

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве сборника задач для обучающихся по направлениям подготовки
21.03.02 Землеустройство и кадастры
и 05.03.03 Картография и геоинформатика (уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2026

УДК 51(075)
В937

Авторский коллектив:

*В. П. Вербная, О. В. Григоренко, О. М. Логачёва,
В. Л. Неклюдова, О. Г. Павловская*

Рецензенты: кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН *А. В. Логачёв*

кандидат технических наук, доцент СГУГиТ *Е. М. Крылова*

Вербная, В. П.

В937 Высшая математика : сборник задач / В. П. Вербная, О. В. Григоренко, О. М. Логачёва, В. Л. Неклюдова, О. Г. Павловская. – Новосибирск : СГУГиТ, 2026. – 88 с. – Текст : непосредственный.
ISBN 978-5-907998-73-5

Сборник задач подготовлен кандидатами физико-математических наук, доцентами О. В. Григоренко, О. М. Логачёвой, В. Л. Неклюдовой, кандидатом технических наук О. Г. Павловской и старшим преподавателем В. П. Вербной на кафедре высшей математики СГУГиТ.

Учебное издание содержит задачи на отработку знаний, умений и навыков по основным разделам курса высшей математики, а также задания, раскрывающие прикладной смысл некоторых математических понятий.

Настоящий сборник задач предназначен для организации аудиторной и самостоятельной работы обучающихся по направлениям подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 05.03.03 Картография и геоинформатика и другим специальностям, предполагающим фундаментальную естественно-научную подготовку.

Рекомендован к изданию кафедрой высшей математики, Ученым советом Института геодезии и менеджмента СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 51(075)

ISBN 978-5-907998-73-5

© СГУГиТ, 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Основы теории множеств	7
1.1. Множества и операции над ними	7
2. Введение в анализ.....	8
2.1. Функция одной переменной	8
2.2. Вычисление пределов функций	9
2.3. Применение замечательных пределов и основных эквива- лентностей.....	10
2.4. Непрерывность функции	11
3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной	12
3.1. Понятие производной функции одной переменной	12
3.2. Дифференциал функции одной переменной	14
3.3. Правило Лопиталя	14
3.4. Исследование свойств функций с помощью производных	15
4. Интегральное исчисление функции одной переменной	18
4.1. Первообразная функции и неопределенный интеграл	18
4.2. Определенный интеграл и его применение	20
4.3. Несобственный интеграл	21
5. Матрицы и определители матриц.....	22
5.1. Матрицы	22
5.2. Определители.....	24
5.3. Обратная матрица	26
6. Системы линейных уравнений	27

6.1. Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей.....	27
6.2. Ранг матрицы	28
6.3. Системы линейных уравнений с произвольной матрицей	29
7. Основы векторной алгебры	31
7.1. Линейные операции над векторами.....	31
7.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов	32
8. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.....	34
8.1. Уравнение прямой на плоскости	34
8.2. Кривые второго порядка.....	35
8.3. Плоскость и прямая в пространстве	37
8.4. Поверхности II порядка	39
Ответы	40
Индивидуальные задания «Математический анализ».....	53
Индивидуальные задания «Алгебра и геометрия»	70
Заключение.....	83
Библиографический список.....	85
Справочные материалы	86

ВВЕДЕНИЕ

Современные требования федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) ориентируют на формирование у выпускников универсальных и общепрофессиональных компетенций, необходимых для решения широкого круга профессиональных задач. В связи с этим математическая подготовка будущего бакалавра призвана обеспечить не только владение формальным аппаратом, но и способности осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода; разрабатывать и использовать математические модели исследуемых процессов и явлений в предметной области; интерпретировать результаты математических расчетов применительно к профессиональной деятельности.

Настоящий сборник задач предназначен для организации аудиторной и самостоятельной работы обучающихся по направлениям подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 05.03.03 Картография и геоинформатика, а также специальностям, предполагающим фундаментальную естественно-научную подготовку.

Данный сборник подготовлен на основе курса лекций, читаемого авторами для бакалавров Сибирского государственного университета геосистем и технологий (СГУГиТ) [1–5], и полностью соответствует действующей рабочей программе дисциплины «Высшая математика». Структура пособия охватывает базовые разделы высшей математики [6]: основы математического анализа, дифференциальное и интегральное исчисление функций [7], элементы линейной и векторной алгебры, а также аналитическую геометрию [8].

Содержание задач и логика их изложения подчинены реализации компетентностного подхода. В сборник включены задания, способствующие развитию навыков математического моделирования и пространственного мышления, что особенно актуально для будущих специалистов в области

геосистем и технологий. Представленный материал предусматривает использование как традиционных, так и активных и интерактивных форм проведения практических занятий в сочетании с систематической внеаудиторной работой, что позволяет формировать у обучающихся навыки самостоятельного поиска решений и научно-исследовательской деятельности.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Множества и операции над ними

№ 1.1. Даны множества A и B . Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$:

а) $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$; **б)** $A = \{-1, 2, 4\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2\}$.

№ 1.2. Даны множества A и B . Найдите $A \times B$, $B \times A$:

а) $A = \{1, 3\}$, $B = \{-1, 1\}$; **б)** $A = \{-3, 0, 1\}$, $B = \{1\}$.

№ 1.3. Задайте множества A и B перечислением элементов. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если

а) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| \leq 3\}$;

б) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \ln x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2\}$;

в) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{x+2} \leq 0\right\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+1| \leq 1\}$;

г) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq 2^x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x - 2 < 0\}$;

д) A – множество четных чисел x , таких, что $0 < x < 6$, B – множество корней уравнения $x^2 = 16$.

№ 1.4. Даны множества A и B . Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$:

а) $A = (0; 1]$, $B = (-2; 2)$; **б)** $A = (-\infty; 3]$, $B = [-5; 4)$.

№ 1.5. Задайте множества A и B промежутками. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$:

а) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 9x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_3 x < 1\}$;

б) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| \leq 1\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+2}{x-1} \leq 0\right\}$;

в) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < 3^{x+2} < 9\right\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_{0,5}(x+1) \geq -1\}$;

г) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-5} > 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 10\}$.

2. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

2.1. Функция одной переменной

№ 2.1. Для заданных функций найдите множество допустимых значений аргумента (область определения функции):

а) $y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$;

б) $y = \frac{x}{\sqrt{8 - 2x - x^2}}$;

в) $y = \log_2(2^{5x} - 8)$;

г) $y = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{x}} + \arccos \frac{3 - 2x}{5}$;

д) $y = \log_{x+4}(x - 1) + \arcsin \frac{x}{3}$;

е) $y = \arcsin \frac{4x}{1 + 2x}$;

ж) $y = \ln \frac{1 + x}{1 - x}$;

з) $y = \log_2(x + 3) + \sqrt{16 - x^2}$;

и) $y = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2 + x - 2}$;

к) $y = \frac{\ln(x^2 - 4)}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$.

№ 2.2. Определите множество всех возможных значений, которые принимает каждая из заданных функций при всех допустимых аргументах из ее области определения (область значений функции):

а) $y = \sqrt{x^2 + 4}$;

б) $y = 2 + 3 \cos x$;

в) $y = 5 - 0,5^x$;

г) $y = \sqrt{x^2 - 3x - 4} - 3$.

№ 2.3. Выполните построение графиков заданных функций, применяя методы геометрических преобразований графиков основных элементарных функций:

а) $y = \log_{0,5}(x + 3)$;

б) $y = 4^x - 2$;

в) $y = |x - 3| - 1$;

г) $y = \sqrt{x - 2} + 3$;

д) $y = \frac{x - 2}{x - 1}$;

е) $y = |x^2 - 4x + 3|$;

$$\text{ж)} y = \begin{cases} -x, & \text{при } x < 1; \\ x-2, & \text{при } x \geq 1; \end{cases}$$

$$\text{з)} y = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{при } x < 0; \\ 2x + 1, & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{и)} y = 2 \cos(x+1);$$

$$\text{к)} y = 1 - 0,5 \sin(2x+2).$$

2.2. Вычисление пределов функций

Вычислите пределы функций на бесконечности:

$$\text{№ 2.4. а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6+5x-x^2}{2-x+2x^2};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4+12x^2+4-x^3}{x+16x^2+4x^4};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2x+1}{x-4x^4};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-x^3}{3x+x^2+1};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{x}+7x^2}{2x+\sqrt[3]{x^7}};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2};$$

$$\text{ж)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-9}{\sqrt[3]{27x^3+8x+4}};$$

$$\text{з)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{10}}{7x^{10}+2026};$$

$$\text{и)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{2x^2-x} - x \right).$$

Вычислите пределы функций в заданной точке:

$$\text{№ 2.5. а)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{x^2+6x+8};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+5x-3}{12+x-x^2};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{3x^2-8x-3};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x+8}{x^3+8};$$

$$\text{ж)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-6x^2+5}{x^2-1};$$

$$\text{з)} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right);$$

$$\text{и)} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right);$$

$$\text{к)} \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{8}{x^2-16} \right).$$

$$\text{№ 2.6. а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{64-x^2}{\sqrt{x+8}-4};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3-\sqrt{x+4}}{4x-20};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{6+x}}{x^2-x-6};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x}-3}{\sqrt{5-x}-2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+1}-2x);$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-4x});$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+5x}-x).$$

2.3. Применение замечательных пределов и основных эквивалентностей

Вычислите пределы функций в точке или на бесконечности:

$$\text{№ 2.7. а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \sin 4x}{2x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} 4x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 6x}{(e^{9x}-1)\arcsin 3x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{x \sin x};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x^2}{1-\cos 5x}; \quad \text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos 2x}; \quad \text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} 5x \cdot \operatorname{ctg} 4x;$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x} \right); \quad \text{л) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 4x}{2x}; \quad \text{м) } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x};$$

$$\text{н) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\log_2(1-2x)}; \quad \text{о) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{10x}-1}{2x}; \quad \text{п)* } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$$

(указание: используйте формулу $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$).

$$\text{№ 2.8. а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x} \right)^{4x+1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{2x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x-6} \right)^{x+1}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x^2}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-2} \right)^{2x-5};$$

$$\text{ж)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{5-x}{x}}; \quad \text{з)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{2x+3}{2x}}; \quad \text{и)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 4x)^{\operatorname{ctg} 3x}.$$

2.4. Непрерывность функции

№ 2.9. Исследуйте функции на непрерывность и сделайте точный/схематический чертеж графиков функций:

$$\begin{aligned} \text{а)} \ y &= \begin{cases} -2x, & \text{при } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{при } 0 < x < 4, \\ 1 & \text{при } x \geq 4; \end{cases} & \text{б)} \ y &= \begin{cases} 2x + 5, & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x \geq -1; \end{cases} \\ \text{в)} \ y &= \begin{cases} x + 4, & \text{при } x < -1, \\ x^2 + 2, & \text{при } -1 \leq x < 1, \\ 2x & \text{при } x \geq 1; \end{cases} & \text{г)} \ y &= \begin{cases} \frac{x^2 + 3}{4}, & \text{при } x \leq 1, \\ 6 - 5x, & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ x - 2 & \text{при } x > 4; \end{cases} \\ \text{д)} \ y &= \begin{cases} -x^2, & \text{при } x < 0, \\ x + 4, & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ x^3 - 2 & \text{при } x > 2; \end{cases} & \text{е)} \ y &= 1 + 2^{\frac{1}{x-3}}; & \text{ж)} \ y &= \frac{1}{1 + 5^{1/x}}; \\ \text{з)} \ y &= 4^{\frac{1}{2-x}}; & \text{и)} \ y &= e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}; & \text{к)} \ y &= \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{1-x}}}; \\ \text{л)} \ y &= \frac{|x-2|}{x-2}; & \text{м)} \ y &= \frac{1-x}{x^2-1}; & \text{н)} \ y &= \frac{1}{x^2-9}; \\ \text{о)} \ y &= \frac{x}{x^2-x-2}; & \text{п)} \ y &= \frac{x+1}{x^2-x-12}; & \text{р)} \ y &= 2^{\frac{x}{x^2-1}}. \end{aligned}$$

№ 2.10. Определите величину параметра a , при котором заданная функция будет являться непрерывной при любом действительном значении аргумента:

$$\text{а)} \ y = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{при } x \leq 1, \\ 5 - ax^2 & \text{при } x > 1; \end{cases} \quad \text{б)} \ y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x < 0, \\ x + a & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Понятие производной функции одной переменной

№ 3.1. Используя правила дифференцирования и таблицу производных, найдите производные функций:

а) $y = 2x^5 - 5x^3 + 7x - 12$;

б) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[4]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$;

в) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + \frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3}$;

г) $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 10\sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{x^{10}} - 3x^8$;

д) $y = 3x^3 \ln x$;

е) $y = (x^2 + 2x + 2)e^x$;

ж) $y = \frac{\sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}}$;

з) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$.

№ 3.2. Найдите производные сложных функций:

а) $y = \frac{1}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$;

б) $y = \frac{1}{\arcsin^5 x}$;

в) $y = \sin \frac{x}{4} + \cos 4x$;

г) $y = e^{7x} - e^{-\frac{x}{2}}$;

д) $y = \ln(1 - 2x)$;

е) $y = \ln \sin x$;

ж) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

з) $y = \sin \sqrt{1 + x^2}$;

и) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$;

к) $y = x \cdot 5^{\sqrt{x}}$;

л) $y = \sin^3 x \cdot e^{-x}$;

м) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 - x^2}$;

н) $y = \sin^2 \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right)$;

о) $y = \log_3^3(1 - x^2)$;

п) $y = \arcsin \sqrt{\lg \cos x}$.

№ 3.3. Для заданной функции $y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ найдите значения $y(1)$ и $y'(1)$.

№ 3.4. Для заданной функции $y = \frac{x+5}{2x-3}$ найдите производные y' и y'' .

№ 3.5. Найдите производные всех порядков функции $y = 5x^3 - 9x^2 + 6$.

№ 3.6. Найдите $\frac{dy}{dx}$:

а) $y = x^x$; **б)** $y = x^{\ln x}$; **в)** $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

г) $y = (2 + \cos x)^x$; **д)** $y = (\sin 3x)^x$; **е)** $y = (\operatorname{arctg} x)^{x^2}$;

ж) $y = \frac{\sqrt{x-1}(x+3)^5}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}$ (указание: используйте логарифмирование);

з) $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}; \\ y = \frac{t}{t+1}; \end{cases}$ **и)** $\begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = \cos^2 t; \end{cases}$ **к)** $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1); \\ y = \arccos \frac{t}{2}; \end{cases}$

л) $\begin{cases} x = t \sin t + \cos t; \\ y = t \cos t - \sin t; \end{cases}$; **м)** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; **н)** $y^3 - 3y + 2x = 0$;

о) $y^2 + xe^y - \sin x + 2 = 0$; **п)** $yx - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$; **р)** $\operatorname{tg}(x+y) - y = 0$.

№ 3.7. Найдите первую и вторую производные функции $y(x)$, если:

а) $\begin{cases} x = \ln(t-1); \\ y = t^2 - 2t; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x = t^3 + 2; \\ y = t^2 / 2. \end{cases}$

№ 3.8. Вычислите угловые коэффициенты касательной и нормали к графику функции в заданной точке и запишите уравнения касательной и нормали:

а) $y = \frac{x+4}{5x-4}$, $x_0 = 1$; **б)** $y = (2x+1)e^{3x}$, $x_0 = 0$; **в)** $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{4t} - 1 \end{cases}$, $t_0 = 0$.

№ 3.9. Определите координаты точки, в которой касательная к графику заданной функции параллельна заданной прямой:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 7x - 2$, $4x - y + 2 = 0$; б) $y = (3x - 1)^2$, $6x + 2y - 3 = 0$.

3.2. Дифференциал функции одной переменной

№ 3.10. Запишите выражения для первого и второго дифференциалов заданных функций:

а) $y = x^7$; б) $y = \frac{x-1}{x+1}$; в) $y = x^2 e^{x^2}$; г) $y = \ln \frac{x+2}{2x+1}$.

№ 3.11. Вычислите приближенное значение функции в заданной точке без калькулятора:

а) $y = \sqrt{x^3 + 1}$, $x = 1,95$; б) $y = e^{x^3 - x}$, $x = 1,12$.

№ 3.12. Вычислите приближенно с помощью дифференциала:

а) $\sqrt{4,04}$; б) $\cos 29^\circ$; в) $\sqrt[5]{33}$; г) $\operatorname{tg} 46^\circ$;

д) $\lg 10,11$, если $\lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343$.

3.3. Правило Лопиталя

Используя правило Лопиталя, вычислите пределы:

№ 3.13. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3}$;

№ 3.14. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 4}$;

№ 3.15. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x - 10}$;

№ 3.16. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 8}{\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+1}}$;

№ 3.17. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - 3}{2 - \sqrt[3]{x}}$;

№ 3.18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3}$;

№ 3.19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 1}{x^2 + 2}$;

№ 3.20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$;

№ 3.21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x}{x^2}$;

№ 3.22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - e^{-x}}$;

№ 3.23. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2 + \ln x}{e^x - e}$;

№ 3.24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$;

$$\text{№ 3.25. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin x};$$

$$\text{№ 3.26. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 4x)}{x^2};$$

$$\text{№ 3.27. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x};$$

$$\text{№ 3.28. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x \cos x - \sin x};$$

$$\text{№ 3.29. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos 2x - 1};$$

$$\text{№ 3.30. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin 6x};$$

$$\text{№ 3.31. } \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x;$$

$$\text{№ 3.32. } \lim_{x \rightarrow 2+0} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(x-1)} \right);$$

$$\text{№ 3.33. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{3}{x}} - 1 \right);$$

$$\text{№ 3.34. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$\text{№ 3.35. } \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x};$$

$$\text{№ 3.36. } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$\text{№ 3.37. } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}};$$

$$\text{№ 3.38. } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$$

3.4. Исследование свойств функций с помощью производных

№ 3.39. Исследуйте заданные функции на монотонность, запишите интервалы возрастания / убывания, укажите экстремумы функции:

$$\text{а) } y = x^3 + 3x^2 - 24x; \quad \text{б) } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x - 6}; \quad \text{в) } y = \ln(x^2 + 4x + 5).$$

№ 3.40. Исследуйте функции на заданном отрезке, укажите их наибольшее и наименьшее значение на нем:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = x^4 - 8x^2 + 5, \quad [1; 3]; & \text{б) } y = 3x - 2\sqrt{x}, \quad [0; 4]; \\ \text{в) } y = x^3 \ln x, \quad \left[\frac{1}{e}; e \right]; & \text{г) } y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}, \quad [0; 2]. \end{array}$$

№ 3.41. Для заданной функции $y = x^4 - 24x^2 + 5x + 10$ определите интервалы, на которых ее график является выпуклым или вогнутым, и вычислите координаты точек перегиба кривой.

№ 3.42. Исследуйте функцию $y = x^2 e^{-4x}$ на монотонность и выпуклость / вогнутость, укажите ее точки экстремума и точки перегиба.

№ 3.43. Для заданных функций найдите уравнения асимптот их графиков:

а) $y = \frac{x^3}{(1+x)^2};$

б) $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 15};$

в) $y = \frac{x^2 + 4}{x - 4};$

г) $y = \frac{x^3}{x^2 - 3};$

д) $y = \sqrt{x^2 + 1}.$

№ 3.44. Проведите полное исследование свойств функций и постройте их графики:

а) $y = \ln(x^2 + 1);$

б) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 10;$

в) $y = \frac{\ln x}{x};$

г) $y = \frac{x}{x^2 - 16};$

д) $y = \frac{x}{e^x};$

е) $y = \frac{x^3 - 8}{x^2}.$

№ 3.45. Предприятие планирует огородить прямоугольную территорию и дополнительно разделить ее вдоль более короткой стороны глухой стеной. Стоимость материалов для наружного забора – 900 рублей за метр, для внутренней стенки – 1 600 рублей за метр. При условии, что площадь территории строго равна 153 м^2 , рассчитайте такие значения длины и ширины прямоугольника, чтобы итоговые финансовые затраты на все ограждающие конструкции были минимально возможными.

№ 3.46. Требуется облицевать стены и дно бассейна с квадратным дном. Запланирован объем бассейна – 32 м^3 . Определите размеры бассейна, при которых расход материалов будет наименьшим.

№ 3.47. Требуется огородить прямоугольный участок площадью 800 м^2 на побережье (т. е. одна сторона прямоугольника – берег моря, для которого ограждение не требуется). Каковы должны быть размеры участка, чтобы стоимость ограждения была наименьшей?

№ 3.48. Из круглого деревянного спила радиуса R требуется изготовить разделочную доску прямоугольной формы. Каковы должны быть размеры доски, чтобы количество отходов было наименьшим?

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Первообразная функции и неопределенный интеграл

№ 4.1. Используя свойства и таблицу неопределенных интегралов, найдите:

а) $\int (2x^3 - 4x + 7) dx$; б) $\int \left(3^x - 3x^2 + \frac{6}{x} \right) dx$;

в) $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2} \right) dx$; г) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - x^3 e^x + 4}{x^3} dx$;

д) $\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx$; е) $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}$; ж) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; з) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$;

и) $\int \frac{dx}{4 + x^2}$; к) $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$; л) $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$; м) $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - x^2}}$;

н) $\int \frac{dx}{x^2 - 49}$; о) $\int \frac{dx}{16 - x^2}$; п) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6}}$; р) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}}$.

№ 4.2. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{(x-3)^5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$; в) $\int (x+2)^4 dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+8}}$;

д) $\int 3e^{x/2} dx$; е) $\int (e^{-x} - e^{-2x}) dx$; ж) $\int \sqrt{4x+9} dx$; з) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-1}}$;

и) $\int (\sin 9x - \cos 7x) dx$; к) $\int \left(\cos \frac{x}{7} - \sin \frac{x}{9} \right) dx$; л) $\int \sqrt[5]{(8-5x)^4} dx$;

м) $\int (2-7x)^9 dx$; н) $\int \sin(3x+2) dx$; о) $\int \cos(5-9x) dx$;

п) $\int \frac{dx}{\cos^2(7x+2)}$; р) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}$; с) $\int \frac{dx}{1-5x}$;

$$\begin{array}{lll} \text{г)} \int \frac{dx}{4x+3}; & \text{у)} \int \frac{dx}{4+9x^2}; & \text{ф)} \int \frac{dx}{4x^2-9}; \\ \text{х)} \int \frac{dx}{\sqrt{7-16x^2}}; & \text{ц)} \int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}. & \end{array}$$

№ 4.3. Найдите интегралы, выделяя полный квадрат в знаменателе:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int \frac{dx}{x^2+6x+13}; & \text{б)} \int \frac{dx}{5-x^2-4x}; & \text{в)} \int \frac{dx}{\sqrt{75-10x-x^2}}; \\ \text{г)} \int \frac{dx}{x^2-8x+7}; & \text{д)} \int \frac{dx}{\sqrt{x(x-2)}}; & \text{е)} \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}. \end{array}$$

№ 4.4. Найдите интегралы, используя замену переменных:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int e^{\sin x} \cos x dx; & \text{б)} \int x^2 e^{x^3} dx; & \text{в)} \int \frac{x dx}{x^2+1}; \\ \text{г)} \int x^4 (1+x^5)^6 dx; & \text{д)} \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+1}}; & \text{е)} \int \operatorname{tg} x dx; \\ \text{ж)} \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}; & \text{з)} \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}; & \text{и)} \int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}; \\ \text{к)} \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}(x+1)}; & \text{л)} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx; & \text{м)} \int \frac{dx}{e^x+2}; \\ \text{н)} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}; & \text{о)} \int x\sqrt{3+x} dx; & \text{п)} \int \frac{dx}{x\sqrt{4x+1}}. \end{array}$$

№ 4.5. Найдите интегралы, интегрируя по частям:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int x \sin 3x dx; & \text{б)} \int (x-2) \cos 4x dx; & \text{в)} \int x^2 e^{-x} dx; \\ \text{г)} \int (3x+1) \cdot 2^x dx; & \text{д)} \int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx; & \text{е)} \int \ln x dx; \\ \text{ж)} \int x \operatorname{arctg} x dx; & \text{з)} \int \operatorname{arctg} 5x dx; & \text{и)} \int \arccos 2x dx; \\ \text{к)} \int \arcsin^2 x dx; & \text{л)*} \int e^x \cos x dx; & \text{м)*} \int \cos \sqrt{x} dx. \end{array}$$

№ 4.6. Найдите интегралы, выбрав подходящий метод:

$$\text{а)} \int (x+\sqrt{x})^2 dx; \quad \text{б)} \int \left((4x-3)^6 - e^{-3x} - \cos 12x \right) dx;$$

$$\text{в)} \int 2^x e^x dx;$$

$$\text{г)} \int \operatorname{ctg} x dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx;$$

$$\text{е)} \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}} dx;$$

$$\text{ж)} \int \cos(\ln x) dx;$$

$$\text{з)} \int x^2 \ln x dx.$$

4.2. Определенный интеграл и его применение

№ 4.7. Пользуясь формулой Ньютона – Лейбница, вычислите определенные интегралы:

$$\text{а)} \int_1^2 (6x^2 - x + 1) dx;$$

$$\text{б)} \int_0^\pi (2x + \sin x) dx;$$

$$\text{в)} \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx;$$

$$\text{г)} \int_1^e \frac{3x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{д)} \int_0^1 \sqrt{8x+1} dx;$$

$$\text{е)} \int_3^4 \frac{dx}{(2x-5)^2};$$

$$\text{ж)} \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2-1}} dx;$$

$$\text{з)} \int_{-1}^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^3};$$

$$\text{и)} \int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x} dx;$$

$$\text{к)} \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx;$$

$$\text{л)} \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx;$$

$$\text{м)} \int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$$

$$\text{н)} \int_0^{\pi/6} x \cos 3x dx;$$

$$\text{о)} \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$\text{п)} \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

№ 4.8. Постройте фигуру, ограниченную заданными линиями, и вычислите ее площадь:

$$\text{а)} y = \sqrt{4x+5}, y=0, x=1, x=5;$$

$$\text{б)} y = 6x - x^2, y=0;$$

$$\text{в)} y = -2x^2, y = 1 - 3x^2;$$

$$\text{г)} y = x^3, y = 8, x = 0;$$

$$\text{д)} x^2 = 2y, y^2 = 2x;$$

$$\text{е)} y = x - 3, y = 3 + 2x - x^2.$$

№ 4.9. Изобразите тело вращения и вычислите его объем, если оно получено вращением:

– графика функции $\{y = 2^x, x = 0, x = 2\}$:

а) вокруг оси OX ;

б) вокруг оси OY ;

– графика функции $\{y = \sqrt{4-x}, x=0, y=0\}$:

в) вокруг оси OX ;

г) вокруг оси OY .

№ 4.10. С помощью определенного интеграла вычислите длину дуги кривой:

а) $y = \ln(\cos x), x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; б) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, x \in [3; 8]$;

в) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$, от $(0; a)$ до $(a; 0)$;

г) $x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}$ при $t \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

4.3. Несобственный интеграл

Исследуйте несобственные интегралы на сходимость и вычислите те из них, которые сходятся:

№ 4.11. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$;

№ 4.12. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(4x+1)^5}$; **№ 4.13.** $\int_0^1 \ln x \, dx$;

№ 4.14. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$;

№ 4.15. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2 + 5}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)} dx$;

№ 4.16. $\int_0^2 \frac{dx}{x(2-x)}$;

№ 4.17. $\int_{e^4}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; **№ 4.18.** $\int_1^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

№ 4.19. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$;

№ 4.20. $\int_6^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$.

5. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

5.1. Матрицы

№ 5.1. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицы: а) $2A$; б) $A+B$; в) $A+C$; г) $B^T + C$; д) $3A - 2C^T$.

№ 5.2. Если существуют произведения матриц, то укажите размер результата:

а) $K_{2 \times 4} \cdot L_{4 \times 5}$; б) $R_{3 \times 4} \cdot L_{6 \times 3}$; в) $X_{2 \times 3} \cdot Y_{3 \times 9}$.

№ 5.3. Найдите произведения матриц:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2x & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-x & -x \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3x \\ 2x & 3x-1 \end{pmatrix}.$$

№ 5.4. Для заданных матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 9 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ определите,

какие из матриц $A \cdot B$, $A^T \cdot B$, $A \cdot B^T$, $A^T \cdot B^T$ существуют, и найдите их.

№ 5.5. Даны матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если существуют произведения матриц $C \cdot D$, $C^T \cdot D$, $D \cdot F$, $D \cdot F^T$, $C \cdot F$, $C \cdot F^T$, $C^T \cdot F$, то найдите их.

№ 5.6. Проверьте, что для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ верно

$A \cdot B = B \cdot A$. Как называются такие матрицы?

№ 5.7. Убедитесь в справедливости равенства $D^2 - 4D - 9E = O$ для $D = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 5.8. Проверьте, что $P \cdot X = S \cdot X$,

если $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

№ 5.9. Выполните действия **а)** $A + B$; **б)** $-3A + 5B - 2E$; **в)** $A \cdot B$; **г)** $B \cdot A^T$; **д)** найдите матрицу, которая в сумме с A дает E ,

если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 5.10. Три предприятия Новосибирской области выпускают молочную продукцию четырех видов. Объемы выпуска продукции (тыс. т) на

каждом предприятии в первом и втором полугодии прошлого года заданы матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

а) матрицу выпуска продукции на каждом предприятии за прошлый год;

б) матрицу прироста объемов производства во втором полугодии по сравнению с первым по видам продукции и предприятиям.

№ 5.11. Малое предприятие деревообрабатывающей промышленности производит три вида продукции, используя при этом два вида ресурсов. Нормы затрат ресурсов на производство продукции каждого вида заданы матрицей A , объемы выпуска малым предприятием продукции каждого вида за месяц – матрицей B , стоимости единицы каждого вида ресурсов – матрицей P .

Найдите:

а) матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всего объема продукции за месяц;

б) определите полную стоимость всех затраченных ресурсов на производство всего объема продукции за месяц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.2. Определители

№ 5.12. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 4 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix};$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

№ 5.13. Решите уравнения и неравенства:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ x+10 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

№ 5.14. Вычислите определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -11 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{ж)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}; \quad \text{з)} \begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23735 & 23735 & 17418 \end{vmatrix}.$$

№ 5.15. Проверьте, что $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.3. Обратная матрица

№ 5.16. К данным матрицам найдите обратные матрицы и сделайте проверку:

$$\text{а) } C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } K = \begin{pmatrix} 11 & 34 \\ -9 & -26 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ 5.17. Найдите матрицу X :

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -14 & 5 \\ 17 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей

№ 6.1. Методами Крамера и обратной матрицы найдите решение систем уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 10; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 4; \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

№ 6.2. Методом Гаусса найдите решение систем уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -8; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -5; \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 6; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = -1; \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 9x_4 = 13; \\ 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -6; \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -13; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_4 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 10; \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6; \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -5. \end{cases}$$

№ 6.3. Предприятие, специализирующееся на производстве верхней одежды, выпускает три вида продукции: куртки, плащи и горнолыжные костюмы, для производства которых требуется три вида сырья: основная ткань, подкладочная ткань и синтетический утеплитель. Нормы расхода сырья каждого вида на производство тысячи единиц продукции каждого вида, а также объем расхода сырья (усл. ед.) за один месяц приведены в таблице. Найдите ежемесячный объем выпускаемой продукции каждого вида (тыс. единиц).

Вид сырья	Нормы расхода сырья на тысячу единиц продукции			Расход сырья на 1 месяц
	Костюмы	Куртки	Плащи	
Основная ткань	50	10	30	176
Подкладочная ткань	35	25	20	168
Утеплитель	40	20	30	184

6.2. Ранг матрицы

№ 6.4. Вычислите ранг матриц:

$$\begin{aligned} \text{а)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; & \text{б)} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}; & \text{в)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ -5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}; & \text{д)} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; & \text{е)} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.3. Системы линейных уравнений с произвольной матрицей

№ 6.5. Методом Гаусса найдите общее решение однородной системы уравнений и одно ненулевое частное решение:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ -3x_1 - x_2 - 5x_3 = 0; \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

№ 6.6. Исследуйте системы уравнений на совместность. Найдите общие решения совместных системы уравнений и укажите частные решения:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5; \\ -x_2 + x_3 + 4x_4 = 2; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 = 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2; \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3; \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ 3x_1 - 2x_3 = 3; \end{cases}$$

$$\textbf{г)} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2; \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4; \end{cases}$$

$$\textbf{д)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1; \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 5; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

7. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

7.1. Линейные операции над векторами

№ 7.1. Найдите координаты вектора $\vec{d} = -\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{c}$, если

а) $\vec{a}\{-9;5\}$, $\vec{b}\{1;3\}$, $\vec{c}\{4;-2\}$; б) $\vec{a}\{-1;0;1\}$, $\vec{b}\{0;0;2\}$, $\vec{c}\{1;2;1\}$;

в) $\vec{a}\{2;-6;5\}$, $\vec{b}\{3;-1;4\}$, $\vec{c}\{-1;4;2\}$; г) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{k}$,

$\vec{c} = \vec{j} - \vec{k}$.

№ 7.2. Известно, что $\vec{a}\{4;8;-6\}$, $\vec{b}\{1;-1;0\}$ и $\vec{a} - 6\vec{b} + 2\vec{x} = \vec{0}$. Найдите координаты вектора $\vec{x}$.

№ 7.3. Для заданных векторов найдите орты:

а) $\vec{a}\{3;-4\}$; б) $\vec{b}\{-2;2\sqrt{3}\}$; в) $\vec{s}\{2;-3;6\}$; г) $\vec{d}\{-3;1;5\}$; д) $\vec{c}\{6;-2;-4\}$.

№ 7.4. Найдите векторы:

а) с длиной 9, коллинеарные вектору $\vec{a}\{2;\sqrt{5}\}$;

б) с длиной 12, сонаправленные с вектором $\vec{a}\{1;-2;2\}$;

в) с длиной 5 и противоположно направлены вектору $\vec{c}\{-4;-6;4\sqrt{3}\}$.

№ 7.5. Для векторов $\vec{c}\{\sqrt{3};1\}$ и $\vec{d}\{5;-\sqrt{3}\}$ известно, что $\vec{a} \uparrow \vec{c}$, $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $\vec{b} \uparrow \vec{d}$, $|\vec{b}| = \sqrt{7}$. Найдите вектор $\vec{y} = 7\vec{a} + 6\vec{b}$.

№ 7.6. Найдите при каких k

а) $\vec{a}\{2;4;1\}$ и $\vec{b}\{4k;3k+10;2k\}$ коллинеарны;

б) $\vec{c}\{k;8\}$ и $\vec{d}\{1;2k\}$ противоположно направлены;

в) $\vec{x}\{k;4\}$ и $\vec{y}\{-2;k+6\}$ сонаправлены?

7.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

№ 7.7. Найдите скалярное произведение заданных векторов, если

- а) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5$, а угол между векторами равен 30° ;
б) $|\vec{c}| = 3, |\vec{d}| = \sqrt{2}$, а угол между векторами равен 135° .

№ 7.8. Известно, что $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Найдите:

- а) скалярное произведение векторов $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b}$;
б) длину вектора $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.

№ 7.9. Найдите скалярное произведение векторов:

- а) $\vec{a} = \{2; -5\}, \vec{b} = \{-1; 0\}$;
б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если даны точки $A(1; -1; 3), B(0; 1; -2), C(4; -4; 0)$.

№ 7.10. Даны точки $A(-4; -3; -2), B(2; -2; -3), C(-8; -5; 1), D(4; -3; -1)$. Выясните, будут ли перпендикулярными следующие прямые:

- а) AB и DC ; б) AC и BD .

№ 7.11. Даны точки $A(2; 1), B(4; 5), C(1; 2)$. Найдите:

- а) углы в треугольнике ABC ;
б) площадь треугольника ABC ;
в) проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$.

№ 7.12. Даны точки $A(1; 2; -4), B(-4; 0; 1), C(1; -1; 2)$. Найдите:

- а) угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$;
б) площадь параллелограмма, построенного на этих векторах;
в) проекцию вектора $\overrightarrow{BC}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$.

№ 7.13. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для которых известны длины и угол между ними. Найдите: 1) скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$; 2) выразите векторное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ через векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 3) вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если

а) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ; \quad \vec{x} = 4\vec{a} - \vec{b}, \vec{y} = \vec{a} + \vec{b};$

б) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ; \quad \vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{b} - \vec{a};$

в) $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \perp \vec{b}; \quad \vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - 2\vec{b}.$

№ 7.14. Даны векторы $\vec{a}\{2;1;-1\}, \vec{b}\{1;2;1\}, \vec{c}\{2;-1;3\}$. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c}, \vec{a} \vec{b} \vec{c}.$

№ 7.15. Найдите площадь треугольника ABC , если $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(-10;-2;-1).$

№ 7.16. Найдите объем пирамиды $ABCD$ и длину ее высоты AH , если $A(2;-4;5), B(-1;-3;4), C(5;5;-1), D(1;-2;2).$

№ 7.17. При каком значении x векторы $\vec{a}\{2;-1;1\}, \vec{b}\{4;0;6\}, \vec{c}\{2;x;3x\}$ лежат в одной плоскости?

№ 7.18. При каком значении x точки $A(1;1;1), B(0;2;3), C(4;3;2), D(1;1+x;3+x)$ лежат в одной плоскости?

№ 7.19. Выясните, образуют ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базис в пространстве. Если да, то найдите координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе, зная, что:

а) $\vec{a}\{1;1;0\}, \vec{b}\{0;1;2\}, \vec{c}\{1;0;-1\}, \vec{d}\{1;3;3\};$

б) $\vec{a}\{2;-1;1\}, \vec{b}\{1;2;3\}, \vec{c}\{4;-1;3\}, \vec{d}\{4;-3;2\};$

в) $\vec{a}\{2;-2;-5\}, \vec{b}\{3;-1;1\}, \vec{c}\{-1;2;4\}, \vec{d}\{-3;5;5\}.$

8. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

8.1. Уравнение прямой на плоскости

№ 8.1. Даны координаты $A(-5;4)$ и $B(5;-11)$ – концов отрезка AB .

Найдите:

- а) координаты точки C , принадлежащей отрезку, если $2AC = 3BC$;
- б) координаты середины отрезка AB .

№ 8.2. Точки M_1 и M_2 делят отрезок AB на три равные части. Найдите их координаты, если $A(-1;-1)$, $B(5;2)$.

№ 8.3. Через точку A проходят три прямые l_1, l_2, l_3 , при этом l_1 перпендикулярна BC ; l_2 параллельна BC ; l_3 проходит через точку B . Составьте уравнения этих прямых и найдите расстояние от точки C до прямой l_3 , если известны координаты точек $A(-2;4)$, $B(0;-2)$, $C(6;-9)$.

№ 8.4. Составьте уравнения прямых AB и AC в общем и нормальном виде, в отрезках, с угловым коэффициентом, если известны координаты точек $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2;0)$.

№ 8.5. В треугольнике ABC проведены медиана AM , высота AK , биссектриса AL . Найдите длины AM и AK . Составьте уравнения прямых AM , AK , AL , если известны координаты точек $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2;0)$.

№ 8.6. Две прямые $4x - 3y - 10 = 0$ и $2x + 7y - 22 = 0$ пересекаются в точке A . Через точку A проходят три прямые l_1, l_2, l_3 , при этом l_1 проходит через начало координат; l_2 параллельна оси абсцисс; l_3 перпендикулярна оси абсцисс. Составьте уравнения прямых l_1, l_2, l_3 .

№ 8.7. Пусть точки $K(1;-2)$, $L(5;4)$, $M(-2;0)$ являются вершинами треугольника. Составьте уравнения:

- а) стороны KL в общем и нормальном виде, в отрезках, с угловым коэффициентом;

- б) медианы MA , высоты MB и биссектрисы MC ;
- в) прямой MP , параллельной KL ;
- г) прямой MO , перпендикулярной KL , если $O(0;0)$.

№ 8.8. Найдите градусные меры углов между прямыми:

а) $3x + 2y - 10 = 0$ и $5x - y + 8 = 0$; б) $2x - 3y + 5 = 0$ и $y = -\frac{3}{2}x + 2$.

№ 8.9. Известно, что прямые с уравнениями $6x - 3y + 5 = 0$ и $x + my + 4 = 0$ а) параллельны; б) перпендикулярны. Найдите значения m .

8.2. Кривые второго порядка

№ 8.10. Запишите каноническое уравнение окружности, если она:

а) имеет центр в точке $C(-1;2)$ и проходит через точку $A(2;6)$;

б) имеет диаметр AB , где $A(3;2)$ и $B(-1;6)$;

в) имеет центр в начале координат и касается прямой с уравнением $3x - 4y + 20 = 0$;

г) имеет центр в точке $C(1;-1)$ и касается прямой с уравнением $5x - 12y + 9 = 0$.

№ 8.11. По заданному каноническому уравнению кривой второго порядка определите ее тип, параметры, эксцентриситет, координаты фокусов.

Запишите уравнения асимптот директрис (при наличии). Постройте кривую.

а) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$; в) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; г) $-\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$;

д) $y^2 = 6x$; е) $x^2 = -8y$; ж) $x^2 = 12y$; з) $y^2 = -4x$.

№ 8.12. Запишите каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат и фокусами на оси абсцисс, укажите координаты фокусов и уравнения директрис, если:

а) фокусное расстояние 12, $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

б) $\varepsilon = \frac{2}{5}$, длина большой полуоси 5;

в) $\varepsilon = \frac{12}{13}$, длина малой оси 10.

№ 8.13. Запишите каноническое уравнение гиперболы, укажите координаты фокусов, уравнения асимптоты и директрис, если фокусы находятся на оси:

а) абсцисс и фокусное расстояние 6, $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

б) ординат и действительная полуось 8, $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

в) абсцисс и фокусное расстояние $4\sqrt{29}$, асимптоты $y = \pm \frac{5}{2}x$;

г) абсцисс и фокусное расстояние 26, расстояние между директрисами $22\frac{2}{13}$.

№ 8.14. Постройте кривую второго порядка с центром в начале координат, запишите ее каноническое уравнение, укажите полуоси, координаты фокусов, уравнения асимптоты и директрис, если:

а) эксцентриситет $\varepsilon = 2$, один из фокусов $(12; 0)$;

б) эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$, одна из директрис $y = 3$.

№ 8.15. Найдите точки пересечения линий с заданными уравнениями:

а) $3x + 4y - 12 = 0$ и $y^2 = -9x$;

б) $x + 2y - 7 = 0$ и $x^2 + 4y^2 = 25$.

№ 8.16. Постройте кривую второго порядка и запишите ее каноническое уравнение, определите тип кривой. Укажите координаты центра и фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

б) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 17 = 0$;

в) $9x^2 + 16y^2 + 90x - 32y - 335 = 0$;

г) $3x^2 + 12x + 5y + 7 = 0$.

№ 8.17. Выясните геометрический смысл уравнений:

- а) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$;
- б) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y + 7 = 0$;
- в) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y + 151 = 0$;
- г) $9x^2 + 25y^2 + 36x - 100y - 89 = 0$;
- д) $9x^2 + 25y^2 + 36x - 100y + 136 = 0$;
- е) $9x^2 + 25y^2 + 36x - 100y + 200 = 0$;
- ж) $y^2 - 6x + 8y + 28 = 0$.

№ 8.18. Запишите каноническое уравнение кривой, для каждой точки которой верно:

- а) расстояния до прямой $x = 2$ и точки $F(-1; -4)$ относятся как $\sqrt{5} : 1$;
- б) расстояние до прямой $y + 1 = 0$ равно расстоянию до точки $A(-1; 3)$;
- в) расстояния до прямой $x + 5 = 0$ и до точки $F(7; 2)$ равны;
- г) расстояние до точки $A(1; 5)$ вдвое меньше, чем до точки $B(1; -1)$.

8.3. Плоскость и прямая в пространстве

№ 8.19. Пусть заданы точки $A(1; -1; 2)$, $B(0; 2; 4)$, $C(-2; 0; 2)$ и $D(4; -2; -2)$. Составьте уравнения: а) плоскости ABC ; б) плоскости, проходящей через точку D параллельно ABC . Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC .

№ 8.20. Плоскость задана уравнением $x + 3y - 4z + 10 = 0$. Составьте ее уравнение в отрезках и нормальное уравнение.

№ 8.21. Пусть заданы точки $A(1; -1; 2)$, $B(0; 2; 4)$, $C(-2; 0; 2)$ и $D(4; -2; -2)$. Составьте уравнения: а) плоскости BCD ; б) плоскости, проходящей через точку A параллельно BCD ; в) плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно AD . Найдите расстояние от точки A до плоскости BCD .

№ 8.22. Пусть заданы точки $A(1; -2; 1)$, $B(3; 4; -2)$, $C(5; 8; -5)$. Составьте канонические, параметрические и общие уравнения прямой AB . Лежит ли точка C на прямой AB ?

№ 8.23. Известно, что точка $D(4; -7; -9)$ лежит на прямой l , параллельной оси OY . Найдите уравнения прямой l в каноническом, параметрическом и общем виде.

№ 8.24. Известно, что точка $A(-2; 4; 5)$ принадлежит плоскости, параллельной осям OX и OZ . Составьте уравнение этой плоскости.

№ 8.25. Известно, что точка $H(2; -5; 3)$ лежит на прямой l , параллельной вектору $\vec{d} \{-3; 4; 8\}$. Запишите уравнения прямой l в каноническом, параметрическом и общем виде.

№ 8.26. Прямая l задана уравнениями $\frac{x+5}{9} = \frac{y+4}{6} = \frac{z+7}{2}$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1; -1; 6)$ и прямую l .

№ 8.27. Пусть заданы точки $A(-2; 3; -2)$, $B(2; -3; 2)$, $C(2; 2; 0)$ и $D(1; 5; 5)$. В пирамиде $ABCD$: а) найдите угол между боковым ребром BD и основанием ABC ; б) составьте уравнение высоты DH ; в) найдите координаты точки H .

№ 8.28. Известно, что плоскость перпендикулярна двум данным плоскостям $x + y + 5z - 9 = 0$ и $2x + y + 2z + 1 = 0$. Составьте уравнение этой плоскости, если она проходит через точку $M(3; 4; 0)$.

№ 8.29. а) плоскости заданы уравнениями $x + y + 2z - 13 = 0$ и $2x + y - z + 4 = 0$. Найдите угол между плоскостями;

б) прямые заданы уравнениями $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-2}$ и $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{0} = \frac{z-6}{-1}$.

Найдите угол между прямыми;

в) найдите угол между прямой $\frac{x+7}{-1} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-5}{2}$ и плоскостью $x + y - z - 6 = 0$.

№ 8.30. Прямая задана уравнениями $\begin{cases} x + y + 5z - 9 = 0 \\ 2x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$. Найдите пара-

метрические уравнения этой прямой.

8.4. Поверхности II порядка

Поверхность задана уравнением. Определите тип поверхности и выпишите уравнение сечения поверхности заданной плоскостью:

№ 8.31. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$; **а)** $y = 0$; **б)** $z = -2$; **в)** $x = 4$.

№ 8.32. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$; **а)** $x = 0$; **б)** $y = 6$; **в)** $z = 0$; **г)** $z = \frac{5}{2}$.

№ 8.33. $2z = x^2 + \frac{y^2}{9}$; **а)** $z = 2$; **б)** $z = -2$; **в)** $y = 6$.

ОТВЕТЫ

1. Основы теории множеств. № 1.1. а) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \setminus B = \{5, 7\}$, $B \setminus A = \{1, 4\}$; б) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{-1, 4\}$, $B \setminus A = \{-2, 0, 1\}$.

№ 1.2. а) $A \times B = \{(1; -1), (1; 1), (3; -1), (3; 1)\}$, $B \times A = \{(-1; 1), (-1; 3), (1; 1), (1; 3)\}$; б) $A \times B = \{(-3; 1), (0; 1), (1; 1)\}$, $B \times A = \{(1; -3), (1; 0), (1; 1)\}$.

№ 1.3. а) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \setminus B = \{-2, -1, 0\}$, $B \setminus A = \{3\}$; б) $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\}$, $A \cap B = \{1\}$, $A \setminus B = \{2\}$, $B \setminus A = \{-1, 0\}$; в) $A = \{-1, 0\}$, $B = \{-2, -1, 0\}$, $A \cup B = \{-2, -1, 0\}$, $A \cap B = \{-1, 0\}$, $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \{-2\}$; г) $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2\}$, $A \cap B = \{1\}$, $A \setminus B = \{2\}$, $B \setminus A = \{0\}$; д) $A = \{2, 4\}$, $B = \{-4, 4\}$, $A \cup B = \{-4, 2, 4\}$, $A \cap B = \{4\}$, $A \setminus B = \{2\}$, $B \setminus A = \{-4\}$.

№ 1.4. а) $A \cup B = (-2; 2)$, $A \cap B = (0; 1]$, $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = (-2; 0] \cup (1; 2)$; б) $A \cup B = (-\infty; 4)$, $A \cap B = [-5; 3]$, $A \setminus B = (-\infty; -5)$, $B \setminus A = (3; 4)$.

№ 1.5. а) $A = (-3; 0) \cup (3; +\infty)$, $B = (0; 3)$, $A \cup B = (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$, $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = (-3; 0) \cup (3; +\infty)$, $B \setminus A = (0; 3)$; б) $A = [-3; -1]$, $B = [-2; 1]$, $A \cup B = [-3; 1]$, $A \cap B = [-2; -1]$, $A \setminus B = [-3; -2)$, $B \setminus A = (-1; 1]$; в) $A = (-3; 0)$, $B = (-1; 1]$, $A \cup B = (-3; 1]$, $A \cap B = (-1; 0)$, $A \setminus B = (-3; -1]$, $B \setminus A = [0; 1]$; г) $A = (9; +\infty)$, $B = [-10; 10]$, $A \cup B = [-10; +\infty)$, $A \cap B = (9; 10]$, $A \setminus B = (10; +\infty)$, $B \setminus A = [-10; 9]$.

2. Введение в анализ. № 2.1. а) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; б) $(-4; 2)$; в) $\left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$; г) $[-1; 0) \cup [2; 4]$; д) $(1; 3]$; е) $\left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$; ж) $(-1; 1)$; з) $(-3; 4]$; и) $[-3; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; 3]$; к) $(-5; -2)$.

№ 2.2. а) $[2; +\infty)$; б) $[-1; 5]$; в) $(-\infty; 5)$; г) $[-3; +\infty)$.

№ 2.4. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{2}$; в) 0; г) $-\infty$; д) 0; е) 3; ж) $\frac{2}{3}$; з) $\frac{1}{7}$; и) $\frac{1}{2}$.

№ 2.5. а) ∞ ; б) $-\frac{5}{2}$; в) $\frac{3}{5}$; г) -1 ; д) 2, 7; е) $\frac{1}{3}$; ж) $-4, 5$; з) $\frac{1}{2}$; и) 0; к) $\frac{1}{8}$.

№ 2.6. а) $\frac{1}{2}$; б) -128 ; в) $-\frac{1}{24}$; г) $\frac{1}{10}$; д) $\frac{2}{3}$; е) $\frac{5}{6}$; ж) $\frac{2}{3}$; з) 0; и) 2; к) $\frac{2}{5}$.

№ 2.7. а) $\frac{7}{2}$; б) $\frac{3}{2}$; в) 0; г) $\frac{1}{7}$; д) $\frac{4}{3}$; е) 0; ж) $\frac{2}{3}$; з) $\frac{1}{2}$; и) $\frac{5}{4}$; к) $\frac{1}{2}$; л) $-\frac{1}{2}$;

м) 3; н) $-\frac{3 \ln 2}{2}$; о) $5 \ln 5$; п) $\frac{\sin x}{x}$.

№ 2.8. а) e^{-20} ; б) e^{-2} ; в) e^6 ; г) $e^{4/3}$; д) 0; е) ∞ ; ж) e^{10} ; з) $e^{-9/2}$; и) $e^{4/3}$.

№ 2.9. а) $x = 4$ – разрыв первого рода; б) $x = -1$ – разрыв первого рода, $x = 0$ – разрыв второго рода; в) $x = 1$ – разрыв первого рода; г) $x = 0$ – разрыв первого рода; д) $x = 4$ – разрыв первого рода; е) $x = 3$ – разрыв второго рода; ж) $x = 0$ – разрыв первого рода; з) $x = 2$ – разрыв второго рода; и) $x = 1$ – устранимый разрыв; к) $x = 1$ – разрыв первого рода; л) $x = 2$ – разрыв первого рода; м) $x = -1$ – разрыв второго рода, $x = 1$ – устранимый разрыв; н) $x = \pm 3$ – разрывы второго рода; о) $x = -1$, $x = 2$ – разрывы второго рода; п) $x = -3$, $x = 4$ – разрывы второго рода; р) $x = \pm 1$ – разрывы второго рода.

№ 2.10. а) 2; б) 1.

3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

№ 3.1 а) $10x^4 - 15x^2 + 7$; б) $-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; в) $\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} + x^2 + \frac{9}{x^4}$; г) $-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^5}} - \frac{6}{\sqrt[5]{x^2}} + \frac{20}{x^{11}} - 24x^7$; д) $3x^2(3 \ln x + 1)$; е) $y = (x + 2)^2 e^x$; ж) $\frac{3}{2\sqrt{x}(3 + \sqrt{x})^2}$; з) $y = \frac{1 - 2x \operatorname{arctg} x}{(1 + x^2)^2}$.

№ 3.2. а) $\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{2 \cos^2 x}$; б) $-\frac{5}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^6 x}$; в) $\frac{1}{4} \cos \frac{x}{4} - 4 \sin 4x$;

г) $7e^{7x} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$; д) $\frac{2}{2x-1}$; е) $\operatorname{ctg} x$; ж) $\frac{1}{x^2+1}$; з) $y = \frac{x \cos \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$;

$$\text{и)} 2^{\frac{x}{\ln x}} \ln 2 \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}; \quad \text{к)} 5^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{x} \ln 5 \right); \quad \text{л)} (3 \cos x - \sin x) \sin^2 x e^{-x};$$

$$\text{м)} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2 + x^2}; \quad \text{н)} \frac{\ln x - 2}{x^2} \sin 2 \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right); \quad \text{о)} \frac{6x \log_3^2(1-x^2)}{(x^2-1) \ln 3};$$

$$\text{п)} -\frac{\operatorname{tg} x}{2 \ln 10 \sqrt{\lg \cos x (1 - \lg \cos x)}}.$$

$$\text{№ 3.3. } \frac{\pi}{4}, \frac{\pi+1}{4}. \quad \text{№ 3.4. } -\frac{13}{(2x-3)^2}, \frac{52}{(2x-3)^3}.$$

$$\text{№ 3.5. } y' = 15x^2 - 18x, \quad y'' = 30x - 18, \quad y''' = 30, \quad y^{(n)} = 0 \text{ при } n \geq 4.$$

$$\text{№ 3.6. а)} x^x (\ln x + 1); \quad \text{б)} x^{\ln x - 1} \ln x; \quad \text{в)} \frac{(\ln x)^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left(\frac{1}{\ln x} - \ln(\ln x) \right);$$

$$\text{г)} y = (2 + \cos x)^x \left(\ln(2 + \cos x) - \frac{x \sin x}{2 + \cos x} \right);$$

$$\text{д)} y = (\sin 3x)^x (\ln \sin 3x + 3x \operatorname{ctg} 3x);$$

$$\text{е)} (\operatorname{arctg} x)^{x^2} \left(\frac{x^2}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} + 2x \ln(\operatorname{arctg} x) \right);$$

$$\text{ж)} y = \frac{\sqrt{x-1}(x+3)^5}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}} \left(\frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{x+3} - \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-2)} \right); \quad \text{з)} -1; \quad \text{и)} -1;$$

$$\text{к)} -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2-t^2}{4-t^2}}; \quad \text{л)} -\operatorname{tg} t; \quad \text{м)} -\frac{b^2 x}{a^2 y}; \quad \text{н)} \frac{-2}{3(y^2-1)}; \quad \text{о)} \frac{\cos x - e^y}{2y + x e^y};$$

$$\text{п)} \frac{y}{x} \cdot \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}; \quad \text{р)} \frac{-1}{\sin^2(x+y)}.$$

$$\text{№ 3.7. а)} 2t^2, 4t^2; \quad \text{б)} \frac{1}{3t}, -\frac{1}{9t^4}.$$

№ 3.8. а) $y_{\text{кас}} = -24x + 29$, $y_{\text{норм}} = \frac{1}{24}x + \frac{119}{24}$; **б)** $y_{\text{кас}} = 5x + 1$,

$y_{\text{норм}} = -\frac{1}{5}x + 1$; **в)** $y_{\text{кас}} = 2x - 2$, $y_{\text{норм}} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

№ 3.9. а) $(1; 3)$; **б)** $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$.

№ 3.10. а) $dy = 7x^6 dx$, $d^2y = 42x^5 dx^2$; **б)** $dy = \frac{2}{(x+1)^2} dx$,

$d^2y = \frac{-4}{(x+1)^3} dx^2$; **в)** $dy = e^{x^2} (2x + 2x^3) dx$, $d^2y = e^{x^2} (2 + 10x^2 + 4x^4) dx^2$;

г) $dy = -\frac{3dx}{2x^2 + 5x + 2}$, $d^2y = \frac{(12x + 15)dx^2}{(2x^2 + 5x + 2)^2}$.

№ 3.11. а) 2,9; **б)** 1,24.

№ 3.12. а) 2,01; **б)** 0,875; **в)** 2,0125; **г)** 1,036; **д)** 1,005.

№ 3.13. -7. **№ 3.14.** $\frac{7}{4}$. **№ 3.15.** $\frac{1}{6}$. **№ 3.16.** -12. **№ 3.17.** -2.

№ 3.18. $\frac{7}{2}$. **№ 3.19.** ∞ . **№ 3.20.** 0. **№ 3.21.** ∞ . **№ 3.22.** $\frac{1}{2}$. **№ 3.23.** $\frac{7}{e}$.

№ 3.24. 0. **№ 3.25.** -2. **№ 3.26.** 8. **№ 3.27.** $-\frac{1}{2}$. **№ 3.28.** 1. **№ 3.29.** $-\frac{1}{2}$.

№ 3.30. $\frac{1}{3}$. **№ 3.31.** 0. **№ 3.32.** $-\frac{1}{2}$. **№ 3.33.** 3. **№ 3.34.** $\frac{1}{2}$. **№ 3.35.** 1.

№ 3.36. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **№ 3.37.** $\frac{1}{e}$. **№ 3.38.** e^2 .

№ 3.39. а) возр. $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$, убыв. $(-4; 2)$; -4 - т. макс.; 2 -

т. мин.; **б)** возр. $(-\infty; -3) \cup \left(-3; -\frac{1}{2}\right)$, убыв. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$; $-\frac{1}{2}$ - т. макс.;

в) возр. $(-2; +\infty)$, убыв. $(-\infty; -2)$; -2 - т. мин.

№ 3.40. а) $y_{\max} = y(3) = 14$; $y_{\min} = y(2) = -11$; **б)** $y_{\max} = y(4) = 8$;

$$y_{\min} = y\left(\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{3}; \quad \text{в)} \quad y_{\max} = y(e) = e^3; \quad y_{\min} = y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = -\frac{1}{3e};$$

г) $y_{\max} = y(0) = 0$; $y_{\min} = y(1) = -1$.

№ 3.41. Вып. $(-2; 2)$, вогн. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, -2 и 2 – т. перегиба.

№ 3.42. 0 т. – макс, $\frac{1}{2}$ – т. мин., $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$ – т. перег.

№ 3.43. а) верт. $x = -1$, накл. $y = x - 2$; **б)** верт. $x = -3$, $x = 5$, гор. $y = 0$; **в)** верт. $x = 4$, накл. $y = x + 4$; **г)** на $+\infty$: $y = x$, на $-\infty$: $y = -x$; **д)** верт. $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$, накл. $y = x$.

№ 3.45. 9×17 м. **№ 3.46.** $4 \times 4 \times 2$ м. **№ 3.47.** 20×40 м (40 м параллельно берегу). **№ 3.48.** $\sqrt{2}R \times \sqrt{2}R$.

4. Интегральное исчисление функции одной переменной.

№ 4.1. а) $\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 7x + C$; **б)** $\frac{3^x}{\ln 3} - x^3 + 6 \ln|x| + C$; **в)** $\ln|x| - 4\sqrt{x} + \frac{3}{x} + C$;

г) $-\frac{3}{5\sqrt[3]{x^5}} - e^x - \frac{2}{x^2} + C$; **д)** $x + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C$; **е)** $x - \operatorname{arctg} x + C$;

ж) $-\operatorname{ctg} x - x + C$; **з)** $2x - \operatorname{tg} x + C$; **и)** $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$; **к)** $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$;

л) $\arcsin \frac{x}{5} + C$; **м)** $\arcsin \frac{x}{\sqrt{7}} + C$; **н)** $\frac{1}{14} \ln \left| \frac{x-7}{x+7} \right| + C$; **о)** $-\frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C$;

п) $\ln|x + \sqrt{x^2 + 6}| + C$; **р)** $\ln|x + \sqrt{x^2 - 3}| + C$.

№ 4.2. а) $-\frac{5}{(x-3)^6} + C$; **б)** $\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} + \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{3} + c$; **в)** $\frac{(x+2)^5}{5} + C$;

г) $-\frac{\sqrt[4]{(x+8)^3}}{4} + C$; **д)** $6e^{x/2} + C$; **е)** $-e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C$; **ж)** $\frac{\sqrt{(4x+9)^3}}{6} + C$;

з) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x-1)^2} + c$; **и)** $-\frac{\cos 9x}{9} - \frac{\sin 7x}{7} + C$; **к)** $7 \sin \frac{x}{7} - 9 \cos \frac{x}{9} + C$;

$$\begin{aligned}
\text{л)} & -\frac{\sqrt[5]{(8-5x)^9}}{9} + C; & \text{м)} & -\frac{(2-7x)^{10}}{70} + C; & \text{н)} & -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + C; \\
\text{о)} & -\frac{1}{9}\sin(5-9x) + C; & \text{п)} & \frac{1}{7}\operatorname{tg}(7x+2) + C; & \text{р)} & -3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + C; \\
\text{с)} & -\frac{1}{5}\ln|1-5x| + C; & \text{т)} & \frac{1}{4}\ln|4x+3|; & \text{у)} & \frac{1}{6}\operatorname{artcg}\frac{3x}{2} + C; & \text{ф)} & \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C; \\
\text{х)} & \frac{1}{4}\arcsin\frac{4x}{\sqrt{7}} + C; & \text{ц)} & \frac{1}{5}\ln\left|5x+\sqrt{25x^2-4}\right| + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{№ 4.3. а)} & \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C; & \text{б)} & \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+5}{x-1}\right| + C; & \text{в)} & \arcsin\frac{x-5}{10} + C; \\
\text{г)} & \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right| + C; & \text{д)} & \ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x}\right) + C; & \text{е)} & \arcsin\frac{x-2}{2} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{№ 4.4. а)} & e^{\sin x} + C; & \text{б)} & \frac{1}{3}e^{x^3} + C; & \text{в)} & \ln\sqrt{x^2+1} + C; & \text{г)} & \frac{(1+x^5)^7}{35} + C; \\
\text{д)} & 2\sqrt{\ln x+1} + C; & \text{е)} & -\ln|\cos x| + C; & \text{ж)} & \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C; & \text{з)} & \arcsin(\operatorname{tg} x) + C; \\
\text{и)} & \ln|\arcsin x| + C; & \text{к)} & \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2 + C; & \text{л)} & 2e^{\sqrt{x}} + C; & \text{м)} & \frac{1}{2}\left(x-\ln(e^x+2)\right) + C; \\
\text{н)} & 2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1) + C; & \text{о)} & \frac{2}{5}\sqrt{3+x}(x^2+x-6) + C; & \text{п)} & \ln\left|\frac{\sqrt{4x+1}-1}{\sqrt{4x+1}+1}\right| + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{№ 4.5. а)} & -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C; & \text{б)} & \frac{1}{4}(x-2)\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C; \\
\text{в)} & -e^{-x}(x^2+2x+2) + C; & \text{г)} & (3x+1)\cdot\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{3\cdot 2^x}{\ln^2 2} + C; & \text{д)} & \sqrt[3]{x^2}\left(\frac{3}{2}\ln x - \frac{9}{4}\right) + C; \\
\text{е)} & x(\ln x-1) + C; & \text{ж)} & x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C; & \text{з)} & \frac{1}{2}(x^2\operatorname{arctg} x - x - \operatorname{arctg} x) + \\
& + C; & \text{и)} & x\arccos 2x - \frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C; & \text{к)} & x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C; \\
\text{л)} & \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c; & \text{м)} & 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

№ 4.6. а) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C$; б) $\frac{(4x-3)^7}{28} + \frac{e^{-3x}}{3} - \frac{\sin 12x}{12} + C$;

в) $\frac{2^x e^x}{1 + \ln 2} + C$; г) $\ln |\cos x| + C$; д) $\frac{1}{4} \arcsin x^4 + C$; е) $\ln(e^x + (e^{2x} + 4)) + C$;

ж) $\frac{1}{2} x (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$; з) $x^3 \left(\frac{\ln x}{3} - \frac{1}{9} \right) + C$.

№ 4.7. а) 13,5; б) $\pi^2 + 2$; в) 1,75; г) $6\sqrt{e} - 7$; д) $\frac{13}{6}$; е) $\frac{1}{3}$; ж) $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$;

з) 0; и) $\frac{4}{3}$; к) $4 - \pi$; л) $e - \sqrt{e}$; м) $\frac{32}{3}$; н) $\frac{\pi-2}{18}$; о) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$; п) 1.

№ 4.8. а) $\frac{49}{3}$; б) 36; в) $\frac{4}{3}$; г) 12; д) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$; е) $\frac{125}{6}$. **№ 4.9.** а) $\frac{15\pi}{2 \ln 2}$;

б) $\frac{24\pi}{5}$; в) 8π ; г) $\frac{256\pi}{15}$. **№ 4.10.** а) $\ln(\sqrt{2} + 1)$; б) $\frac{38}{3}$; в) $\frac{3a}{2}$; г) $4\sqrt{3}$.

№ 4.11. $\frac{3}{2}$. **№ 4.12.** $\frac{1}{16}$. **№ 4.13.** -1. **№ 4.14.** $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

№ 4.15. $\pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. **№ 4.16.** Расходится. **№ 4.17.** Расходится.

№ 4.18. 4. **№ 4.19.** 4. **№ 4.20.** Расходится.

5. Матрицы и определители матриц. **№ 5.1.** а) $\begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) не существует; г) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 25 & 0 & 3 \\ 7 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 5.2. а) 2×5 ; б) нет; в) 2×9 . **№ 5.3.** а) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ -8 & -12 & -10 \\ 0 & -21 & -4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -31 & 4 \\ 23 & 7 \\ -9 & 17 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & \sin 2t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3-x & 0 \\ 2x & 3x \\ 2+x & 2x \end{pmatrix}$.

$$\text{№ 5.4. } A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 21 & 15 \\ 20 & 120 \end{pmatrix}; A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 24 & 28 & 40 \\ 16 & 36 & 57 \\ 8 & 48 & 81 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 5.5. } C^T \cdot D = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ -6 & 4 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}; D \cdot F = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 12 & 7 \\ 6 & -13 & -14 & -9 \end{pmatrix};$$

$$C^T \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 29 & 9 & 7 \\ 3 & -1 & -5 & -3 \\ 6 & 20 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 5.6. } A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}. \text{ № 5.8. } P \cdot X = S \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 19 \\ 5 & 5 & 10 \\ 18 & 16 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 5.9. } \text{а)} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 7 \\ 10 & 15 & 21 \\ -13 & 0 & -9 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 6 & -2 & 1 \\ 3 & 33 & 21 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 7 & -3 & 14 \\ 17 & -2 & 34 \\ 1 & 1 & 17 \end{pmatrix}; \text{ д)} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 5.10. а)} \begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 & 8 \\ 5 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \text{ б)} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ № 5.11. а)} \begin{pmatrix} 110 \\ 95 \end{pmatrix};$$

б) 520. № 5.12. а) -33 ; б) 2 ; в) 8 ; г) 8 ; д) -4 ; е) 4 . № 5.13. а) -3 ; б) -12 ; -2 ; в) $x > 3,5$; г) $x \in (-6; -4)$. № 5.14. а) 1 ; б) -40 ; в) -135 ; г) 1 ; д) -1800 ; е) -2 ; ж) 48 ; з) 47470 . № 5.15. $|A| = 15$, $|B| = 2$, $|A \cdot B| = 30$.

$$\text{№ 5.16. а)} \begin{pmatrix} 0,7 & -0,8 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} -1,3 & -1,7 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \text{ д)} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \text{ е)} \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 & 0,4 \\ 0,4 & -0,8 & 0,6 \\ -0,8 & 0,6 & -0,2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 5.17. а) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -14 & 1 & 19 \\ -3 & -1 & 5 \\ 12 & 0 & -16,5 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$6. \text{ Системы линейных уравнений. № 6.1. а) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ д) } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \text{ е) } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 6.2. а) } \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ № 6.3. } \begin{pmatrix} 1,8 \\ 2,6 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ № 6.4. а) } 2; \text{ б) } 3; \text{ в) } 3;$$

$$\text{г) } 2; \text{ д) } 2; \text{ е) } 3. \text{ № 6.5. а) } \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} x_3; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3; \text{ в) } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3; \text{ г) } \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} x_4.$$

$$\text{№ 6.6. а) система несовместна; б) } \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ г) система несовместна; д) } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -4 \\ 5,5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$7. \text{ Основы векторной алгебры. № 7.1. а) } \{1; 13\}; \text{ б) } \{-2; -6; 4\}; \text{ в) } \{13; -10; 5\}; \text{ г) } \{-11; -7; 7\}. \text{ № 7.2. } \{1; -7; 3\}. \text{ № 7.3. а) } \overrightarrow{a_0} \{0, 6; -0, 8\}; \text{ б) } \overrightarrow{b_0} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}; \text{ в) } \overrightarrow{s_0} \left\{ \frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7} \right\}; \text{ г) } \overrightarrow{d_0} \left\{ -\frac{3}{\sqrt{35}}; \frac{1}{\sqrt{35}}; \frac{5}{\sqrt{35}} \right\};$$

д) $\vec{c}_0 \left\{ \frac{3}{\sqrt{14}}; -\frac{1}{\sqrt{14}}; -\frac{2}{\sqrt{14}} \right\}$. № 7.4. а) $\{6; 3\sqrt{5}\}; \{-6; -3\sqrt{5}\}$; б) $\{4; -8; 8\}$; в) $\{6; 9; -6\sqrt{3}\}$. № 7.5. $\{6; 10\sqrt{3}\}$. № 7.6. а) 2; б) -2; в) -4 и -2. № 7.7. а) $5\sqrt{3}$; б) -3. № 7.8. а) 12; б) 4. № 7.9. а) -2; б) 6. № 7.10. а) нет; б) да. № 7.11. а) $\angle A = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 72^\circ$, $\angle B = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 18^\circ$, $\angle C = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$; б) 3; в) $\frac{1}{\sqrt{5}}$. № 7.12. а) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 62^\circ$; б) $3\sqrt{126}$; в) $-\sqrt{6}$. № 7.13. а) $32 + 9\sqrt{3}$, $5\vec{a} \times \vec{b}$, 7,5 кв. ед.; б) $12\sqrt{2} + 24$, $5\vec{a} \times \vec{b}$, $10\sqrt{2}$ кв. ед.; в) -52, $-8\vec{a} \times \vec{b}$, 6 кв. ед. № 7.14. 3; $\{2; -8; -4\}$; 18. № 7.15. 10,5 кв. ед. № 7.16. 7,5 куб. ед., 3 ед. № 7.17. 3. № 7.18. 5. № 7.19. а) $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; б) не образуют; в) $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c}$.

8. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.

№ 8.1. а) $C(1; -5)$; б) $M(0; -3, 5)$. № 8.2. $M_1(1; 0)$, $M_2(3; 1)$.

№ 8.3. $l_1: 6x - 7y + 40 = 0$, $l_2: 7x + 6y - 10 = 0$, $l_3: 3x + y + 2 = 0$, $d = \frac{11}{\sqrt{10}}$.

№ 8.4. $AB: 3x - 2y - 7 = 0$, $\frac{x}{7/3} + \frac{y}{-7/2} = 1$, $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$,

$\frac{3}{\sqrt{13}}x - \frac{2}{\sqrt{13}}y = \frac{7}{\sqrt{13}}$; $AC: 2x + 3y + 4 = 0$, $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-4/3} = 1$, $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$,

$-\frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y = \frac{4}{\sqrt{13}}$. № 8.5. Медиана $8x - y - 10 = 0$, $\sqrt{16,25}$; высота

$7x + 4y + 1 = 0$, $2\sqrt{\frac{13}{5}}$; биссектриса $5x + y - 3 = 0$. № 8.6. $l_1: x - 2y = 0$;

$l_2: y = 2$; $l_3: x = 4$. № 8.7. а) $7x - 3y + 25 = 0$; $\frac{x}{25/7} + \frac{y}{-25/3} = 1$;

$y = \frac{7}{3}x + \frac{25}{3}$; $\frac{-7}{\sqrt{58}}x + \frac{3}{\sqrt{58}} = \frac{25}{\sqrt{58}}$; б) $11x + 9y + 5 = 0$; $3x + 7y + 15 = 0$;

$x + y + 1 = 0$; в) $7x - 3y - 23 = 0$; г) $3x + 7y = 0$. № 8.8. а) 45° ; б) 90° ;

№ 8.9. а) $-1/2$; **б)** 2. **№ 8.10. а)** $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$; **б)** $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$; **в)** $x^2 + y^2 = 16$; **г)** $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$. **№ 8.11. а)** эллипс; полуоси 6 и 4; $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $(2\sqrt{5}; 0)$, $(-2\sqrt{5}; 0)$; $x = \pm \frac{18}{\sqrt{5}}$; **б)** эллипс; полуоси 6 и 8; $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $(0; -2\sqrt{7})$, $(0; 2\sqrt{7})$; $y = \pm \frac{32}{\sqrt{7}}$; **в)** гипербола; полуоси 4 и 3; $\varepsilon = \frac{5}{4}$; $(5; 0)$, $(-5; 0)$; $x = \pm 3, 2$; $y = \pm \frac{3}{4}x$; **г)** гипербола; полуоси 12 и 5; $\varepsilon = \frac{13}{5}$; $(0; 13)$, $(0; -13)$; $y = \pm \frac{25}{13}$; $y = \pm \frac{5}{12}x$; **д)** парабола; $p = 3$; $(1, 5; 0)$; $x = -1, 5$. **е)** парабола; $p = 4$; $(0; -2)$; $y = 2$; **ж)** парабола; $p = 6$; $(0; 3)$; $y = -3$; **з)** парабола; $p = 2$; $(-1; 0)$; $x = 1$. **№ 8.12. а)** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$; $(-6; 0)$, $(6; 0)$; $x = \pm \frac{50}{3}$; **б)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$; $(-2; 0)$, $(2; 0)$; $x = \pm \frac{25}{2}$; **в)** $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; $(-12; 0)$, $(12; 0)$; $x = \pm \frac{169}{12}$. **№ 8.13. а)** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; $(-3; 0)$, $(3; 0)$; $x = \pm \frac{4}{3}$; $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$; **б)** $\frac{y^2}{64} - \frac{x}{36} = 1$; $(0; -10)$, $(0; 10)$; $y = \pm \frac{32}{5}$; $y = \pm \frac{4}{3}x$; **в)** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{100} = 1$; $(-2\sqrt{29}; 0)$, $(2\sqrt{29}; 0)$; $x = \pm \frac{8}{\sqrt{29}}$; **г)** $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$; $(-13; 0)$, $(13; 0)$; $x = \pm 11 \frac{1}{13}$; $y = \pm \frac{5}{12}x$. **№ 8.14. а)** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{108} = 1$; $(-12; 0)$, $(12; 0)$; $x = \pm 3$; $y = \pm \sqrt{3}x$; **б)** $\frac{x^2}{153/16} - \frac{y^2}{9/4} = 1$; $(-3/4; 0)$, $(3/4; 0)$; $y = \pm 3$. **№ 8.15. а)** $(-4; 6)$; **б)** $\left(4; \frac{3}{2}\right)$ и $(3; 2)$. **№ 8.16. а)** $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$; $(2; -3)$; $\frac{5}{3}$; $F_1(-3; -3)$, $F_2(7; -3)$; $4x - 3y + 17 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$; $x = \frac{1}{5}$,

$$x = -\frac{19}{5}; \quad \text{б)} 4x - 3y + 17 = 0 \quad \text{и} \quad 4x + 3y + 1 = 0; \quad \text{в)} \frac{(x+5)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{36} = 1;$$

$$(-5; 1); \quad \frac{\sqrt{7}}{4}; \quad F_1(-5 - 2\sqrt{7}; 1), \quad F_2(-5 + 2\sqrt{7}; 1); \quad x = -5 \pm \frac{32}{\sqrt{7}};$$

$$\text{г)} (x+2)^2 = -\frac{5}{3}(y-1); (-2; 1); F\left(-2; \frac{7}{12}\right). \quad \text{№ 8.17. а)} \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1;$$

$$\text{б)} \frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{36} = 1; \quad \text{в)} 4x - 3y - 11 = 0 \quad \text{и} \quad 4x + 3y - 5 = 0;$$

$$\text{г)} \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1; \quad \text{д)} (-2; 2); \quad \text{е)} \emptyset; \quad \text{ж)} (y+4)^2 = 6(x+2).$$

$$\text{№ 8.18. а)} 4x^2 + 14x + 5y^2 + 40y + 81 = 0; \quad \text{б)} (x+1)^2 = 8(y-1);$$

$$\text{в)} (y-2)^2 = 4(x-6); \quad \text{г)} (x-1)^2 + (y-7)^2 = 16. \quad \text{№ 8.19. а)} x + 3y - 4z + 10 = 0;$$

$$\text{б)} x + 3y - 4z - 6 = 0; \quad \frac{16}{\sqrt{26}}.$$

$$\text{№ 8.20. } \frac{x}{-10} + \frac{y}{-10/3} + \frac{z}{5/2} = 1; \quad -\frac{1}{\sqrt{26}}x - \frac{3}{\sqrt{26}}y + \frac{4}{\sqrt{26}}z = \frac{10}{\sqrt{26}}.$$

$$\text{№ 8.21. а)} x - 5y + 4z - 6 = 0; \quad \text{б)} x - 5y + 4z - 14 = 0, \quad \text{в)} 3x - y - 4z + 14 = 0;$$

$$\frac{8}{\sqrt{42}}.$$

$$\text{№ 8.22. } AB: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-1}{-3}; \quad \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 6t - 2 \\ z = -3t + 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}; \quad C \notin AB.$$

$$\text{№ 8.23. } l: \frac{x-4}{0} = \frac{y+7}{1} = \frac{z+9}{0}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = t - 7 \\ z = -9 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - 4 = 0 \\ z + 9 = 0 \end{cases}. \quad \text{№ 8.24. } y = 4.$$

$$\text{№ 8.25. } l: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-3}{8}; \quad \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 4t - 5 \\ z = 8t + 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x + 3y + 7 = 0 \\ 2y - z + 13 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{№ 8.26. } 71x - 109y + 3z - 56 = 0.$$

№ 8.27. а) $\arcsin \sqrt{\frac{33}{74}}$; б) $DH: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-5}{-5}$; в) $H(3;3;0)$.

№ 8.28. $3x - 8y + z + 23 = 0$. № 8.29. а) $\arccos \frac{1}{6}$; б) $\arccos \frac{5}{2\sqrt{7}}$; в) $\arcsin \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

№ 8.30. $\begin{cases} x = 3t - 10 \\ y = 2t + 9 \\ z = t \end{cases}$. № 8.31. Однополостный гиперболоид; а) эллипс с фо-

кусами на оси OZ ; б) гипербола с фокусами на оси OX ; в) пара пересекающихся прямых. № 8.32. Гиперболический параболоид; а) парабола с фокусом на оси OZ (ветви вниз); б) парабола с фокусом на оси OZ (ветви вверх); в) пара пересекающихся прямых; г) гипербола с фокусами на оси OX . № 8.33. Эллиптический параболоид; а) эллипс с фокусами на оси OY ; б) нет пересечений; в) парабола с фокусом на оси OZ (ветви вверх).

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Задача 1. Найдите пределы следующих функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1.1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 12}{(x+1)(2x^2 + 10)};$

1.2. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{(6x^2 + 3)(x+1)};$

б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5};$

б) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x^2 - 8x};$

в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x + 2};$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 3x^2 - 4};$

г) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}};$

г) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{1 - \cos 3x};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \cdot \operatorname{tg} 5x};$

е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{2x+1}.$

е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+7} \right)^{3x}.$

1.3. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 12x + 1}{(x+1)(3x+7)};$

1.4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{6x^3 + 3x + 14};$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{2x^2 - x - 1};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{4x^2 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$

в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x + 14};$

в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 2x^2 - x + 2};$

г) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 15};$

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 5x};$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^{3-4x}.$$

$$\text{1.5. a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 3x - 4}{(x+1)(x^3+1)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x^2 - 49};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin 3x};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^{3-4x}.$$

$$\text{1.7. a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 7x^3 - 11}{(x-1)(x^3-8)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{2x^2 - 5x - 3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 0,25x}{2x^2};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1-x}{x}}.$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}.$$

$$\text{1.6. a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^5 - 2x^2 + 5}{(5x^4 + 2x - 1)(x-1)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 9x + 6};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x^2 - 6x}{x^3 - 2x^2 - x + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5 \operatorname{tg} x};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{3x+1}.$$

$$\text{1.8. a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 12}{(2x^2 + 10)(x+1)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{2x^2 - x - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \operatorname{tg} 4x}{x^2};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1}.$$

$$1.9. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^2 - x}{(2x-1)(2x^2+3)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x^2 - 24x - 5}{25 - x^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 3x + 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{4+x}}{3x^2 - 4x + 1};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{2x+1}.$$

$$1.11. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 10x - 30}{(x-1)(2x+7)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 3x + 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x + 1)^2}{x^3 - 2x^2 - x + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 10x - 24}{\sqrt{5-x} - \sqrt{1+x}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 4x}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1}.$$

$$1.10. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x + 1}{(2x^2+1)(x+3)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{2x^2 - 5x - 3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x^3 - 3x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x + 3};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \operatorname{tg} 4x};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}.$$

$$1.12. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x - 2}{(x^2+10)(x+5)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - 1};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x \cdot \operatorname{tg} 3x}{2x^2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{2}{x}}.$$

$$1.13. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 2x^2 + x - 3}{(2x^2 + 1)(3x^2 + 2)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 11} \frac{2x^2 - 21x - 11}{x^2 - 11x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+5}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{1-x^2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}.$$

$$1.15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 + 3x^3 - 6x + 2}{x(x^2 + 6)(x^2 - 2)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 10x - 12}{x^2 - 3x - 18};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x-3}.$$

$$1.17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{x(x+1)(x^2 - 3)};$$

$$1.14. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{(x^2 + 1)(4x + 3)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 10x - 12}{x^2 - 3x - 18};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{x+7}}{7x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \cdot \operatorname{tg} 5x};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{2x+1}.$$

$$1.16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 14}{(2x^2 + 1)(4x - 3)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 5x + 3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x^2 - 6x}{x^3 - 2x^2 - x + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x^2 - 3x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{5}{x}}.$$

$$1.18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x + 14}{(2x^2 + 1)(x - 3)};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{6x^2 - x - 1}{3x + 1};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + 2}{x^4 + 4x^2 - 5};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+7}}{2x^2 - 7x - 4};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 9x};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6-x}{7-x} \right)^{1-x}.$$

$$\text{1.19. а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x^3 + 5x^2 - 3}{(3x-2)(2x^3 - 5x + 1)};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 5x + 3};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \cdot \operatorname{tg} 2x};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}.$$

$$\text{1.21. а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x^3 + 5x^2 - 3}{(3x-2)(2x^3 - 5x + 1)};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 5x + 3};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 11x - 3}{3x^2 - 8x - 3};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x + 14};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5 \operatorname{tg} 4x};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^{3-4x}.$$

$$\text{1.20. а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 3x + 1}{(x^2 - 1)(2x - 3)};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x^2 - 8x};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2}.$$

$$\text{1.22. а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{(2x^2 - 1)(2x - 3)};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{5x^2 - 9x - 2};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\cos x - \cos^3 x};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}.$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 9x};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}.$$

$$1.23. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 8x^2 + 5x}{(2x+1)(3x^2 - 5x + 1)};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 11x - 3}{3x^2 - 8x - 3};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x^2 - 3x};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x \cdot \sin 2x}{x^2};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}.$$

$$1.24. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + x + 1}{(x^2 - 1)(5x - 1)};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 9x + 6};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\cos x - \cos^3 x};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x-1} \right)^{2x+3}.$$

$$1.25. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 4x^3 - 5x}{(2x^4 + 5x - 1)(2x^2 - 3)};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{15x^2 - 2x - 1}{3x - 1};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 - 2x + 1};$$

$$1.26. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 - 1)(5x - 1)};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x^2 - 16};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 2x^2 - x + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}}{x^2 + x - 2};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \operatorname{tg} 4x};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x-1} \right)^{2x+3}.$$

$$\text{1.27. а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^4 + 5x^3 - 4x}{(6x^2 + 1)(x^2 - 14x + 1)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{5x^2 - 9x - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x - 4}{x^2 + x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{3 - \sqrt{9-x}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x \cdot \sin 3x}{2x^2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2}.$$

$$\text{1.29. а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^4 - 3x^2 + 6x}{(5x-8)(2x^3-3)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x^2 - 16};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{13+x} - 2\sqrt{x+1}}{3-x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{6+x}}{x^2 - x - 6};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 4x}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+7} \right)^{3x}.$$

$$\text{1.28. а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + x + 1}{(x^2 - 6)(5x - 1)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 11} \frac{x^2 - 21x + 110}{x^2 - 11x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 3x + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{4+x}}{3x^2 - 4x + 1};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{1-x^2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}.$$

$$\text{1.30. а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 1}{(x^2 - 1)(x - 5)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x^2 - 24x - 5}{25 - x^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{3+x}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}.$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{3x+1}.$$

Задача 2. Используя правила дифференцирования и таблицу производных, найдите производные следующих функций.

$$\text{2.1. а) } y = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x^5} - 5;$$

$$\text{б) } y = \sqrt{x} \cdot \arcsin \sqrt{x};$$

$$\text{в) } y = x^{\frac{5}{x}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \frac{1}{t^2}; \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

$$\text{2.2. а) } y = \frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{x^6} + \sqrt[4]{x^6} + 4;$$

$$\text{б) } y = e^{x^2} \ln(1 + 4x);$$

$$\text{в) } y = x^{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin^4 \frac{t}{2}. \end{cases}$$

$$\text{2.3. а) } y = \sqrt[5]{x} - \frac{1}{x^3} + \sqrt[4]{x^3} - 1;$$

$$\text{б) } y = x^2 \cdot \arcsin x^2;$$

$$\text{в) } y = (\sin 6x)^{x^2};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = \frac{2}{\sin^2 t}. \end{cases}$$

$$\text{2.4. а) } y = \frac{1}{\sqrt[8]{x}} - \frac{1}{x^8} + \sqrt[8]{x} + 7;$$

$$\text{б) } y = \sqrt{x} \arccos \sqrt{x};$$

$$\text{в) } y = (1 + \sin x)^{\cos x};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{t/2}; \\ y = \sqrt{1 + e^t}. \end{cases}$$

$$\text{2.5. а) } y = \sqrt[5]{x} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^5} + 5;$$

$$\text{б) } y = 3^x \ln^3 x;$$

$$\text{в) } y = x^{\operatorname{tg} x^3};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}; \\ y = \ln t. \end{cases}$$

$$\text{2.6. а) } y = \frac{1}{\sqrt[9]{x}} - \frac{1}{x^9} + \sqrt[4]{x^9} - 2;$$

$$\text{б) } y = \operatorname{tg}^5 x \cdot \arccos 5x;$$

$$\text{в) } y = x^{(1+x)^2};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \ln(1 - t^2); \\ y = \arcsin t. \end{cases}$$

$$2.7. \text{ a) } y = \sqrt[6]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[6]{x^5} + 6;$$

$$\text{б) } y = \operatorname{tg} x \cdot 2^{\cos^2 x};$$

$$\text{в) } y = x^{-e^{4x}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$2.9. \text{ a) } y = \sqrt[5]{x} - \frac{1}{x^7} + \sqrt[7]{x^5} - 7;$$

$$\text{б) } y = \frac{1 - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x};$$

$$\text{в) } y = \left(\frac{2}{x}\right)^{x-1};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = e^{2t}; \\ y = \operatorname{arctg}(e^t). \end{cases}$$

$$2.11. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x^7} - 4;$$

$$\text{б) } y = \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x;$$

$$\text{в) } y = (\operatorname{ctg} x)^x;$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \operatorname{arctg}(t^2); \\ y = t^4 + 1. \end{cases}$$

$$2.13. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^4} + \sqrt[4]{x^6} + 4;$$

$$2.8. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt[10]{x}} - \frac{1}{x^{10}} + \sqrt[10]{x^9} - 10;$$

$$\text{б) } y = \operatorname{ctg} 4x \cdot 9^{\left(x^4\right)};$$

$$\text{в) } y = (\sin x)^{\sqrt{x}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}; \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$$

$$2.10. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + 2;$$

$$\text{б) } y = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x};$$

$$\text{в) } y = (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}; \\ y = \operatorname{tg} \sqrt{1+t}. \end{cases}$$

$$2.12. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2} - 2;$$

$$\text{б) } y = x^2 \cdot \arcsin(2x);$$

$$\text{в) } y = (\operatorname{tg} 4x)^{\sin x};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \frac{1}{1+t}; \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$2.14. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{x^5} + \sqrt[4]{x^6} - 6;$$

$$\text{б)} y = \frac{1 + \cos 7x}{1 - \cos 7x};$$

$$\text{в)} y = (x + \sqrt{x})^{\sqrt{x}};$$

$$\text{г)} \begin{cases} x = e^t \cdot \sin t; \\ y = t + \sin t. \end{cases}$$

$$\text{2.15. а)} y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^7} - 9;$$

$$\text{б)} y = \frac{e^x}{\arcsin x};$$

$$\text{в)} y = (\sin x)^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$\text{г)} \begin{cases} x = (1 + \cos^2 t)^2; \\ y = \frac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$$

$$\text{2.17. а)} y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{1}{x^3} + \sqrt[4]{x^3} + 3;$$

$$\text{б)} y = x \cdot \arccos(x^2);$$

$$\text{в)} y = (\operatorname{arctg} x)^{\cos x};$$

$$\text{г)} \begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \sin^2 t \cdot \sin 2t. \end{cases}$$

$$\text{2.19. а)} y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^7} - 5;$$

$$\text{б)} y = e^{-x^3} \operatorname{ctg}(1 - 3x);$$

$$\text{в)} y = x^{3/x};$$

$$\text{б)} y = x^4 \cdot \arccos \frac{x}{3};$$

$$\text{в)} y = (\operatorname{arctg} x)^{\sin 2x};$$

$$\text{г)} \begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = t + \cos t. \end{cases}$$

$$\text{2.16. а)} y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{x^6} + \sqrt[4]{x^3} + 12;$$

$$\text{б)} y = 3^{x^2} \sin(8x - 1);$$

$$\text{в)} y = (x + 1)^{e^{3x}};$$

$$\text{г)} \begin{cases} x = \arccos \frac{1}{t}; \\ y = \sqrt{t^2 - 1}. \end{cases}$$

$$\text{2.18. а)} y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{x^9} - 9;$$

$$\text{б)} y = x^2 \operatorname{arctg} 2x;$$

$$\text{в)} y = (3 - 2x)^{\sin 2x};$$

$$\text{г)} \begin{cases} x = \sqrt{3 + t^2}; \\ y = \ln(t^2 + 3). \end{cases}$$

$$\text{2.20. а)} y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^3}} - \frac{1}{x^8} + \sqrt[4]{x^3} - 1;$$

$$\text{б)} y = (2x + x^3) \operatorname{tg}^2 x;$$

$$\text{в)} y = (\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\Gamma) \begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \frac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$$

$$\Gamma) \begin{cases} x = 1 + \sin^2 t; \\ y = \cos^3 t. \end{cases}$$

$$2.21. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^5} + \sqrt[4]{x} - 6;$$

$$2.22. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}} - \frac{1}{x^5} + \sqrt[4]{x^5} - 2;$$

$$\text{б) } y = \frac{1 + \operatorname{ctgx}}{1 - \operatorname{ctgx}};$$

$$\text{б) } y = x^4 \cdot \operatorname{arccotg} 2x^2;$$

$$\text{в) } y = (\cos 2x)^x;$$

$$\text{в) } y = x^{\sqrt[4]{x}};$$

$$\Gamma) \begin{cases} x = \arcsin \sqrt{1-t^2}; \\ y = \arccos t. \end{cases}$$

$$\Gamma) \begin{cases} x = \sin 2t; \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

$$2.23. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt[7]{x}} - \frac{1}{x^7} + \sqrt[4]{x^7} + 10;$$

$$2.24. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt[7]{x}} - \frac{1}{x^8} + \sqrt[7]{x^9} + 1;$$

$$\text{б) } y = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \arcsin x;$$

$$\text{б) } y = \frac{1 + \ln x}{\sqrt{x}};$$

$$\text{в) } y = x^{(2^x)};$$

$$\text{в) } y = (\sin x)^{\arcsin x};$$

$$\Gamma) \begin{cases} x = \frac{1}{\ln t}; \\ y = \ln^2 t. \end{cases}$$

$$\Gamma) \begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}; \\ y = \ln \sqrt{t - 1}. \end{cases}$$

$$2.25. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^3} + \sqrt[4]{x^3} - 7;$$

$$2.26. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt[6]{x^7}} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[7]{x^9} + 11;$$

$$\text{б) } y = \frac{1 + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} 2x};$$

$$\text{б) } y = \sqrt[3]{x} \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x};$$

$$\text{в) } y = (\sin x)^{x^2};$$

$$\text{в) } y = (1 - 2x)^{\cos 2x};$$

$$\Gamma) \begin{cases} x = \ln \sin t; \\ y = \cos t. \end{cases}$$

$$\Gamma) \begin{cases} x = e^{t-1}; \\ y = \ln(t^2 - 1). \end{cases}$$

$$2.27. \text{ а) } y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{x^4} + \sqrt[4]{x} - 8;$$

$$\text{б) } y = x^4 \cdot \arcsin x^2;$$

$$\text{в) } y = (1-x)^{2^x};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \operatorname{ctg} e^t; \\ y = \ln(\operatorname{tg} e^t). \end{cases}$$

$$2.29. \text{ а) } y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} - \frac{1}{x^5} + \sqrt[4]{x^5} + 3;$$

$$\text{б) } y = 5^x \ln(1-5x);$$

$$\text{в) } y = x^{\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \sqrt{1+e^{2t}}; \\ y = \operatorname{arctg} e^t. \end{cases}$$

$$2.28. \text{ а) } y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} - \frac{1}{x^6} + \sqrt[6]{x^5} + 12;$$

$$\text{б) } y = \frac{e^{x^2}}{x^4};$$

$$\text{в) } y = (\ln x)^{(1-x)};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \sqrt{1+t^2}; \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

$$2.30. \text{ а) } y = \frac{1}{\sqrt[8]{x}} - \frac{1}{x^7} + \sqrt[8]{x^7} - 3;$$

$$\text{б) } y = 3^x \operatorname{tg} x^3;$$

$$\text{в) } y = x^{\operatorname{arctg} x};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}; \\ y = \sqrt{1-t}. \end{cases}$$

Задача 3. Используя свойства непрерывных функций, найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

$$3.1. y = \frac{6+x}{x^2+13}, x \in [-5; 5].$$

$$3.2. y = \frac{27}{x} + \frac{x^3}{9}, x \in [1; 9].$$

$$3.3. y = x + \frac{16}{x}, x \in [1; 8].$$

$$3.4. y = \frac{(x+3)^2}{x^2+7}, x \in [-3; 7].$$

$$3.5. y = \frac{10x}{x^2+1}, x \in [0; 3].$$

$$3.6. y = \frac{27}{x^2} + 2x, x \in [1; 6].$$

$$3.7. y = \frac{12}{x} + \frac{x^3}{4}, x \in [1; 4].$$

$$3.8. y = -x - \frac{4}{(x+2)^2}, x \in [-1; 4].$$

$$3.9. y = \frac{(x-4)^2}{x+9}, x \in [-4; 6].$$

$$3.10. y = \frac{(x+6)^2}{x+13}, x \in [-1; 7].$$

$$3.11. y = 4\sqrt{x+3} - x, x \in [-2; 6].$$

$$3.13. y = \frac{4x}{x^2 + 4}, x \in [-5; 1].$$

$$3.15. y = \frac{6}{x} + \frac{x^2}{9}, x \in [2; 9].$$

$$3.17. y = \frac{x-4}{x^2 + 9}, x \in [-4; 6].$$

$$3.19. y = \frac{12}{x^2} + 3x, x \in [1; 4].$$

$$3.21. y = \frac{(x-4)^2}{x^2 + 9}, x \in [3; 6].$$

$$3.23. y = \frac{4}{x} + \frac{x^2}{4}, x \in [1; 4].$$

$$3.25. y = x - 4\sqrt{x+2}, x \in [-1; 7].$$

$$3.27. y = x - 4\sqrt{x}, x \in [0; 9].$$

$$3.29. y = \frac{x+1}{x^2 + 8}, x \in [0; 4].$$

$$3.12. y = 4\sqrt{x+1} - 2x, x \in [-0,75; 3].$$

$$3.14. y = \frac{(x+6)^2}{x^2 + 13}, x \in [-5; 5].$$

$$3.16. y = \frac{(x-3)^2}{x+16}, x \in [-5; 5].$$

$$3.18. y = \frac{x^2 + 15}{x+8}, x \in [-4; 4].$$

$$3.20. y = \frac{16}{x} + \frac{x^3}{3}, x \in [1; 3].$$

$$3.22. y = 4 - x - \frac{4}{x^2}, x \in [1; 4].$$

$$3.24. y = \frac{x+3}{x^2 + 7}, x \in [-3; 7].$$

$$3.26. y = 2\sqrt{x-1} - x + 2, x \in [1; 5].$$

$$3.28. y = x + \frac{9}{x}, x \in [1; 5].$$

$$3.30. y = x + \frac{4}{x}, x \in [-4; -1].$$

Задача 4. Постройте графики функций, выполнив полное исследование их свойств.

а)

$$4.1. y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4.$$

$$4.3. y = x^3 + 11x^2 + 39x + 45.$$

$$4.5. y = x^3 - 7x^2 + 15x - 9.$$

$$4.7. y = x^3 + x^2 - 5x + 3.$$

$$4.9. y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20.$$

$$4.11. y = x^3 + x^2 - 16x + 20.$$

$$4.13. y = x^3 - 7x^2 + 8x - 5.$$

$$4.2. y = x^3 + 9x^2 + 24x + 20.$$

$$4.4. y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5.$$

$$4.6. y = x^3 + 7x^2 + 15x + 9.$$

$$4.8. y = x^3 + x^2 - 21x - 45.$$

$$4.10. y = x^3 + 4x^2 - 3x + 18.$$

$$4.12. y = x^3 - x^2 - 5x - 3.$$

$$4.14. y = x^3 - x^2 - 8x + 12.$$

$$4.15. y = x^3 - 5x^2 + 3x + 9.$$

$$4.17. y = x^3 - 11x^2 + 39x - 4.$$

$$4.19. y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5.$$

$$4.21. y = x^3 - 8x^2 + 21x - 8.$$

$$4.23. y = x^3 + 4x^2 + 5x + 2.$$

$$4.25. y = x^3 - 7x^2 + 16x - 12.$$

$$4.27. y = x^3 - 5x^2 + 3x + 2.$$

$$4.29. y = x^3 - 4x^2 - 3x - 5.$$

$$4.16. y = x^3 + x^2 - 8x - 12.$$

$$4.18. y = x^3 - x^2 + 21x + 45.$$

$$4.20. y = x^3 + 5x^2 + 3x - 9.$$

$$4.22. y = x^3 - 7x^2 + 8x + 5.$$

$$4.24. y = x^3 + 4x^2 - 3x - 18.$$

$$4.26. y = x^3 + 7x^2 + 16x + 12.$$

$$4.28. y = x^3 - 8x^2 + 5x + 8.$$

$$4.30. y = x^3 - x^2 - 5x + 6.$$

6)

$$4.1. y = \frac{x^2}{(x+1)^2}.$$

$$4.2. y = \frac{x^3}{4-x^2}.$$

$$4.3. y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

$$4.4. y = \frac{(x+2)^2}{2x^2}.$$

$$4.5. y = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

$$4.6. y = \frac{(x-1)^3}{2x^2}.$$

$$4.7. y = \frac{x^3-4x}{x^2-1}.$$

$$4.8. y = \frac{x^3+8}{x}.$$

$$4.9. y = \frac{4x^3}{x^3-1}.$$

$$4.10. y = \frac{2}{x^2-2x}.$$

$$4.11. y = \frac{x^2+8}{x^2}.$$

$$4.12. y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$$

$$4.13. y = \frac{x^3+1}{x^2}.$$

$$4.14. y = \frac{x}{x^2-4}.$$

$$4.15. y = \frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

$$4.16. y = \frac{x^4}{(x+1)^3}.$$

$$4.17. y = \frac{27}{x} + \frac{x^3}{9}.$$

$$4.18. y = \frac{x^4}{x^3-1}.$$

$$4.19. y = \frac{4-x^2}{1-x^2}.$$

$$4.20. y = \frac{(x+3)^2}{x^2+7}.$$

$$4.21. y = \frac{4x}{4+x^2}.$$

$$4.22. y = \frac{x^2-1}{x^2+2}.$$

$$4.23. y = \frac{27}{x^2} + 2x.$$

$$4.24. y = \frac{x^2-4}{x-3}.$$

$$4.25. y = \frac{x^2-3x-4}{x-3}.$$

$$4.26. y = -x - \frac{4}{(x+2)^2}.$$

$$4.27. y = \frac{x^2+2}{x+2}.$$

$$4.28. y = \frac{x^2-9}{3x^2-3}.$$

$$4.29. y = \frac{1-x^2}{4-x^2}.$$

$$4.30. y = \frac{x^2}{x^3-1}.$$

Задача 5. Используя подходящий метод, найдите неопределенные интегралы.

5.1. а) $\int \frac{3x^2 + e^x}{x^3 + e^x} dx;$

б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}} dx.$

5.3. а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx;$

б) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx.$

5.5. а) $\int \frac{x^2}{x^6 + 9} dx;$

б) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$

5.7. а) $\int x^3 e^{-x^4} dx;$

б) $\int x \operatorname{tg}^2 x dx.$

5.9. а) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{4-5 \sin 2x}} dx;$

б) $\int \sqrt{x} \ln x dx.$

5.11. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^2 x};$

б) $\int \frac{\ln x}{x^4} dx.$

5.13. а) $\int \frac{x dx}{4+4x^2};$

б) $\int \ln(1-x^2) dx.$

5.2. а) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x^2};$

б) $\int (x^2 - x + 1) \ln x dx.$

5.4. а) $\int \frac{e^x dx}{9e^{2x} + 4};$

б) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

5.6. а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 + 5}};$

б) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$

5.8. а) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx;$

б) $\int (x^2 - 2x) \sin x dx.$

5.10. а) $\int x(x^2 + 2)^7 dx;$

б) $\int (x^3 + x) \ln x dx.$

5.12. а) $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x};$

б) $\int \ln(x^2 + 2x + 2) dx.$

5.14. а) $\int \frac{1}{x^2} \frac{e^x dx}{x^2};$

б) $\int x \operatorname{ctg}^2 x dx.$

- 5.15. a) $\int \frac{3^x dx}{1+9^x}$;
 б) $\int (x^2 + x) e^x dx$.
- 5.17. a) $\int x \sin(1-x^2) dx$;
 б) $\int \ln^2 x dx$.
- 5.19. a) $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$;
 б) $\int x^2 3^x dx$.
- 5.21. a) $\int \operatorname{ctg} 5x$;
 б) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.
- 5.23. a) $\int \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x} dx$;
 б) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$.
- 5.25. a) $\int \frac{4x^3 + \cos x}{x^4 + \sin x} dx$;
 б) $\int (x+1) \sin 2x dx$.
- 5.27. a) $\int e^x \cos(e^x + 1) dx$;
 б) $\int x \ln^2 x dx$.
- 5.29. a) $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} 2x}}{\sin^2 2x} dx$;
 б) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} dx$.
- 5.16. a) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$;
 б) $\int (x+1) \operatorname{arctg} x dx$.
- 5.18. a) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$;
 б) $\int x \operatorname{tg} x dx$.
- 5.20. a) $\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4+x^2} dx$;
 б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.
- 5.22. a) $\int 5^x \sqrt{3+5^x} dx$;
 б) $\int \ln(1+x^2) dx$.
- 5.24. a) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;
 б) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$.
- 5.26. a) $\int x e^{2x^2} dx$;
 б) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$.
- 5.28. a) $\int \frac{e^x}{\sqrt{2e^x + 1}} dx$;
 б) $\int \sqrt[3]{x^2} \ln x dx$.
- 5.30. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}\sqrt[4]{x}}$;
 б) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

Задача 6. Даны уравнения линий. Постройте фигуру, ограниченную этими линиями, и вычислите ее площадь.

6.1. $y = -x^2 + 4x - 1$; $y = -x - 1$.

6.3. $y = x^2 - 2x - 2$; $y = x - 4$.

6.5. $y = x^2 - 6x + 7$; $y = x + 1$.

6.7. $y = x^2 - 6x + 6$; $y = -2x + 6$.

6.9. $y = -x^2 + 6x - 5$; $y = x - 5$.

6.11. $y = x^2 - 2x + 4$; $y = x + 4$.

6.13. $y = -x^2 + x + 5$; $y = -x - 3$.

6.15. $y = -x^2 - 8$; $y = -3x - 6$.

6.17. $y = -x^2 + 4$; $y = -2x + 4$.

6.19. $y = -x^2 + 6x - 5$; $y = -x + 1$.

6.21. $y = x^2 - 3x - 3$; $y = x - 3$.

6.23. $y = -x^2 - 8$; $y = -3x - 6$.

6.25. $y = x^2 + 6x + 7$; $y = x + 7$.

6.27. $y = x^2 - 3x + 2$; $y = -x + 2$.

6.29. $y = x^2 + 6x + 7$; $y = -x + 1$.

6.2. $y = x^2 - x - 4$; $y = x + 4$.

6.4. $y = x^2 - 6x - 5$; $y = x + 1$.

6.6. $y = x^2 - 4x - 1$; $y = -x - 3$.

6.8. $y = -x^2 + 10$; $y = -2x + 2$.

6.10. $y = x^2 + 6x + 7$; $y = -x + 1$.

6.12. $y = x^2 + 2x + 6$; $y = 4x + 6$.

6.14. $y = -x^2 - 6x - 6$; $y = -x - 6$.

6.16. $y = -x^2 + 9$; $y = -4x + 9$.

6.18. $y = x^2 + 4x + 3$; $y = x + 3$.

6.20. $y = x^2 - 4x + 1$; $y = x + 1$.

6.22. $y = -x^2 + 3x - 2$; $y = x - 2$.

6.24. $y = x^2 - 4x - 1$; $y = -x + 3$.

6.26. $y = x^2 - 3x + 4$; $y = -x + 12$.

6.28. $y = x^2 - 6x + 4$; $y = -2x + 4$.

6.30. $y = -x^2 + 4$; $y = -2x + 4$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ «АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

Задача 1. С заданными матрицами P, R, S, F выполните указанные действия:

а) $R + S^T$; б) $R^T + S$; в) $P \cdot R$; г) $P \cdot R \cdot S$; д) $P \cdot F$; е) $(P \cdot F)^T$; ж) $F^T \cdot P^T$.

$$1.1. P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$1.2. P = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.3. P = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.4. P = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$1.5. P = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ -9 & 5 & -3 \\ -5 & 9 & -1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.6. P = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -8 \\ -3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.7. P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.8.} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.9.} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 8 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 5 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.10.} \quad P = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 9 & -3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.11.} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.12.} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.13.} \quad P = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.14.} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -1 & -5 & 6 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.15.} \quad P = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -9 \\ 3 & 4 & 7 \\ -1 & 9 & -5 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.16.} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ -8 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.17.} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.18.} \quad P = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.19.} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.20.} \quad P = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.21.} \quad P = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.22.} \quad P = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ -5 & -1 & 8 \\ -9 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.23.} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.24.} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.25.} \quad P = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.26.} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -8 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.27. P = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.28. P = \begin{pmatrix} 7 & -9 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & -8 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.29. P = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$1.30. P = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Даны матрицы A и B . Запишите систему линейных алгебраических уравнений, соответствующую матричному уравнению

$$A \cdot X = B, \text{ если матрица неизвестных } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Решите эту систему уравнений:

а) матричным методом; **б)** методом Крамера; **в)** методом Гаусса.

$$2.1. A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -9 \\ 3 & 4 & 7 \\ -1 & 9 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 19 \end{pmatrix}. \quad 2.2. A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$2.3. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ -8 & -5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -23 \end{pmatrix}. \quad 2.4. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$2.5. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -14 \\ -18 \\ -9 \end{pmatrix}. \quad 2.6. A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.7.} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 29 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.8.} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.9.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.10.} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.11.} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.12.} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ -9 & 5 & -3 \\ -5 & 9 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.13.} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.14.} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -8 \\ -3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.15.} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ -5 & -1 & 8 \\ -9 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ -17 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.16.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.17.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.18.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.19.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -12 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.20.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 8 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.21.} \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.22.} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 9 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.23.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -8 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.24.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.25. A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad 2.26. A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

$$2.27. A = \begin{pmatrix} 7 & -9 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad 2.28. A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.29. A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad 2.30. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -1 & -5 & 6 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Даны матрицы A , B и C . Запишите и исследуйте на совместность системы линейных алгебраических уравнений:

а) соответствующую матричному уравнению $A \cdot X = B$;

б) однородную систему, соответствующую матричному уравнению $C \cdot X = O$,

где матрица O – нулевая матрица, а матрица неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

В случае совместности системы уравнений найдите ее общее решение и укажите одно частное решение.

$$3.1. A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & -8 & -14 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 & 16 \\ 4 & -8 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & -3 & -8 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3.2. A = \begin{pmatrix} 3 & -11 & 8 & 5 \\ -1 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 & 1 \\ 3 & -10 & 4 & 16 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.3.} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & -6 & 10 \\ 2 & 1 & -18 & 15 \\ -3 & 5 & 3 & -10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 21 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 & -7 \\ -2 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & -10 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.4.} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -13 & 12 \\ 2 & 5 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 17 & -13 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.5.} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 14 & -16 \\ 3 & 2 & -13 & 17 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -11 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.6.} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 3 & 10 \\ 2 & -4 & 7 & 16 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & -3 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -17 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 & 7 \\ -1 & 2 & -6 & -1 \\ 3 & -3 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.7.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & 1 \\ 3 & -10 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & -11 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.8.} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & -6 & -1 & -7 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -18 & 15 \\ 1 & 0 & -6 & 10 \\ -3 & 5 & 3 & -10 \\ 4 & -8 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.9.} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 & -6 \\ -2 & -1 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 7 & -10 & -1 \\ 2 & 9 & -16 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.10.} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 9 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -11 \\ 3 & -9 & 5 & 8 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -8 & -14 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & -12 \\ 2 & -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.11.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & -6 & 7 \\ -1 & 2 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & -13 & 12 \\ 1 & -3 & 17 & -13 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.12.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -13 & 17 \\ -2 & -2 & 14 & -16 \\ 2 & 3 & -11 & 12 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.13.} \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -9 & 6 \\ 2 & 5 & 17 & -22 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 3 & 8 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & 11 & -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.14.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -16 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -10 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -10 & 0 & -7 \\ 2 & 7 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.15.} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -15 & 14 \\ 2 & 9 & -13 & 11 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 5 & 8 \\ 4 & -12 & 9 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.16.} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -9 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & -15 \\ 2 & 4 & -1 & -14 \\ 2 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 9 \\ 3 & 2 & -4 & 23 \\ -2 & -1 & 7 & -10 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.17.} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 14 & -1 & 0 \\ 3 & 10 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & 13 \\ -1 & -2 & -1 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -14 \\ 4 & 8 & -9 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & 6 & -15 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.18.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 11 & -8 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ 3 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 3 & 8 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 \\ -4 & -2 & -9 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 17 & -22 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.19.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 18 & -8 & 1 \\ 2 & 9 & -13 & 10 \\ 2 & 11 & -10 & 8 \\ -1 & -4 & 7 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 13 \\ -4 & 4 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.20.} \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 9 & 6 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & -17 & 11 & -1 \\ 2 & -7 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.21.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 2 \\ -3 & -10 & 0 & -7 \\ 2 & 7 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -7 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & -4 \\ 3 & 10 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.22.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \\ 3 & 7 & 7 & -10 \\ -2 & -3 & -8 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -13 & 11 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \\ 4 & 12 & -15 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.23.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 23 \\ 2 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \\ -2 & -1 & 7 & -10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 7 & -10 \\ -2 & -3 & -8 & 10 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \\ 3 & 10 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$3.24. A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & -8 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & -11 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 11 & -10 & 8 \\ 3 & 18 & -8 & 1 \\ -1 & -4 & 7 & -5 \\ 2 & 9 & -13 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$3.25. A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 11 & -1 \\ 2 & -7 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 9 & 6 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & -11 & -8 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$3.26. A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ -3 & -7 & -7 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 13 \\ 4 & 14 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -6 \\ 3 & 10 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$3.27. A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & -8 & -14 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 & 16 \\ 4 & -8 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & -3 & -8 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3.28. A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 & -6 \\ -2 & -1 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 7 & -10 & -1 \\ 2 & 9 & -16 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3.29. A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & -6 & 10 \\ 2 & 1 & -18 & 15 \\ -3 & 5 & 3 & -10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 21 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 & -7 \\ -2 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & -10 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3.30. A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & 1 \\ 3 & -10 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & -11 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Точки A, B, C, D являются вершинами пирамиды. Используя координаты точек и аппарат векторной алгебры, найдите:

- а) объем пирамиды $ABCD$;
- б) площадь боковой грани ABD пирамиды $ABCD$;
- в) длину высоты DH пирамиды $ABCD$;
- г) внутренние углы треугольника ABD .

4.1. $A(2; 2; 7), B(6; 7; 7), C(2; 3; 1), D(-2; 3; 8)$.

4.2. $A(7; 2; 2), B(5; 7; 7), C(5; 3; 1), D(2; 3; 7)$.

4.3. $A(7; 1; 2), B(-5; 3; -2), C(3; 3; 5), D(4; 5; -1)$.

4.4. $A(1; -1; 6), B(4; 5; -2), C(-1; 3; 0), D(6; 1; 5)$.

4.5. $A(6; 6; 5), B(4; 9; 5), C(4; 6; 11), D(6; 9; 3)$.

4.6. $A(1; 8; 2), B(5; 2; 6), C(5; 7; 4), D(4; 10; 9)$.

4.7. $A(1; 3; 2), B(6; 5; 2), C(3; 7; 2), D(2; 5; 6)$.

4.8. $A(1; 3; 2), B(0; 6; 2), C(4; 0; 0), D(3; 2; 7)$.

4.9. $A(8; 6; 4), B(10; 5; 5), C(5; 6; 8), D(8; 10; 7)$.

4.10. $A(4; 2; -9), B(3; 0; 4), C(0; 0; 4), D(5; -1; -3)$.

4.11. $A(4; -3; -2), B(2; 2; 3), C(2; -2; -3), D(-1; -2; 3)$.

4.12. $A(1; -1; 6), B(4; 5; -2), C(-1; 3; 0), D(6; 1; 5)$.

4.13. $A(2; -3; 1), B(6; 1; -1), C(4; 8; -9), D(2; -1; 2)$.

4.14. $A(1; -4; 0), B(5; 0; -2), C(3; 7; -10), D(1; -2; 1)$.

4.15. $A(0; 0; 2), B(1; 1; 0), C(4; 1; 2), D(3; 0; 5)$.

4.16. $A(9; 5; 5), B(-3; 7; 1), C(5; 7; 8), D(6; 9; 2)$.

4.17. $A(8; 4; 1), B(7; 7; 3), C(6; 5; 8), D(3; 5; 8)$.

4.18. $A(4; 0; 0), B(-2; 1; 2), C(1; 3; 2), D(3; 2; 7)$.

4.19. $A(4; 6; 5), B(6; 9; 4), C(2; 10; 10), D(7; 5; 9)$.

4.20. $A(3; 1; -2), B(1; -2; 1), C(-2; 1; 0), D(2; 2; 5)$.

4.21. $A(6; 2; 2), B(-6; 4; -2), C(2; 4; 5), D(3; 6; -1)$.

4.22. $A(3; 5; 4), B(8; 7; 4), C(5; 10; 4), D(4; 7; 8)$.

4.23. $A(0; 0; 1), B(5; 2; 0), C(2; 5; 0), D(1; 2; 4).$

4.24. $A(1; 1; 1), B(3; 4; 0), C(-1; 5; 6), D(4; 0; 5).$

4.25. $A(8; 4; 4), B(-4; 6; 0), C(4; 6; 7), D(6; 8; 1).$

4.26. $A(-2; 3; -2), B(2; -3; 2), C(2; 2; 0), D(1; 5; 5).$

4.27. $A(5; 1; 1), B(-1; 2; 3), C(2; 4; 3), D(4; 3; 8).$

4.28. $A(2; 4; 3), B(7; 6; 3), C(4; 9; 3), D(3; 6; 7).$

4.29. $A(2; 2; 4), B(3; 3; 2), C(6; 3; 4), D(5; 2; 7).$

4.30. $A(4; 1; -8), B(2; 0; 4), C(0; 0; 4), D(6; -1; -3).$

Задача 5. Для точек A, B, C, D с координатами из условия задачи 4 найдите:

а) общее уравнение плоскости ABC ;

б) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC ;

в) уравнения нормали DH к плоскости ABC в каноническом и параметрическом виде;

г) расстояние от точки D до плоскости ABC ;

д) уравнения прямой AB в каноническом, параметрическом и общем виде;

е) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB ;

ж) уравнения прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB , в каноническом виде;

з) координаты точки H — основания перпендикуляра, опущенного из точки D к плоскости ABC ;

и) угол между прямой BD и плоскостью ABC .

Задача 6. Приведите общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и определите тип кривой второго порядка. Найдите параметры кривой, ее эксцентриситет и координаты фокусов. Сделайте чертеж.

6.1. $9x^2 - 25y^2 - 36x - 50y + 236 = 0.$ **6.2.** $5y^2 + 2x + 20y + 14 = 0.$

6.3. $25x^2 - 9y^2 - 100x + 18y + 316 = 0.$ **6.4.** $25x^2 + 4y^2 - 150x + 24y + 161 = 0.$

- 6.5.** $25x^2 - 4y^2 - 150x - 8y + 121 = 0$. **6.6.** $5x^2 + 30x + 12y + 23 = 0$.
6.7. $4x^2 - 25y^2 + 24x + 250y - 189 = 0$. **6.8.** $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$.
6.9. $25x^2 + 25y^2 - 50x - 50y + 41 = 0$. **6.10.** $9y^2 - 6x - 18y - 21 = 0$.
6.11. $4x^2 - 9y^2 - 48x + 72y - 144 = 0$. **6.12.** $x^2 - y^2 + 4x + 6y + 20 = 0$.
6.13. $3y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$. **6.14.** $9x^2 + y^2 + 54x - 4y + 49 = 0$.
6.15. $4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 19 = 0$. **6.16.** $6x^2 + 12x - 5y - 9 = 0$.
6.17. $25x^2 + 9y^2 + 100x - 36y - 89 = 0$. **6.18.** $2x^2 - 8x + 3y + 5 = 0$.
6.19. $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y - 104 = 0$. **6.20.** $3y^2 + 2x - 18y + 19 = 0$.
6.21. $x^2 + 9y^2 + 4x - 72y + 139 = 0$. **6.22.** $x^2 - 4y^2 - 2x + 8y - 103 = 0$.
6.23. $4x^2 + y^2 - 24x + 2y + 33 = 0$. **6.24.** $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 12 = 0$.
6.25. $9x^2 + 9y^2 - 36x + 54y + 114 = 0$. **6.26.** $x^2 + 9y^2 - 6x - 72y + 9 = 0$.
6.27. $9x^2 - y^2 - 18x - 4y + 230 = 0$. **6.28.** $x^2 + 9y^2 - 6x - 18y - 18 = 0$.
6.29. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 1 = 0$. **6.30.** $x^2 + 4y^2 - 4x + 48y + 48 = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математика является не только фундаментальной наукой, но и универсальным языком современного естествознания, играющим ключевую роль в проведении научных исследований и решении прикладных задач в области геосистем, дистанционного зондирования и кадастров. Изучение основ высшей математики представляет собой первый и важнейший этап на пути формирования системного и критического мышления будущего специалиста. Заложенные на этом этапе знания и навыки служат необходимым базисом для эффективного проведения землеустроительной и кадастровой деятельности, корректной обработки результатов геодезических изысканий, дешифрирования данных дистанционного зондирования Земли, а также для принятия оптимальных и научно обоснованных управленческих решений в условиях современного производства.

Представленный сборник задач нацелен на практическое освоение теоретического материала, изложенного в лекционном курсе. Предложенные задания охватывают ключевые разделы дисциплины: от введения в математический анализ до основ дифференциального и интегрального исчисления, линейной и векторной алгебры, а также аналитической геометрии. Именно этот математический аппарат является базовым инструментом для изучения последующих естественнонаучных и профессиональных дисциплин (физики, теории математической обработки измерений, фотограмметрии, геоинформатики, основ кадастра и землеустройства). Уверенное владение методами решения задач из данного сборника позволит обучающимся не только успешно осваивать учебный план, но и в дальнейшем грамотно применять математические модели для формализации и исследования прикладных проблем в своей профессиональной деятельности.

Авторы стремились к тому, чтобы структура и содержание сборника обеспечивали постепенное нарастание сложности материала и способствовали выработке устойчивых навыков самостоятельной работы. Систематическое выполнение представленных упражнений, как под руководством

преподавателя, так и в рамках внеаудиторной работы, будет способствовать формированию профессиональной компетенции, выражающейся в способности применять методы высшей математики для решения типовых и нестандартных задач, а также заложит прочный фундамент для дальнейшей научно-исследовательской деятельности и самообразования на протяжении всей карьеры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Высшая математика : учеб. пособие / В. П. Вербная, О. В. Григоренко, О. М. Логачёва, О. Г. Павловская. – Новосибирск : СГУГиТ, 2024. – 141 с.
2. Логачёва О. М., Логачёв А. В., Григоренко О. В. Математический анализ для экономистов. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2016. – 97 с.
3. Логачёва О. М., Логачёв А. В., Григоренко О. В. Математический анализ для экономистов. В 2 ч. Ч. 2 : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2016. – 87 с.
4. Павловская О. Г., Вербная В. П. Математика: алгебра и геометрия : учеб.-метод. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2021. – 118 с.
5. Вербная В. П., Мартынов Г. П., Плюснина Е. С. Математика для дистанционного обучения : учеб. пособие. – 2-е изд., стер. – Новосибирск : СГУГиТ, 2016. – 278 с.
6. Неклюдова В. Л. Высшая математика: сборник задач. – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. – 77 с.
7. Неклюдова В. Л., Логачёва О. М., Логачёв А. В. Математический анализ : сборник задач. – Новосибирск : СГУГиТ, 2019. – 43 с.
8. Линейная алгебра : задачник / В. Л. Неклюдова [и др.]. – Новосибирск : СГУГиТ, 2018. – 40 с.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Таблица производных

1. $(c)' = 0;$

2. $(x)' = 1;$

3. $(x^n)' = nx^{n-1};$

4. $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности, $(e^x)' = e^x$;

5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

6. $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

8. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$; $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2 + 1}$;

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Правила дифференцирования

1. $(u + v)' = u' + v'$;

2. $(uv)' = u'v + uv'$;

3. $(cu)' = cu'$, где $c = \text{const}$;

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

5. $(f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'(x)$ (производная сложной функции).

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + c$;
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$;
3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$;
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, в частности, $\int e^x dx = e^x + c$;
5. $\int \cos x dx = \sin x + c$; $\int \sin x dx = -\cos x + c$;
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$;
7. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$, в частности, $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + c$;
8. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$, в частности, $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + c$;
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right| + c$.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$;
2. $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$, где $\alpha = \text{const}$;
3. $\int df(x) = f(x) + c$, где $c = \text{const}$;
4. $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$;
5. $\int f(x+b) dx = F(x+b) + c$;
6. $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$.

Учебное издание

Вербная Валентина Павловна
Григоренко Ольга Викторовна
Логачёва Ольга Михайловна
Неклюдова Вера Леонидовна
Павловская Ольга Геннадьевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор *О. В. Георгиевская*
Компьютерная верстка *Я. А. Лесных*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.
Подписано в печать 22.07.2026. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 5,11. Тираж 260 экз. Заказ 129.
Гигиеническое заключение
№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.
Издательско-полиграфический центр СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 10.
Отпечатано в издательско-полиграфическом центре СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 8.