Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

В. С. Корнеев

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия для обучающихся по направлению подготовки
12.03.03 Фотоника и оптоинформатика (уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2026

УДК 53:51-7
К672

Рецензенты: старший преподаватель кафедры высшей математики СГУГиТ *В. П. Вербная*
кандидат технических наук, зав. кафедрой прикладной и теоретической физики НГТУ *С. В. Спутай*

Корнеев, В. С.
К672 Специальные разделы математической физики : учебное пособие / В. С. Корнеев. – Новосибирск : СГУГиТ, 2026. – 112 с. – Текст : непосредственный.
ISBN 978-5-907998-63-6

Учебное пособие подготовлено доцентом В. С. Корнеевым на кафедре физики СГУГиТ и содержит наиболее часто встречающиеся в математической физике задачи с различными краевыми условиями: Коши, Дирихле, Штурма – Лиувилля. В пособии представлены хорошо известные методы решения этих задач – Даламбера и Фурье, для решения отдельных задач использованы специальные функции – Бесселя, Лежандра.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика (уровень бакалавриата) и может быть использовано для повышения уровня математической подготовки обучающимися других направлений и специальностей СГУГиТ.

Материал учебного пособия дополнен примерами решений типовых задач, вариантами практических заданий и может быть полезен обучающимся всех форм обучения для самостоятельного изучения данной дисциплины и выполнения контрольных заданий.

Рекомендовано к изданию кафедрой физики, Ученым советом Института оптики и технологий информационной безопасности СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 53:51-7

ISBN 978-5-907998-63-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Специальные разделы математической физики» предназначено для обучающихся по направлению подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика (уровень бакалавриата), для которых дисциплина с одноименным названием изучается на IV курсе. Учебное пособие переработано автором в соответствии с учебной программой дисциплины «Специальные разделы математической физики» на основе изданного ранее учебного пособия «Методы математической физики».

Пособие содержит основные уравнения и задачи математической физики с различными условиями на границах задания переменных. Отдельно рассмотрен случай, когда решение задачи получается в виде ряда, т. е. в виде разложения по некоторой системе функций одной из переменных – так называемая задача Штурма – Лиувилля.

Большое внимание в пособии уделяется методу разделения независимых переменных (методу Фурье), на основе которого даны алгоритмы решения наиболее важных задач математической физики.

В пособии также рассмотрены примеры задач, когда краевые условия удобно выразить в цилиндрических или сферических системах координат, и полученное решение выражается в так называемых специальных функциях, некоторые из которых будут рассмотрены в разд. 7.

В разд. 12 пособия кратко рассмотрены примеры неоднородных задач, часто встречающиеся на практике, и представлены некоторые методы решения подобных задач.

Материал данного учебного пособия дополнен вариантами практических заданий, примерами решений типовых задач и может быть полезен обучающимся всех форм обучения для самостоятельного изучения данной дисциплины и выполнения контрольных заданий.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1.1. Дифференциальные операторы

Физическая величина, выражаемая функцией от нескольких переменных $u = u(x_1; x_2; ... x_n)$, может быть векторной (импульс тела, сила) или скалярной (температура, потенциал некоторого физического поля); может зависеть от пространственных координат $x_1; x_2; ... x_n$, а также от времени t.

В общем случае говорят о векторном, или о скалярном физическом поле: например, неподвижные электрические заряды создают в пространстве скалярное поле потенциала и векторное поле электрической напряженности. Если скалярное или векторное поле не зависят от переменной t, т. е. производная $\dfrac{du}{dt} \equiv 0$, то говорят о стационарных физических полях. Если же величина зарядов меняется со временем или изменяется их взаимное расположение, то рассматриваемые физические поля не являются стационарными.

Понятие частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ физической величины $u = u(x_n)$ связано с дифференциальными операторами градиента (*grad*), дивергенции (*div*) и ротора (*rot*).

Градиент – векторная функция, аргументом которой является скалярная функция

$$grad(u) = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Производная по направлению произвольного вектора $\vec{l}$ определяется

$$\left[grad(u)\right]_l = \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(l, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(l, y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(l, z),$$

очевидно, что, $\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{l} \cdot grad\left(u\right)$.

Дивергенция – скалярная функция, аргументом которой является векторная функция $\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$

$$div\left(\vec{A}\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Ротор (вихрь) – векторная функция, аргументом которой является векторная функция $\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$

$$rot\left(\vec{A}\right) = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right),$$

ротор удобно выразить в виде определителя

$$rot\left(\vec{A}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Оператор Гамильтона (оператор набла) $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

применительно к скалярной функции $u = u\left(x_1; x_2; ... x_n\right)$

$$\nabla u = grad\left(u\right) = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}; \quad (1.1)$$

применительно к векторной функции $\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$, скалярное произведение $(\nabla; \vec{A})$ этих векторов равно

$$(\nabla; \vec{A}) = div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (1.2)$$

векторное произведение $\left[\nabla;\vec{A}\right]$ этих двух векторов равно

$$\left[\nabla;\vec{A}\right] = rot\,\vec{A} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right). \qquad (1.3)$$

Оператор Лапласа (лапласиан) – оператор вида $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$,

применительно к скалярной функции

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \qquad (1.4)$$

применительно к векторной функции

$$\Delta\vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}. \qquad (1.5)$$

Так как $\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$, то $\Delta\vec{A} = \vec{i}\Delta A_x + \vec{j}\Delta A_y + \vec{k}\Delta A_z$.

Для стационарных полей оператор Лапласа Δu, выражаемый в криволинейных системах координат, имеет вид

в полярных координатах $$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}; \qquad (1.6)$$

в цилиндрических $$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \qquad (1.7)$$

в сферических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \qquad (1.8)$$

1.2. Интегральные тождества

Для произвольной области D, ограниченной поверхностью S, если векторная функция $\vec{A}$ произвольной точки $M \in D$ непрерывна вместе с первыми производными, то справедлива *формула Остроградского*

$$\int_D div\vec{A}d\tau = \int_S A_n d\sigma, \tag{1.9}$$

где $d\sigma$ – элемент поверхности S; $d\tau$ – элемент объема D; $A_n = \vec{A}\cdot\vec{n}$; $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности S.

Если предположить, что $\vec{A} = grad(u)$, тогда очевидно:

$$div\vec{A} = div(grad(u)) = \Delta u,$$

$$\overrightarrow{A_n} = \vec{A}\cdot\vec{n} = grad(u)\vec{n} = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Учитывая последние равенства и выражение (1.9), получаем

$$\int_D \Delta u d\tau = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \tag{1.10}$$

Если заменить функцию u на $(u^2/2)$, можно получить равенства:

$$\Delta\left(\frac{u^2}{2}\right) = u\Delta u + (grad(u))^2, \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{u^2}{2}\right) = u\frac{\partial u}{\partial n}.$$

После подстановки последних равенств в формулу (1.10) получим

$$\int_D \left[u\Delta u + \left(grad(u)^2\right)\right] d\tau = \int_S u\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \tag{1.11}$$

Для плоской области $D \in xOy$, ограниченной контуром G, справедливы соотношения:

$$\int\limits_D \Delta u d\sigma = \int\limits_G u \frac{\partial u}{\partial n} dl,$$

$$\int\limits_D \left[u\Delta u + \left(grad\left(u \right) \right)^2 \right] d\sigma = \int\limits_G u \frac{\partial u}{\partial n} dl.$$

В последних тождествах $d\sigma$ – элемент плоской области D; dl – элемент дуги границы G.

Для замкнутой поверхности S, ограничивающей область D, если для точки $M \in D$ существуют две скалярные функции u и v, то имеет место *формула Грина*

$$\int\limits_D \left[u\Delta v - v\Delta u \right] d\tau = \int\limits_S \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma. \qquad (1.12)$$

1.3. Основные уравнения математической физики

Уравнение Лапласа встречается в электростатике, теории упругости и других разделах физики, где рассматриваются стационарные физические поля. Уравнение имеет следующий общий вид

$$\Delta u = 0. \qquad (1.13)$$

Ему удовлетворяет потенциал сил взаимодействия электростатических зарядов во всех точках пространства, кроме точек, в которых находятся сами заряды. Также это уравнение позволяет найти распределение температуры в однородном стационарном тепловом поле и потенциал скорости безвихревого течения несжимаемой жидкости.

Уравнение Пуассона применяется во многих разделах прикладной физики и описывает стационарные физические поля с внутренними источниками. Уравнение имеет вид

$$\Delta u = -f\left(x; y; z \right). \qquad (1.14)$$

Волновое уравнение описывает процессы распространения волн разной физической природы в изотропных и анизотропных средах без поглощения энергии. Уравнение имеет следующий общий вид

$$\Delta u-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-f\left(x;y;z;t\right), \tag{1.15}$$

где v – фазовая скорость.

Волновое уравнение в средах с поглощением энергии имеет вид

$$\Delta u-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-b\frac{\partial u}{\partial t}=-f\left(x;y;z;t\right), \tag{1.16}$$

где b – коэффициент поглощения среды.

Уравнения теплопроводности и диффузии применяются в соответствующих разделах физики и имеют одинаковую общую форму

$$\Delta u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=-f\left(x;y;z;t\right), \tag{1.17}$$

где $a^2=\lambda$, λ – коэффициент температуропроводности (в уравнении теплопроводности); $a^2=D$, D – коэффициент диффузии (в уравнении диффузии).

Уравнение Гельмгольца – это уравнение установившихся гармонических колебаний заданной циклической частоты ω:

$$\Delta u-k^2u=0, \tag{1.18}$$

где k – волновое число, $k=\omega/v$; v – фазовая скорость.

Уравнение Шрёдингера – это основное уравнение квантовой (волновой) механики. Для стационарных случаев оно имеет следующий вид:

$$\Delta\psi+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-U\right)\psi=0, \tag{1.19}$$

где ψ – волновая функция; m – масса частицы; E – энергия частицы; U – потенциал внешнего силового поля; $\hbar$ – постоянная Планка.

Вопросы для самоподготовки

1. Какие физические поля рассматриваются в математической физике?

2. Записать дифференциальные операторы градиента, дивергенции, ротора для декартовых координат.

3. Записать оператор Лапласа для полярной, цилиндрической и сферической систем координат.

4. Записать основные интегральные тождества: формулу Остроградского, формулу Грина.

5. Записать основные уравнения: Лапласа, Пуассона, волновое уравнение, уравнение теплопроводности и диффузии с указанием констант, входящих в эти уравнения.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ С ПОМОЩЬЮ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Общий вид линейного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка

Произвольное линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка для функции двух переменных $u = u(x; y)$ имеет вид [1, 2]

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0, \qquad (2.1)$$

где $A(x, y); B(x, y); C(x, y); D(x, y); E(x, y); F(x, y); G(x, y)$ – заданные функции двух независимых переменных x, y.

Как показано в [1, 2], любое произвольное линейное дифференциальное уравнение второго порядка функции двух переменных $u = u(x; y)$ может быть преобразовано к одному из следующих трех канонических видов: гиперболическому, эллиптическому или параболическому.

1. Если $(AC - B^2) < 0$, то после замены переменных на $\xi; \eta$ приведено к гиперболическому виду

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{B}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + F(\xi, \eta, u) = 0; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u). \end{cases} \qquad (2.2)$$

2. Если $(AC - B^2) > 0$, то после замены переменных на $\xi; \eta$ приведено к эллиптическому виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + F(\xi,\eta,u) = 0; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = F(\alpha,\beta,u). \end{cases} \tag{2.3}$$

3. Если $(AC - B^2) = 0$, то после замены переменных на $\xi;\eta$ приведено к параболическому виду

$$\vec{C}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + F(\xi,\eta,u) = 0. \tag{2.4}$$

Для преобразования произвольного уравнения к его каноническому виду необходимо выполнить следующие математические действия:

1) составить характеристическое уравнение: $A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = \ = 0$ и определить его корни:

$$\begin{cases} y_1{}' = \dfrac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \varphi'(x); \\ y_2{}' = \dfrac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \psi'(x); \end{cases} \left(y' = \frac{dy}{dx} \right).$$

2) определить новые переменные ξ, η:

$$\begin{cases} y_1{}' = \dfrac{dy}{dx} = \varphi'(x,y); \\ y_2{}' = \dfrac{dy}{dx} = \psi'(x,y); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \varphi(x) + C_1; \\ y_2 = \psi(x) + C_2. \end{cases}$$

а) для уравнения гиперболического вида корни характеристического уравнения – действительные, и новые переменные равны:

$$\begin{cases} \xi = C_1 = y - \varphi(x), \\ \eta = C_2 = y - \psi(x). \end{cases}$$

б) для уравнения эллиптического вида корни характеристического уравнения – комплексно-сопряженные φ и φ*, и новые переменные равны:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y); \\ \eta = \varphi^*(x, y). \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, i = \sqrt{-1}.$$

в) для уравнения параболического вида корень единственный, и новые переменные выбираем следующим образом:

$$\begin{cases} \xi = y - x; \\ \eta = y. \end{cases}$$

2.2. Пример преобразования уравнения к гиперболическому виду

Задано уравнение вида $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$ определяем предварительно тип уравнения: $A = 3$; $B = 1$; $C = -1$; $AC - B^2 = -4$, $-4 < 0$; тип – гиперболический:

1) составляем характеристическое уравнение $3(dy)^2 - 2(1)dxdy - 1(dx)^2 = 0$ и находим его корни:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{1 + \sqrt{4}}{3} = 1; \\ \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{1 - \sqrt{4}}{3} = -\frac{1}{3}; \end{cases}$$

2) определяем новые переменные:

$$\begin{cases} dy = dx; \\ 3dy = -dx; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + C_1; \\ 3y = -x + C_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = C_1 = y - x; \\ \eta = C_2 = 3y + x; \end{cases}$$

3) находим частные производные функции $u(\xi;\eta)$ по переменным x, y:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}(-1) + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(1); \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}(1) + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(3); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(-1)^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(-1)(1) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1)^2 \right]; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1)^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(3)(1) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(3)^2 \right]; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(-1)(1) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(-3+1) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1)(3) \right]; \end{cases}$$

4) после подстановки в заданное уравнение получаем

$$3\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(-1) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1) \right] + 2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(-1) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(-2) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(3) \right] -$$
$$-1\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(3) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(9) \right] + \frac{\partial u}{\partial \xi}(-1) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(1) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(1) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(3) = 0.$$

После преобразований получаем уравнение гиперболического вида

$$-16\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right] + 4\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

2.3. Пример преобразования уравнения к эллиптическому виду

Задано уравнение вида $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

определяем предварительно тип уравнения: $A = 1$; $B = -1$; $C = 2$; $AC - B^2 =$ $= 1$, $1 > 0$; тип – эллиптический:

1) составляем характеристическое уравнение $1(dy)^2 + 2(-1)dxdy + 2(dx)^2 = 0$ и находим его корни:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \dfrac{-1 + \sqrt{-1}}{1}; \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \dfrac{-1 - \sqrt{-1}}{1}. \end{cases}$$

Корни характеристического уравнения – комплексно-сопряженные числа:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1;\,2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i,\ i = \sqrt{-1};$$

2) определяем новые переменные:

$$\begin{cases} dy = (-1+i)\,dx; \\ dy = (-1-i)\,dx; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (-1+i)x + C_1; \\ y = (-1-i)x + C_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = C_1 = y + (1-i)x; \\ \eta = C_2 = y + (1+i)x; \end{cases}$$

3) находим частные производные функции $u\,(\xi;\eta)$ по переменным $x,\ y$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}(1-i) + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(1+i); \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}(1) + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(1); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(-2i) + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(2) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(2i); \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1) + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(1) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1); \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1-i) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(2) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1+i); \end{cases}$$

4) после подстановки в заданное уравнение получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(0) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(4) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(0) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(1) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(1) = 0; \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4}\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right] = 0.$$

Введем новые переменные: $\alpha = y + x;\ \ \beta = -x.$

После преобразования получим уравнение эллиптического вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta}\right].$$

2.4. Пример преобразования уравнения к параболическому виду

Задано уравнение вида: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

определяем предварительно тип уравнения: $A = 1$; $B = 1$; $C = 1$; $AC - B^2 =$ $= 0$; тип – параболический:

1) составляем характеристическое уравнение $1(dy)^2-2(1)dxdy+1\left(dx\right)^2=0$ и находим его единственный корень:

$$\left\{\frac{dy}{dx}=\frac{B}{A}=1;\right.$$

2) новые переменные выбираем следующим образом:

$$\begin{cases}\xi = y-x;\\ \eta = y;\end{cases}$$

3) находим частные производные функции $u(\xi;\eta)$ по переменным x, y:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\left(-1\right)+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\left(0\right);\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\left(1\right)+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\left(1\right);\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=+\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(-1\right)^2+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(-1\right)\left(0\right)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(0\right)^2\right];\\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(1\right)^2+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(1\right)\left(1\right)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(1\right)^2\right];\\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(-1\right)\left(1\right)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(-1+0\right)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(0\right)\left(1\right)\right];\end{cases}$$

4) после преобразования получаем уравнение параболического вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1+1-2)+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(2-2)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(0+1+0)-\frac{\partial u}{\partial \eta}=0; \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сколько корней имеет характеристическое уравнение гиперболического вида? Какие физические процессы это уравнение описывает?

2. Как перейти от одной формы уравнения гиперболического вида к другой?

3. Сколько корней имеет характеристическое уравнение параболического вида? Какие физические процессы это уравнение описывает?

4. Почему корни характеристического уравнения эллиптического вида – комплексно-сопряженные числа?

5. Какие физические процессы описывает уравнение эллиптического вида?

3. МЕТОД БЕГУЩИХ ВОЛН (МЕТОД ДАЛАМБЕРА)

Для линейных дифференциальных уравнений с частными производными совокупность всех частных решений является общим решением и называется *общим интегралом линейного дифференциального уравнения.*

$$u\left(x_1;x_2;...x_n\right)=\sum_i \varphi_i\left(x_i;C_1^i;C_2^i;...C_n^i\right).$$

Примеры нахождения общих интегралов подробно представлены в [1, 2].

3.1. Метод Даламбера для решения задачи Коши о колебаниях бесконечной струны

Одномерное волновое уравнение с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2};-\infty<x<\infty;t>0;\\ u\big|_{t=0}=u_0(x);\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=0}=u_1(x).\end{cases} \tag{3.1}$$

Общий интеграл уравнения имеет вид $u=F\left(x+vt\right)+G\left(x-vt\right)$;

при $t=0$ будем иметь $F\left(x\right)+G\left(x\right)=u_0\left(x\right);\ F'\left(x\right)-G'\left(x\right)=\dfrac{1}{v}u_1\left(x\right)$. После подстановки в выражение $u=u(x,t)$ получим

$$u=\frac{1}{2}u_0\left(x+vt\right)+\frac{1}{2v}\int_0^{x+vt}u_1\left(\xi\right)d\xi+\frac{1}{2}u_0\left(x-vt\right)-\frac{1}{2v}\int_0^{x-vt}u_1\left(\xi\right)d\xi+C,$$

где $C=C_1+C_2$.

При $C=0$ получим выражение, называемое *формулой Даламбера*:

$$u = \frac{1}{2}[u_0(x+vt)+u_0(x-vt)] + \frac{1}{2v}\int\limits_{x-vt}^{x+vt} u_1(\xi)\,d\xi. \qquad (3.2)$$

В случае, когда задано только начальное значение функции $u|_{t=0} = u_0(x)$, решение имеет вид (волны отклонения)

$$u(x;t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+vt)+u_0(x-vt)\right].$$

В случае, когда задано начальное значение производной $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} = u_1(x)$, решение имеет вид (волны импульса)

$$u(x;t) = \Omega(x+vt) - \Omega(x-vt).$$

В начальный момент времени $(t=0)$ имеем наложение двух полуволн $\Omega(x)$ и $-\Omega(x)$, в результате сложения получим $u(x;0)=0$.

3.2. Пример решения задачи о колебаниях струны для заданной начальной формы струны

Найти решения задачи Коши для бесконечной струны, если задана начальная форма отклонения струны:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; -\infty < x < \infty; t > 0; \\ u\big|_{t=0} = \cos x; \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Подставим в формулу Даламбера начальные условия $u\big|_{t=0} = \cos x$, $u_1 = 0$;

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\cos(x+vt)+\cos(x-vt)\right] + \frac{1}{2v}\int\limits_{x-vt}^{x+vt}(0)\,d\xi.$$

Полученное решение представляет собой две полуволны отклонения, идущие в разных направлениях. Чтобы получить общее решение для всей струны, преобразуем полученное решение к виду

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[2\cos(x)\cdot\cos(vt)\right]=\cos(x)\cdot\cos(vt).$$

Полученное решение соответствует заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} u\big|_{t=0}=\cos x\cdot\cos(v\cdot 0)=\cos x; \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=0}=-\cos x\cdot\sin(v\cdot 0)=0. \end{cases}$$

3.3. Пример решения задачи о колебаниях струны для заданной начальной скорости точек струны

Найти решения задачи Коши для бесконечной струны, если задана V_0 – начальная скорость точек струны.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2};-\infty<x<\infty;t>0; \\ u\big|_{t=0}=0; \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=0}=V_0. \end{cases}$$

Подставим в формулу Даламбера начальные условия $u\big|_{t=0}=0;\ u_1=V_0;$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[0]+\frac{1}{2v}\int\limits_{x-vt}^{x+vt}(V_0)\,d\xi=\frac{1}{2v}(V_0\cdot\xi)\Big|_{x-vt}^{x+vt}=\frac{V_0}{2v}(x+vt-x+vt)=V_0\cdot t.$$

Полученное решение соответствует заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} u\big|_{t=0}=V_0\cdot(0)=0; \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=0}=V_0\big|_{t=0}=V_0. \end{cases}$$

4. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Классификация задач математической физики осуществляется по условиям, которые ставятся при формулировании этих задач и накладывают ограничения на общее решение. Чтобы выделить решение, описывающее какой-либо процесс, необходимо задать дополнительные условия: начальное состояние процесса (начальные условия), режим на границе области, в которой происходит процесс (граничные условия). Для дифференциальных уравнений с частными производными различают три основных вида краевых задач [1, 2].

4.1. Задача Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности

Задача Коши для волнового уравнения формулируется так: найти функцию $u(x;t)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta u - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ и начальным условиям при $t = 0$:

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = u_0(x); \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} = u_1(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

Задача Коши для уравнения теплопроводности и диффузии ставится следующим образом: найти функцию $u(x;t)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta u - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ и начальным условиям при $t = 0$:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x). \tag{4.2}$$

4.2. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона с граничными условиями первого, второго, третьего рода

Краевые задачи для этих уравнений содержат условия на границе области задания переменных и формулируются следующим образом: найти функцию $u(x;y;z)$, удовлетворяющую уравнениям Лапласа $\Delta u = 0$, или Пуассона $\Delta u = f(x, y, z)$ в области *G*, и граничным условиям на границе области *S*:

$$\alpha u\big|_S + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = v, \ \ \alpha \geq 0; \beta \geq 0; \ \ \alpha + \beta > 0. \tag{4.3}$$

Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона называются гармоническими краевыми задачами, в зависимости от вида краевых условий выделяют следующие задачи [1, 2]:

а) *задача Дирихле* содержит граничные условия первого рода

$$u\big|_S = u_0;$$

б) *задача Неймана* содержит граничные условия второго рода

$$\beta\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = u_1;$$

в) *задача с граничными условиями третьего рода*

$$\alpha u\big|_S + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = u_2.$$

4.3. Смешанная задача для уравнения гиперболического вида

Найти функцию $u(x;y;z)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, начальным условиям при $t = 0$:

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = u_0(x); \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$$

и граничным условиям в области *G* и на границе области *S*

$$\alpha u\Big|_S + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = v\big|_{t=0},$$

где $\alpha > 0; \beta = 1.$

4.4. Задача Штурма – Лиувилля

В тех случаях, когда решение граничной задачи получается в форме ряда (интеграла), т. е. в виде разложения по некоторой системе функций одной из переменных задачи, то говорят о *задаче Штурма – Лиувилля* [2].

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\left[p(x)X'(x)\right]'+\left[\lambda r(x)-q(x)\right]X(x)=0,\ \ a<x<b, \tag{4.4}$$

где $p(x),q(x),r(x)$ – вещественные функции от x, непрерывные на $[a,b]$, $p(x),q(x)$ – положительные, λ – произвольный параметр уравнения.

Каждая внутренняя точка $[a,b]$ – обыкновенная точка данного уравнения, а концы интервала *(a, b)* могут быть как обыкновенными точками, так и особыми, в которых одна из функций $q(x),r(x),p(x)$ терпит разрыв, или $p(x)=0$.

Под *задачей Штурма – Лиувилля* понимается следующая задача: найти решение уравнения (4.4), удовлетворяющие однородным граничным условиям, заданным на концах интервала (a, b).

Задача Штурма – Лиувилля называется регулярной, если $[a,b]$ конечен, а концы интервала – обыкновенные точки уравнения (4.4). Если хотя бы на одном из концов интервала это условие не выполняется, то задача называется сингулярной [1, 2].

В регулярной задаче Штурма – Лиувилля встречаются следующие граничные условия, которые условно подразделяются на следующие виды:

– *граничные условия первого рода*

$$X(a)=0,\ \ X(b)=0; \tag{4.5}$$

– *граничные условия второго рода*

$$X'(a)=0,\ \ X'(b)=0; \tag{4.6}$$

– *граничные условия третьего рода*

$$\begin{aligned}&X'(a)-h_aX(a)=0,\\&X'(b)+h_bX(b)=0,\ \ h_a,h_b>0;\end{aligned} \tag{4.7}$$

– граничные условия четвертого рода

$$X(a)=X(b),\ \ X'(a)=X'(b),\ \ p(a)=p(b). \qquad (4.8)$$

Все вышеперечисленные выше граничные условия – однородные.

В случае если один из концов интервала (a,b), например $(x=a)$, является сингулярным, то для него ставится дополнительное условие ограниченности функции

$$X\Big|_{x\to a+0}=0(1),$$

на втором (регулярном) конце могут быть условия первого, второго или третьего рода.

Если оба конца интервала (a,b) являются сингулярными, то условия ограниченности функции ставится следующим образом:

$$\begin{cases} X\Big|_{x\to a+0}=0(1); \\ X\Big|_{x\to b-0}=0(1). \end{cases}$$

В некоторых случаях указывают порядок роста функции на сингулярном конце:

$$\int\limits_a^b r(x)\left|X(x)\right|^2 dx=0(1).$$

4.5. Замечание о корректности поставленной задачи и единственности решения задачи математической физики

Физическая задача считается корректно поставленной, если выполняются следующие условия [1, 2]:

1) решение данной задачи существует в каком-либо классе элементарных или специальных функций;

2) решение данной задачи является единственным в некотором классе элементарных или специальных функций;

3) решение данной задачи нейтрально зависит от начальных и граничных условий и заданных параметров уравнения.

Искомая функция, которая является решением данной краевой задачи, должна удовлетворять следующим условиям:

1) быть непрерывной в области G, в которой рассматривается решение задачи, включая границу области S;

2) внутри области G иметь непрерывные частные производные первого и второго порядков;

3) удовлетворять данному уравнению и заданным краевым условиям на границе области S, а если область имеет бесконечно удаленные границы, то при перемещении к этим границам стремиться к нулю.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте задачу Коши для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности и диффузии.

2. Сформулируйте краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.

3. Сформулируйте смешанную задачу для уравнения гиперболического вида.

4. Сформулируйте задачу Штурма – Лиувилля с граничными условиями первого, второго, третьего и четвертого рода.

5. В чем отличие сингулярной задачи Штурма – Лиувилля от регулярной? Какие условия должны выполняться на сингулярных концах интервала?

6. Приведите основные признаки корректно поставленной задачи.

5. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Для задачи Штурма – Лиувилля всегда существует не представляющее физического интереса тривиальное решение $X \equiv 0$. Каждое нетривиальное решение называется собственной функцией задачи Штурма – Лиувилля, при этом параметр λ – собственное значение данной задачи $\lambda \geq 0$ [1, 2].

5.1. Определение собственных значений и собственных функций регулярной задачи Штурма – Лиувилля

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение второго порядка (4.4)

$$\left[p(x)X'(x)\right]' + \left[\lambda r(x) - q(x)\right]X(x) = 0, \; a < x < b,$$

где $p(x), p'(x), q(x), r(x)$ – вещественные функции, непрерывные на $[a,b]$ $p(x), q(x)$ – положительные, каждая точка отрезка $[a,b]$ – обычная точка.

В соответствии с общей теоремой Коши существует общий интеграл уравнения (4.4), функция $X(x) \in C^{(2)}$, удовлетворяющая условиям: $X(c) = \alpha$, $X(c) = \beta$, $c \in (a,b)$, $\alpha, \beta -$ любые числа. Если числа α, β не зависят от параметра λ, то само решение, функция $X(x)$ при фиксированном *x* является целой функцией от λ.

Под целой функцией от комплексного переменного λ подразумевается такая функция $f(\lambda)$, которая разлагается в ряд Тейлора на всей плоскости

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n, |\lambda| < \infty .$$

Примеры целых функций: $f(\lambda)=(1+\lambda)$; $f(\lambda)=e^{\lambda}$; $f(\lambda)=\sin(\lambda)$; $f(\lambda)=\cos(\lambda)$; $f(\lambda)=P_n(\lambda)$ – произвольный полином степени n.

Пусть некоторые функции $\varphi(x,\lambda);\psi(x,\lambda)$ – фундаментальные решения уравнения (4.4), удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$\begin{cases} \varphi(a,\lambda)=1, \ \ \psi(a,\lambda)=0, \\ \varphi'(a,\lambda)=0, \ \ \psi'(a,\lambda)=1. \end{cases}$$

Тогда решения уравнения (4.4) существуют, причем $\varphi(x,\lambda);\psi(x,\lambda)$ – целые функции от параметра λ, при фиксированном значении $x\in[a,b]$.

Общий интеграл уравнения (4.4) имеет вид

$$X(x,\lambda)=A\varphi(x,\lambda)+B\psi(x,\lambda).$$

Очевидно, что $X(x,\lambda)\in C^{(2)}$, нужно выбрать числа A, B, λ так, чтобы полученное решение отвечало заданным граничным условиям.

Для граничных условий первого рода (4.5):

$$\begin{gathered} \begin{cases} A\varphi(a,\lambda)+B\psi(a,\lambda)=0, \\ A\varphi(b,\lambda)+B\psi(b,\lambda)=0; \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} A=0, B\psi(b,\lambda)=0, B\neq 0, \\ \psi(b,\lambda)=0. \end{cases} \end{gathered} \qquad (5.1)$$

Последнее равенство позволяет определить λ.

Для граничных условий второго рода (4.6):

$$\begin{gathered} \begin{cases} A\varphi'(a,\lambda)+B\psi'(a,\lambda)=0, \\ A\varphi'(b,\lambda)+B\psi'(b,\lambda)=0; \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} B=0, A\varphi'(b,\lambda)=0, A\neq 0, \\ \varphi'(b,\lambda)=0. \end{cases} \end{gathered} \qquad (5.2)$$

Последнее равенство позволяет определить λ.

Для граничных условий третьего рода (4.7):

$$\begin{cases} A\left[\varphi'(a,\lambda)-h_a\varphi(a,\lambda)\right]+B\left[\psi'(a,\lambda)-h_a\psi(b,\lambda)\right]=0, \\ A\left[\varphi'(b,\lambda)+h_b\varphi(b,\lambda)\right]+B\left[\psi'(b,\lambda)+h_b\psi(b,\lambda)\right]=0; \end{cases} \tag{5.3}$$

Для данной системы уравнений должно выполняться условие $-Ah_a+B=0, A\neq 0,$ тогда уравнение для определения λ выглядит так:

$$\varphi'(b,\lambda)+h_b\varphi(b,\lambda)+h_a\psi'(b,\lambda)+h_a h_b\psi(b,\lambda)=0\,. \tag{5.4}$$

Найдем собственные функции задачи для случая, когда $p(x)=r(x)=1$.

Для граничных условий первого рода получим

$$\psi(b,\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(b-a)}{\sqrt{\lambda}}+0\left(\lambda^{-1}\right),\lambda\to\infty\,. \tag{5.5}$$

Для граничных условий второго рода получим

$$\begin{aligned} &\varphi'(b,\lambda)=-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,(b-a)+0(1),\lambda\to\infty \\ &\varphi(b,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,(b-a)+0(1),\lambda\to\infty. \end{aligned} \tag{5.6}$$

В случае граничных условий третьего рода получаем

$$X_n(x)=A_n\left[\varphi(x,\lambda_n)+h_a\psi(x,\lambda_n)\right],n=1,2,3,\ldots \tag{5.7}$$

Функции $\varphi(x,\lambda);\psi(x,\lambda)$ при $\lambda\to\infty$ имеют колебательный характер, следовательно, существует множество решений уравнения (4.4). Каждому решению соответствует собственное значение параметра: $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n$, а спектр задачи является дискретным.

Таким образом, каждому собственному значению λ_n соответствует только одна собственная функция регулярной задачи Штурма – Лиувилля.

5.2. Разложение в ряд по собственным функциям регулярной задачи Штурма – Лиувилля

Для системы собственных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ...\varphi_n(x)$, непрерывных на $[a,b]$, необходимо указать важное свойство: система собственных функций ортогональна на $[a,b]$ с весом $\rho(x), \rho(x) > 0$

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ |\varphi_n|^2, & m = n; \end{cases}$$
$$|\varphi_n(x)|^2 = \int_a^b \rho(x)\varphi_n^2(x)dx > 0, \tag{5.8}$$

где $|\varphi_n(x)|$ называется нормой для данной системы функций.

Следовательно, система собственных функций регулярной задачи Штурма – Лиувилля ортогональна на $[a,b]$ с весом $\rho(x), \rho(x) = r(x)$:

$$\int_a^b \rho(x)X_n(x)X_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ |X_n|^2, & m = n. \end{cases} \tag{5.9}$$

Представим $f(x)$ – произвольную функцию в виде ряда по собственным функциям регулярной задач $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$, получим

$$\int_a^b f(x)r(x)X_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_a^b r(x)X_m(x)X_n(x)dx.$$

С учетом свойств ортонормированных функций (5.9) будем иметь:

$$\int_a^b f(x)r(x)X_m(x)dx = C_m|X_m|^2 \Rightarrow$$
$$C_m = \frac{\int_a^b f(x)r(x)X_m(x)dx}{|X_m|^2}. \tag{5.10}$$

Следовательно, получено разложение произвольной функции $f(x)$ по собственным функциям регулярной задачи $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$.

Важное замечание: произвольная функция $f(x)$ должна быть определена на $[a,b]$ и удовлетворять условиям Дирихле:

1) $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция на $[a,b]$;

2) $f(x)$ – имеет конечное число максимумов и минимумов на $[a,b]$.

Тогда ряд $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$ сходится к значению функции $f(x)$ во всех точках $x\in[a,b]$, где функция определена.

Для точек разрыва $c\in[a,b]$ сумма ряда равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n=\frac{f(c-0)+f(c+0)}{2},$$

где $x=c-$ точка разрыва первого рода.

5.3. Регулярная задача Штурма – Лиувилля с граничными условиями четвертого рода

Рассмотрим регулярную задачу Штурма – Лиувилля для уравнения

$$\left[p(x)X'(x)\right]'+\left[\lambda r(x)-q(x)\right]X(x)=0,\ \ a<x<b,$$

где $p(x),p'(x),q(x),r(x)$ – вещественные функции, непрерывные на $[a,b]$ $p(x),q(x)-$ положительные, каждая точка отрезка $[a,b]$ – обычная точка уравнения и граничные условия четвертого рода (4.8):

$$X(a)=X(b),\ \ X'(a)=X'(b),\ \ p(a)=p(b).$$

Фундаментальная система решений Штурма – Лиувилля, функции $\varphi(x,\lambda),\psi(x,\lambda)$ удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$\varphi(a,\lambda)=1,\ \varphi'(a,\lambda)=0,\ \psi(a,\lambda)=0,\ \psi'(a,\lambda)=1.$$

Общий интеграл уравнения (4.4) имеет вид

$$X(x,\lambda)=A\varphi(x,\lambda)+B\psi(x,\lambda).$$

Из граничных условий получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A\left[1-\varphi(b,\lambda)\right]-B\psi(a,\lambda)=0, \\ -A\varphi'(b,\lambda)+B\left[1-\psi'(b,\lambda)\right]=0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Данная система уравнений является однородной относительно коэффициентов A и B, всегда имеет тривиальное решение $A=B=0$, соответствующее общему решению уравнения $X(x)\equiv 0$.

Собственные значения задачи совпадают с решениями системы уравнений (5.11) и для случая, когда $p(a)=p(b)$,

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\varphi(b,\lambda) & -\psi(a,\lambda) \\ -\varphi'(b,\lambda) & 1-\psi'(b,\lambda) \end{vmatrix}=0. \tag{5.12}$$

Раскрывая определитель, получим $\Delta\lambda=2-\varphi(b,\lambda)-\psi'(b,\lambda)=0$.

Собственные значения задачи (5.11) можно найти для случаев, когда

$$A\left[1-\varphi(b,\lambda_n)\right]-B\psi(a,\lambda_n)=0.$$

1. $\varphi(b,\lambda_n)\neq 0,\ B=\dfrac{\left[1-\varphi(b,\lambda_n)\right]}{\psi(a,\lambda_n)}A$, собственные функции имеют вид

$$X_n(x)=A_n\left[\varphi(x,\lambda_n)+B\psi(x,\lambda_n)\right].$$

2. $\varphi(b,\lambda_n)=0,\ \psi(b,\lambda_n)\neq 1,\ A=0$, собственные функции имеют вид

$$X_n(x)=B_n\psi(x,\lambda_n).$$

3. $\psi(b,\lambda_n)=0,\ \varphi(b,\lambda_n)=1,$ собственные функции имеют вид

$$X_n(x) = A_n\varphi(x,\lambda_n) + B_n\psi(x,\lambda_n).$$

Каждая из функций $\varphi(x,\lambda_n), \psi(x,\lambda_n)$ является собственной функцией задачи, а $\lambda = \lambda_n$ – кратные собственные значения. В дальнейшем будем обозначать собственные функции так:

$$X_n(x) = A_n X_n^{(1)}(x) + B_n X_n^{(2)}(x).$$

Можно показать, что все собственные функции ортогональны на $[a,b]$ с весом $r(x)$

$$\int_a^b r(x) X_m(x) X_n(x)\,dx = 0, \;\; m \neq n.$$

Собственные функции регулярной задачи Штурма – Лиувилля с граничными условиями четвертого рода, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны друг другу на $[a,b]$ с весом с весом $r(x)$.

5.4. Примеры решения задачи Штурма – Лиувилля

Пример 1.

Рассмотрим следующую задачу Штурма – Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; 0 < x < 2\pi,$$
$$X(0) = X(2\pi), \;\; X'(0) = X'(2\pi).$$

Фундаментальная система решений имеет следующий вид:

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right), \;\; \psi(x,\lambda) = \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Общий интеграл заданного уравнения

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Подставив интеграл в граничные условия, получим

$$\begin{cases} A\left[1-\cos\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right)\right]-B\dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right)}{\sqrt{\lambda}}=0, \\ A\sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right)+B\left[1-\cos\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right)\right]=0. \end{cases}$$

Собственные значения находят из условий разрешимости системы

$$\Delta\lambda=\begin{vmatrix} 1-\cos\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right); -\dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right)}{\sqrt{\lambda}} \\ \sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right); 1-\cos\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right) \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Delta\lambda=2\left(1-\cos\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right)\right)=0\Rightarrow\cos\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right)=1\Rightarrow$$

$$\lambda_n=n^2, n=0,1,2...$$

Собственные функции имеют следующий вид:

$$X_n(x)=A_n\cos(nx)+B_n\frac{\sin(nx)}{n};$$

$$X_0(x)=1;\ \ X_n^{(1)}(x)=\cos(nx);\ \ X_n^{(2)}(x)=\sin(nx); n=1,2,3...$$

Разложение произвольной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям Дирихле на отрезке $[0,2\pi]$, имеет следующий вид:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right];$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx; a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)dx; b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(nx)dx.$$

Пример 2.

Рассмотрим разложение произвольной функции $f(x)$ по собственным функциям задачи с граничными условиями первого рода:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ \ 0<x<\pi,$$
$$X(0)=0; X(\pi)=0.$$

Общий интеграл заданного уравнения

$$X(x)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+B\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Для граничных условий первого рода ($A=0,\ \ B\neq 0$) получаем

$$\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{\sqrt{\lambda}}=0,\ \ \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)=0\Rightarrow$$
$$\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)=n\pi,\ \ \sqrt{\lambda}=n,\ \ \lambda=n^2, n=1,2,3...$$

Собственные функции имеют следующий вид:

$$X_n(x)=B_n\frac{\sin(nx)}{n},\ \ n=1,2,3....$$

Норма для произвольной функции $f(x)$ равна

$$\int_0^{\pi}\sin_n(x)\sin_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \frac{\pi}{2}, & m=n.\end{cases}$$

Разложение произвольной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям Дирихле на отрезке $[0,\pi]$, имеет следующий вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(nx);$$
$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)dx.$$

Пример 3.

Рассмотрим разложение произвольной функции $f(x)$ по собственным функциям задачи с граничными условиями второго рода:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},$$
$$X'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0;\ X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Общий интеграл заданного уравнения

$$X(x)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+B\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Для граничных условий второго рода ($A\neq 0,\ \ B=0$) получаем:

$$\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)=0,\Rightarrow\left(\sqrt{\lambda}\pi/2\right)=\pm(2n+1)\pi/2;$$
$$\sqrt{\lambda}=\pm(2n+1),\ \ \lambda=(2n+1)^2,\ \ n=0,1,2...$$

Собственные функции имеют следующий вид:

$$X_n(x)=A_n\cos\left((2n+1)x\right),\ \ n=0,1,2...$$

Норма для произвольной функции $f(x)$ равна

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos_n(x)\cos_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n.\end{cases}$$

Разложение произвольной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям Дирихле на отрезке $[0,\pi]$, имеет следующий вид:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(mx\right);$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f\left(x\right)\cos\left(mx\right)dx.$$

Пример 4.

Рассмотрим сингулярную задачу с граничными условиями на одном конце:

$$X''\left(x\right)+\lambda X\left(x\right)=0,\ \ 0<x<\infty,$$

$$X\left(0\right)=0;\ \ X\big|_{x\to\infty}=0\left(1\right).$$

Общий интеграл данного уравнения имеет вид

$$X\left(x\right)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+B\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Из первого граничного условия $X\left(0\right)=0$ находим $A=0.$

Собственные функции имеют вид:

$$X\left(x\right)=B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right),\ \ \sqrt{\lambda}=n.$$

Из второго граничного условия $X\big|_{x\to\infty}=0\left(1\right)$ получается, что $\sqrt{\lambda}$ – вещественное число, следовательно, $\lambda>0.$

Собственные функции имеют следующий вид:

$$X_n\left(x\right)=B_n\sin\left(nx\right),\ \ n=1,2,3...$$

Пример 5.

Рассмотрим следующую сингулярную задачу:

$$\left(r^2R'\left(r\right)\right)'+\lambda r^2R\left(r\right)=0,\ \ 0<r<a,$$

$$R\big|_{r\to 0}=0\left(1\right),\ \ R\left(a\right)=0.$$

Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$r^2R'' + 2rR' + \lambda r^2 R = 0 \Rightarrow rR'' + 2R' + \lambda rR = 0 \Rightarrow \left(rR\right)'' + \lambda rR = 0.$$

Общий интеграл данного уравнения имеет вид

$$rR\left(r\right) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}r\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}r\right),$$

$$R\left(r\right) = \frac{A}{r}\cos\left(\sqrt{\lambda}r\right) + \frac{B}{r}\sin\left(\sqrt{\lambda}r\right).$$

Из граничных условий $R\big|_{r\to 0} = 0\left(1\right), R\left(a\right) = 0$ находим, что

$$A = 0, B \neq 0 \Rightarrow \frac{B}{a}\sin\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0, \Rightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0,$$

$$\sqrt{\lambda}a = \pi n \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, n = 1,2,3...$$

Собственные функции задачи имеют вид:

$$R_n\left(r\right) = \frac{B_n}{r}\sin\left(\frac{n\pi}{a}r\right).$$

Значение $\lambda = 0$ не является собственным значением данной задачи, так как при этом значении для общего интеграла $R\left(r\right) = A/r + B$ существует только тривиальное решение при $A = B = 0$.

Пример 6.

Рассмотрим следующую сингулярную задачу:

$$X''\left(x\right) + \left(\lambda - x^2\right)X\left(x\right) = 0, \; -\infty < r < \infty,$$

$$R\big|_{r\to\pm\infty} = 0\left(1\right).$$

Собственными значениями задачи будут $\lambda = \lambda_n = 2n+1, n = 0,1,2...$

Собственными функциями будут функции

$$X(x) = e^{-x^2} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2\ldots,$$

где $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ – полиномы Эрмита.

6. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ФУРЬЕ)

6.1. Общее изложение метода Фурье

Метод разделения независимых переменных (метод Фурье) является одним из самых распространенных методов решения дифференциальных уравнений с частными производными, он позволяет получить решение задачи в формульном или в общем виде. На практике также используют приближенные методы решения задач: асимптотические или численные [1, 4].

Дифференциальное уравнение называется линейным, если неизвестная функция $u = u(x,t)$ и все ее производные входят в уравнение в первой степени и если оно не содержит членов с произведениями этих величин. Так, например, дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных является однородным относительно неизвестной функции *u(x)* и ее производных, если оно имеет следующий вид [1]:

$$L(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{J=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = 0,$$

где $L(u)$ – линейный дифференциальный оператор; $u = u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ – искомая функция.

Уравнение называется неоднородным, если оно имеет вид

$$L(u) = F(x), \;\; F(x) \neq 0.$$

Обобщенный принцип суперпозиции.

Если каждая из функций $u_1 = u(x); u_2 = u(x); u_3 = u(x)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения, то ряд

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} C_n u_n(x)$$

также является решением этого уравнения, если он сходится к некоторой функции $u(x)$ и допускает почленное дифференцирование.

Проверка:

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_n u_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} L(u_n) = 0.$$

В случае линейного дифференциального уравнения в частных производных число слагаемых можно выбрать бесконечно большим и всегда можно выбрать решения, удовлетворяющие произвольным дополнительным условиям.

Сумма бесконечного сходящегося ряда может быть заменена определенным интегралом

$$\int_a^b v(\xi) u(x,\xi)\, d\xi,$$

который также является решением уравнения $L(u_1) = 0$.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение $L(u) = 0$ с разделяющимися переменными, имеющее бесконечное множество решений вида

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} X_i(x_i).$$

Решения $X_i(x_i)$ получаются из обычных дифференциальных уравнений.

Переменные разделяются, если уравнение имеет вид

$$L(u) = L_1(u_1) + L_2(u_2) + ... + L_n(u_n) = 0,$$

где L_1 зависит только от x_1; L_n зависит только от x_n, т. е. каждая из частей L_i зависит от одной переменной – x_i.

6.2. Метод Фурье для двух независимых переменных

Задано уравнение вида

$$L(u) = L_1(u_1) + L_2(u_2) = 0,$$

его решение представимо в виде произведения двух функций

$$u(x_1;x_2)=X_1(x_1)\cdot X_2(x_2).$$

Подставим решение в исходное уравнение и помножим

$$X_2\cdot L_1(X_1)+X_1\cdot L_2(X_2)=0;\ \otimes\left(\frac{1}{X_2\cdot X_1}\right);$$

$$\frac{L_1(X_1)}{X_1}+\frac{L_2(X_2)}{X_2}=0.$$

Первое слагаемое зависит от x_1, а второе – от x_2; равенство возможно только в том случае, когда

$$\frac{L_1(X_1)}{X_1}=-\lambda;\ \frac{L_2(X_2)}{X_2}=\lambda.$$

Исходное уравнение распадается на два:

$$1)\ L_1(X_1)+\lambda X_1=0;$$

$$2)\ L_2(X_2)-\lambda X_2=0.$$

Переменные в уравнении разделены, λ – параметр разделения.

6.3. Метод Фурье для трех независимых переменных

Задано уравнение вида

$$L(u)=L_1(u_1)+L_2(u_2)+g(x_2)\cdot L_3(u_3)=0,$$

решением которого является произведение трех функций

$$u(x_1;x_2;x_3)=X_1(x_1)\cdot X_2(x_2)\cdot X_3(x_3).$$

Подставив решение в исходное уравнение, получим

$$\frac{L_1(X_1)}{X_1}+\frac{L_2(X_2)}{X_2}+\frac{g(x_2)\cdot L_3(X_3)}{X_3}=0.$$

Разделяя переменные, как показано в предыдущем примере, получим:

$$\frac{L_1(X_1)}{X_1}=-\lambda;\ \ \frac{L_2(X_2)}{X_2}+\frac{g(x_2)\cdot L_3(X_3)}{X_3}=\lambda.$$

Исходное уравнение распадается на два:

$$1)\ \ L_1(X_1)+\lambda X_1=0,$$

$$2)\ \ \frac{L_2(X_2)}{g(x_2)X_2}-\frac{\lambda}{g(x_2)}+\frac{L_3(X_3)}{X_3}=0,$$

второе из которых распадается еще на два уравнения:

$$1')\ \ \frac{L_3(X_3)}{X_3}=-\mu;$$

$$2')\ \ \frac{L_2(X_2)}{g(x_2)X_2}-\frac{\lambda}{g(x_2)}=\mu.$$

После преобразования получаем:

$$1')\ \ L(X_3)+\mu X_3=0;$$

$$2')\ \ L_2(X_2)-\left[\mu g(x_2)+\lambda\right]X_2=0.$$

Переменные в исходном уравнении разделены, λ, μ – параметры разделения.

В качестве примера использования метода Фурье для разделения переменных рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Лапласа.

6.4. Задача Дирихле для круга, интеграл Пуассона

Найти функцию u, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u=0$ и граничным условиям на границе круга радиуса $r=a$.

Уравнение Лапласа в полярной системе координат (r,φ) с началом в центре круга имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0,\ \ 0\le r\le a,\ \ -\pi\le\varphi\le\pi. \tag{6.1}$$

Граничные условия вместе с дополнительными условиями, вытекающими из периодичности функции, $u(r,\varphi)$ имеют вид

$$\begin{cases} u\big|_{r\to 0}=0(1),\ \ u\big|_{r=a}=f(\varphi); \\ u\big|_{\varphi=-\pi}=u\big|_{\varphi=\pi},\ \ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=-\pi}=\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Уравнение (6.1) допускает разделение переменных, решение найдем в виде произведения двух функций

$$u(r,\varphi)=R(r)\varPhi(\varphi).$$

После подстановки в (6.1) и разделения переменных получим два уравнения:

$$\begin{aligned} &1)\ \ \varPhi''(\varphi)+\lambda\varPhi(\varphi)=0; \\ &2)\ \ r\big(rR'(r)\big)'-\lambda R(r)=0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

В силу условий периодичности функции $u(\varphi)$ получаем

$$\varPhi\big|_{\varphi=-\pi}=\varPhi\big|_{\varphi=\pi};\ \ \varPhi'\big|_{\varphi=-\pi}=\varPhi'\big|_{\varphi=\pi}.$$

Общее решение первого уравнения имеет вид

$$\varPhi(\varphi)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right),\ \ \lambda\ne 0.$$

Из граничных условий находим

$$2B\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)=0,\ \ 2A\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)=0.$$

Если $A=B=0$, то получим только тривиальное решение, следовательно:

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)=0 \Rightarrow \lambda=\lambda_n=n^2, n\in N.$$

Собственными функциями задачи будут

$$\Phi_n\left(\varphi\right)=A_n\cos\left(n\varphi\right)+B_n\sin\left(n\varphi\right),\ \ n\in N.$$

Собственному числу задачи $\lambda=0$ соответствует собственная функция – $\Phi_0\left(\varphi\right)=A_0$.

Рассмотрим второе уравнение для собственных значений $\lambda=\lambda_n=n^2$. Характеристическое уравнение, соответствующее второму уравнению (6.3), имеет вид $s^2-n^2=0,$ откуда $s=\pm n.$

Общее решение второго уравнения (6.3) получаем в виде

$$R\left(r\right)=C_n r^n+D_n r^{-n},\ \ n\in N.$$

В случае, когда $\lambda=0,$ собственная функция – $R_0\left(r\right)=C_0+D_0\ln\left(r\right).$

Общее решение системы уравнений (6.3) представимо в следующем виде:

$$u_n=\left[A_n\cos\left(n\varphi\right)+B_n\sin\left(n\varphi\right)\right]\left(C_n r^n+D_n r^{-n}\right),\ \ n\in N,$$

$$u_0=A_0\left(C_0+D_0\ln\left(r\right)\right),\ \ n=0.$$

В силу условий ограниченности функции $u\left(\varphi\right)$ следует, что $D_0=0, D_n=0, \forall n\in N$, следовательно, общее решение (6.3) имеет вид:

$$u_n=\left[M_n\cos\left(n\varphi\right)+N_n\sin\left(n\varphi\right)\right]r^n,\ \ n\in N,$$

$$u_0=M_0,\ \ n=0.$$

Полученное решение представимо в виде ряда:

$$u_n=M_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[M_n\cos\left(n\varphi\right)+N_n\sin\left(n\varphi\right)\right]r^n,\ \ n\in N. \qquad (6.4)$$

Постулируя сходимость ряда, из второго граничного условия получаем:

$$u_n\big|_{r=a} = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[M_n\cos(n\varphi) + N_n\sin(n\varphi)\right]a^n = f(\varphi).$$

Если функция $f(\varphi)$ удовлетворяет условиям разложения в ряд Фурье, то имеем следующие уравнения для нахождения коэффициентов разложения:

$$M_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi;$$

$$N_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi; \qquad (6.5)$$

$$M_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,d\varphi.$$

Таким образом, методом разделения переменных – Фурье получено решение задачи Дирихле для круга радиуса $r = a$.

Подставим выражения для коэффициентов Фурье (6.5) в (6.4) и, поменяв порядок суммирования и интегрирования, получим

$$u_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\,d\psi\cdot\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n(\psi-\varphi)\right].$$

Обозначим $\rho = r/a$, $\alpha = \psi - \varphi$ и найдем сумму выражения в скобках:

$$S = \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\rho)^n\cos(n\alpha)\right],\ \ 0<\rho<1.$$

Используя формулу геометрической прогрессии со знаменателем $\left|\rho e^{i\alpha}\right| = \rho$, найдем

$$S = 1 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\rho e^{i\alpha}\right)^n = 1 + 2\,\mathrm{Re}\frac{\rho e^{i\alpha}}{1-\rho e^{i\alpha}} = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}.$$

Решение задачи Дирихле для круга в следующем виде:

$$u_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\left(\frac{r}{a}\right)^n}{\left[a^2 - 2ar\cos(\psi-\varphi)+r^2\right]} f(\psi)d\psi. \qquad (6.6)$$

Выражение (6.6) называется *интегралом Пуассона для круга*, а сама функция $f(\varphi)$ должна быть непрерывной или кусочно-непрерывной.

Выразим подынтегральную функцию через – $K(r,\varphi,\psi)$ и запишем

$$u_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(r,\varphi,\psi) f(\psi)d\psi. \qquad (6.7)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое дифференциальное уравнение называется однородным?
2. Как записать общее решение однородного дифференциального уравнения через сумму частных решений?
3. Сколько параметров разделения имеет однородное дифференциальное уравнение для функции двух независимых переменных?
4. Сколько параметров разделения имеет однородное дифференциальное уравнение для функции трех независимых переменных?

7. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

При использовании в задачах математической физики метода Фурье для разделения нескольких переменных в цилиндрических или сферических координатах (разд. 1.3) приходят к так называемым специальным функциям: цилиндрическим, сферическим и др.

Специальными функциями называются все неэлементарные функции, характерная особенность которых состоит в том, что они являются решениями уравнений с особыми точками вида [1]

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y=0,$$

где $p(x)$ обращается в 0 в одной или нескольких точках интервала изменения переменной *x*.

Примеры специальных функций [1]:

1) бета-функция – $$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt; \qquad (7.1)$$

2) гамма-функция – $$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt; \qquad (7.2)$$

3) интеграл вероятности – $$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt; \qquad (7.3)$$

4) интегральный синус – $$Si(x)=\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt; \qquad (7.4)$$

5) интегральный косинус – $$Ci(x)=\int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t}dt; \qquad (7.5)$$

6) цилиндрические функции появляются при решении уравнений Бесселя

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0,$$

когда решение представимо в виде $u(x) = J_\nu(x) -$ *функция Бесселя*, или цилиндрическая функция первого рода;

7) сферические функции возникают при решении уравнения вида

$$\left(1 - x^2\right)u'' - 2xu' + \nu(\nu + 1)u = 0,$$

когда решением является $u(x) = P_\nu(x) -$ *сферическая функция Лежандра*.

7.1. Цилиндрические функции Бесселя первого рода

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами [2]

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0. \tag{7.6}$$

Данное уравнение называется уравнением Бесселя. Его можно получить, решая смешанную задачу для уравнений гиперболического вида, с граничными условиями в полярных координатах, например, задачу о колебаниях круглой мембраны с закрепленными краями, рассмотренную в разд. 9. Параметр –ν, входящий в уравнение, может принимать любые положительные значения. Рассмотрим наиболее простые случаи уравнения (7.6), когда $\nu = 0$ и $\nu = 1$.

Уравнение Бесселя нулевого порядка (ν =0) имеет вид [2]

$$u'' + \frac{1}{x}u' + u = 0. \tag{7.7}$$

При значениях $x = 0$ коэффициент при первой производной терпит разрыв, и точка $x = 0$ является особой.

Решение уравнения (7.7) найдем с помощью степенных рядов:

$$u(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots C_n x^n.$$

Продифференцируем этот ряд дважды:

$$u'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots nC_n x^{n-1};$$
$$u''(x) = 2C_2 + 2 \cdot 3C_3 x + \ldots n(n-1) C_n x^{n-2}.$$

Рекуррентная формула, связывающая два коэффициента, индексы которых отличаются на две единицы, имеет вид [2]

$$(n+2)^2 C_{n+2} + C_n = 0;$$

оставляя коэффициент C_0 произвольным, выразим через него все остальные четные коэффициенты:

$$C_2 = -\frac{C_0}{2^2}, C_4 = -\frac{C_2}{4^2} = \frac{C_0}{2^2 4^2}, C_6 = -\frac{C_4}{6^2} = -\frac{C_0}{2^2 4^2 6^2} \ldots$$

В итоге получим обобщенную формулу для четных коэффициентов

$$C_{2n} = (-1)^n \frac{C_0}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Таким образом, получено решение для уравнения Бесселя ($v = 0$) (7.7):

$$u(x) = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}, \ (0!) = 1.$$

Можно доказать, что данный ряд сходится при всех значениях x; если принять значение постоянной $C_0 = 1$, то полученное решение называется *функцией Бесселя первого рода* порядка ($v = 0$), обозначается J_0 [2]

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \qquad (7.8)$$

и является решением уравнения (7.7) при заданных начальных условиях: $u\Big|_{x=0} = 1,\ u''\Big|_{x=0} = 0.$

График функции J_0 представлен на рис. 7.1, он похож на график затухающих колебаний. Так как J_0 – четная функция, то представлена часть графика, соответствующая значениям $x > 0$.

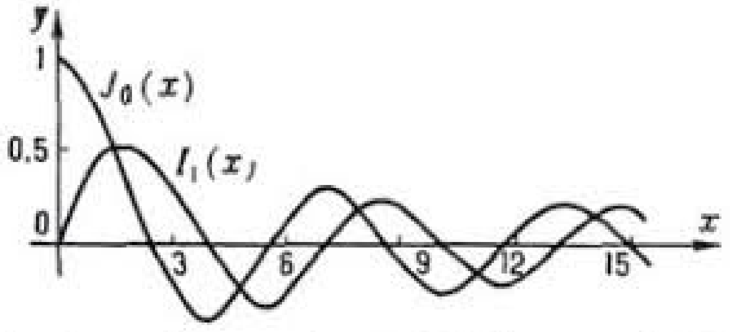

Рис. 7.1. Графики функций $y = J_0(x)$ и $y = J_1(x)$

Функция Бесселя первого рода порядка ($\nu = 0$) имеет бесчисленное множество корней μ_k; приведем значения первых пяти [2]:

$$\mu_1 = 2{,}405;\ \mu_2 = 5{,}521;\ \mu_3 = 8{,}654;\ \mu_4 = 11{,}792;\ \mu_5 = 14{,}931...$$

На отрезке $[a, b]$ для последовательности функций $J_0(\mu_i x)$, аргументом которых являются корни μ_k: $J_0(\mu_1 x), J_0(\mu_2 x), J_0(\mu_n x), ... J_0(\mu_m x)$, условия ортогональности выглядят следующим образом [2]:

$$\int_a^b x \cdot J_0(\mu_n x) J_0(\mu_m x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2} J_0^2(\mu_n), & m = n. \end{cases}$$

В случае, когда под интегралом кроме произведения двух функций находится множитель x, имеет место ортогональность с весом x.

Рассмотрим теперь уравнение Бесселя первого порядка ($\nu = 1$):

$$u'' + \frac{1}{x} u' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) u = 0. \tag{7.9}$$

Решение уравнения (7.9) можно найти также с помощью степенных рядов и выразить в следующем виде [2]:

$$u(x) = J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} n!(n+1)!}, \tag{7.10}$$

где J_1 – функция Бесселя первого рода, порядка (v = 1), ее график также представлен на рис. 7.1.

Функция J_1 – нечетная, она имеет бесчисленное множество корней ν_k ; приведем значение первых пяти [2]:

$$\nu_1 = 0;\ \ \nu_2 = 3{,}83;\ \ \nu_3 = 7{,}02;\ \ \nu_4 = 10{,}17;\ \ \nu_5 = 13{,}32...$$

Для функций Бесселя нулевого и первого порядка, дифференцируя почленно, можно получить формулу [2]

$$J_0'(x) = -J_1(x), \tag{7.11}$$

согласно которой функция $J_0(x)$ имеет экстремумы в точках, в которых J_1 (x) обращается в ноль, т. е. в точках ν_k (см. рис. 7.1).

Для уравнений Бесселя произвольного целого порядка –v решение получают в следующем виде [2]:

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+v}}{2^{2n+v} + n!(n+v)!},\ \ n \in N. \tag{7.12}$$

Для расчета корней $\mu_k^{(v)}$ функции Бесселя v-го порядка $J_v(x)$ можно использовать приближенную формулу [3]

$$\mu_k^{(v)} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k + v\pi. \tag{7.13}$$

Функции Бесселя половинного порядка $-J_{v\pm 1/2}(z)$ можно выразить через известные тригонометрические функции [3]:

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin(z);$$
$$J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos(z). \tag{7.14}$$

Для функций Бесселя произвольного порядка $-v$ выполняются рекуррентные формулы [1, 3]:

а) $$\frac{d}{dz} z^v J_v(z) = z^v J_{v-1}(z);$$

б) $$\frac{d}{dz} z^{-v} J_v(z) = -z^{-v} J_{v+1}(z);$$

в) $$2\frac{d}{dz} J_v(z) = J_{v-1}(z) - J_{v+1}(z);$$

г) $$\frac{2v}{z}\frac{d}{dz} J_v(z) = J_{v-1}(z) + J_{v+1}(z).$$

В разд. 9 пособия функции Бесселя применяются для решения задачи о колебаниях круглой мембраны, закрепленной по краю.

7.2. Сферические функции, полиномы Лежандра

Решая уравнение Лапласа в сферической системе координат (1.8)

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0,$$

для осесимметричного случая, когда $u(r,\theta)$ и не зависит от φ, уравнение можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{7.15}$$

Найдем решение уравнения (7.14) в виде произведения двух функций

$$u(r,\theta) = U(r)F(\theta),$$

подставляя в (7.15) и разделяя переменные методом Фурье; получим

$$\frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)=-\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)\frac{1}{F}.$$

Уравнение имеет решение, когда обе его части одновременно равны числу $\lambda > 0$ [2]:

$$1)\ \ \frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)=\lambda;$$

$$2)\ \ \frac{1}{F}\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)=-\lambda.$$

Решение первого уравнения с новым параметром *v*, $\lambda = v(v+1)$ найдем в виде $U = r^{\alpha}$; для вычисления показателя степени α получим [2]

$$\alpha(\alpha+1)=v(v+1).$$

В силу ограниченности функции $U(r)$ остается решение, когда

$$U(r)=r^{v}, v\geq 0.$$

Рассмотрим второе уравнение с новым параметром – *v*:

$$\frac{1}{F}\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)=-v(v+1).$$

Так как сферическая координата $0\leq\theta\leq\pi$, то при введении переменной $x=\cos\theta$ новая переменная изменяется в пределах $-1\leq x\leq 1$.

Подставим новую координату *x*, предварительно вычислив производные:

$$\frac{\partial F}{\partial\theta}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\partial F}{\partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)=\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2\theta\frac{\partial F}{\partial x}\right).$$

Второе уравнение после введения нового параметра и новой переменной преобразуем к следующему виду [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2\theta\frac{\partial F}{\partial x}\right)=-\nu(\nu+1)F;\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\partial F}{\partial x}\right]+\nu(\nu+1)F=0.$$

Произведем еще одну замену: переменную $x=\cos\theta$ обозначим через *y*, тогда функция $F(\theta)=F(\arccos\theta)=y(x)$.

Полученное уравнение называют *уравнением Лежандра* [2]

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+\nu(\nu+1)y=0, \tag{7.16}$$

точки $x=\pm 1$ являются особыми точками уравнения, и не все решения этого уравнения будут ограничены на отрезке $-1\le x\le 1$.

Уравнения Лежандра (7.16) имеют ограниченные решения только в случаях, когда ν – целое число (ν = 0,1,2…n), тогда решения представимы в виде функций, называемых *полиномами Лежандра* [2]:

$$u=P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]. \tag{7.17}$$

Таким образом, решением уравнения Лапласа в сферических координатах будут функции

$$u_n(r,\theta)=U_n(r)F_n(\theta)=C_n r^n P_n(\cos\theta).$$

Из условий нормировки выбирают постоянную $C_n=1$.

Полиномы Лежандра, графики которых P_n (n = 1; 2; 3; 4) представлены на рис. 7.2, обладают следующими важными свойствами [2].

1. Многочлен P_n содержит члены одинаковой со степенью n четности, а именно: x^n, x^{n-2}, x^{n-4}... Наименьшей степенью P_n при нечетном n будет $n=1$, а при четном – $n=0$.

Первые пять полиномов Лежандра можно записать так:

$$P_0(x)=1; P_1(x)=x; P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right);$$

$$P_3(x)=\frac{1}{6}\left(5x^3-3x\right); P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right).$$

2. При $x=1$ значение функции $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n, \forall n=0,1,2,...$, т. е. при четном n P_n – четные функции, при нечетном n P_n – нечетные функции.

3. На отрезке $-1 \le x \le 1$ полиномы Лежандра ограничены по абсолютной величине $\left|P_n(x)\right| \le 1$, $|x| \le 1$.

4. Многочлен P_n для $n>0$ имеет n действительных корней, лежащих в интервале $-1 \le x \le 1$.

5. Полиномы Лежандра ортогональны на интервале $-1 \le x \le 1$

$$\int_a^b P_m(x) P_n(x) dx = 0; \quad m \ne n. \tag{7.18}$$

6. В приложении полиномов Лежандра важную роль играет формула

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}; \quad n=0,1,2,... \tag{7.19}$$

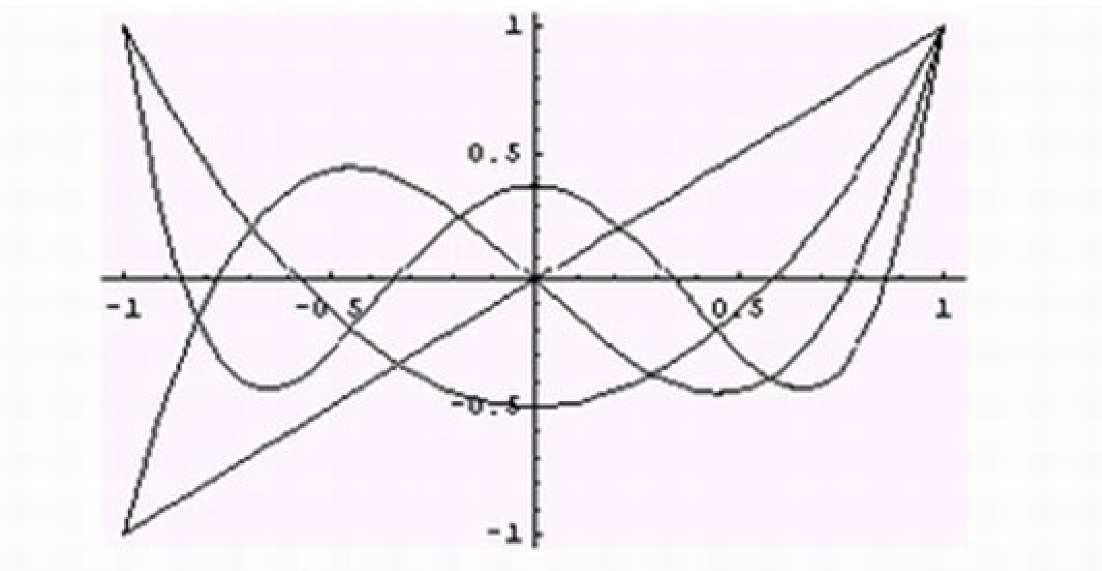

Рис. 7.2. Графики полиномов (многочленов) Лежандра P_n (n = 1; 2; 3; 4), лежащих в интервале значений [–1 < x < 1]

8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЗАКРЕПЛЕННОЙ СТРУНЫ

8.1. Дифференциальное уравнения свободных колебаний струны

Струной называется тонкая нить, работающая только на растяжение, но не на изгиб. Пусть концы натянутой струны закреплены в точках $x=a$, $x=b$ оси x. Будем считать, что величина возникающего в ней напряжения на всем протяжении равна числу T, а плотность струны будем считать равной числу ρ. В момент времени $t = 0$ выведем струну из равновесия и предоставим ей свободно колебаться (рис. 8.1) [4].

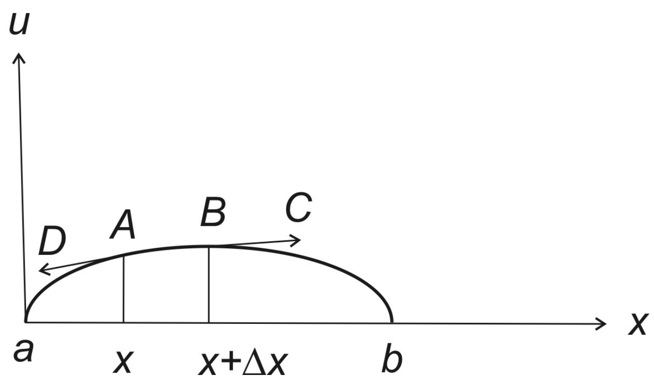

Рис. 8.1. Силы, действующие на отрезок струны $[x, x + \Delta x]$

Дифференциальное уравнение колебаний струны [4]:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = v^2 \frac{d^2u}{dx^2}, \left(v^2 = \frac{T}{\rho} \right). \tag{8.1}$$

Отклонение струны в любой ее точке, имеющей абсциссу x, в момент времени t обозначим через $u = u(x,t); (a \le x \le b, t \ge 0)$.

8.2. Решение задачи о свободных колебаниях закрепленной струны

Математическую задачу, к которой приводит изучение свободных колебаний струны, можно сформулировать так: требуется решить линейное дифференциальное уравнение (8.1) при начальных условиях:

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x); \\ \dfrac{du(x,0)}{dt} = u_1(x). \end{cases} \tag{8.2}$$

и при краевых условиях:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \tag{8.3}$$

Начальные условия (8.2) показывают, в каком положении находилась струна в начальный момент времени и какова скорость каждой ее точки при $t = 0$, где $u_0(x), u_1(x)$ – заданные функции.

Краевые условия (8.3) показывают, что концы струны закреплены в точках $a = 0, b = \pi$.

Решение уравнения (8.1) найдем в виде произведения

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t), \tag{8.4}$$

удовлетворяющего граничным условиям для всех $t > 0$:

$$\begin{cases} X(0) \cdot T(t) = 0, \\ X(\pi) \cdot T(t) = 0. \end{cases} \tag{8.5}$$

Следовательно, $X(0) = X(\pi) = 0.$

Подставляя произведение (7.4) в (7.1), получим

$$X \cdot T'' = v^2 X'' \cdot T,$$

или

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Но функция от t может равняться функции от x, только если обе они равны постоянному числу, которое мы обозначим $-\mu$:

$$\frac{1}{v^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\mu .$$

В результате получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X'' + \mu X = 0, \tag{8.6}$$

$$T'' + v^2 \mu T = 0. \tag{8.7}$$

Уравнение (8.6) надо решить с краевыми условиями $X(0) = X(\pi) = 0$.

8.3. Собственные числа и собственные функции задачи

Решением уравнения (8.6) являются числа (собственные числа задачи)

$$\mu_k = k^2 \left(k = 1; 2; 3...\right)$$

и соответствующие им нетривиальные функции (собственные функции)

$$X_k\left(x\right) = C_k \sin\left(kx\right), \left(k = 1; 2; 3...\right),$$

удовлетворяющие при этих числах условиям (8.5).

Общее решение уравнения (8.7) при найденных $\mu_k = k^2$ имеет вид

$$T_k\left(t\right) = A_k \cos\left(kvt\right) + B_k \sin\left(kvt\right), \left(k = 1; 2; 3...\right).$$

Следовательно, все решения дифференциального уравнения (8.1), удовлетворяющие граничным условиям (8.5), можно записать в виде

$$u_k\left(x.t\right) = \left[A_k \cos\left(kvt\right) + B_k \sin\left(kvt\right)\right]\sin\left(kx\right), \left(k = 1; 2; 3...\right),$$

где A_k, B_k , для каждого k можно взять произвольно.

Но тогда любые суммы $\sum_{k=1}^{n}\left[A_k\cos(kvt)+B_k\sin(kvt)\right]\sin(kx)$ являются решениями уравнения (8.1), удовлетворяющие условиям (8.5).

Этим свойством обладают также суммы бесконечных рядов [4]

$$u_k(x.t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos(kvt)+B_k\sin(kvt)\right]\sin(kx),(k=1;2;3...),\qquad(8.8)$$

если числа A_k и B_k – действительные и ряды можно дифференцировать.

Чтобы найти решение поставленной задачи, удовлетворяющее начальным условиям (8.2), дифференцируем (8.8) по переменной t:

$$\frac{du}{dt}(x.t)=\sum_{k=1}^{\infty}ak\left[-A_k\sin(kvt)+B_k\cos(kvt)\right]\sin(kx),\qquad(8.9)$$

и приравниваем (8.8) и (8.9) при t = 0 заданным функциям $u_0(x),u_1(x)$:

$$\begin{cases}u_0(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k\sin(kx);\\ u_1(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}akB_k\sin(kx),\end{cases}\qquad(8.10)$$

откуда получаем:

$$\begin{cases}A_k=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}u_0(x)\sin(kx)dx;\\ B_k=\dfrac{2}{\pi ak}\int\limits_0^{\pi}u_1(x)\sin(kx)dx..\end{cases}\qquad(8.11)$$

Если функции $u_0(x),u_1(x)$ – непрерывные на отрезке $[0;\pi]$, то можно вычислить числа A_k и B_k по формулам (8.11).

8.4. Решение задачи о колебаниях струны в среде с сопротивлением

Рассмотрим решение предыдущей задачи в предположении, что колебания струны происходят при наличии в среде силы сопротивления, которая пропорциональна скорости струны, $F_s = \alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} dx$, где α – коэффициент пропорциональности.

Из второго закона Ньютона можно получить уравнение колебаний струны в среде с сопротивлением в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \left(2m = \frac{\alpha}{\rho} \right). \tag{8.12}$$

Начальные условия задачи аналогичны условиям (8.5):

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x); \\ \dfrac{du(x,0)}{dt} = u_1(x). \end{cases}$$

Краевые условия для закрепленных концов те же самые:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Решение задачи будем искать в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t);$$

подставляя данное решение в уравнение (8.12) и разделяя переменные по методу Фурье, получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{v^2} \left(\frac{T'' + 2mT'}{T} \right) = \frac{X''}{X}. \tag{8.13}$$

Данное уравнение имеет решение только когда левая и правая части одновременно равны постоянному числу $-\mu$.

Уравнение (8.13) разделяется на два дифференциальных уравнения:

$$X'' + \mu X = 0, \tag{8.14}$$

$$T_k'' + 2mT_k' + (kv)^2 T_k = 0. \tag{8.15}$$

Как показано в подразд. 8.3, собственные числа для (8.14) положительны и равны $\mu_k = k^2 \, (k = 1;2;3...)$, а собственные функции с учетом начальных условий равны

$$X_k(x) = C_k \sin(kx), (k = 1;2;3...).$$

Для определения собственных функций $T_k(t)$ уравнения (8.15) составляем характеристическое уравнение

$$r^2 + 2mr + (vk)^2 = 0,$$

его корни равны

$$r_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - (vk)^2}.$$

В предположении, что m очень мало и при любых его значениях подкоренное выражение отрицательно, тогда

$$r_{1,2} = -m \pm iq,$$

где

$$q_k^2 = (vk)^2 - m^2.$$

Тогда решение уравнения (8.15) имеет вид

$$T_k(x) = e^{-mt}\left(A_k \cos q_k t + B_k \sin q_k t\right)\sin(kx). \tag{8.16}$$

Благодаря множителю e^{-mt} каждая из стоячих волн является затухающей.

Общее решение задачи о колебаниях струны в среде с сопротивлением можно представить в виде ряда

$$u_k\left(x.t\right)=e^{-mt}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos\left(q_kt\right)+B_k\sin\left(q_kt\right)\right]\sin\left(kx\right), \qquad (8.17)$$

где коэффициенты A_k, B_k можно найти из выражений:

$$\begin{cases} A_k=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}u_0\left(x\right)\sin\left(kx\right)dx, \\ B_k=\dfrac{2}{\pi q_k}\int\limits_0^{\pi}u_1\left(x\right)\sin\left(kx\right)dx+\dfrac{m}{q_k}A_k. \end{cases}$$

Если начальные скорости $u_1\left(x\right)=0$, получаем, что $b_k=\dfrac{m}{q_k}A_k$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как выглядит задача о свободных колебаниях струны с закрепленными концами?

2. Записать собственные числа и собственные функции данной задачи.

3. Найти коэффициенты A_k и B_k для одного из вариантов прил. 4.

4. Как выглядит задача о свободных колебаниях струны в среде с сопротивлением?

5. При каких значениях коэффициента сопротивления режим колебаний остается периодическим?

9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ

9.1. Дифференциальное уравнение колебаний круглой мембраны

Пусть круглая мембрана в состоянии покоя занимает круг единичного радиуса с центром в начале полярной системы координат (рис. 9.1). Будем считать, что мембрана закреплена по окружности радиуса $r = 1$. Если подействовать на мембрану некоторой силой, то отклонение точек мембраны u будет функцией координат (r, φ) и времени t, $u = u(r, \varphi, t)$.

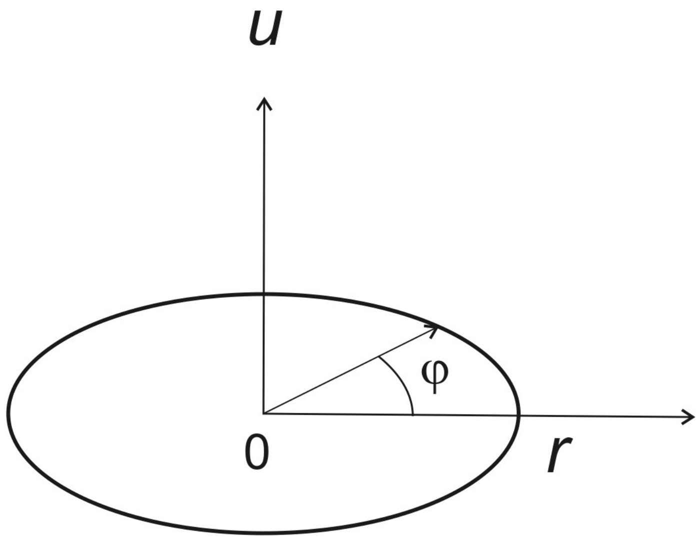

Рис. 9.1. Круглая мембрана в полярной системе координат

Уравнение колебаний круглой мембраны в полярной системе координат имеет вид [4]

$$\frac{d^2u}{dt^2} = v^2 \Delta u = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right). \tag{9.1}$$

9.2. Решение задачи о колебаниях круглой мембраны, закрепленной по краю

Для уравнения (9.1) мы будем решать задачу с краевым условием

$$u\big|_{r=1} = 0 \tag{9.2}$$

и начальными условиями

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = u_0(r); \\ \dfrac{du}{dt}\Big|_{t=0} = u_1(r). \end{cases} \tag{9.3}$$

Будем рассматривать только осесимметричные колебания мембраны, при которых все точки окружности радиуса $r \le 1$ с центром в начале координат в начальный момент времени имеют скорости и отклонения, не зависящие от угла φ. Таким образом, функция u будет зависеть только от r и t и уравнение (9.1) упрощается:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{9.4}$$

Решение уравнения (9.4) с условиями (9.2), (9.3) найдем методом Фурье:

$$u(r,t) = U(r)T(t).$$

По аналогии с задачей о колебаниях струны функции $U(r)$ и $T(t)$ удовлетворяют уравнениям [4]

$$T'' + v^2\mu^2 T = 0; \tag{9.5}$$

$$U'' + \frac{1}{r}U' + \mu^2 U = 0. \tag{9.6}$$

Таким образом, надо найти числа μ, для которых уравнение (9.6) имеет нетривиальное решение $U(r)$, удовлетворяющее граничному условию

$$U(r=1)=0. \qquad (9.7)$$

9.3. Собственные числа и собственные функции задачи

Числа $-\mu_k$ называются собственными числами данной задачи, а функции $-U_\mu(r)$ – принадлежащими им собственными функциями.

В данной задаче для дифференциального уравнения второго порядка (9.4) фигурирует только одно граничное условие (9.7), поэтому собственные функции должны удовлетворять двум граничным условиям: первое – собственная функция $U(r)$ должна быть ограничена в окрестности $r = 0$, второе – $U(r=1)=0$.

Чтобы получить решение уравнения, введем новую переменную

$$\rho = r\mu;\ \ V(\rho)=U(\rho/\mu).$$

Тогда уравнение (9.6) превращается в такое же, но при $\mu = 1$

$$V(\rho)'' + \frac{1}{\rho}V'(\rho)+V(\rho)=0. \qquad (9.8)$$

Уравнение (9.8) является уравнением Бесселя (7.3) и имеет два линейно независимых решения: одно из них не ограничено в окрестности точки $\rho = 0$, а другое есть J_0 – функция Бесселя нулевого порядка, вида

$$J_0(\rho)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\rho^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}, \qquad (9.9)$$

где степенной ряд справа сходится на интервале $0 \le k < \infty$.

Все возможные ограниченные в окрестности нулевой точки решения уравнения (9.8) имеют вид $C\cdot J_0(\rho)$, где C – произвольная постоянная. Соответствующие функции $C\cdot J_0(r\mu)$ и будут нужными решениями уравнения (9.6), ограниченными в интервале $0 \le r < 1$.

Теперь нужно подобрать числа μ_k так, чтобы выполнялось граничное условие

$$J_0(1,\mu)=0.$$

Очевидно, что число μ_k должно быть корнем функции $J_0(r)$. Известно, что функция Бесселя $J_0(r)$ имеет бесконечное число корней (7.3): $\mu_1;\mu_2;\mu_3;...\mu_k$.

Итак, $\mu_k\ (k=1;2;3...)$ – собственные числа, а $J_0(\mu_k r)$ – принадлежащие им собственные функции краевой задачи (9.6). Эти функции можно умножать на произвольные постоянные $C_k \neq 0$ и получать собственные функции для собственных чисел μ_k

$$C_k \cdot J_0(\mu_k r),\ (k=1;2;3...).$$

При $\mu = \mu_k$ решение уравнения (9.5) запишем в виде

$$T_k(t) = a_k \cos(\mu_k vt) + b_k \sin(\mu_k vt).$$

Соответствующие решения уравнения (9.4), удовлетворяющие граничному условию (9.7), имеют вид

$$u(r,t) = \left[a_k \cos(\mu_k vt) + b_k \sin(\mu_k vt)\right] J_0(\mu_k r),$$

где a_k, b_k – произвольные постоянные.

Тогда и сумма бесконечного ряда

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(\mu_k vt) + b_k \sin(\mu_k vt)\right] J_0(\mu_k r) \qquad (9.10)$$

является решением уравнения (9.4), удовлетворяющим граничному условию (9.2).

Чтобы найти решение поставленной задачи, коэффициенты a_k и b_k находим из начальных условий (9.3):

$$u\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k r) = u_0(r), \qquad (9.11)$$

$$\frac{du}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a\mu_k b_k J_0(\mu_k r) = u_1(r). \qquad (9.12)$$

Функции Бесселя $J_0(\mu_k r)$ обладают свойствами, сходными со свойствами тригонометрических функций. Так, если функция $u_0(r)$ – кусочно-гладкая на $[0,1]$, то она непременно разлагается в ряд вида (9.10) с коэффициентами $-a_k$, сходящийся к ней, в смысле среднего квадратичного. Если тригонометрические функции ортогональны на $[0,2\pi]$, то функции Бесселя $-J_0(\mu_k x)$ тоже ортогональны на $[0,1]$ с весом $-x$ [2, 4]:

$$\int_0^1 xJ_0(\mu_k x)J_0(\mu_l x)\,dx = 0, \quad (k \neq l).$$

Отсюда следует, что в равенствах (9.11), (9.12) числа a_k и b_k вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{\int_0^1 xJ_0(\mu_k x)\cdot u_0(x)\,dx}{\int_0^1 x\left[J_0(\mu_k x)\right]^2 dx},$$

$$b_k = \frac{1}{a\mu_k}\frac{\int_0^1 xJ_0(\mu_k x)\cdot u_1(x)\,dx}{\int_0^1 x\left[J_0(\mu_k x)\right]^2 dx}, \tag{9.13}$$

$$(k = 1;2;3...).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как выглядит уравнение колебаний круглой мембраны в полярной системе координат?

2. Как упрощается уравнение колебаний круглой мембраны в случае осесимметричных колебаний мембраны?

3. Записать собственные числа и собственные функции задачи об осесимметричных колебаниях круглой мембраны, закрепленной по краю.

4. Найти коэффициенты a_k и b_k для случая осесимметричных колебаний мембраны, если $u_0(r) = \cos r, u_1(r) = 0$.

10. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

10.1. Уравнение теплопроводности для однородного твердого тела

Рассмотрим физическое тело Ω. Температуру его в точке (*x, y, z*) в момент времени *t* обозначим через *u*:

$$u = u\left(x, y, z, t\right).$$

Функция $u(x, y, z, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое называется уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \ \left(x, y, z\right) \in \Omega, \tag{10.1}$$

где a^2 – положительная физическая константа.

Рассмотрим элементарный куб σ в теле Ω (рис. 10.1).

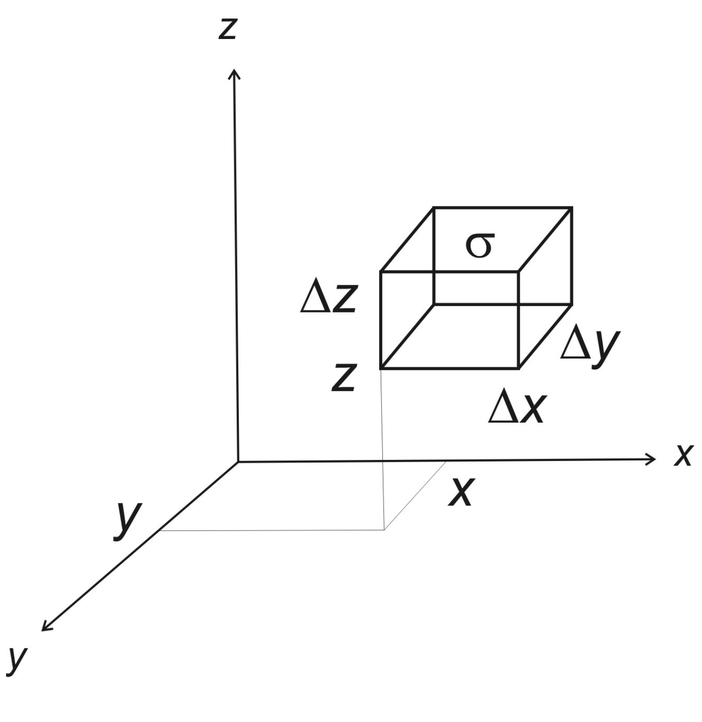

Рис. 10.1. Элементарный кубик σ в однородном теле Ω

Дифференциальное уравнение (10.1) имеет бесконечное множество решений, и чтобы найти среди них определенное решение, надо наложить на функцию дополнительные начальные и граничные условия.

10.2. Решения уравнения теплопроводности для однородного стержня

Рассмотрим тонкий стержень, покрытый тепловой изоляцией по боковой поверхности, лежащий на отрезке $[0;\pi]$ оси x (рис. 10.2).

Предполагается, что его физические свойства в точках любого его сечения одинаковы, температура стержня есть функция $u = u(x,t)$.

Рис. 10.2. Тонкий теплоизолированный стержень

В данном случае функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \tag{10.2}$$

где a^2 – константа, при условии что теплоемкость и теплопроводность стержня не зависят от x.

Поставим задачу: найти функцию $u = u(x,t)$, непрерывную для $t > 0,\ 0 \le x \le \pi$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (10.2) для $t > 0,\ 0 \le x \le \pi$ и следующим условиям:

а) начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x),(0\le x\le\pi), \tag{10.3}$$

где $u_0(x)$ – заданная на отрезке $[0;\pi]$ непрерывная функция;

б) граничным условиям

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,(\forall t\ge 0). \tag{10.4}$$

Таким образом, в начальный момент времени температура в стержне выражается функцией $u_0(x)$, а на протяжении всего времени опыта на концах стержня искусственно поддерживается температура, равная нулю.

Уравнение (10.4) будем решать методом Фурье разделения переменных: нужно отыскать частные решения уравнения (10.2) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{10.5}$$

Из уравнения (10.5) найдем частные производные:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(X\cdot T)=T\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=T\cdot X'';$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(X\cdot T)=X\frac{\partial T}{\partial t}=X\cdot T'.$$

Подставляя эти выражения в (10.2), получаем

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}. \tag{10.6}$$

В (10.6) левая часть не зависит от переменной *x*, а правая – от *t*, поэтому

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}=-\mu, \tag{10.7}$$

где μ – некоторая постоянная.

Таким образом, функции $X(x)$ и $T(t)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$X'' + \mu X = 0, \tag{10.8}$$

$$T' + a^2 \mu T = 0, \tag{10.9}$$

где μ – параметр разделения переменных.

Нужно найти решения, удовлетворяющие условиям (10.4), при всех t должны выполняться равенства

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \;\; u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0.$$

Если предположить, что $T(t) = 0, \forall t$, то $u(x,t) \equiv 0$ для всех x и t, существует только тривиальное решение. Поэтому имеется хотя бы одно t, для которого $T(t) \neq 0$, но тогда

$$X(0) = X(\pi) = 0. \tag{10.10}$$

10.3. Собственные числа и собственные функции задачи

Требуется найти числа μ, такие, для которых дифференциальное уравнение (10.2) имеет нетривиальное (не равное тождественно нулю) решение на отрезке $[0, \pi]$, удовлетворяющее граничным условиям (10.10). Искомые числа μ называются собственными значениями задачи, а соответствующие нетривиальные функции, удовлетворяющие граничным условиям (10.10), называются собственными функциями, соответствующими этим значениям.

Будем искать решение поставленной задачи среди положительных чисел $\mu = \lambda^2, (\lambda > 0)$. В этом случае числа $\pm i\lambda$ являются корнями характеристического уравнения, поэтому общее решение уравнения (10.7) запишется так:

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x.$$

Из условий (10.10) находим

$$\begin{cases} 0 = C_1; \\ 0 = C_1 \cos \lambda\pi + C_2 \sin \lambda\pi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 \sin \lambda\pi = 0. \end{cases}$$

Чтобы получить решение, тождественно не равное нулю, нужно считать $C_2 \neq 0$ и $\sin \lambda\pi = 0$.

Последнее возможно только при натуральных $\lambda = k$, когда каждому k соответствует решение

$$X_k(x) = C_k \sin kx, (k = 1; 2; 3...),$$

удовлетворяющее граничным условиям (10.10), это нетривиальное (тождественно не равное нулю) решение уравнения (10.7).

Числа $\mu = k^2, (k = 1; 2; 3...)$ есть собственные значения поставленной выше краевой задачи, а функции

$$X_k(x) = C_k \sin kx, (k = 1; 2; 3...),$$

при любом C_k – соответствующие этим значениям собственные функции.

При собственных значениях $\mu = -\lambda^2 < 0$ общее решение уравнения (10.7) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Найдем постоянные C_1 и C_2 из условия (10.7):

$$\left\{ \begin{matrix} 0 = C_1 + C_2, \\ 0 = C_1 e^{\lambda\pi} + C_2 e^{-\lambda\pi} \end{matrix} \right\}.$$

Определитель данной системы

$$\Delta = e^{-\lambda\pi} - e^{\lambda\pi} \neq 0,$$

поэтому система имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$.

Таким образом, частного решения уравнения (10.5), тождественно не равного нулю и удовлетворяющего условиям (10.7), не существует при $\mu = -\lambda^2$.

Если $\mu = 0$, то характеристическое уравнение имеет число нуль кратным корнем, поэтому общее решение (10.5) запишется как

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Учитывая краевые условия, получаем $C_1 = 0, C_1 + C_2\pi = 0$, откуда $C_1 = C_2 = 0,$ и $X(0) \equiv 0.$

Найдем решение уравнение (10.6) при $\mu = k^2$:

$$T' + a^2k^2T = 0,\ \frac{dT}{dt} = -a^2k^2T,\ T(t) = A_k \exp\left(-a^2k^2t\right),$$

где A_k – произвольная постоянная.

Итак, частные решения уравнения (10.1), удовлетворяющие краевым условиям (10.4), имеют следующий вид:

$$u_k(x,t) = b_k \exp\left(-a^2k^2t\right)\sin kx,\ (b_k = A_k C_k). \tag{10.11}$$

Всякая конечная сумма вида

$$u_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} b_k \exp\left(-a^2k^2t\right)\sin kx,$$

где b_k – произвольная постоянная, также является решением дифференциального уравнения (10.1), с заданными граничными условиями (10.4). Но тогда и сумма бесконечного ряда

$$u_N(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp\left(-a^2k^2t\right)\sin kx \tag{10.12}$$

будет удовлетворять уравнению (10.1) и граничным условиям (10.4).

Числа b_k должны быть коэффициентами Фурье функции $u_0(x)$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\sin kx dx.$$

Если функция $u_0(x)$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, то ряд (10.12) сходится к ней в смысле среднего квадратичного. При $t > 0$ ряд (10.12) сходится и его можно дифференцировать почленно сколько угодно раз:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \exp\left(-k^2 a^2 t\right)\sin kx; \\ \frac{du}{dt} &= -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \exp\left(-k^2 a^2 t\right)\sin kx, \end{aligned} \tag{10.13}$$

откуда следует, что $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Решить уравнение теплопроводности для теплоизолированного цилиндра с заданной температурой на его концах $u(0,t) = u(\pi, t) = T$.

2. Решить уравнение теплопроводности для теплоизолированного цилиндра с разными температурами на его обоих концах $u(0,t) = T_1; u(\pi, t) = T_2$.

3. Пластина толщиной $2a$ ($-a < x < a$) с заданным начальным распределением температуры $u_0(x)$ излучает тепло в окружающую среду с температурой $T = 0$. Считая, что излучение подчиняется закону $W = \sigma T^4$, найти распределение температуры в пластине в произвольный момент времени t, т. е. найти собственные функции задачи $-u(x, t)$.

11. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

11.1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Распределение тепла в теле Ω (см. рис. 10.1) называется стационарным, если температура тела зависит от положения точки (x, y, z), но не зависит от времени t, т. е. температура u есть функция только координат $u = u(x, y, z)$.

Функция $u = u(x, y, z)$ называется гармонической в области Ω, если она имеет непрерывные частные производные второго порядка на всей области Ω и удовлетворяет уравнению Лапласа [5]

$$\Delta u = 0. \tag{11.1}$$

Теорема 1. Пусть ограниченная область Ω пространства имеет кусочно-гладкую границу (поверхность) Г, на которой задана непрерывная функция $f(x, y, z)$, но тогда существует единственная непрерывная функция $u = u(x, y, z)$, гармоническая на Ω, такая, что $u|_{\Gamma} = f(x, y, z)$.

Данная теорема имеет очевидную физическую интерпретацию: если на границе Г тела Ω все время поддерживать температуру u, равную $u|_{\Gamma} = f(x, y, z)$, то внутри тела установится вполне определенная (единственная) температура $u(x, y, z)$. Это утверждение с физической точки зрения надо считать очевидным [5].

Задача Дирихле имеет большое практическое применение для плоскости и формулируется так: на кусочно-гладкой границе Г плоской области Ω задана непрерывная функция $f(x, y)$. Требуется найти функцию $u(x, y)$, непрерывную на $\underline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ и гармоническую на Ω, т. е. имеющую непрерывные вторые частные производные и удовлетворяющую уравнению Лапласа в области Ω [5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Эта задача решается положительно, на всей области Ω существует, и притом единственная функция $u(x, y)$, удовлетворяющая требованиям этой задачи.

11.2. Задача Дирихле для круга

Теорема 2. Пусть σ есть открытый единичный круг с центром в начале прямоугольной системы координат (x, y), и на его границе Γ задана непрерывная (периода 2π) функция $f(\theta)$, где θ – полярный угол точки. Тогда на замыкании σ = σ + Γ круга σ существует, и притом единственная функция $u(x, y)$, непрерывная на σ, гармоническая на σ и равная $f(\theta)$, на Γ:

$$u\big|_{\Gamma}=f(\vartheta).$$

В полярных координатах функция $u = u(\rho, \theta)$ записывается в виде ряда

$$u(\rho,\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\left(a_k\cos k\vartheta+b_k\sin k\vartheta\right), \tag{11.2}$$

где коэффициенты Фурье функции $f(\theta)$ выражаются в виде

$$\begin{aligned} a_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\vartheta)\cos k\vartheta d\vartheta,\\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\vartheta)\sin k\vartheta d\vartheta,\ \ (k=1;2;3...). \end{aligned} \tag{11.3}$$

Докажем *теорему 2* в предположении, что функция $f(\theta)$ имеет вторую непрерывную производную.

Разложим функцию $f(\theta)$ в ряд Фурье:

$$u(\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\vartheta+b_k\sin k\vartheta\right).$$

Так как $f(\theta)$ имеет вторую непрерывную производную, то

$$\left|a_k\right| \le \frac{2M}{k^2},\ \left|b_k\right| \le \frac{2M}{k^2},\ \left(k \ne 0\right),$$

где константа $M = \max f''\left(t\right),\ 0 \le t \le 2\pi$.

Так как ряд $\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\left|a_k\right| + \left|b_k\right|\right) \le \left|\frac{a_0}{2}\right| + 4M\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд равномерно сходится на границе σ. Но тогда $u = u(\rho, \theta)$ есть непрерывная на σ функция как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

Кроме того,

$$u\left(1, \vartheta\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta\right) = f\left(\vartheta\right),$$

т. е. выполняется свойство (11.1).

Каждый член ряда (11.2) удовлетворяет уравнению Лапласа в полярных координатах $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0.$

Кроме того, при условии $\left(0 \le \rho \le 1\right)$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}\left(a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta\right),\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(k-1\right)\rho^{k-2}\left(a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta\right),\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\rho^k\left(-a_k \cos k\vartheta - b_k \sin k\vartheta\right).
\end{aligned} \tag{11.4}$$

Почленное дифференцирование ряда (11.2) законно, потому что для любого положительного ρ члены, например, третьего ряда (11.4) не превышают

$$\rho_0^k k^2 \frac{4M}{k^2} = 4M\rho_0^k,\ \left(0 \le \rho \le \rho_0\right),$$

а ряд $4M\sum_{k=1}^{\infty}\rho_0^k$ сходится, поэтому сумма ряда является решением поставленной задачи, а решение задачи Дирихле является единственным [5].

11.3. Задача Дирихле для полуплоскости

Пусть в полуплоскости $R_2^+ = \{-\infty < x < \infty; y > 0\}$ требуется найти ограниченное решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (-\infty < x < \infty). \tag{11.5}$$

Проверим, что функции вида

$$u_\lambda(x,y) = \left[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right]\exp(-\lambda y)$$

при любом фиксированном $\lambda > 0$ являются ограниченными гармоническими на R_2^+, т. е. удовлетворяют уравнению (11.1). Но тогда сумма таких функций и даже интеграл по параметру также будет решением уравнения (11.1), лишь бы было законно дифференцирование под знаком интеграла по параметрам x и y:

$$u(x,y) = \int_0^{\infty}\left[\alpha(\lambda)\cos\lambda x + \beta(\lambda)\sin\lambda x\right]\exp(-\lambda y)\,d\lambda. \tag{11.6}$$

Функции $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ найдем из условия

$$u(x,0) = \int_0^{\infty}\left[\alpha(\lambda)\cos\lambda x + \beta(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda = \varphi(x). \tag{11.7}$$

Запишем разложение функции $\varphi(x)$ в интеграл Фурье:

$$u(x)=\int\limits_0^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\right)\cos\lambda x+\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right)\sin\lambda x\right\}d\lambda. \quad (11.8)$$

Сравнивая формулы (11.3) и (11.8), мы видим, что

$$\alpha(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi,$$

$$\beta(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi. \quad (11.9)$$

Подставляя эти функции в (9.3), получаем

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\exp(-\lambda y)\left[\int\limits_0^{\infty}\varphi(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\left[\int\limits_0^{\infty}\exp(-\lambda y)\cos\lambda(t-x)\,d\lambda\right]dt.$$

Замечание 2. Можно доказать, что если функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена на $(-\infty;\infty)$, то полученное решение задачи Дирихле для верхней полуплоскости единственно в классе ограниченных функций [5].

11.4. Задача Дирихле для шара в осесимметричном случае

Осесимметричная задача Дирихле для шара радиуса $r=R$ с центром в начале координат формулируется следующим образом: найти функцию $u(r,\theta)=R$ удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u(r,\theta)=0, \forall r<R$ и граничному условию на границе – s

$$u\big|_{r=R}=u_s(\theta).$$

Уравнение Лапласа для осесимметричного случая, когда $u(r,\theta)$ и не зависит от φ, можно привести к виду [2]:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=0. \tag{11.10}$$

Решение этого уравнения найдем в виде произведения двух функций

$$u(r,\theta)=U(r)F(\theta).$$

Как показано в седьмой главе, решением задачи будет функция

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{11.11}$$

где C_n – произвольные постоянные; P_n – полиномы Лежандра степени – n.

Чтобы полученное решение удовлетворяло граничному условию, необходимо, чтобы в пределах изменения угла $0 \le \theta \le \pi$ выполнялось условие

$$u_s(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n P_n(\cos\theta). \tag{11.12}$$

Воспользуемся свойством ортогональности полиномов Лежандра, умножив выражение (11.12) на P_m – произвольный полином степени $m \ge 0$, и проинтегрируем по граничной сфере радиуса R [2]:

$$\iint_s u_s(\theta) P_m(\cos\theta) d\sigma=\sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n \iint_s P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) d\sigma,$$

где $d\sigma$ – элемент поверхности сферы, $d\sigma = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Интегрирование по поверхности происходит в пределах углов $0 \le \theta \le \pi$ и $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$\iint_s P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) d\sigma =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta =$$

$$= 2\pi R^2 \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & n \ne m, \\ 2\pi R^2 \dfrac{2}{2m+1}, & n = m. \end{cases}$$

Таким образом, в правой части суммы все члены равны нулю, за исключением одного, когда $n = m,$ следовательно, правая часть равна [2]

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n \iint_s P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) d\sigma = C_n R^n \frac{4\pi R^2}{2n+1},$$

откуда можно выразить коэффициенты C_n [2]

$$C_n = \frac{1}{R^n}(2n+1)\frac{1}{4\pi R^2}\iint_s u_s(\theta) P_m(\cos\theta) d\sigma. \qquad (11.13)$$

Полученное выражение позволяет найти коэффициенты C_n и подставить их в полученное ранее решение.

Если граничные значения функции u_s выражены в виде полиномов Лежандра или их линейной комбинации, например, $u_s = \cos\theta = P_1(\cos\theta)$, то в формуле (11.13) интеграл будет отличен от нуля только для $m = 1$, при этом коэффициент C_1 будет равен

$$C_1 = \frac{3}{R}\frac{1}{4\pi R^2}\iint_s P_1(\cos\theta)\cos\theta d\sigma = \frac{3}{2R}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, решением задачи Дирихле для шара радиуса R при граничных значениях $u_s = \cos\theta$ будет функция

$$u(r,\theta) = \frac{r}{R}\cos\theta.$$

В случае, когда $u_s = \cos 2\theta$, представим u_s в виде линейной комбинации

$$u_s = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{4}{3}P_2(\cos\theta) - \frac{1}{3}P_0(\cos\theta).$$

Следовательно, останутся отличные от нуля только два члена $n = 0, n = 2.$

$$u(r,\theta) = \frac{4}{3}P_2(\cos\theta) - \frac{1}{3}P_0(\cos\theta) = \frac{4}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{3}.$$

11.5. Примеры решения задач Дирихле для одномерных случаев

Пусть требуется найти решение уравнения Лапласа для случая, когда $u = u(x)$, (примером задачи является распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0,$$

решением задачи являются линейные функции $u = Ax + B$. При граничных условиях $u(0) = u_0$, и $u(l) = u_l$ решение имеет вид

$$u(x) = \frac{u_l - u_0}{l} x + u_0, \ \left(0 \le x \le l\right).$$

В случае задач с осевой симметрией, например при стационарном распределении тепла в пространстве между двумя расположенными соосно-цилиндрическими поверхностями, будем считать, что функция $u = u(r)$ и не зависит от z и φ; тогда задача Дирихле имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{du}{dr}\right) = 0; a \le r \le b; \\ u\big|_{r=a} = u_a; u\big|_{r=b} = u_b. \end{cases}$$

Решением задачи является функция

$$u(r) = u_a + \left(u_b - u_a\right)\frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

Если $u_a = u_b$, то температура во всем пространстве $u(r) = u_a$, полученное решение теряет смысл при $r = 0$.

В сферически-симметричном случае, например при изучении распределения электрического потенциала в сферическом конденсаторе, решение зависит только от радиуса. Получаем уравнение Лапласа в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=0,$$

откуда $r^2\dfrac{du}{dr}=A, \dfrac{du}{dr}=\dfrac{A}{r^2}, u=-\dfrac{A}{r}+B.$

С граничными условиями 1-го рода задача Дирихле имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{du}{dr}\right)=0; a\le r\le b;\\ u\big|_{r=a}=u_a; u\big|_{r=b}=u_b.\end{cases}$$

Стационарное распределение электрического потенциала в сферическом слое имеет

$$u(r)=u_a+(u_b-u_a)\frac{1/r-1/a}{1/b-1/a},$$

полученное решение теряет смысл при $r = 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие решения задачи Дирихле называются гармоническими?

2. Решить задачу Дирихле для случая распределения тепла в пространстве между двумя расположенными соосно-цилиндрическими поверхностями, если: $a=0{,}1(м); b=0{,}2(м); u_a=100K; u_b=500K.$

3. Решить задачу Дирихле для случая распределения электрического потенциала в сферическом конденсаторе в слое между значениями r $a\le r\le b; a=0{,}01(м); b=0{,}05(м)$, когда потенциалы равны $u_a = 0$ *В*, $u_b = 500$ *В*.

12. НЕОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В математической физике часто встречаются практические задачи, которые описываются неоднородными дифференциальными уравнениями, начальные и граничные условия также могут быть неоднородными. Такие задачи называют неоднородными, и для их решения применяются следующие методы:

1) метод приведения к однородной задаче;
2) метод конечных интегральных преобразований (метод Гринберга).

12.1. Метод приведения к однородной задаче

Метод заключается в том, что общее решение $u(x,t)$ неоднородной задачи находится как сумма двух функций $u(x,t) = u_1(x) + u_2(x,t)$, где $u_1(x)$ – общее решение однородного у равнения с неоднородными граничными условиями; $u_2(x,t)$ – частное решение уравнения с однородными условиями. Рассмотрим данный метод на примерах решения некоторых задач, часто встречающихся в математической физике.

12.2. Примеры решения некоторых задач

Пример 1. Найти распределение температуры $T(x,t)$ в тонкой однородной пластине толщиной a $(0 \le x \le a)$, при этом на одной стенке температура равна $T\big|_{x=0} = T_0$, на другой стенке температура равна $T\big|_{x=a} = 0$.

Данная задача имеет следующий математический вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \dfrac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \tau = \dfrac{k \cdot t}{c \cdot \rho}, \tau > 0, \\ T\big|_{x=0} = T_0, T\big|_{x=a} = 0, \\ T\big|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases} \tag{12.1}$$

Решение задачи (12.1) будем искать в виде суммы двух функций:

$$T = T_1(x) + T_2(x, \tau).$$

Функция $T_1(x)$ должна удовлетворять решению уравнения с неоднородными граничными условиями, эта задача может быть записана так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = 0, \\ T_1\Big|_{x=0} = T_0, \ T_1\Big|_{x=a} = 0. \end{cases} \tag{12.2}$$

Решением задачи (12.2) будет функция, дающая стационарное распределение температуры:

$$T_1 = T_0\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Функцию $T_2(x, \tau)$ можно найти из задачи с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial T_2}{\partial \tau} = 0, \\ T_2\Big|_{x=0} = 0, \ T_2\Big|_{x=a} = 0, \\ T_2\Big|_{\tau=0} = \varphi(x) - T_1(x). \end{cases} \tag{12.3}$$

Общее решение поставленной неоднородной задачи о распределении температуры в однородной пластине толщиной a имеет вид

$$T(x, \tau) = \varphi(x) - T_0\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Пример 2. Найти распределение температуры $T(r, t)$ в тонком однородном цилиндре, в котором вследствие протекания тока выделяется теплота $Q,$ при этом на поверхности цилиндра температура равна нулю. Начальное распределение температуры задано функцией $T(r,0)=\varphi(r)$.

Данная задача с однородными граничными условиями имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT}{dr}\right)-\dfrac{dT}{d\tau}=-\dfrac{Q}{k}, \tau>0, 0\le r\le a, \\ T\Big|_{r=0}=O(1); T\Big|_{r=a}=0, \\ T\Big|_{\tau=0}=\varphi(r). \end{cases} \tag{12.4}$$

Решение задачи (12.1) будем искать в виде суммы двух функций:

$$T=T_1(r)+T_2(r,\tau).$$

Функция $T_1(r)$ должна удовлетворять решению уравнения (12.4) с однородными граничными условиями. Эта задача может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT_1}{dr}\right)=-\dfrac{Q}{k}, \\ T_1\Big|_{r=0}=O(1); T_1\Big|_{r=a}=0. \end{cases} \tag{12.5}$$

Решением задачи является функция

$$T_1(r)=\frac{Qa^2}{4k}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right).$$

Для нахождения функции $T_2(r,\tau)$ ставится задача с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT_2}{dr}\right)-\dfrac{dT_2}{d\tau}=-\dfrac{Q}{k}, \tau>0, 0\le r\le a, \\ T_2\Big|_{r=0}=O(1); T_2\Big|_{r=a}=0, \\ T_2\Big|_{\tau=0}=\varphi(r)-T_1(r). \end{cases} \tag{12.6}$$

Общее решение поставленной неоднородной задачи о распределении температуры в однородном цилиндре с внутренним выделением теплоты может быть найдено в виде функции

$$T(r) = \varphi\left(r\right) - \frac{Qa^2}{4k}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Пример 3. Решить задачу о вынужденных колебаниях круглой мембраны, закрепленной по краю, под действием осесимметричной внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону $F(r,\tau) = q\left(r\right)\sin\left(\omega t\right)$.

Математическая формулировка задачи имеет такой вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -q\left(r\right)\sin\left(\omega t\right), \;\; t > 0, 0 \le r \le a, \\ u\Big|_{r=0} = u_0\, ; u\Big|_{r=a} = 0, \\ u\Big|_{t=0} = \varphi\left(r\right), \;\; \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi\left(r\right), \end{cases} \tag{12.7}$$

где $\varphi(r), \psi\left(r\right)$ – заданные функции (начальные смещение и скорость).

Общее решение задачи (12.7) будем искать в виде суммы двух функций:

$$u\left(r,t\right) = u_1(r) + u_2\left(r,\tau\right).$$

Функция $u_1 = A\left(r\right)\sin\left(\omega t\right)$ – гармонические колебания с частотой ω, $u_2 = u_2\left(r,t\right)$ – частное решение задачи с однородными условиями.

Для определения функции u_2 ставится однородная задача:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=0, \\ u_2\Big|_{r=0}=u_0\,;u_2\Big|_{r=a}=0\,, \\ u_2\Big|_{t=0}=\varphi(r)-A(r)\sin(\omega t)\Big|_{t=0}=\varphi(r), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(r)-\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(r)-\omega A(r). \end{cases} \tag{12.8}$$

Общее решение однородной задачи о колебаниях круглой мембраны, закрепленной по краю, представлено в разд. 9 пособия в виде суммы бесконечного ряда.

Пример 4. Рассмотрим решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости в декартовых координатах.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \ \ 0\le x\le a, 0\le y\le b, \\ u\big|_{x=0}=\psi_0(y), \ \ u\big|_{x=a}=\psi_a(y), \\ u\big|_{y=0}=\varphi_0(x), \ \ u\big|_{y=b}=\varphi_b(x). \end{cases} \tag{12.9}$$

Решение задачи (12.9) будем искать в виде суммы двух функций:

$$u(x,y)=u_1(x)+u_2(y).$$

Для нахождения $u_1(x), u_2(y)$ имеем следующие однородные задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0, \\ u_1\big|_{x=0}=0, \ \ u_1\big|_{x=a}=0, \\ u_1\big|_{y=0}=\varphi_0(x), \ \ u_1\big|_{y=b}=\varphi_b(x); \end{cases} \tag{12.10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0, \\ u_2\big|_{x=0}=\psi_0(x),\;\; u_2\big|_{x=a}=\psi_a(x), \\ u_1\Big|_{y=0}=0,\;\; u_1\Big|_{y=b}=0. \end{cases} \tag{12.11}$$

Задачи (12.10) и (12.11) являются однородными и могут быть решены методом Фурье.

12.3. Метод Гринберга

Метод конечных интегральных преобразований, называемый методом Гринберга, является обобщением метода Фурье для неоднородных дифференциальных уравнений и неоднородных граничных условий.

Линейные дифференциальные операторы $L_x(u), M_y(u)$ имеют вид

$$L_x(u)=\frac{1}{r(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u\right],$$

$$M_y(u)=A(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+B(y)\frac{\partial u}{\partial y}+C(y)u.$$

Функции $p(x), q(x), r(x)$ конечны и непрерывны на интервале $[a,b]$, причем $p(x)>0, r(x)>0$.

Функция $u=u(x,y)$ удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных

$$L_x(u)+M_y(u)=F(x,y),\;\; a<x<b,\;\; c<y<d. \tag{12.12}$$

Функция $u=u(x,y)$ по переменной x также удовлетворяет одному из граничных условий задачи Штурма – Лиувилля:

$$u\big|_{x=a}=f_a(y),\;\; u\big|_{x=b}=f_b(y); \tag{12.a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = \varphi_a(y), \ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=b} = \varphi_b(y); \tag{12.b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - (h_a u)\Big|_{x=a} = \psi_a(y), \ \frac{\partial u}{\partial x} - (h_b u)\Big|_{x=b} = \psi_b(y). \tag{12.c}$$

Для решения неоднородных задач методом Гринберга необходимо использовать следующий алгоритм.

1. Поставить задачу Штурма – Лиувилля, связанную с заданными граничными условиями (12.a), (12.b), (12.c), и найти собственные значения и собственные функции этой задачи.

2. Преобразовать исходное уравнение в обычное дифференциальное уравнение для трансформанты $u_n(y)$.

3. Преобразовать граничные условия по второй переменной для трансформанты $u_n(y)$.

4. Определить трансформанту $u_n(y)$ и найти решение исходной задачи в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля.

5. Проверить сходимость полученного ряда и при необходимости улучшить ее.

12.4. Пример решения задачи методом Гринберга

Пример 5. Задача о вынужденных колебаниях круглой мембраны, на которую действует осесимметричная внешняя сила, изменяющейся по гармоническому закону $F(r,\tau) = q(r)\sin(\omega t)$.

Математическая формулировка задачи имеет такой вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -q(r)\sin(\omega t), \ t > 0, 0 \le r \le a, \\ u\big|_{r=0} = u_0, u\big|_{r=a} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(r), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(r), \end{cases} \tag{12.13}$$

где $\varphi(r), \psi(r)$ – заданные функции (начальные смещение и скорость).

1. Обозначим дифференциальный оператор $L_r(u) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$, тогда задача Штурма – Лиувилля, связанная с заданными граничными условиями, имеет вид

$$\begin{cases} L_r(R) + \lambda R r = 0, \;\; 0 \le r \le a, \\ R\big|_{r=0} = u_0, \;\; R\big|_{r=a} = 0. \end{cases} \tag{12.14}$$

Собственные значения и собственные функции этой задачи рассмотрены в разд. 9 пособия и имеют вид

$$\lambda = \left(\frac{\mu_n}{a}\right), R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n}{a} r\right), n = 1;2;3...\infty, \tag{12.15}$$

где μ_n – корни функции Бесселя $J_0(\mu) = 0$.

2. Исходное уравнение преобразуем в уравнение трансформанты $u_n(t)$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + \frac{\mu_n^2 \nu^2}{a^2} u_n = \nu^2 q_n(t), \tag{12.16}$$

где

$$u_n(t) = \int_0^a r R_n(r) u(r,t)\, dr,$$

$$q_n(t) = \int_0^a r R_n(r) q(r,t)\, dr.$$

3. Преобразуем исходные граничные условия в однородные для $u_n(t)$:

$$u_n\big|_{t=0} = 0, \;\; \frac{d}{dt}(u_n)\big|_{t=0} = 0. \tag{12.17}$$

4. Общее решение уравнения трансформанты представим в виде

$$u_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\mu_n v t}{a}\right) + B_n \sin\left(\frac{\mu_n v t}{a}\right) + w_n(t), \qquad (12.18)$$

где $w_n(t)$ – частное решение уравнения (12.16) – можно выбрать в виде

$$w_n(t) = C_n \sin(\omega t),$$

$$C_n = \frac{q_n v^2}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)}, \ \ \omega_n^2 = \frac{\mu_n v}{a}.$$

Преобразуем полученное решение (12.18) к виду

$$u_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\mu_n v t}{a}\right) + B_n \sin\left(\frac{\mu_n v t}{a}\right) + \frac{q_n v}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)} \sin(\omega t).$$

С учетом начальных условий (12.17) определяем коэффициенты:

$$A_n(t) = 0, B_n(t) = \frac{q_n v^2 \omega}{\omega_n \left(\omega_n^2 - \omega^2\right)}.$$

5. Полученное решение задачи имеет вид

$$u_n(r,t) = \frac{2v^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \frac{\sin(\omega t) - (\omega / \omega_n) \sin(\omega_n t)}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)} \frac{J_0(\mu_n r / a)}{J_1^2(\mu_n)}.$$

Полученное решение неоднородной задачи нужно проверить на сходимость.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается метод приведения к однородной задаче?
2. В чем состоит метод конечных интегральных преобразований (метод Гринберга)?
3. Найти решение задачи теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ для случаев:

а) заданного оттока тепла на границе $-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = q$;

б) теплообмена на границе по закону Ньютона $\left(k\frac{\partial u}{\partial x} + h(u-u_0)\right)\Big|_{x=0} = 0.$

4. Найти решение краевой задачи диффузии $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x>0, t>0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \ u\big|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$

5. Используя метод Гринберга, найти решение задачи о вынужденных колебаниях закрепленной струны, на которую действует сосредоточенная сила $-\ F_0 \sin(\omega t)$, приложенная в точке $x = \frac{l}{2}$.

6. Используя метод Гринберга, найти решение задачи о вынужденных колебаниях закрепленной струны, на которую равномерно распределенная сила тяжести $G(x) = u_0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие переработано автором в соответствии с учебной программой дисциплины «Специальные разделы математической физики» для направления подготовки бакалавров 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика, на основе изданного ранее учебного пособия [7].

Пособие содержит описание основных уравнений и задач математической физики с заданными граничными и (или) начальными условиями, а также методы решения линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Произвольное линейное дифференциальное уравнение второго порядка для функции двух переменных общего вида (2.1) с помощью замены переменных $x; y$ может быть преобразовано к одному из следующих трех видов: гиперболическому, эллиптическому или параболическому.

После преобразования переменной $y = v \cdot t$ можно убедиться, что уравнение колебаний струны относится к уравнениям гиперболического вида, уравнение линейной теплопроводности – к уравнениям параболического вида. Стационарные уравнения, которые не зависят от переменной t, относятся к уравнениям эллиптического вида.

Для каждого из перечисленных выше видов уравнений накладываются дополнительные условия, которые вводят ограничения на получаемые общие решения, но чаще всего дают возможность заранее выбрать функции, являющиеся частным решением уравнения с заданными начальными и (или) граничными условиями, формируя таким образом задачи математической физики.

Начальные условия заключаются в задании при $t = 0$ значений самой функции $u(x)$ (в параболическом случае), а также значений ее производной du/dt (в гиперболическом случае).

Граничные условия заключаются в задании самой функции $u(x, t)$ на концах интервала изменения координаты (концы струны в задаче о колебаниях, или концы стержня в задаче о линейной теплопроводности).

Если процесс протекает в бесконечном интервале изменения координаты x (бесконечная струна, бесконечный стержень), то получается задача Коши с заданными начальными условиями для уравнений гиперболического и параболического видов. Если задача ставится для конечного интервала изменения координаты ($a < x < b$), то должны быть заданы начальные условия и условия на краях интервала – это смешанная задача.

Для стационарных уравнений (эллиптический случай), когда искомая функция u зависит только от пространственных координат $u(x, y, z)$ и не зависит от времени t, ставятся только краевые условия.

Среди задач математической физики выделяется класс корректно поставленных задач, т. е. задач, для которых нетривиальное решение существует, оно единственное и непрерывно зависит от выбора начальных и граничных условий для математической модели рассматриваемых физических явлений или процессов [1, 2].

В некоторых случаях решение задачи получается в форме ряда (интеграла), т. е. в виде разложения по некоторой системе функций по одной из переменных, встречающихся в задаче. Чтобы найти эту систему функций, по которым можно осуществить разложение, необходимо найти решение некоторой граничной задачи для дифференциального уравнения в частных производных, получившей название «задача Штурма – Лиувилля» [1, 2].

Примеры решения таких задач показаны в разд. 6 пособия.

При использовании в задачах математической физики метода разделения переменных Фурье, для криволинейных систем координат (1.3) приходят к так называемым специальным функциям: цилиндрическим, сферическим и т. д. Специальные функции, как правило, не могут быть выражены через другие элементарные функции, но их свойства дают дополнительные сведения о полученном общем решении, а само решение в этом случае имеет наиболее компактный аналитический вид.

В разд. 7 пособия представлены некоторые из специальных функций, а в разд. 9 через цилиндрические функции первого рода – функции Бесселя – найдено общее решение задачи о колебаниях круглой мембраны. Сферические функции – полиномы Лежандра – используются в разд. 11 для решения задачи Дирихле для шара.

В разд. 12 пособия рассмотрены некоторые неоднородные задачи, которые встречаются в практической деятельности, и представлены основные методы решения неоднородных задач, а именно: метод приведения к однородной задаче и метод конечных интегральных преобразований – метод Гринберга.

В прил. 1–4 к учебному пособию представлены практические задания, которые обучающиеся должны выполнить самостоятельно и представить решения к указанному преподавателем сроку. Прил. 5 содержит фонд тестовых заданий по дисциплине «Специальные разделы математической физики».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голоскоков Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple : учеб. для вузов. – СПб. : Питер, 2004. – 539 с.

2. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. – 2-е изд. – М. : Наука, 1969. – 288 с.

3. Гутер Р. С., Ямпольский А. Р. Дифференциальные уравнения : учеб. пособие для втузов. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1976. – 304 с.

4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М. : Наука, 1977. – 736 с.

5. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика : учеб. для вузов. В 3-х т. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский ; под ред. В. А. Садовничего. – 6-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2004. – 512 с.

6. Холодова С. Е., Перегудин С. И. Специальные функции в задачах математической физики : учеб. пособие. – СПб. : НИУ ИТМО. – 2012. – 72 с.

7. Корнеев В. С. Методы математической физики. Основные уравнения и задачи : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2020. – 81 с.

Приложение 1

Тема № 2

Преобразовать дифференциальное уравнение к каноническому виду:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

3) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

6) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

7) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

8) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

9) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

10) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

11) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial x}=0;$

12) $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$

13) $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$

14) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Тема № 3

Найти решение задачи Коши методом Даламбера:

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; -\infty \le x \le \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0} = \sin x;\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0;$

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; -\infty \le x \le \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0} = 0;\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \cos x;$

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; -\infty < x < \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0} = x(x-1);\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0;$

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; -\infty < x < \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0} = -x(x+1);\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0;$

5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; -\infty < x < \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0} = \cos x;\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0;$

6) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; -\infty < x < \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0} = 0;\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sin x;$

7) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; -\infty < x < \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0} = x(x-1);\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0;$

8) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; -\infty < x < \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0} = -x(x-1);\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0;$

9) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; -\infty < x < \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0} = \cos 2x;\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0;$

10) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; -\infty \le x \le \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0} = 0;\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sin 2x;$

11) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; -\infty < x < \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0} = 0;\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = V_0;$

12) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0; -\infty < x < \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0}=\left(at\right);\ \ u\big|_{t=0}=\left(1-at\right);$

13) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; -\infty < x < \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0}=\cos x;\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin x;$

14) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0; -\infty < x < \infty; t \ge 0;\ \ u\big|_{t=0}=\cos 2x;\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$

Тема № 6

Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля:

1) $y'' + \lambda y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y(l) = 0,\ \ x \in [0, l];$

2) $y'' + \lambda y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(l) = 0,\ \ x \in [0, l];$

3) $y'' + \lambda y = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y(l) = 0,\ \ x \in [0, l];$

4) $y'' + \lambda y = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y'(l) = 0,\ \ x \in [0, l];$

5) $y'' + \lambda y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(l) + hy(l) = 0,\ \ x \in [0, l], h > 0;$

6) $y'' + \lambda y = 0,\ \ y(l) = 0,\ \ -y'(0) + hy(0) = 0,\ \ x \in [0, l], h > 0;$

7) $y'' + \lambda y = 0,\ \ y'(l) = 0,\ \ -y'(0) + hy(0) = 0,\ \ x \in [0, l], h > 0;$

8) $y'' + \lambda y = 0,\ \ -y'(0) + hy(0) = 0,\ \ y'(l) + hy(l) = 0,\ \ x \in [0, l], h > 0;$

9) $y'' + \lambda y = 0,\ \ -y'(-l) + hy(-l) = 0,\ \ y'(l) + hy(l) = 0,\ \ x \in [-l, l], h > 0;$

10) $y'' + \lambda y = 0,\ \ y(-l) = 0,\ \ y(l) = 0,\ \ x \in [-l, l];$

11) $y'' + \lambda y = 0,\ \ y'(-l) = 0,\ \ y'(l) = 0,\ \ x \in [-l, l];$

12) $y'' + \lambda y = 0,\ \ y'(-l) = 0,\ \ y'(l) = 0,\ \ x \in [-l, l];$

13) $\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right) + \dfrac{\lambda}{x} y = 0,\ \ y(a) = 0,\ \ y(b) = 0,\ \ x \in [a, b];$

14) $\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+\lambda x^2 y=0,\ \ y(a)=0,\ \ y(b)=0,\ \ x\in[a,b];$

15) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\lambda}{x}y=0,\ \ y'(a)=0,\ \ y'(b)=0,\ \ x\in[a,b];$

16) $\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+\lambda x^2 y=0,\ \ y'(0)=0,\ \ y'(b)=0,\ \ x\in[a,b].$

Приложение 4

Темы № 8, 10, 11

Струна с жестко закрепленными концами $a \le x \le b$ имела в начальный момент времени отклонение $u\big|_{t=0} = u_0$. Найти решение для колебаний всей струны, если скорости всех точек $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0$:

1) $0 \le x \le \pi;\ \ t \ge 0;\ \ u\Big|_{t=0} = \sin x;$

2) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2};\ \ t \ge 0; u\Big|_{t=0} = \cos x;$

3) $0 \le x \le 1;\ \ t \ge 0;\ \ u\Big|_{t=0} = x(1-x);$

4) $-1 \le x \le 0; t \ge 0; u\Big|_{t=0} = x(x+1).$

Струна с жестко закрепленными концами $a \le x \le b$ в начальный момент времени находилась в равновесии $u\big|_{t=0} = 0$. Найти решение для колебаний струны, если скорости всех точек $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = u_1$:

5) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}; t \ge 0; \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \cos x;$

6) $-1 \le x \le 1; t \ge 0; \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = V_0;$

7) $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}; t \ge 0; \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \cos 2x;$

8) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}; t \ge 0; \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sin 2x.$

Найти решение смешанной задачи для волнового уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; 0 \le x \le l; t > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u\Big|_{t=0} = x(l-x); \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0; \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Приложение 5

Фонд тестовых заданий по дисциплине «Специальные разделы математической физики»

Вариант № 1

1. Вид оператора Лапласа в сферических координатах.
2. Сформулировать задачу об установившихся синусоидальных колебаниях струны.
3. Выполнить процесс разделения переменных в случае уравнения с двумя независимыми переменными x, y.
4. Найти решение задачи Коши методом Даламбера:

$$0 \le x \le \pi; t \ge 0; u\big|_{t=0} = \sin x; \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 2

1. Вывод уравнения теплопроводности.
2. Сформулировать краевые задачи для линейного уравнения теплопроводности.
3. Выполнить процесс разделения переменных в случае уравнения с тремя независимыми переменными x, y, z.
4. Найти решение задачи Коши методом Даламбера:

$$0 \le x \le \pi; t \ge 0; u\big|_{t=0} = 0; \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = V_0.$$

Вариант № 3

1. Вид оператора Лапласа в цилиндрических координатах.
2. Сформулировать краевые задачи для одномерного волнового уравнения.
3. Выполнить процесс разделения переменных в уравнении Лапласа для прямоугольных координат x, y.
4. Найти решение задачи Коши методом Даламбера:

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}; t \ge 0; u\big|_{t=0} = \cos x; \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 4

1. Вывод уравнения колебаний струны.
2. Сформулировать краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.
3. Выполнить процесс разделения переменных в уравнении Лапласа для полярных координат *r,* φ.
4. Найти решение задачи Коши методом Даламбера:

$$0 \le x \le \pi; t \ge 0; u\big|_{t=0} = \sin 2x; \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = V_0.$$

Вариант № 5

1. Вывод основного уравнения электростатики.
2. Из второго закона Ньютона получить выражение для импульса материальной точки.
3. Выполнить процесс разделения переменных в случае одномерного волнового уравнения.
4. Найти решение задачи Коши методом Даламбера:

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}; t \ge; u\big|_{t=0} = \cos 2x; \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = V_0.$$

Вариант № 6

1. Вывод уравнения поперечных колебаний мембраны.
2. Характеристическое уравнение. Что называется характеристикой дифференциального уравнения?
3. Выполнить процесс разделения переменных для линейного уравнения теплопроводности.
4. Найти решение задачи Коши методом Даламбера:

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; t \ge 0; u\big|_{t=0} = \cos 3x; \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 7

1. Общий вид стационарного уравнения.
2. Уравнение гиперболического типа. Какие процессы описывает это уравнение?

3. Уравнение эллиптического типа. Какие процессы описывает это уравнение?

4. Найти решение задачи Коши методом Даламбера:

$$-\pi < x < \pi; t \geq 0; u\big|_{t=0} = \sin 3x; \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0.$$

Вариант № 8

1. Из второго закона Ньютона получить выражения для начальной скорости материальной точки.

2. Уравнение параболического типа. Какие процессы описывает это уравнение?

3. Вывод формулы Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения.

4. Найти решение задачи Коши методом Даламбера:

$$0 \leq x \leq 2\pi; t \geq 0; u\big|_{t=0} = \sin 3x; \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = V_0.$$

Учебное пособие

Корнеев Владимир Станиславович

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Редактор *О. В. Георгиевская*

Компьютерная верстка *Я. А. Лесных*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.
Подписано в печать 23.04.2026. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 6,51. Тираж 65 экз. Заказ 55.
Гигиеническое заключение
№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Издательско-полиграфический центр СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 10.

Отпечатано в издательско-полиграфическом центре СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плахотного, 8.