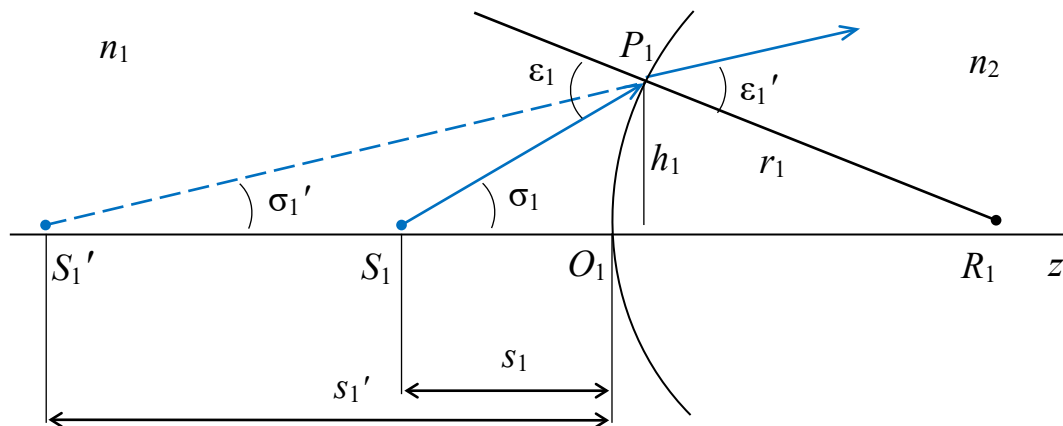


Рис. 5.1. Схема формирования изображения  
осевой точки  $S_1$  предмета сферической поверхностью

Запишем закон преломления луча света в точке  $P_1$

$$n_1 \sin \varepsilon_1 = n_2 \sin \varepsilon_1'. \quad (5.1)$$

Из треугольников  $P_1R_1S_1$  и  $P_1R_1S_1'$  на рис. 5.1 получаем по теореме синусов

$$\frac{\sin \sigma_1}{r_1} = \frac{\sin(\pi - \varepsilon_1)}{r_1 + s_1} = \frac{\sin \varepsilon_1}{r_1 + s_1}, \quad (5.2)$$

$$\frac{\sin \sigma_1'}{r_1} = \frac{\sin(\pi - \varepsilon_1')}{r_1 + s_1'} = \frac{\sin \varepsilon_1'}{r_1 + s_1'}. \quad (5.3)$$

Сумма углов в треугольнике  $P_1R_1S_1'$  равна

$$\pi = \sigma_1' + (\pi - \sigma_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_1')$$

или

$$\sigma_1' = \sigma_1 + \varepsilon_1' - \varepsilon_1. \quad (5.4)$$

Формулы (5.2)–(5.4) применимы ко всем точкам сферической поверхности.

На формулах (5.1)–(5.4) базируется тригонометрический метод расчета прохождения лучей света через сферическую границу двух сред. Его суть заключается в последовательном вычислении угла падения  $\varepsilon_1$ , угла преломления  $\varepsilon_1'$ , апертурного угла  $\sigma_1'$  и определение координаты точки изображения  $S_1'$ . В этом методе обычно считаются заданными величинами радиус поверхности  $r_1$ , показатели преломления сред  $n_1$  и  $n_2$ , координата  $s_1$  точки предмета, апертурный угол  $\sigma_1$ .

Последовательность расчета прохождения луча через сферическую поверхность:

1) определение угла падения на сферическую поверхность из формулы (5.2)

$$\varepsilon_1 = \arcsin \left( \left( \frac{s_1}{r_1} + 1 \right) \sin \sigma_1 \right); \quad (5.5)$$

2) определение угла преломления из закона преломления

$$\varepsilon_1' = \arcsin \left( \frac{n_1 \sin \varepsilon_1}{n_2} \right); \quad (5.6)$$

3) определение апертурного угла  $\sigma_1'$  из формулы (5.4)

$$\sigma_1' = \sigma_1 + \varepsilon_1' - \varepsilon_1; \quad (5.7)$$

4) определение координаты точки изображения  $S_1'$  из формулы (5.3)

$$s_1' = r_1 \left( \frac{\sin \varepsilon_1'}{\sin \sigma_1'} - 1 \right). \quad (5.8)$$

Этот алгоритм далее можно применить к последующим сферическим поверхностям между средами, расположение которых считается заданным. Так, для линз задают толщины вдоль оптической оси, радиусы кривизны поверхностей, показатели преломления и последовательно определяют углы  $\varepsilon_i$ ,  $\varepsilon_i'$ ,  $\sigma_i$ ,  $\sigma_i'$  и расстояния  $s_i$ ,  $s_i'$  для  $i$ -й сферической поверхности линз ( $i = 2, 3, 4 \dots$ ).

Рассмотрим выражения (5.1)–(5.3) в параксиальной области сферической поверхности, то есть при

$$\sin \sigma_1 \approx \sigma_1 = \frac{h_1}{s_1}, \quad \sin \sigma_1' \approx \sigma_1' = \frac{h_1}{s_1'}, \quad \sin \varepsilon_1 \approx \varepsilon_1, \quad \sin \varepsilon_1' \approx \varepsilon_1,$$

где  $h_1$  – расстояние от оптической оси до точки  $P_1$  сферической поверхности (см. рис. 5.1).

В параксиальной области из формул (5.2), (5.3) получаем углы падения  $\varepsilon_1$  и преломления  $\varepsilon_1'$ , равные

$$\varepsilon_1 \approx \frac{s_1 + r_1}{r_1} \sigma_1 = \frac{s_1 + r_1}{r_1 s_1} h_1 = \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{r_1} \right) h_1, \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_1' \approx \frac{s_1' + r_1}{r_1} \sigma_1' = \frac{s_1' + r_1}{r_1 s_1'} h_1 = \left( \frac{1}{s_1'} + \frac{1}{r_1} \right) h_1. \quad (5.10)$$



Подставляя (5.9) и (5.10) в закон преломления  $n_1 \varepsilon_1 = n_2 \varepsilon_1'$  (в параксиальной области сферической поверхности), получаем инвариант Аббе

$$n_1 \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{r_1} \right) = n_2 \left( \frac{1}{s_1'} + \frac{1}{r_1} \right). \quad (5.11)$$

Аналогичным образом инвариант Аббе записывается для любой последующей сферической поверхности

$$n_i \left( \frac{1}{s_i} + \frac{1}{r_i} \right) = n_{i+1} \left( \frac{1}{s_i'} + \frac{1}{r_i} \right),$$

где  $i$  – номер сферической поверхности.

Из инварианта Аббе (5.11) получаем формулу сферической поверхности

$$\frac{n_1}{s_1} - \frac{n_2}{s_1'} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}, \quad (5.12)$$

где  $\frac{n_2 - n_1}{r_1} = D_1$  – оптическая сила сферической поверхности.

Следствия из формулы (5.12):

1) при  $s_1 \rightarrow \infty$  расстояние  $s_1' = -\frac{n_2 r_1}{n_2 - n_1} = f_1'$  является задним фокусным

расстоянием сферической поверхности, знак минус указывает, что расстояние  $s_1'$  откладывается по другую сторону от поверхности. При  $s_1' \rightarrow \infty$

расстояние  $s_1 = \frac{n_1 r_1}{n_2 - n_1} = f_1$  является передним фокусным расстоянием сфе-

рической линзы. Переднее фокусное расстояние  $f_1$  отличается от заднего фокусного расстояния  $f_1'$ , если показатели преломлений  $n_1$  и  $n_2$  различны. При равенстве показателей преломления  $n_1$  и  $n_2$  граница между средами исчезает и фокусные расстояния становятся неопределенными;

2) оптическая сила связана с передним и задним фокусными расстояниями соотношением

$$D = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_1'};$$

3) при  $r \rightarrow \infty$  из (5.12) получаем формулу плоской границы двух прозрачных сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$

$$\frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2}{s_1'}. \quad (5.13)$$

При равенстве показателей преломления  $n_1 = n_2$  из (5.13) следует, что  $s_1 = s_1'$ , т. е. изображение совпадает с предметом.

Рассмотрим характеристическую функцию  $V$  сферической поверхности, являющейся границей двух прозрачных сред. Для осевой точки предмета и сопряженной точки изображения характеристическая функция  $V$  сферической поверхности представляется (в параксиальной области) в виде

$$V = n_1 \sqrt{\left(s_1 + \frac{h_1^2}{2r_1}\right)^2 + h_1^2} - n_2 \sqrt{\left(s_1' + \frac{h_1^2}{2r_1}\right)^2 + h_1^2} - (n_1 s_1 - n_2 s_1') \approx \frac{h_1^2}{2} \left( \frac{n_1}{s_1} - \frac{n_2}{s_1'} - \frac{1}{r_1} (n_2 - n_1) \right).$$

При равенстве этой характеристической функции  $V$  нулю получаем формулу сферической границы двух сред, совпадающую с (5.12):

$$\frac{n_1}{s_1} - \frac{n_2}{s_1'} = \frac{1}{r_1} (n_2 - n_1). \quad (5.14)$$

По сути формула (5.14) представляет собой инвариант Аббе (5.11).

Учитывая условие формирования идеального изображения

$$-\frac{\lambda}{4} \leq \frac{h_1^2}{2} \left( \frac{n_1}{s_1} - \frac{n_2}{s_1'} - \frac{1}{r_1} (n_2 - n_1) \right) \leq \frac{\lambda}{4}, \quad (5.15)$$

получаем из (5.15), что

$$\frac{1}{s_o'} - \frac{\lambda}{2n_2 h_1^2} \leq \frac{1}{s_1'} \leq \frac{1}{s_o'} + \frac{\lambda}{2n_2 h_1^2}, \quad (5.16)$$

где  $s'_o = \frac{n_2 r_1 s_1}{r_1 n_1 - s_1 (n_2 - n_1)}$  – расстояние от центра сферической поверхности до плоскости изображения, соответствующего условию (5.14).

Из условий (5.16) следует, что формула (5.14) справедлива для сферической поверхности бесконечных размеров (координата точек поверхности  $h_1 \rightarrow \infty$ ). При конечном размере сферической поверхности (координата  $h_1 \gg \lambda$ ) имеет место неопределенность  $\Delta s'_1$  продольной координаты положения изображения осевой точки предмета (вдоль оптической оси сферической поверхности), равная

$$\Delta s'_1 = \frac{\lambda (s'_o)^2}{2 n_2 h_1^2}.$$

Расстояние  $s'_1$  от центра сферической поверхности до плоскости идеального изображения может быть равно

$$s'_1 = s'_o \pm \Delta s'_1.$$

Для падающей плоской волны ( $s_1 \rightarrow \infty$ ) величина неопределенности фокусного расстояния  $f_1 = r_1 n_2 / (n_2 - n_1)$  сферической поверхности (вдоль оптической оси) равна

$$\Delta s'_1 = \frac{\lambda n_2 r_1^2}{2 (n_2 - n_1)^2 h_1^2} = \frac{\lambda f_1^2}{2 n_2 h_1^2}. \quad (5.17)$$

Величина неопределенности поперечной координаты фокуса задается выражением

$$\Delta y'_o = \frac{\Delta s'_1 h_1}{f_1} = \frac{\lambda f_1}{2 n_2 h_1}. \quad (5.18)$$

Оценим величины неопределенности  $\Delta s'_1$  (5.17) и  $\Delta y'_o$  (5.18) при:

1)  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м,  $f_1 = 0,5$  м и  $h_1 = 0,025$  м:

$$\Delta s'_1 = \frac{\lambda f_1^2}{2n_2 h_1^2} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5^2}{2 \cdot 1,5 \cdot 0,025^2} = 6,710^{-5} \text{ м} = 67 \text{ мкм},$$

$$\Delta y'_o = \frac{\lambda f_1}{2n_2 h_1} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5}{2 \cdot 1,5 \cdot 0,025} = 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 3,3 \text{ мкм};$$

2)  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ,  $f_1 = 0,5 \text{ м}$  и  $h_1 = 0,005 \text{ м}$ :

$$\Delta s'_1 = \frac{\lambda f_1}{2n_2 h_1^2} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5^2}{2 \cdot 1,5 \cdot 0,005^2} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,6 \text{ мм},$$

$$\Delta y'_o = \frac{\lambda f_1}{2n_2 h_1} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5}{2 \cdot 1,5 \cdot 0,005} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,016 \text{ мм}.$$

Получаем, что как и для сферического зеркала, при уменьшении относительного отверстия сферической поверхности на рис. 5.1 в 5 раз неопределенность продольного положения плоскости изображения увеличивается в 25 раз, а неопределенность поперечного положения – в 5 раз.

Рассмотрим характеристическую функцию  $V$  сферической поверхности для внеосевой точки предмета в первом приближении

$$\begin{aligned} V &= n_1 \sqrt{\left(s_1 + \frac{h_1^2}{2r_1}\right)^2 + (h_1 - y_o)^2} - n_2 \sqrt{\left(s'_1 + \frac{h_1^2}{2r_1}\right)^2 + (h_1 - y'_o)^2} - (n_1 s_1 - n_2 s'_1) \approx \\ &\approx \frac{n_2 h_1 y'_o}{s'_1} - \frac{n_1 h_1 y_o}{s_1}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

При равенстве нулю характеристической функции (5.19) получаем, что коэффициент  $\beta$  поперечного увеличения сферической поверхности равен

$$\beta = \frac{y'_o}{y_o} = \frac{n_1 s'_1}{n_2 s_1}. \quad (5.20)$$

Для формирования идеального изображения внеосевой точки предмета сферической поверхностью должны выполняться условия

$$-\frac{\lambda}{4} \leq \frac{n_2 h_1 y'_o}{s'_1} - \frac{n_1 h_1 y_o}{s_1} \leq \frac{\lambda}{4}$$

или

$$\frac{n_1 s'_1 y_o}{n_2 s_1} - \frac{s'_1 \lambda}{4 n_2 h_1} \leq y'_o \leq \frac{n_1 s'_1 y_o}{n_2 s_1} + \frac{s'_1 \lambda}{4 n_2 h_1}. \quad (5.21)$$

Таким образом, формула (5.20) выполняется для сферических поверхностей при  $h_1 \gg s_1 \lambda / y_o$ . Из-за конечности радиуса  $r_1$  кривизны сферической поверхности получаем, что для внеосевой точки предмета имеет место неопределенность поперечной координаты изображения этой точки предмета, равная

$$\Delta y'_o = \frac{s'_1 \lambda}{4 n_2 h_1}. \quad (5.22)$$

Из (5.22) следует, что неопределенность изображения внеосевых точек предмета меньше неопределенности осевой точки предмета.

Таким образом, учет размеров (краев) сферической поверхности приводит к тому, что любая точка изображения предмета имеет конечный размер, называемый дифракционным размером точки изображения и определяемый формулами (5.18) и (5.22).

## 6. ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА ТОНКОЙ ЛИНЗОЙ

Рассмотрим вывод формул, в соответствии с которыми линза преобразует предметную световую волну в волну, формирующую изображение предмета. В формулах учтем показатели преломления линзы и окружающей ее среды, радиусы кривизны сферических поверхностей линзы, толщину линзы.

На рис. 6.1 представлена двояковыпуклая линза с показателем преломления  $n_2$  и с радиусами кривизны  $r_1$  и  $r_2$  соответственно первой и второй поверхностей линзы. Предполагается, что по одну сторону линзы находится прозрачная (нерассеивающая) среда с показателем преломления  $n_1$ , а по другую сторону – прозрачная (нерассеивающая) среда с показателем преломления  $n_3$ . Мы ограничимся описанием распространения световых волн в параксиальной области линзы.

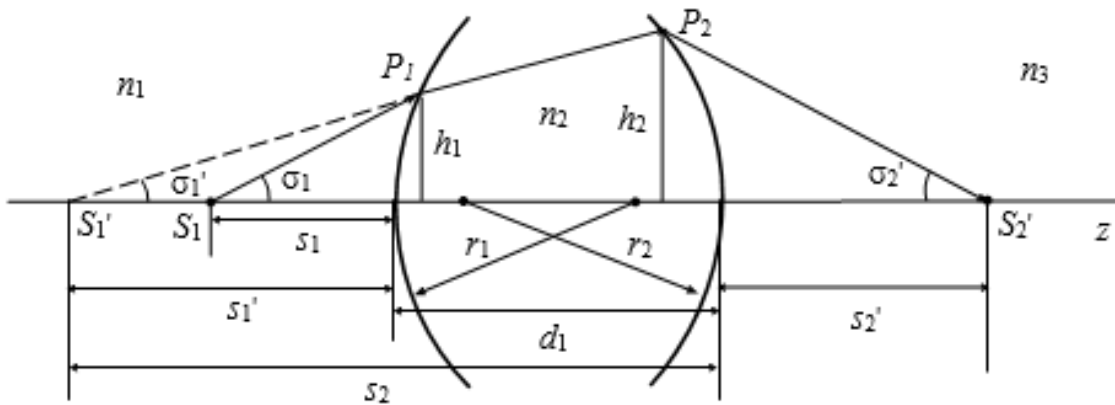


Рис. 6.1. Схема формирования изображения осевой точки  $S_1$  предмета линзой

Рассмотрим осевую точку предмета  $S_1$ , являющуюся источником сферической световой волны. Направим из нее два луча света: первый луч – вдоль оптической оси (он пройдет через линзу без преломления на ее поверхностях), второй – в произвольную точку  $P_1$  передней поверхности

линзы. Предположим, что второй луч, преломившись на передней (в точке  $P_1$ ) и на задней (в точке  $P_2$ ) поверхностях линзы, пересекает оптическую ось в точке  $S_2'$ . Точка  $S_2'$  является действительным изображением осевой точки  $S_1$  предмета. Расстояние от точки  $S_1$  до первой поверхности линзы обозначим  $s_1$ , расстояние от второй поверхности линзы до точки изображения  $S_1'$  обозначим  $s_2$ . Толщину линзы обозначим  $d_1$ .

Запишем инварианты Аббе для передней и задней поверхностей линзы

$$n_1 \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{r_1} \right) = n_2 \left( \pm \frac{1}{s_1'} + \frac{1}{r_1} \right), \quad (6.1)$$

$$n_2 \left( \mp \frac{1}{s_2} + \frac{1}{r_2} \right) = n_3 \left( \frac{1}{s_2'} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (6.2)$$

В выражениях (6.1) и (6.2) в знаках «плюс-минус» верхние знаки соответствуют расходящейся, а нижние – сходящейся световой волне, прошедшей переднюю поверхность линзы. Из выражений (6.1) и (6.2) формулы передней и задней поверхностей линзы представляются соответственно в виде

$$\frac{n_1}{s_1} \mp \frac{n_2}{s_1'} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}, \quad (6.3)$$

$$\pm \frac{n_2}{s_2} + \frac{n_3}{s_2'} = \frac{n_2 - n_3}{r_2}. \quad (6.4)$$

Для тонкой линзы  $d_1 = 0$ , поэтому расстояния  $s_1'$  и  $s_2$  равны. В этом случае, складывая правые и левые части выражений (6.3) и (6.4), получаем формулу тонкой линзы

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_3}{s_2'} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_3}{r_2}, \quad (6.5)$$

где  $\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_3}{r_2} = D$  – оптическая сила тонкой линзы.

Следствия из формулы (6.5).

1. При  $s_2' \rightarrow \infty$  расстояние  $s_1$  равно

$$s_1 = \frac{n_1}{\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_3}{r_2}} = f$$

и является передним фокусным расстоянием.

Аналогичным образом при  $s_1 \rightarrow \infty$  расстояние  $s_2'$ , равное

$$s_2' = \frac{n_2}{\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_3}{r_2}} = f',$$

является задним фокусным расстоянием.

2. Поделив в формуле (6.5) правую и левую части на оптическую силу  $D$ , получаем формулу отрезков

$$\frac{f}{s_1} + \frac{f'}{s_1'} = 1.$$

3. При  $n_1 = n_3$  переднее и заднее фокусные расстояния одинаковы  $f = f'$ .

4. При  $n_1 = n_3$  формула тонкой линзы записывается в виде

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f},$$

где  $f$  – фокусное расстояние тонкой линзы.

5. Оптическая сила  $D$  тонкой линзы равна

$$D = \frac{n_1}{f} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

6. Правило сложения оптических сил поверхностей тонкой линзы записывается в виде

$$D = D_1 + D_2,$$



где  $D$  – оптическая сила тонкой линзы,  $D_1$  – оптическая сила первой (передней) поверхности линзы,  $D_2$  – оптическая сила второй (задней) поверхности линзы.

7. При  $r_1=r_2=r$  линза представляет собой искривленную тонкую плоскопараллельную пластину, называемую мениском с равными радиусами.

Если пренебречь толщиной такого мениска, то его фокусное расстояние  $f \rightarrow \infty$ , а оптическая сила

$$D = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 0.$$

При учете толщины оптическая сила мениска с равными радиусами отлична от нуля и равна

$$D = \frac{n_1}{f} = \frac{(n_2 - n_1)(n_2 - n_3)d_1}{n_2 r^2},$$

где  $d_1$  – толщина мениска.

### Вывод формулы толстой линзы

Складывая (6.3) и (6.4), получаем формулу, учитывающую толщину  $d_1$  линзы

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_3}{s_2'} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_3}{r_2} + \frac{n_2(s_1' - s_2)}{s_1' s_2} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_3}{r_2} + \frac{n_2 d_1}{s_1' s_2}. \quad (6.6)$$

Рассмотрим частные случаи формул (6.3) и (6.4).

При  $s_1 \rightarrow \infty$  расстояние  $s_1'$  выражается через показатели преломления  $n_2, n_1$  и радиус первой поверхности  $r_1$  в виде

$$s_1' = \mp \frac{n_2 r_1}{n_2 - n_1}.$$

При  $s_2' \rightarrow \infty$  расстояние  $s_2$  равно  $s_2 = \pm \frac{n_2 r_2'}{n_2 - n_3}$ . Подставляя выражения для расстояний  $s_1'$  и  $s_2$  в (6.6), получаем формулу линзы с учетом ее толщины  $d_1$  в виде

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_3}{s_2'} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_3}{r_2} - \frac{(n_2 - n_1)(n_2 - n_3)d_1}{n_2 r_1 r_2}. \quad (6.7)$$

Следствия из формулы (6.7):

- 1) при  $d_1 = 0$  формула (6.7) переходит в формулу тонкой линзы;
- 2) оптическая сила  $D$  линзы зависит линейно от толщины  $d_1$  и отличается от оптической силы  $D_T$  тонкой линзы дополнительным слагаемым  $\Delta D$  (в квадратных скобках)

$$D = \underbrace{\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_3}{r_2}}_{D_T} - \left[ \frac{(n_2 - n_1)(n_2 - n_3)d_1}{n_2 r_1 r_2} \right];$$

- 3) при учете толщины  $d_1$  линзы фокусные расстояния  $f$  и  $f'$  изменяются на разные величины;
- 4) отношение слагаемого  $\Delta D$  к оптической силе  $D_T$  тонкой линзы равно при  $n_1 = n_3$

$$\frac{\Delta D}{D_T} = \frac{(n_2 - n_1)(n_2 - n_3)d_1}{n_2(r_2 n_2 - r_2 n_1 + r_1 n_2 - r_1 n_3)} = \frac{d_1}{(r_1 + r_2)} \left( 1 - \frac{n_1}{n_2} \right);$$

- 5) линза становится телескопической ( $D = 0$ ) при толщине

$$d_1 = \frac{n_2}{D_1} + \frac{n_2}{D_2} = f_1 + f_2,$$

где  $D_1, D_2, f_1, f_2$  – соответственно оптические силы и фокусные расстояния первой (передней) и второй (задней) поверхностей линзы.

## Оптическая система из двух тонких линз

Рассмотрим оптическую систему из двух тонких линз с фокусными расстояниями  $f_1$  и  $f_2$  (рис. 6.2), находящимися в однородной прозрачной среде на расстоянии  $l$  друг от друга.

Запишем формулы тонких линз

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1}, \quad (6.8)$$

$$-\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_2}. \quad (6.9)$$

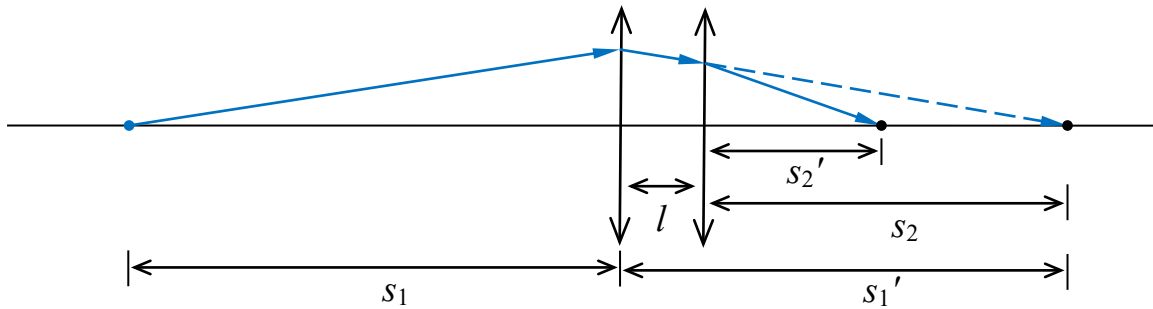


Рис. 6.2. Система из двух тонких линз, разнесенных на расстояние  $l$

Из суммы (6.8) и (6.9) следует, что

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2'} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{s_1' - s_2}{s_1' s_2} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{l}{s_1' s_2}, \quad (6.10)$$

так как расстояние

$$l = s_1' - s_2.$$

Учитывая, что при  $s_1 \rightarrow \infty$  величина  $\frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1}$ , а при  $s_2' \rightarrow \infty$  величина  $-\frac{1}{s_2} = \frac{1}{f_2}$ , получаем из (6.10) формулу для системы из двух тонких линз

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2}. \quad (6.11)$$

Следствия из формулы (6.11):

- 1) оптическая сила системы из двух тонких линз равна

$$D = D_1 + D_2 - l D_1 D_2;$$

2) правило сложения оптических сил тонких линз выполняется при  $l = 0$ , т. е. когда можно пренебречь расстоянием  $l$  между линзами;

3) система из двух тонких линз с противоположными оптическими силами  $D_1 = -D_2$  при учете расстояния между ними обладает положительной оптической силой

$$D = D_1 + D_2 - l D_1 D_2 = -l D_1 D_2 = l D_2^2;$$

- 4) система из двух тонких линз становится телескопической ( $D = 0$ ) при расстоянии между линзами

$$l = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} = f_1 + f_2.$$

Полученные формулы применимы и для поглощающих линз. Системы из двух поглощающих линз используются для получения требуемого распределения интенсивности по сечению светового пучка на заданном расстоянии от линз.

Примеры применения линз в оптических системах подробно рассматриваются в курсах «Теория оптических приборов» и «Прикладная оптика».

## 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ ДИФРАКЦИОННЫМИ ЛИНЗАМИ

### Теория зонной пластины Френеля

Зонной пластиной Френеля называется прозрачная пластина (пленка), на поверхности которой нанесены чередующиеся темные и светлые полосы или кольца (рис. 7.1, *а*, *б*).

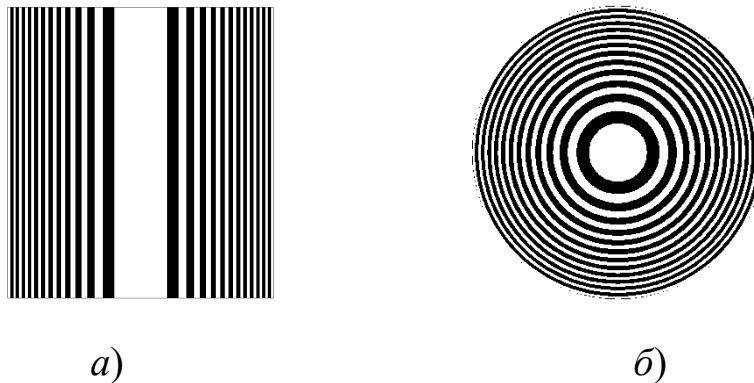


Рис. 7.1. Зонная пластина Френеля: *а*) для цилиндрической волны;  
*б*) для сферической волны

Рассмотрим подробнее зонную пластину Френеля для сферической волны. В центре этой зонной пластины (рис. 7.1, *б*) находится светлый (или темный) круг, называемый первой зоной Френеля. Окружающее его темное (или светлое) кольцо называется второй зоной Френеля. Следующее светлое (или темное) кольцо является третьей зоной и т. д. Если первая зона Френеля является светлой (темной), тогда все нечетные зоны – светлые (темные), а четные зоны – темные (светлые).

Количество  $m$  зон Френеля может быть найдено по формуле

$$m = \frac{2}{\lambda_o} (\sqrt{z_r^2 + r_m^2} + \sqrt{z_o^2 + r_m^2} - z_r - z_o), \quad (7.1)$$

где  $z_r, z_o$  – соответственно расчетные расстояния от зонной пластины до плоскостей предмета и изображения;  $r_m$  – радиус  $m$ -й зоны Френеля;  $\lambda_o$  – расчетная длина волны. При разложении по величинам малости  $r_m/z_r \ll 1$ ,  $r_m/z_o \ll 1$  получаем из (7.1)

$$m \approx \frac{r_m^2}{\lambda_o} \left( \frac{1}{z_r} + \frac{1}{z_o} \right), \quad (7.2)$$

Учитывая только первый порядок разложения (7.2), в параксиальной области зонной пластины радиусы  $r_m$  зон Френеля могут быть определены из формулы

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda_o z_r z_o}{z_r + z_o}}, \quad (7.3)$$

где  $m$  – номер зоны Френеля.

Используя формулу (7.3), получаем, что в параксиальной области ширина  $\Delta r_m$  зон Френеля с большими номерами ( $m \gg 10$ ) обратно пропорциональна квадратному корню из номера зоны  $\sqrt{m}$

$$\Delta r_m = r_m - r_{m-1} \approx \sqrt{\frac{\lambda_o z_r z_o}{z_r + z_o} (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})} \approx \frac{r_1}{2\sqrt{m}}, \quad (7.4)$$

где  $r_1$  – радиус первой зоны Френеля.

Из формулы (7.3) получаем, что в параксиальной области площади  $S$  зон Френеля одинаковы и равны

$$S = S_m - S_{m-1} = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 \approx \frac{\pi \lambda_o z_r z_o}{z_r + z_o}.$$

Характеристическая функция зонной пластины Френеля может быть представлена в виде

$$V = \sqrt{z_c^2 + r_m^2} + \sqrt{z_i^2 + r_m^2} - z_c - z_i - 0,5km\lambda_c, \quad (7.5)$$

где  $z_c$ ,  $z_i$  – соответственно расстояния от зонной пластины до плоскостей предмета и изображения при использовании зонной пластины;  $r_m$  – радиус  $m$ -й зоны Френеля;  $k$  – используемый порядок дифракции;  $\lambda_c$  – используемая длина волны.

Разлагая характеристическую функцию (7.5) по величинам малости  $r_m/z_c \ll 1$ ,  $r_m/z_i \ll 1$  и приравнивая нулю первый порядок разложения, получаем

$$\frac{1}{z_c} + \frac{1}{z_i} = \frac{1}{f_k}, \quad (7.6)$$

где  $f_k$  – фокусное расстояние зонной пластины Френеля в  $k$ -м порядке дифракции

$$f_k = \frac{\lambda_o z_r z_o}{k \lambda_c (z_r + z_o)}. \quad (7.7)$$

Полученные формулы (7.6) и (7.7) связывают между собой расчетные и реальные характеристики зонной пластины и подобны формулам тонкой собирающей и рассеивающей линз, так как порядок дифракции  $k$  может быть положительным и отрицательным. Поэтому зонная пластина обладает способностью одновременно фокусировать и рассеивать падающую световую волну в разные порядки дифракции, а также частично пропускать и отражать эту световую волну. Зонная пластина обладает множеством мнимых и действительных фокусов, фокусное расстояние  $f_k$  до которых может быть определено по формуле (7.7).

Таким образом, зонная пластина Френеля может быть использована для получения действительных и мнимых изображений подобно линзе. Это особенно важно для тех областей электромагнитного спектра, где из-за сильного поглощения практически невозможно использование рефракционных оптических элементов, например в дальней вакуумной ультрафиолетовой и мягкой рентгеновской областях спектра. Именно использование микроскопических зонных пластин Френеля в качестве линз позволило разработать первые рентгеновские микроскопы и получить увеличенные рентгеновские изображения микрообъектов.

Формулы коэффициентов поперечного и продольного увеличения зонной пластины Френеля в параксиальной области совпадают с формулами увеличения тонкой линзы:

$$\beta_{\text{попер}} = \frac{z_i}{z_c},$$

$$\beta_{\text{продол}} = \beta_{\text{попер}}^2 = \left( \frac{z_i}{z_c} \right)^2.$$

Из формул (7.3), (7.7) следует взаимосвязь между фокусным расстоянием  $f_k$ , радиусом первой зоны Френеля  $r_1$  и шириной  $\Delta r_m$  крайних зон Френеля

$$f_k = \frac{r_1^2}{k\lambda_c} = \frac{4m\Delta r_m^2}{k\lambda_c}. \quad (7.8)$$

Разрешение  $\delta r$  зонной пластины Френеля может быть определено из критерия Релея с учетом (7.8) и равно

$$\delta r = \frac{1,22\lambda_c f_k}{2r_m} \approx \frac{\lambda_c f_k}{2\sqrt{m\lambda_c f_m}} = \frac{\sqrt{\lambda_c f_m}}{2\sqrt{m}} = \frac{2\Delta r_m \sqrt{m}}{2\sqrt{mk}} = \frac{\Delta r_m}{\sqrt{k}}, \quad (7.9)$$

т. е. разрешение  $\delta r$  определяется шириной  $\Delta r_m$  минимальной крайней зоны Френеля и порядком  $k$ -дифракции.

Дифракционная эффективность амплитудной зонной пластины Френеля составляет:

- в первом порядке дифракции – 10,1 %;
- во втором порядке дифракции – 1,1 %;
- в третьем порядке дифракции – 0,6 %.

В нулевом порядке амплитудная зонная пластина Френеля имеет пропускание – 25 %.

### **Преобразование световой волны киноформной линзой**

Киноформная линза – дифракционный оптический элемент, имеющий микрорельефную поверхность и преобразовывающий подобно линзе па-



дающую световую волну. Например, киноформными линзами являются рельефная зонная пластина Френеля и зонная пластина Слюсарева (рис. 7.2) – дифракционный аналог линзы Френеля. Разработанный в 1969 г. в компании IBM киноформ представлял собой внеосевой дифракционный элемент, обладающий способностью направлять в один порядок практически все падающее на него монохроматическое излучение. Позже фокусирующие дифракционные оптические элементы (фокусаторы), в том числе фокусирующие световое излучение в указанных пространственных областях с заданными распределениями интенсивности, разрабатывались В. А. Сойфером с сотрудниками (Институт систем обработки изображений РАН, Самара).

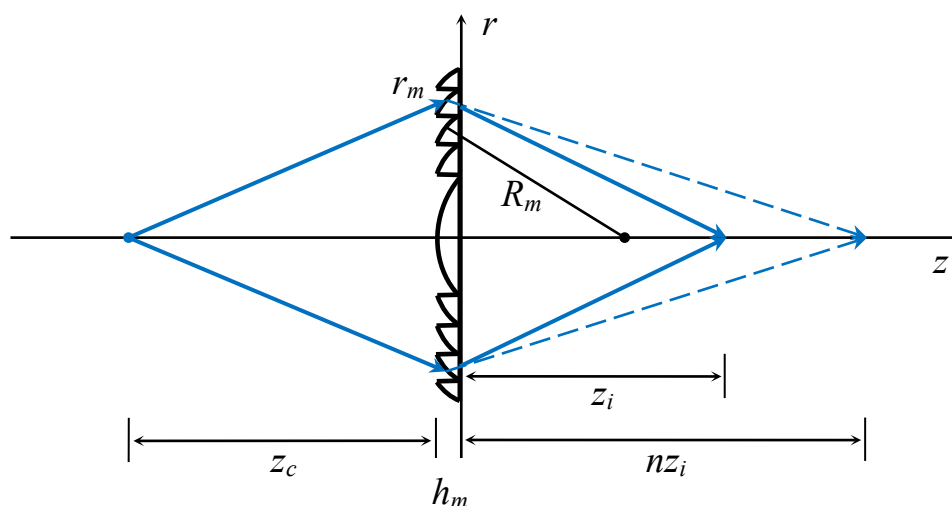


Рис. 7.2. Зонная пластина Слюсарева

В. П. Коронкевичем с сотрудниками (Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск) был создан фотопостроитель «Видеодиск», обеспечивший возможность создания киноформных линз диаметром до 300 мм. Были разработаны технологические процессы изготовления киноформных линз на основе стандартных операций фотолитографии. Разработка и производство подобных установок было освоено в Конструкторско-технологическом институте научного приборостроения (КТИ

НП СО РАН, Новосибирск). На рис. 7.3 представлен лазерный генератор изображений серии CLWS-300 производства КТИ НП СО РАН.

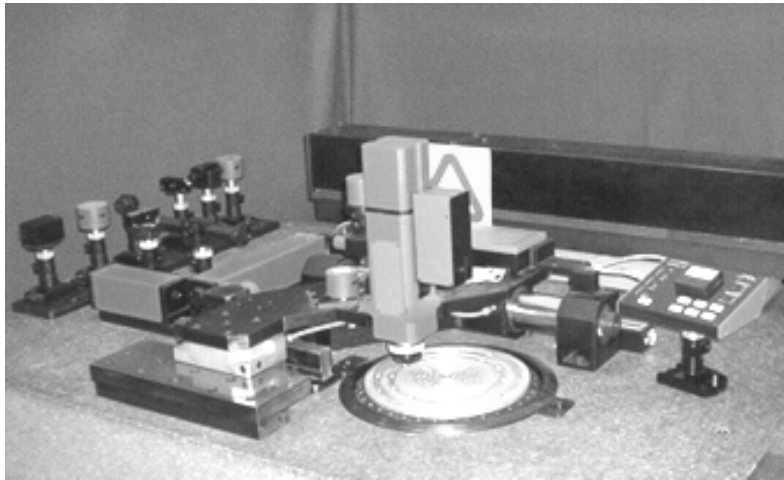


Рис. 7.3. Лазерный генератор изображений серии CLWS-300

В отличие от тонкой зонной пластины Френеля при расчете толщины  $z_m$  киноформной линзы, представленной на рис. 7.2, требуется учитывать форму рельефа поверхности в пределах каждой  $m$ -й зоны

$$z_m = h_m - r_m^2/R_m, \quad (7.10)$$

где  $R_m$  – радиус кривизны поверхности  $m$ -й зоны;  $h_m$  – наибольшая толщина  $m$ -й зоны. Кроме этого, необходимо учитывать показатель преломления  $n$  материала киноформной линзы.

Характеристическая функция киноформной линзы (находящейся в воздухе) представляется в виде

$$V = \sqrt{(z_c - z_m)^2 + r_m^2} + n(\sqrt{(nz_i + z_m)^2 + r_m^2} - \sqrt{n^2 z_i^2 + r_m^2}) + \sqrt{z_i^2 + r_m^2} - (z_c + (n-1)nz_i + z_i) - mp_m \lambda_c, \quad (7.11)$$

где  $z_c$ ,  $z_i$  – соответственно расстояния от поверхностей киноформной линзы до плоскости предмета и до плоскости изображения;  $r_m$ ,  $z_m$  – соответственно радиус и толщина  $m$ -й зоны киноформной линзы;  $n$  – показатель

преломления материала киноформной линзы;  $\lambda_c$  – используемая рабочая длина волны;  $p_m$  – количество длин волн.

Количество  $m$  зон в (7.11) может быть вычислено из формулы

$$m = \frac{1}{p_m \lambda_o} (\sqrt{(z_r - z_m)^2 + r_m^2} + n(\sqrt{(nz_o + z_m)^2 + r_m^2} - \sqrt{n^2 z_o^2 + r_m^2}) + \sqrt{z_o^2 + r_m^2} - (z_r + (n-1)nz_o + z_o)), \quad (7.12)$$

где  $z_r, z_o$  – соответственно расчетные расстояния от киноформной линзы до плоскостей предмета и изображения;  $r_m, z_m$  – соответственно радиус и толщина  $m$ -й зоны киноформной линзы;  $\lambda_o$  – расчетная длина волны;  $p_m$  – заданное количество длин волн.

Из первого порядка разложения характеристической функции (7.11) с учетом толщины (7.10) в параксиальной области киноформной линзы радиус  $m$ -й зоны может быть найден из формулы

$$r_m \approx \sqrt{\frac{2mp_m \lambda_c}{\frac{1}{z_c} + \frac{1}{z_i} - \frac{n-1}{R_m}}}. \quad (7.13)$$

Получаем, что радиусы зон киноформной линзы отличаются от радиусов зон Френеля. При  $p_m = 0,5$  и  $R_m \rightarrow \infty$  выражение (7.10) совпадает с выражением (7.3) радиуса  $m$ -й зоны пластины Френеля.

Таким образом, в отличие от зон Френеля, радиус  $m$ -й зоны киноформной линзы зависит от формы рельефа поверхности зон и показателя преломления. Значения максимальных толщин  $h_m$  могут быть выбраны из условия максимальной или заданной дифракционной эффективности киноформной линзы.

Из формулы (7.13) получаем, что в параксиальной области ширина зон  $\Delta r_m$  киноформной линзы с большими номерами ( $m \gg 10$ ) обратно пропорциональна квадратному корню из номера зоны  $m$

$$\Delta r_m = r_m - r_{m-1} \approx \frac{r_1}{2\sqrt{m}}. \quad (7.14)$$

Разлагая характеристическую функцию (7.8) с учетом (7.9) по величинам малости ( $r_m/z_j \ll 1$ ,  $z_m/z_j \ll 1$ , где  $j = c, i, r, o$ ) и приравнявая нулю первый порядок разложения, получаем формулу киноформной линзы

$$\frac{1}{z_c} + \frac{1}{z_i} = \frac{1}{f_m} = D_m, \quad (7.15)$$

где  $f_m$ ,  $D_m$  – соответственно фокусное расстояние и оптическая сила киноформной линзы

$$D_m = \frac{1}{f_m} = \frac{n-1}{R_m} \left(1 - \frac{\lambda_c}{\lambda_o}\right) + \frac{\lambda_c}{\lambda_o} \left(\frac{1}{z_r} + \frac{1}{z_o}\right). \quad (7.16)$$

Из формул (7.6) и (7.15) следует, что преобразования световой волны (в каждом порядке дифракции) зонной пластиной Френеля и киноформной линзой совпадают с преобразованиями тонкой линзы.

При совпадении используемой  $\lambda_c$  и расчетной  $\lambda_o$  длин световой волны фокусное расстояние  $f_m$  киноформной линзы совпадает с расчетным расстоянием

$$f_m = \frac{\lambda_o z_r z_o}{\lambda_c (z_r + z_o)}.$$

Формулы коэффициентов поперечного и продольного увеличения киноформной линзы в параксиальной области совпадают с формулами тонкой линзы.

Дифракционная эффективность киноформной линзы может достигать ста процентов. Как правило, киноформные линзы рассчитываются для первого порядка дифракции. Разрешение киноформной линзы в первом порядке дифракции может быть определено из (7.9) и примерно равно ширине  $\Delta r_m$  минимальной крайней зоны.

Следует отметить, что киноформные линзы могут быть как фокусирующими, так и рассеивающими световую волну. Если на рельефную поверхность киноформной линзы нанести отражающий тонкий слой (например, алюминия), то рельефная поверхность станет рассеивать или фокусировать световую волну подобно сферическому зеркалу. В настоящее время разрабатываются различные типы фокусирующих и рассеивающих киноформных линз, которые, несомненно, найдут широкое практическое применение.

## **8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ ГОЛОГРАММНОЙ ЛИНЗОЙ**

Голография, открытая Д. Габором в 1948 г., превратилась за время своего развития в обширный раздел физики волн, в котором исследуются закономерности способов формирования интерференционной картины заданных волн, с последующим изучением характеристик воспроизведенных волн в результате дифракции на этой интерференционной картине. Голограмма представляет собой трехмерную или двумерную интерференционную картину, сформированную соответственно в объеме или в тонком слое среды в виде локальных модуляций коэффициента поглощения, показателя преломления или толщины слоя. По способам изготовления голограммы подразделяются на интерференционные и синтезированные. Интерференционные голограммы изготавливаются путем регистрации интерференционной картины когерентных световых волн лазерного излучения в объеме или тонком слое светочувствительного материала. Интерференционная структура синтезированных голограмм рассчитывается на компьютере и формируется в объеме или на поверхности материала на специализированном прецизионном оборудовании.

Исторически первые интерференционные голограммы регистрировались на фотопластинках, поэтому экспонированную и проявленную фотопластинку также называют голограммой. Такая голограмма имеет только два порядка дифракции (положительный и отрицательный). Светочувствительный материал принято называть голографической средой.

Известно, что методы расчета голограммных оптических элементов, выполняющих функции оптических внеосевых и осевых линз для когерентного света, основаны на волновом представлении света. С использованием методов, подобных методу характеристической функции, были детально исследованы свойства осевого голограммного элемента (рис. 8.1) – голограммной линзы – и показано, что она обладает свойством формировать изображение подобно тонкой рефракционной линзе.



Рис. 8.1. Голограммная линза

Схема записи такой голограммной линзы представлена на рис. 8.2, а схема использования – на рис. 8.3.

Характеристическая функция голограммной линзы может быть записана через зарегистрированное пространственное распределение количества периодов интерференционных полос  $m(x, y)$  в виде

$$V(x, y) = l_c - d_c + (l_i - d_i) - km(x, y)\lambda_c, \quad (8.1)$$

где  $l_c, l_i$  – соответственно расстояния от произвольной точки  $M(x, y)$  вблизи центра голограммной линзы до рассматриваемой точки  $P_c(x_c, y_c, z_c)$  предмета и до сопряженной точки  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  изображения;  $d_c, d_i$  – соответственно расстояния от центра  $O$  голограммной линзы до выбранной точки  $P_c(x_c, y_c, z_c)$  предмета и до сопряженной точки  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  изображения;  $k$  – порядок дифракции;  $\lambda_c$  – длина монохроматической световой волны при использовании линзы.

Пространственное распределение количества интерференционных полос  $m(x, y)$  выражается через разность оптических путей от положений источников при записи голограммного элемента как

$$m(x, y) = \frac{1}{\lambda_o} (l_r - z_r + l_o - z_o). \quad (8.2)$$

где  $l_r, l_o$  – соответственно расстояния от той же произвольной точки  $M(x, y)$  голограммной линзы вблизи центра до точечных источников  $P_r(0, 0, z_r)$ ;

$P_o(0, 0, z_o)$  опорной и объектной волн;  $z_r, z_o$  – соответственно расстояния от центра  $O$  голограммной линзы до источников  $P_r(0, 0, z_r)$ ,  $P_o(0, 0, z_o)$  опорной и объектной волн;  $\lambda_o$  – длина волны лазера при записи.

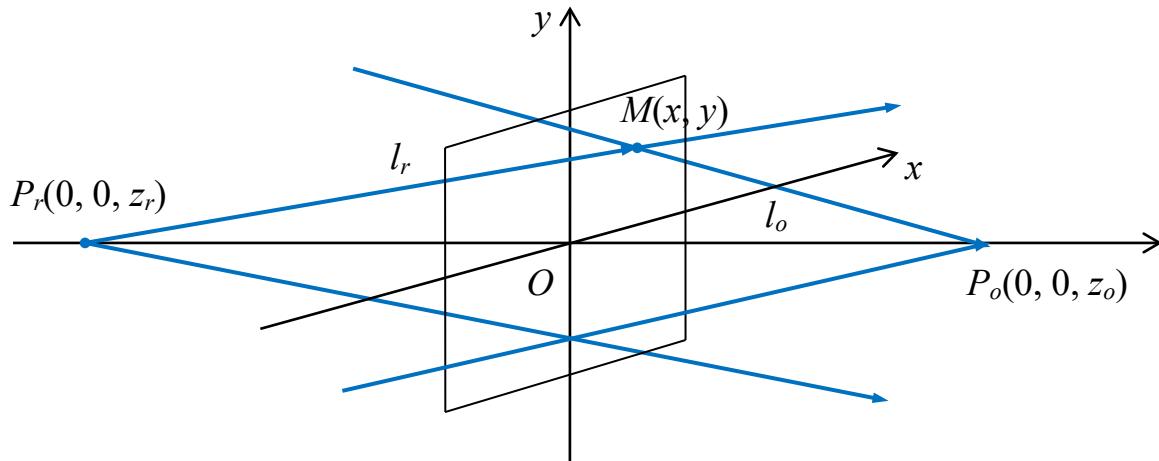


Рис. 8.2. Схема записи голограммной линзы

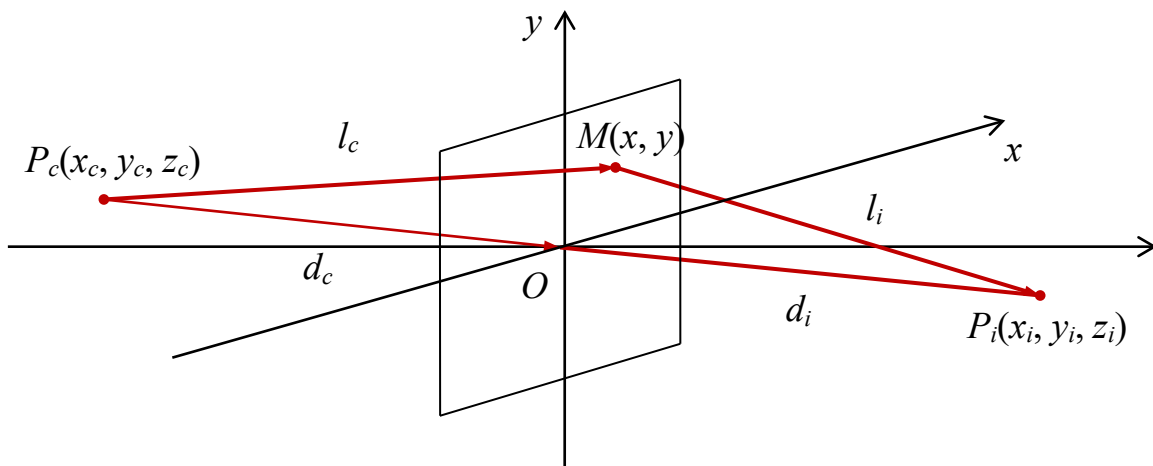


Рис. 8.3. Схема использования голограммной линзы

Рассмотрим случай, когда поперечные размеры (диаметр) голограммной линзы больше или сопоставимы с размерами предмета и изображения, но намного меньше расстояний до предмета и изображения ( $x_c/z_c, y_c/z_c,$

$x_i/z_i, y_i/z_i \leq x/z_c, y/z_c, x/z_i, y/z_i \ll 1$ ). В этом случае расстояния  $d_c, l_c$  (см. рис. 8.3) могут быть разложены в ряд по величинам малости  $x_c/z_c, y_c/z_c, x/z_c, y/z_c$ . Разлагая аналогичным образом расстояния  $d_i, l_i, l_r, l_o$ , указанные на рис. 8.2 и 8.3, и подставляя полученные выражения в (8.1) и (8.2), получаем в первых порядках разложения характеристическую функцию  $V(x, y)$  голограммной линзы в виде

$$V(x, y) = -B_{10}x - B_{01}y + \frac{F_{20}x^2}{2} + \frac{F_{02}y^2}{2} + \dots,$$

где коэффициенты  $B_{10}, B_{01}$

$$B_{10} = \frac{x_c}{z_c} - \frac{x_i}{z_i}, \quad B_{01} = \frac{y_c}{z_c} - \frac{y_i}{z_i},$$

коэффициенты  $F_{20}, F_{02}$

$$F_{01} = F_{02} = \frac{1}{z_c} + \frac{1}{z_i} - \frac{k\lambda_c}{\lambda_o} \left( \frac{1}{z_r} + \frac{1}{z_o} \right).$$

Из условия равенства нулю коэффициентов  $B_{10}, B_{01}$  получаются выражения, связывающие соответствующие координаты точек предмета и изображения в параксиальной области голограммной линзы

$$x_i = \frac{z_i}{z_c} x_c, \tag{8.3}$$

$$y_i = \frac{z_i}{z_c} y_c.$$

А из условия равенства нулю коэффициента  $F_{20}$  следует, что длина волны  $\lambda_o$  при записи, длина волны  $\lambda_c$  при восстановлении и положения  $z_r, z_o, z_c, z_i$  источников опорной и объектной волн (на оптической оси) на стадии записи и использования связаны соотношением, называемым формулой тонкой голограммы:



$$\frac{1}{z_c} + \frac{1}{z_i} = \frac{k\lambda_c}{\lambda_o} \left( \frac{1}{z_r} + \frac{1}{z_o} \right) = \frac{1}{f} = D, \quad (8.4)$$

где  $k$  – порядок дифракции;  $D, f$  – соответственно оптическая сила и фокусное расстояние голограммной линзы.

Фокусное расстояние  $f$  голограммной линзы равно

$$f = \frac{\lambda_o}{k\lambda_c} \left( \frac{z_o z_r}{z_o + z_r} \right). \quad (8.5)$$

Из формулы (8.5) следуют известные отличительные особенности фокусного расстояния голограммной линзы:

- обратная пропорциональность рабочей длине волны  $\lambda_c$ ;
- обратная пропорциональность порядку дифракции  $k$ ;
- прямая пропорциональность длине волны записи  $\lambda_o$ ;
- зависимость от расстояний  $z_r, z_o$  до точечных источников опорной и объектной волн, подобная формуле тонкой линзы;
- наличие фокусного расстояния, равного бесконечности (при  $k = 0$ ) и соответствующего нулевому порядку дифракции.

Наличие положительных и отрицательных порядков дифракции указывает, что голограммная линза обладает одновременно свойствами положительной и отрицательной линз, причем передний и задний фокусы положительной и отрицательной линз, соответствующих одинаковому по модулю порядку дифракции, пространственно совпадают. При выполнении условия (8.4) голограммная линза формирует в каждом порядке дифракции изображение подобно тонкой рефракционной линзе. Эта аналогия позволяет рассчитывать голограммные линзы с помощью компьютерных программ расчета оптических систем.

Но в отличие от рефракционной линзы изображение, сформированное голограммной линзой, обладает рядом отличительных особенностей, например:

- изображение формируется во всех положительных и отрицательных порядках дифракции одновременно;

- контраст изображения в каждом порядке дифракции снижается из-за наложения на него расплывчатых изображений других порядков;
- изображение имеет фон, образуемый нулевым порядком дифракции и рассеянными волнами, что также снижает контраст изображения;
- изображение имеет пятнистую структуру – спеклы.

Указанные особенности являются недостатками голограммной линзы. Из формулы (8.4) следует зависимость положения точки изображения (расстояния  $z_i$ ) от рабочей длины волны  $\lambda_c$ , приводящая к сильной хроматической аберрации положения.

Коэффициенты линейного (поперечного) увеличения  $\beta_x$  и  $\beta_y$  голограммной линзы соответственно в сагиттальной и меридиональной плоскостях равны

$$\beta_x = \frac{x_{1i} - x_{2i}}{x_{1c} - x_{2c}} = \frac{z_i}{z_c},$$

$$\beta_y = \frac{y_{1i} - y_{2i}}{y_{1c} - y_{2c}} = \frac{z_i}{z_c},$$

где  $(x_{1c}, y_{1c}), (x_{2c}, y_{2c})$  – координаты двух близких точек в плоскости предмета;  $(x_{1i}, y_{1i}), (x_{2i}, y_{2i})$  – координаты сопряженных (к точкам предмета) точек в плоскости изображения.

Коэффициент продольного увеличения  $\beta_z$  голограммной линзы равен

$$\beta_z = \frac{z_{1i} - z_{2i}}{z_{1c} - z_{2c}} = \frac{z_i^2}{z_c^2},$$

где  $z_{1c}, z_{2c}$  – координаты вдоль оптической оси двух точек предмета, удаленных на разное расстояние от центра голограммной линзы;  $z_{1i}, z_{2i}$  – координаты вдоль оптической оси сопряженных точек изображения.

Таким образом, формулы коэффициентов продольного и поперечного увеличения голограммной линзы совпадают с соответствующими коэффициентами увеличения тонкой рефракционной линзы. Но зависимость от

рабочей длины волны  $\lambda_c$  расстояния  $z_i$  от центра голограммной линзы до изображения является причиной возникновения хроматических aberrаций положения и увеличения.

Следует отметить, что представленные формулы для расчета изображающих свойств и характеристик голограммной линзы справедливы и для цилиндрической голограммной линзы, регистрируемой опорной и объектной цилиндрическими волнами.

## 9. ХРОМАТИЧЕСКИЕ АБЕРРАЦИИ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ, ВНОСИМЫЕ ЛИНЗАМИ

Рассмотрим хроматические aberrации (искажения) в световой волне, прошедшей рефракционную линзу (оптическую систему) и формирующей изображение предмета. Причиной возникновения хроматических aberrаций в прошедшей линзу световой волне является зависимость показателя преломления  $n$  линзы от длины волны света.

Для находящейся в воздухе собирающей тонкой линзы фокусное расстояние  $f$  равно

$$f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_1 + r_2)},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы кривизны поверхностей линзы;  $n$  – показатель преломления линзы. Так как показатель преломления  $n$  линзы зависит от длины волны света, то при изменении на величину  $\Delta\lambda$  длины волны света имеет место изменение фокусного расстояния  $f$  линзы на величину

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Delta \lambda = - \frac{f \frac{\partial n}{\partial \lambda}}{n-1} \Delta \lambda. \quad (9.1)$$

Это изменение фокусного расстояния линзы приводит к смещению  $\Delta s'$  положения плоскости изображения на величину

$$\Delta s' = \frac{s'^2}{f^2} \Delta f. \quad (9.2)$$

Смещение  $\Delta s'$  положения точки изображения вдоль оптической оси при изменении длины волны света называется хроматической aberrацией положения.

Формула (9.2) получается из формулы отрезков

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (9.3)$$

при подстановке вместо фокусного расстояния  $f$  величины  $f + \Delta f$  и вместо  $s'$  величины  $s' + \Delta s'$  (при этом должны выполняться условия  $\Delta s' \ll s'$ ,  $\Delta f \ll f$ ). Расстояние  $s$  не зависит от длины волны света  $s = \text{const}$ .

Радиус получившегося круглого пятна (поперечная хроматическая aberrация осевой точки изображения) равен

$$\Delta r = \frac{y}{s'} \Delta s' = \frac{ys'}{f^2} \Delta f,$$

где  $y$  – координата точки на линзе.

Наряду со смещением  $\Delta s'$  изображения точки вдоль оптической оси имеет место и смещение  $\Delta y_o'$  точки изображения поперек оптической оси (хроматическая aberrация увеличения), как показано на рис. 9.1.

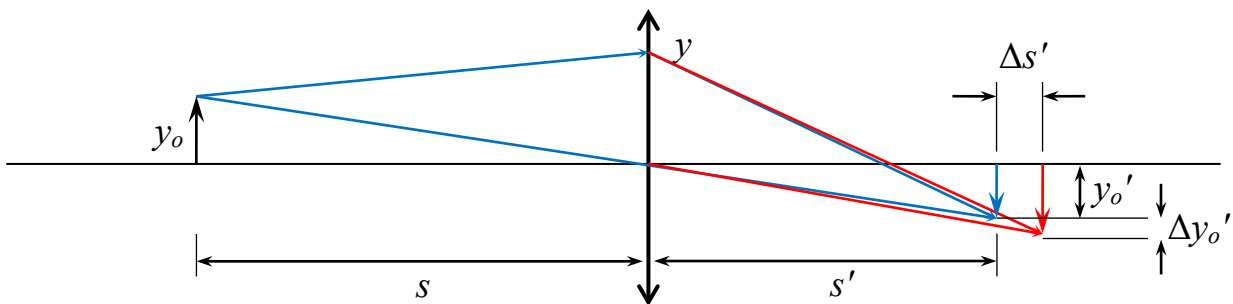


Рис. 9.1. Хроматическая aberrация положения  $\Delta s'$  и увеличения  $\Delta y_o'$  тонкой линзы

Величина хроматической aberrации увеличения равна

$$\Delta y_o' = \frac{y_o}{s'} \Delta s' = \frac{y_o s'}{f^2} \Delta f. \quad (9.4)$$

Рассмотрим коэффициент поперечного увеличения

$$\beta = \frac{y_o'}{y}.$$

При изменении длины волны света на величину  $\Delta\lambda$  коэффициент поперечного увеличения  $\beta$  изменяется на величину

$$\Delta\beta = \frac{\Delta y_o'}{y} = \frac{y_o'}{y_o s'} \Delta s' = \frac{\Delta s'}{s'} = \frac{s'}{f^2} \Delta f. \quad (9.5)$$

Таким образом, величины хроматических aberrаций положения и увеличения зависят от изменения  $\Delta f$  фокусного расстояния линзы. Формулы (9.1)–(9.5) применимы и для оптических систем из тонких линз.

Если рассчитать линзу, у которой фокусное расстояние на двух разных длинах волн одинаково, то хроматические aberrации будут исправлены на этих длинах волн  $\Delta f = 0$ . Такая линза называется ахроматической.

Условия ахроматизации линзы могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial D}{\partial \lambda} = 0, \quad (9.6)$$

где  $D$  – оптическая сила линзы.

В качестве примера рассмотрим ахроматизацию тонкой линзы (толщина линзы  $d = 0$ ), тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = - \left( \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)(n-1)^2} \right) \frac{\partial n}{\partial \lambda} = 0.$$

Для тонкой линзы получаем, что ахроматизация линзы могла бы иметь место, если бы показатель преломления линзы не изменялся от длины волны  $\frac{\partial n}{\partial \lambda} = 0$ . Но так как для известных стекол  $\frac{\partial n}{\partial \lambda} \neq 0$ , получаем, что тонкая линза обладает хроматическими aberrациями положения и увеличения из-за зависимости показателя преломления от длины волны света. Если в будущем будут созданы оптические материалы с дисперсией показателя преломления, близкой к нулю в рабочем спектральном диапазоне, то это позволит изготавливать тонкие линзы без хроматических aberrаций.

Рассмотрим толстую менисковую линзу, у которой оптическая сила  $D$  при толщине линзы  $d \ll r_1, r_2$  равна

$$D = \frac{(n-1)(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \left( 1 + \frac{(n-1)d}{n(r_1 - r_2)} \right). \quad (9.7)$$

Записывая условие ахроматизма (9.6) для (9.7), получаем

$$\frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \frac{\partial n}{\partial \lambda} + \frac{d}{r_1 r_2} \frac{\partial n}{\partial \lambda} - \frac{d}{n^2 r_1 r_2} \frac{\partial n}{\partial \lambda} = 0,$$

или

$$-\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} + \frac{d}{r_1 r_2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = 0. \quad (9.8)$$

При заданных радиусах кривизны линзы  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_1$  больше  $r_2$ ) из (9.8) толщина  $d$  ахроматической линзы равна

$$d = \frac{n^2(r_1 - r_2)}{(n^2 - 1)}. \quad (9.9)$$

Таким образом, существует менисковая линза, называемая мениском Максута, с исправленной хроматической аберрацией. Толщина этой линзы задается выражением (9.9). Подставляя (9.9) в (9.7), получаем фокусное расстояние  $f$  мениска Максута, равное

$$f = \frac{(n-1)r_1 r_2}{(n+1)(r_1 - r_2)}. \quad (9.10)$$

### **Ахроматизация двухлинзовой оптической системы**

Оптическая сила  $D$  находящейся в воздухе системы из двух тонких линз может быть представлена в виде

$$D = D_1 + D_2 - l D_1 D_2, \quad (9.11)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  – оптические силы тонких линз;  $l$  – расстояние между линзами. Формула (9.11) получается при сложении формул отрезков (9.3) двух тонких линз, при этом расстояние  $l$  между линзами равно сумме длин заднего отрезка  $s_1'$  первой линзы и переднего отрезка  $s_2$  второй линзы. Также предполагается, что длина переднего отрезка  $s_1 \gg s_1'$  и длина заднего отрезка  $s_2' \gg s_2$ .

Рассмотрим ахроматизацию двух склеенных линз ( $l = 0$ ), изготовленных из разных сортов стекол. Из условия ахроматизации (9.6) для двух линз получаем

$$\frac{\partial D_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial D_2}{\partial \lambda} = \frac{D_1}{(n_1 - 1)} \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} + \frac{D_2}{(n_2 - 1)} \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} = 0, \quad (9.12)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – показатели преломления тонких линз. Так как показатели преломления  $n_1$  и  $n_2$  линз больше единицы, а производные показателей преломления  $n_1$  и  $n_2$  по длине волны  $\lambda$  отрицательные, получаем, что оптические силы  $D_1$  и  $D_2$  склеенных линз имеют противоположные знаки

$$D_2 = - \frac{D_1(n_2 - 1)}{(n_1 - 1)} \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} / \frac{\partial n_2}{\partial \lambda}. \quad (9.13)$$

Таким образом, компенсация хроматической aberrации первого порядка имеет место для склеенных положительной и отрицательной линз, с разными показателями преломления, с разными дисперсиями показателей преломления линз. Склеенную ахроматическую линзу можно представить в виде двух склеенных киноформных (дифракционных) линз. Равенство (9.13) должно выполняться для киноформной (дифракционной) линзы локально (в каждой зоне).

Рассмотрим ахроматизацию разнесенных на расстояние  $l$  двух линз, изготовленных из одного и того же стекла. Из условия (9.6) ахроматизации этих двух линз получаем



$$\begin{aligned} \frac{\partial D_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial D_2}{\partial \lambda} - l \left( D_2 \frac{\partial D_1}{\partial \lambda} + D_1 \frac{\partial D_2}{\partial \lambda} \right) &= \left( \frac{D_1}{(n-1)} + \frac{D_2}{(n-1)} \right) \frac{\partial n}{\partial \lambda} - \\ - l \left( \frac{D_1 D_2}{(n-1)} + \frac{D_1 D_2}{(n-1)} \right) \frac{\partial n}{\partial \lambda} &= 0, \end{aligned} \quad (9.14)$$

где  $n$  – показатель преломления тонких линз;  $D_1$  и  $D_2$  – оптические силы тонких линз.

Из условия (9.6) можно получить для двух разнесенных на расстояние  $l$  дифракционных линз (зонной пластины Френеля, киноформной линзы, голограммной линзы)

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_1}{\partial \lambda_c} + \frac{\partial D_2}{\partial \lambda_c} - l \left( D_2 \frac{\partial D_1}{\partial \lambda_c} + D_1 \frac{\partial D_2}{\partial \lambda_c} \right) &= \frac{D_1}{\lambda_c} + \frac{D_2}{\lambda_c} - \\ - l \left( \frac{D_1 D_2}{\lambda_c} + \frac{D_1 D_2}{\lambda_c} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (9.15)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  – оптические силы дифракционных линз на длине волны  $\lambda_c$ .

Выполняя сокращения в (9.14) и (9.15), получаем, что ахроматизация двух линз, как рефракционных, так и дифракционных, возможна при расстоянии  $l$  между линзами, равном

$$l = \frac{1}{2D_1} + \frac{1}{2D_2} = \frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{2}, \quad (9.16)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  – фокусные расстояния линз.

При выполнении ахроматизации двух разнесенных голограммных (дифракционных) линз требуется выполнение дополнительного условия для каждой линзы – условия выбора оптимальной длины волны  $\lambda_o$  записи

$$\lambda_o = \frac{k\lambda_c}{m_r} \sqrt{\frac{(\beta_o \pm 1)^3}{3(\beta_o^3 \pm 1)}},$$

где  $k$  – порядок дифракции;  $m_r$  – коэффициент масштабирования линзы;  $\lambda_c$  – длина волны света при использовании линзы;  $\beta_o$  – коэффициент увеличения на длине волны  $\lambda_o$  записи (в схеме записи). В настоящее время интенсивно выполняются теоретические и практические работы по ахроматизации дифракционных и голограммных линз.

После устранения хроматизма положения и увеличения для двух длин волн между этими точками наблюдается остаточный хроматизм, что придает изображению незначительную остаточную радужную окраску по краям.

## **10. МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ АБЕРРАЦИИ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ, ВНОСИМЫЕ ЛИНЗАМИ**

Аберрация оптического элемента (сферической поверхности) – это некоторое искажение в изображении предмета, сформированном световой волной, прошедшей через оптический элемент или отраженной от оптического элемента. Волновая аберрация – это отличие фронта световой волны, формирующей реальное изображение, от фронта световой волны, формирующей идеальное изображение.

В зависимости от ширины рабочего спектрального диапазона оптического элемента аберрации подразделяют на хроматические и монохроматические. Монохроматические аберрации – это аберрации на одной рабочей длине волны, например на длине волны лазерного источника.

Рассмотрим монохроматические аберрации третьего порядка.

### **Осевая сферическая аберрация**

Сферическая аберрация линзы – это искаженное изображение осевой точки предмета в виде кружка (в плоскости изображения). Световая волна, например, отраженная или преломленная параксиальной областью сферических поверхностей элементов, формирует стигматическое изображение осевой точки предмета в гауссовой плоскости изображения.

Сферическая аберрация возникает из-за того, что узкие пучки света, падающие на сферическую отражающую или преломляющую сферическую поверхность в непараксиальной области, фокусируются в разные точки вдоль оптической оси этих поверхностей. На рисунке 10.1 на примере линзы показано образование сферической аберрации из-за преломления световой волны на поверхностях линзы.

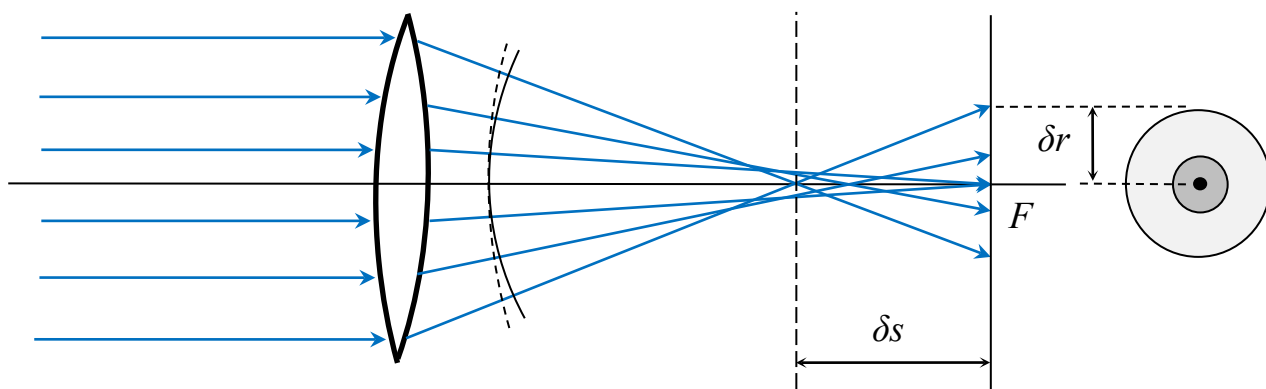


Рис. 10.1. Формирование сферической aberrации линзы

В гауссовой плоскости изображения  $F$  образуется круглое пятно рассеяния этих пучков света вместо идеальной точки. При количественном описании сферической aberrации указывают следующие величины: продольная величина сферической aberrации  $\delta s$ , поперечная величина сферической aberrации  $\delta r$ , также сферическая aberrация в волновом виде как разница между реальным волновым фронтом (показан на рис. 10.1 сплошной линией) и сферическим волновым фронтом идеальной точки изображения в гауссовой плоскости (сферический фронт показан на рис. 10.1 пунктирной линией). Эта разница вдоль радиуса сферического фронта и представляет собой сферическую aberrацию в волновом виде, указываемую, как правило, в длинах световой волны.

Отметим, что в рабочих схемах рассмотренных выше асферических отражающих поверхностей и предложенных Декартом рефракционных линз сферическая aberrация отсутствует в изображении осевой точки предмета. Если же схема использования оптических элементов с асферическими поверхностями отличается от рабочей рассчитанной схемы, то сферическая aberrация имеет место (рис. 10.2).

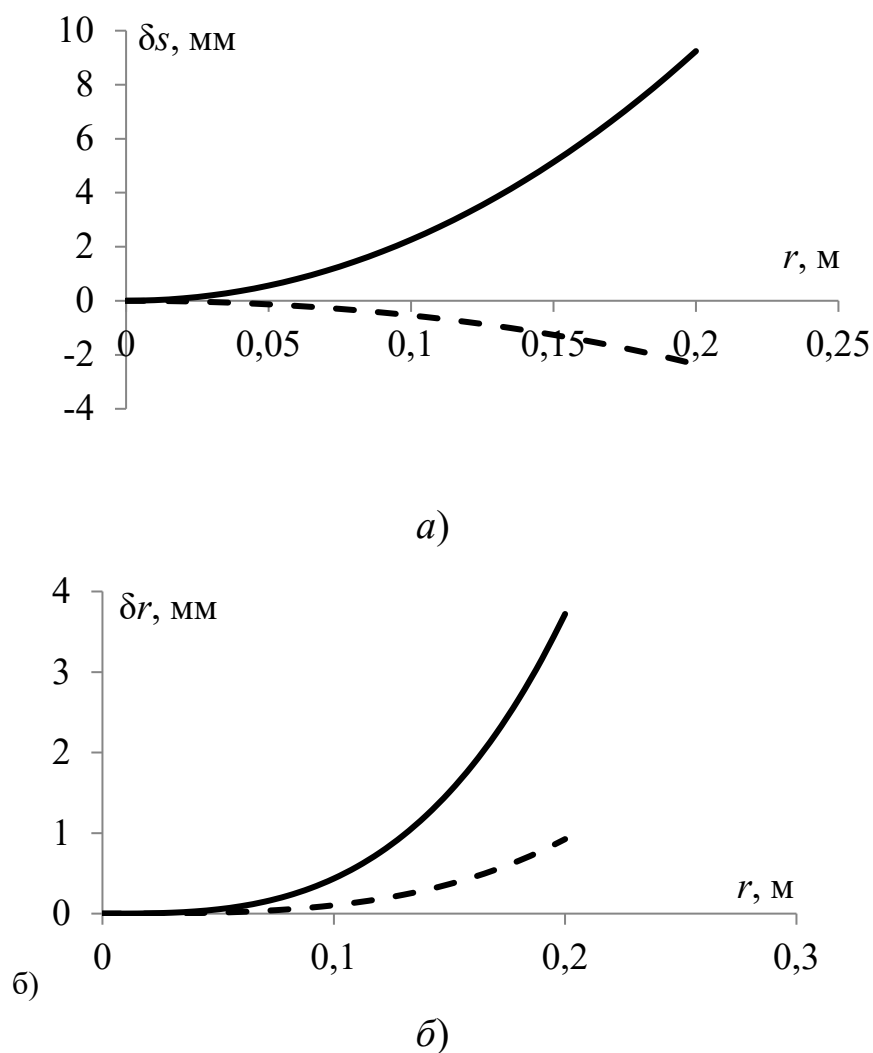


Рис. 10.2. Графики зависимости сферической aberrации сферического (сплошная линия) и параболического (пунктирная линия) зеркал от радиальной координаты: а) величина продольной сферической aberrации; б) радиус поперечной сферической aberrации. Зеркала имеют одинаковые фокусные расстояния 0,5 м и одинаковый световой диаметр 0,4 м. Осевая точка предмета удалена на расстояние 10 м

### Полевая aberrация «кома»

Аберрация «кома» – это искаженное изображение внеосевой точки предмета в виде конуса с круглым основанием (в гауссовой плоскости изображения), причем острие конуса направлено в сторону осевой точки изображения, как показано на рис. 10.3. Аберрация «кома» представляет собой сферическую aberrацию изображения внеосевых точек предмета, незначи-

тельно удаленных от оптической оси. Кома возникает из-за того, что узкие пучки света, падающие на сферическую отражающую или преломляющую сферическую поверхность в непараксиальной области, фокусируются в разные точки пространства вне гауссовой плоскости изображения. Причем по мере удаления точек падения пучков (кольцевых зон) на поверхности от оптической оси точки фокусировки удаляются как от оптической оси, так и от гауссовой плоскости изображения. Поэтому в гауссовой плоскости изображение внеосевой точки предмента выглядит в виде кометы, что и явилось причиной названия aberrации термином «кома» (рис. 10.4).

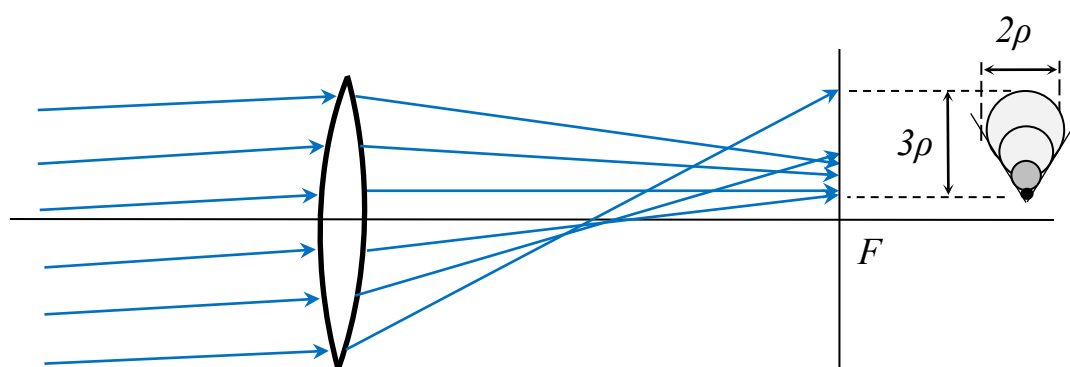


Рис. 10.3. Формирование aberrации «кома» линзы

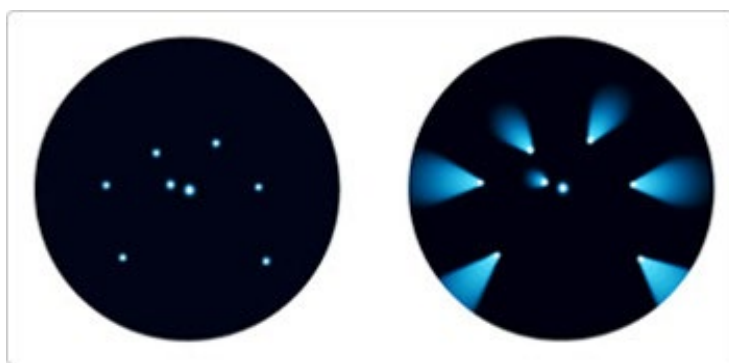


Рис. 10.4. Вид aberrации «кома» линзы

При количественном описании комы указывают следующие величины: продольная величина комы  $2\rho$ , поперечная величина комы  $2\rho$ , где  $\rho$  – половина поперечного размера aberrационного изображения точки предмета (пятна комы).

## Полевая aberrация «астигматизм»

Аберрация «астигматизм» – это искаженное изображение внеосевой точки предмета в виде пятна эллиптической формы (в гауссовой плоскости изображения). При смещении плоскости изображения вдоль оптической оси изображение внеосевой точки представляется в виде небольших отрезков в меридиональной и сагиттальной плоскостях поверхности. Аберрация «астигматизм» представляет собой сферическую аберрацию изображения внеосевых точек предмета, удаленных от оптической оси, в меридиональной и сагиттальной плоскостях, только фронт световой волны, формирующей изображение внеосевой точки предмета, имеет разные радиусы кривизны в меридиональной и сагиттальной плоскостях поверхностей. Поэтому пучки света, падающие на сферическую отражающую или преломляющую сферическую поверхность в непараксиальной области, фокусируются в разные отрезки, разнесенные в пространстве вне гауссовой плоскости изображения, причем по мере удаления точек падения пучков (кольцевых зон) на поверхности от оптической оси форма отрезков изменяется. В гауссовой плоскости изображение внеосевой точки предмета выйдет в виде эллипса, вытянутого в направлении к осевой точке изображения.

На рис. 10.5 показано формирование линзой изображения внеосевой точки  $B$  предмета в виде отрезков в меридиональной и сагиттальной плоскостях ( $s$  – сагиттальная,  $m$  – меридиональная плоскости). Расстояние между центрами отрезков  $B_m$  и  $B_s$  в меридиональной и сагиттальной плоскостях дает величину астигматической разности. Примерно посередине между этими отрезками образуется практически круглое изображение точки предмета (изображение точки, обладающее наименьшей астигматической аберрацией).

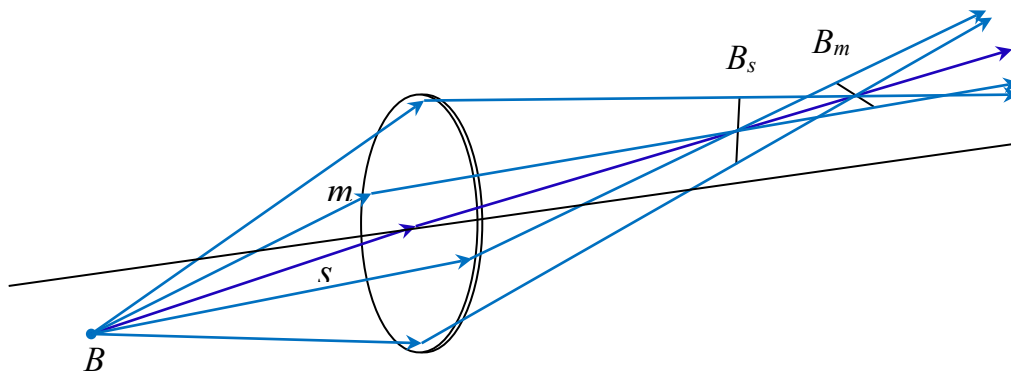


Рис. 10.5. Формирование линзой астигматического изображения внеосевой точки  $B$  предмета

## **Полевая абберрация «кривизна поля»**

Абберрация «кривизна поля» проявляется в том, что наилучшее изображение точек плоского предмета формируется не на плоскости, а на некоторой вогнутой (выпуклой) поверхности, касающейся гауссовой плоскости изображения в осевой точке. Следует отметить, что для получения лучшего изображения уже при наличии комы плоскости изображения придается искривленная форма. Искривление поверхности изображения имеет место одновременно с возникновением абберрации астигматизма. Количественно кривизна поля (плоскости изображения) характеризуется полусуммой кривизны поля в меридиональной и сагиттальной плоскостях поверхности. Абберрация «кривизна поля» приводит к изображению точки предмета в виде эллипсоида в гауссовой плоскости изображения. Так как в настоящее время изображения предметов регистрируются плоской поверхностью фотоприемников, влияние этой абберрации на качество изображения очень велико.

## **Полевая абберрация «дисторсия»**

Абберрация «дисторсия» – абберрация, вносящая деформационные искажения в изображении предмета. На рис. 10.6, *а* представлено неискаженное изображение предмета в виде квадрата. На рис. 10.6, *б* и 10.6, *в* приведены примеры абберрации дисторсии в изображениях этого предмета (неискаженное изображение показано пунктирной линией): изображение квадрата искажено дисторсией, называемой бочкообразной, и изображение квадрата с дисторсией, называемой подушкообразной соответственно;  $\delta_u$  – количественная величина искажения дисторсией. Хотя при наличии дисторсии изображение предмета получается резким в плоскости наблюдения, все же эта абберрация недопустима, например, при проведении точных геометрических измерений размеров по изображениям объектов, расстояний по изображениям местности и т. д.



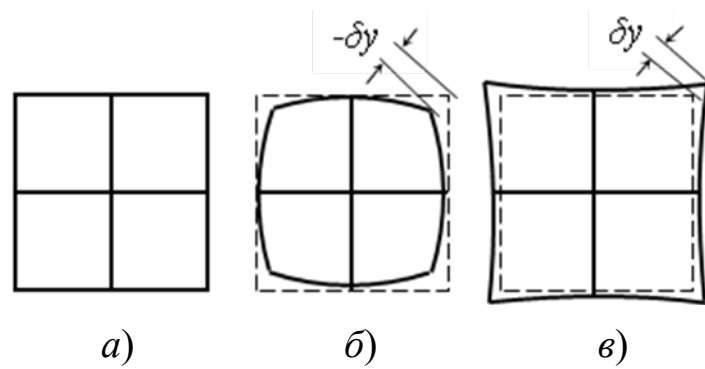


Рис. 10.6. Искажение изображения предмета абберацией «дисторсия»:

- а) безабберационное изображение;
- б) изображение, искаженное бочкообразной дисторсией;
- в) изображение, искаженное подушкообразной дисторсией

Комбинацией сферических линз можно исправить у этой системы требуемые монохроматические абберации третьего порядка. Более подробно методы исправления хроматических и монохроматических аббераций и оптимизация характеристик различных оптических систем изучаются в курсах «Теория оптических приборов» и «Прикладная оптика».

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В связи с бурным развитием фотонной вычислительной оптики и возникновением задач, в которых требуется выполнять заданные сложные преобразования световой волны, возникла необходимость изложения в дисциплине «Оптическая физика» свойств оптических элементов как преобразователей световой волны. В связи с этим в учебном пособии наряду с классическими оптическими преобразователями света, такими как зеркала и линзы, рассмотрены более многофункциональные дифракционные преобразователи, такие как дифракционные и голографические линзы.

В учебном пособии использован единый подход к описанию преобразующих свойств рефракционных и дифракционных оптических элементов, а именно метод характеристической функции, указаны границы применимости этого метода.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дитчберн Р. Физическая оптика. – М. : Наука, 1965. – 631 с.
2. Борн М., Вольф В. Основы оптики. – М. : Наука, 1973. – 720 с.
3. Лансберг Г. С. Оптика. – 6-е изд., стереотип. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 848 с.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики. В 5 т. Т. 4. Оптика. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 792 с.
5. Бутиков Е. И. Оптика. – СПб. : Невский Диалект: БХВ-Петербург, 2003. – 480 с.
6. Ахманов С. А., Никитин С. Ю. Физическая оптика. – М. : МГУ, 1998. – 656 с.
7. Калитеевский Н. И. Волновая оптика. – М. : Высшая школа. 1978. – 383 с.
8. Матвеев А. Н. Оптика. – М. : Высшая школа. 1985. – 351 с.
9. Тюшев А. Н., Дикусар Л. Д. Курс лекций по физике. В 5-ти ч. Ч. 3 : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2011. – 103 с.
10. ГОСТ 7427–76. Геометрическая оптика. – Введ. 1977–07–01.
11. ГОСТ 7601–78. Физическая оптика. – Введ. 1980–01–01.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. – М. : Наука, 1973. – 504 с.

*Учебное издание*

**Батомункуев Юрий Цыдыпович**

**ОПТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.  
ОПТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ  
СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ**

Редактор *О. В. Георгиевская*

Компьютерная верстка *Я. А. Лесных*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 30.12.2025. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 4,41. Тираж 48 экз. Заказ 187.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Издательско-полиграфический центр СГУГиТ  
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в издательско-полиграфическом центре СГУГиТ  
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.