

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

В. Ф. Канушин, Д. Н. Голдобин

ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия для обучающихся
по направлению подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование
(уровень бакалавриата)

Новосибирск
СГУГиТ
2026

УДК 528.2(075)

К19

Рецензенты: кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИНГГ СО РАН *Д. Г. Ардюков*

кандидат технических наук, доцент, СГУГиТ *А. В. Елагин*

Канушин, В. Ф.

К19 Теория фигуры Земли : учебное пособие / В. Ф. Канушин, Д. Н. Голдобин. – Новосибирск : СГУГиТ, 2026. – 110 с. – Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-907998-79-7

Учебное пособие подготовлено кандидатами технических наук, доцентами В. Ф. Канушиным и Д. Н. Голдобиным на кафедре космической и физической геодезии СГУГиТ.

В пособии изложены основные теоретические сведения по теории фигуры Земли.

Учебное пособие написано в соответствии с рабочей программой «Теория фигуры Земли» и предназначено для обучающихся 3-го курса по направлению подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата).

Рекомендовано к изданию кафедрой космической и физической геодезии СГУГиТ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГУГиТ

УДК 528.2(075)

ISBN 978-5-907998-79-7

© СГУГиТ, 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Краткий исторический обзор	6
1. Основы теории гравитационного потенциала.....	18
1.1. Потенциалы протяжения и их свойства.....	18
1.1.1. Сила притяжения материальной точки другой матери- альной точкой, система материальных точек	18
1.2. Гравитационный потенциал точки, системы точек, тела, его математическое и физическое определение.....	23
1.3. Потенциал простого слоя и потенциал двойного слоя.....	27
1.4. Потенциал однородного сферического простого слоя на внешнюю и внутреннюю точки.....	30
1.5. Потенциал шара, состоящего из концентрических сфериче- ских слоев, на внешнюю и внутреннюю точки	33
1.6. Притяжение плоским однородным круговым простым слоем	37
1.7. Основные свойства потенциала объемных масс и его первой и второй производной. Уравнения Пуассона и Лапласа	40
1.8. Основные свойства потенциала простого слоя и его первой производной. Формулы Племели.....	46
1.9. Основные свойства потенциала двойного слоя переменной и постоянной плотности. Интегралы Гаусса	52
1.10. Уровенные поверхности потенциалов притяжения и общие заклучения об их свойствах	58
2. Краевые задачи теории потенциала и методы их решения	62
2.1. Понятие о прямой и обратной задачах теории потенциала.....	62
2.2. Формула Остроградского	63
2.3. Формулы Грина для функций u_i и ϑ_i , заданных внутри обла- сти τ_i	65

2.4. Формулы Грина для функций u_ϵ и ϑ_ϵ , заданных вне поверхности σ	68
2.5. Формулы Грина для гармонических функций. Стоксовы постоянные	70
2.6. Фундаментальная формула Грина	72
2.7. Краевые задачи теории потенциала и их решение с помощью функций Грина	74
2.8. Задача Дирихле для сферы и бесконечной плоскости. Интеграл Пуассона	79
2.9. Понятие о шаровых и сферических функциях. Свойство ортогональности	83
2.10. Частный случай сферических функций. Представление функции $1/r$ в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра. Рекуррентная формула для их вычисления	84
2.11. Представление гармонических функций вне и внутри сферы в виде разложения в ряды по шаровым функциям. Интегральная формула, определяющая сферическую функцию порядка n	86
2.12. Представление сферической функции степени n в явном виде. Присоединенные сферические функции и дифференциальная формула для их определения	89
2.13. Применение сферических функций для решения краевых задач. Ряд Стокса	93
2.14. Интегральная формула Стокса	97
2.15. Краевые задачи и интегральные уравнения для их решения	101
2.16. Интегральное уравнение для третьей (смешанной) краевой задачи для сферы и его решение с помощью интегральной формулы Стокса	105
Заключение	108
Библиографический список	109

ВВЕДЕНИЕ

Теорией фигуры Земли называется раздел науки, занимающейся изучением формы Земли по ее полю силы тяжести. Первым шагом в изучении формы Земли является установление фигуры однородной, вращающейся с постоянной скоростью, жидкой массы при условии, что все ее частицы притягиваются друг к другу по закону всемирного тяготения. Такая жидкая масса должна принять форму эллипсоида вращения малого сжатия, причем с увеличением скорости вращения сжатие будет увеличиваться. Для того чтобы вращающаяся жидкая масса была в состоянии равновесия, угловая скорость ω должна удовлетворять неравенству

$$\omega^2 < 2\pi\sigma f ,$$

где f – гравитационная постоянная, σ – плотность.

При $\omega^2 \geq 2\pi\sigma f$ равновесие жидкой массы будет нарушено. Для неоднородной вращающейся жидкой массы фигурой равновесия будет не эллипсоид вращения, а близкая к нему, которую называют сфероидом. Поскольку фигура Земли сформировалась под действием силы тяжести, то для детального изучения ее формы необходимо использовать данные о гравитационном поле. Так как идеальная фигура Земли близка к эллипсоиду вращения, то изучение отклонения истинной фигуры от идеальной – это предмет гравиметрического или физического способа изучения фигуры Земли.

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Учение о фигуре Земли возникло из попыток узнать и объяснить ее форму.

Первые сведения о таких данных содержатся в высказываниях древних. Представление о том, что Земля имеет сферическую форму, по видимому, было предметом размышлений в Древней Греции со времен Анаксимандра, около VI в. до н. э.

В IV в. до н. э. Пифагор считал, что Земля имеет форму шара, а Гераклит уже допускал ее вращение вокруг своей оси.

Предполагают, что представление о шарообразности Земли возникло в результате наблюдения уменьшения высоты объектов при удалении их за горизонт на море. По результатам этих наблюдений в Древней Греции были получены первые оценки длины окружности Земли.

Аристотель в своей книге «О небе» (IV в. до н. э.) приводит значение длины окружности Земли, которое примерно в два раза превышает правильное значение.

Самое древнее из известных описаний метода оценки радиуса окружности Земли оставил Эратосфен (ок. 276–194 гг. до н. э.). Во время летнего солнцестояния в 200 г. до н. э. он измерил разность высот Солнца в полдень в Сиене (современный Асуан) и Александрии и получил его с точностью около 25 %. В дальнейшем греки несколько уточняли эту оценку.

Уже в начале новой эры древнегреческий географ Стратон в своем 14-томном труде «География» утверждал, что вращение Земли приводит к экваториальному вздутию.

В 723 г. н. э. во время правления династии Тан китайский астроном И-Синь (683–727 гг.) возглавил отряд по измерению длины освещаемых Солнцем теней от предметов и высоты Полярной звезды. В результате он получил, что протяженность одного градуса дуги составляет $L = 132,3$ км, что выше истинного приблизительно на 20 %.

В 814 г. в период правления калифа аль-Мамуна арабы получили значение длины дуги одного градуса равной $L = 90$ км, что ниже истинного примерно на 20 %.

Около 1000 г., за семь столетий до применения маятника для определения силы тяжести и фигуры Земли, арабский астроном Ибн Юнис (Абуль-Хасан Али ибн Абдуррахман) использовал свойства маятника в своих астрономических наблюдениях в Каире для точного измерения времени и определения интервалов при наблюдениях за небесными светилами. Результаты его астрономических наблюдений были использованы спустя восемь веков как доказательство изменений эксцентриситета земной орбиты.

Следующая известная работа по определению размеров и формы Земли была выполнена после кругосветного путешествия под руководством Фернана Магеллана, которая началась 20 сентября 1519 г. и завершилась 6 сентября 1522 г. уже под командованием Хуана Себастьяна Элькано. В результате сферичность Земли получила всеобщее признание.

В 1528 г. французский математик, астроном и врач Френель с помощью измерения меридианальных высот Солнца определил дугу меридиана в один градус около Парижа, а для измерения расстояния по этому меридиану использовал количество оборотов колеса экипажа и получил результат, эквивалентный длине окружности Земли, равной 36 500 км.

В XVII в. после двух тысяч лет летаргического сна Европы на смену гениальным догадкам древних пришли систематические исследования.

В 1615–1617 гг. Снелиус при помощи метода триангуляции провел в Голландии измерение дуги меридиана в $1^{\circ}11'30''$; нашел решение так называемой задачи Потенота и выполнил уточнение длины окружности Земли, которое затем продолжил Норвуд в 1631–1635 гг.

В 1669–1670 гг. Жак Пикар по поручению Парижской академии наук измерил длину дуги меридиана между Парижем и Амьеном. По результатам измерений Пикара длина дуги одного градуса меридиана составила 111,21 км. Это значение на 0,03 км больше принятого в настоящее время.

Таким образом, полученное Пикаром значение с точностью 0,1 % совпадает с современным значением L . На этом заканчивается этап определения размеров и фигуры Земли, длившийся почти 2 000 лет.

Следующий этап изучения фигуры Земли и других вращающихся гравитирующих тел кратко можно назвать ньютоновским.

И. Ньютон понял, что с помощью закона всемирного тяготения можно исследовать не только движение небесных тел, но и саму их форму. Он поставил знаменитую задачу о равновесной форме гравитирующей жидкой массы, имеющей вращение вокруг оси. Эта задача и положила начало теории фигур равновесия [1].

Ньютон впервые показал, что теоретической фигурой Земли является эллипсоид вращения, сжатый у полюсов. Ньютон, допуская, что первоначально Земля была в огненно-жидком состоянии, а ныне представляет собой жидкую однородную массу, находящуюся в состоянии покоя, согласно закону всемирного тяготения должна принять форму шара. Вращение этой массы генерирует центробежную силу, которая возрастает от полюса к экватору и деформирует шарообразную фигуру равновесия вдоль оси вращения, приводя ее к сжатому эллипсоиду. Допуская теперь, что Земля – сжатый эллипсоид, используя полученную Пикаром величину земного радиуса и результаты измерения силы тяжести того времени, Ньютон в зависимости от скорости вращения этого эллипсоида определял размеры его сжатия. Полученное Ньютоном сжатие оказалось равным $\alpha = (5/4)q = 231,2^{-1}$, где $q = 289^{-1}$ – отношение центробежной силы к притяжению на экваторе.

В 1690 г. голландский ученый Х. Гюйгенс, считая, что притяжение Земли обусловлено массами, сосредоточенными в центре Земли и, приняв для отношения центробежной силы к силе тяжести на экваторе число q , как у Ньютона, получил для сжатия величину $\alpha = 578^{-1}$, которая значительно меньше величины сжатия, полученной Ньютоном. Таким образом, теоретически были получены два крайних предела для сжатия Земли. Поскольку плотность Земли увеличивается от ее поверхности к центру, то истинное сжатие должно лежать в интервале $231,2^{-1} < \alpha < 578^{-1}$.

Это был несомненный успех в познании фигуры Земли и других планет. Еще в 1672 г. французский астроном Ж. Рише установил, что на экваторе маятник часов замедляет движение по сравнению с Парижем на 2,5 с/сут.

Х. Гюйгенс и И. Ньютон объясняли это разной удаленностью полюсов и экватора от центра Земли, а конкретнее – проявлением центробежной силы. Эти косвенные факты и теоретические выводы указывают на то, что Земля немного приплюснута у полюсов и имеет форму эллипсоида.

Для проверки этого теоретического предположения в XVIII–XIX вв. организовывались экспедиции, выполнявшие градусные измерения по меридианам в разных широтах, а в английской обсерватории в Гринвиче ту же проблему решали своими методами разные астрономы.

Первая попытка подтвердить выводы Ньютона была осуществлена Жаком Кассини. Результаты его определения на территории Франции с помощью триангуляции двух дуг меридиана общей длиной $8^{\circ}31'$ показали отрицательный результат. Сказалось то, что ошибки измерений превалировали над действительной разницей длин этих близко расположенных дуг меридиана.

Вторая попытка подтвердить выводы Ньютона была организована и проведена в 1737–1741 гг. Французской академией наук посредством измерения двух дуг: одной около экватора (в Перу), а другой у полярного круга (в Лапландию).

Перуанская экспедиция в составе академиков Буге, Лакондамина и Годена проложила в горах цепь из 32 треугольников, с помощью которой была определена дуга в $3^{\circ}07'$. Лапландская экспедиция в составе Мопертюи, Клеро, Камюс, Лемонье, Утье и физика Цельзиуса с помощью триангуляции в виде вытянутого семиугольника определила дугу меридиана длиной $57'30''$. Сопоставив числа, выражающие длину дуги меридиана в 1° , полученные у экватора, около Парижа и у полярного круга, заметили, что длина дуги меридиана в 1° уменьшается от полюса к экватору. Эти результаты подтвердили теоретические выводы Ньютона, что Земля сжата у полюсов.

На первой же конференции 2 ноября 1725 г. в только что созданной Академии наук России обсуждался вопрос о «сплюснутости» Земли согласно теории Ньютона. В 1737 г. Академия наук России рассматривает проект большого градусного измерения по меридиану и организует специальные астрономические экспедиции в западную часть страны для экспериментального подтверждения выводов Ньютона и одновременно для гео-

графического изучения территории страны и картографических съемок. В середине XVIII в. Россия выходит на первое место по сравнению с Западной Европой по количеству астрономических и градусных определений и географической изученности своей территории.

В 1743 г. вышла книга Клеро «*Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique*» [2]. Результаты, полученные Клеро, лежат и до сих пор в основании всех наших сведений по этому вопросу. Клеро установил общие условия равновесия жидкости; он переходит (и в этом его главная заслуга) к случаю неоднородной Земли; допускает, что плотность увеличивается от поверхности к центру; что равновесие сохраняется, если слои одинаковой плотности имеют эллипсоидальный вид; выводит дифференциальное «уравнение Клеро», связывающее плотность с радиусом слоя и его сжатием; создает так называемую «теорему Клеро»:

- сумма величины сжатия и приращения силы тяжести на полюсах по сравнению с силой тяжести под экватором равна $5/2$ отношения центробежной силы к силе тяжести под экватором;

- устанавливает закон изменения силы тяжести на поверхности Земли пропорционально квадрату синуса широты места.

Уравнение Клеро можно интегрировать, лишь зная закон изменения плотности с глубиной. Были предложены несколько таких законов: Лежандра, Роша, Леви, но они эмпиричны и подобраны больше для возможности интегрирования уравнения Клеро. Впрочем, само уравнение независимо от закона плотностей дает некоторые свойства последовательных слоев; из них самое важное состоит в том, что сжатия слоев увеличиваются от центра к поверхности.

В конце XVIII столетия Лежандр, Лаплас и Лагранж разработали математическую сторону этого вопроса. Им принадлежит разработка учения о притяжении эллипсоидов, о силовых и шаровых функциях. Понятие силовой функции было введено Лагранжем в 1773 г. и Лежандром в 1785 г., которое в 1828 г. было заменено Г. Грином термином «потенциал». Основываясь на свойствах этих функций, Лаплас изложил теорию Клеро с совершенно новой точки зрения. Клеро допускал, что слои эллипсоидальны, и затем показывал, что условия равновесия удовлетворены. Лаплас, используя разложение потенциала притяжения Земли в ряд по шаровым

функциям, допускал, что в толще Земли слои могут иметь какую угодно фигуру. Он показал, что при существующих условиях эти слои должны лишь незначительно отличаться от сферических. Были попытки улучшить в этом отношении теорию Клеро – Лапласа. Сюда относятся работы Эри и Паукера, а в конце XIX в. Калландро и Д. Дарвина. Они предполагали, что кривые меридианов все-таки симметричны относительно экватора. Наибольшее отклонение от эллипсов среди найденных Дарвином меридиональных сечений Земли приходится на широты 45° и оно достигает лишь 100 метров.

В конце XVIII в. Лаплас на основе теории движения Луны и результатов измерения силы тяжести получил для сжатия Земли величину, равную 300^{-1} . Анализируя материалы градусных измерений, Лаплас обнаружил, что некоторые отклонения отвесных линий значительно превосходят ошибки измерений. Считается, что это стало поводом для вывода известного уравнения Лапласа, в котором определяется разность между геодезическим и астрономическим азимутом.

В первой половине XIX в. на основании градусных измерений по меридиану, выполняемых во многих государствах Европы, предпринимались попытки получения большой полуоси и сжатия земного эллипсоида. В 1821–1824 гг. Гауссом выполнено Ганноверское градусное измерение, позволившее определить дугу меридиана длиной 3° . С 1831 по 1834 г. Бесселем были проведены градусные измерения между Клайпедой и Трунцем по косвенный к меридиану дуге длиной $3^\circ 04'$. Однако эти измерения из-за малости дуг меридиана для вывода размеров земного эллипсоида оказались недостаточными.

Несмотря на это, все теоретические исследования и практические предложения Гаусса в области высшей геодезии и отчасти способа наименьших квадратов основывались на результатах Ганноверского градусного измерения. Характерна работа известного немецкого геодезиста Г. Брунса «Фигура Земли» (Берлин, 1878), где автор в своих исследованиях исходит из определений математической фигуры Земли, данных Гауссом и Бесселем.

При выполнении работ по геодезии с 1821 по 1827 г. Гаусс одним из первых сформулировал основную задачу высшей геодезии – определение

формы и размеров Земли и исследование ее нерегулярности, но он нигде не изложил свои взгляды по этим вопросам в систематизированном виде. Однако сохранился ряд его ценных высказываний по этим проблемам, которые не лишены интереса для нашего времени. Среди этих высказываний наиболее ценным для дальнейшего развития теории фигуры Земли является письмо немецкому и датскому астроному и геодезисту Шумахеру, написанное в 1823 г.: «Разность между Вашей широтой и астрономическими наблюдениями весьма примечательна. Если она вскоре подтвердится многочисленными определениями, в чем я не сомневаюсь, то это даст решающее для меня доказательство неравномерности распределения направления силы тяжести, причем нельзя сказать, что причина лежит в неправильности видимой поверхности. Мне кажется, что иначе нельзя объяснить это явление, и я не могу согласиться с Вашим предыдущим письмом, если Вы утверждаете, что причину не следует искать нигде, кроме как в применяемом мной сжатии. Совокупность всех наблюдений требует этого или мало от него отличающегося сжатия, и если, как показывает опыт, на большем протяжении всегда оказывается другая кривизна, то это указывает лишь на то, что Земля вообще не есть эллипсоид вращения, а волнообразно отклоняется от эллипсоида, описывающего ее в целом» [3].

В 1826–1829 гг. во время кругосветного путешествия на военном шлюпе «Синявин» русский академик Литке по измерениям силы тяжести, используя теорию Клеро, получил сжатие $\alpha = 1 : 269$. Сравнивая результаты своих наблюдений с результатами наблюдений в Атлантическом океане на 13 станциях капитана Сабина, у которого получено сжатие $\alpha = 1 : 288,4$, Литке высказал предположение о «неправильности» земной поверхности отклонения ее от эллипсоидальной формы, на что указывал в 1823 г. Гаусс.

В 1828 г. в Англии сын мельника из Ноттингема и самоучка Дж. Грин опубликовал небольшую брошюру в сто с небольшим страниц, научная ценность которой будет оценена спустя много лет. В ней изложены идеи, которые намного опережали современные ему исследования как в Англии, так и на континенте. Это работа, которая положила начало современной математической физике. В сущности, это первая и довольно успешная попытка построения единой теории электромагнетизма, приложимой к раз-

личным частным вопросам. В качестве «универсального инструмента» для этого Грин выбрал «особую функцию», которую он назвал «потенциальной функцией». Само введение этой функции в механику и гидродинамику относится еще ко второй половине XVIII в. (правда, она не имела никакого специального наименования и называлась «силовой функцией») и было предпринято в трудах Эйлера (1755–1756 гг.), Лагранжа (1773 г.) и Лапласа (1782 г.); позднее эта функция использовалась Пуассоном, а также в работах по электростатике и магнетизму. Однако именно Дж. Грин превратил введение этой функции (позднее в науке привилось более краткое название – «потенциал», введенное в 1840 г. Гауссом) в мощную и универсальную теорию потенциала для решения различных задач механики, физики и теории фигуры Земли.

Середина XIX в. ознаменовалась рядом крупных успехов в теории фигуры Земли.

В 1848 г. английский физик, профессор Кембриджского университета Стокс, используя результаты исследования Гаусса и Грина, доказал теорему, согласно которой определение фигуры Земли возможно без знания распределения масс внутри Земли по наблюдениям силы тяжести на внешней относительно всех притягивающих масс уровенной поверхности потенциала силы тяжести. В 1849 г. Стокс опубликовал работу, в которой приведена формула для определения расстояния между внешней уровенной поверхностью потенциала силы тяжести и поверхностью относимости [4].

Стоксу принадлежит важное дополнение к теории Клеро. Он доказал, что закон изменения силы тяжести и «теорема Клеро» сохраняют свою силу не только при эллипсоидальных слоях, плотность которых изменяется по какому угодно закону, но также и при каком угодно распределении плотностей и масс внутри Земли, лишь бы внешняя поверхность Земли представляла собой поверхность уровня, т. е. это была бы поверхность, какую может принять находящаяся в равновесии жидкость. Это дополнение к теории Клеро позволяет обходиться без данных о внутреннем строении и без спорной гипотезы о первоначальном жидком состоянии Земли. Однако допускать, что Земля покрыта сплошь океаном равномерной глубины для сколько-нибудь точного определения фигуры Земли нельзя, ограничиваясь лишь идеальными математическими задачами. Так как

массы как на поверхности Земли, так и внутри нее распределены неправильно, то сила тяжести, как равнодействующая всех компонент притяжения, не может быть во всех точках Земли направлена по нормали к поверхности принятого общеземного эллипсоида.

В связи с работами Клеро, Гаусса и Стокса многие ученые того времени пришли к выводу, что под фигурой Земли можно понимать форму невозмущенной поверхности морей и океанов при некотором среднем уровне. Эта поверхность является одной из уровенных поверхностей потенциала силы тяжести. Ее отклонения от земного эллипсоида характеризуются аномалиями силы тяжести.

Большое значение для изучения фигуры Земли и определения размеров земного эллипсоида имело и имеет в научном и методическом смысле самое большое градусное измерение на земном шаре – дуга меридиана Струве. Высоточные астрономо-геодезические измерения этого русского градусного измерения были начаты в 1816 и окончены в 1855 г. Эта дуга в $25^{\circ}20'$ дала возможность получить большую полуось $a = 6\,378\,445$ м и сжатие $\alpha = 1 : 298,6$.

В 1859 г. русский военный геодезист Ф. Ф. Шуберт впервые высказал мысль о том, что Земля имеет форму трехосного эллипсоида, и попытался по имеющимся в то время градусным измерениям определить его размеры и положение экваториальных осей.

В 1873 г. немецкий физик Листинг предложил назвать эту поверхность геоидом. Согласно Листингу, «под геоидом понимается уровенная поверхность потенциала силы тяжести, совпадающая на океанах с уровнем невозмущенной воды и продолжающаяся под материками, где они определялись бы уровнем воды в сети каналов, сообщающихся с океаном, при условии сохранения всех масс над ними».

В 1878 г. Брунс предложил называть геоидом уровенную поверхность, проходящую через начало счета нормальных или ортометрических высот [4].

Такое определение геоида сохранилось и до наших дней. Для России геоидом служит уровенная поверхность Кронштадского футштока. Следует заметить, что на разных континентах и даже государствах используются разные геоиды.

В 1878 г. Кларк опубликовал параметры полученного им трехосного эллипсоида.

Выводы трехосного земного эллипсоида, произведенные Шубертом и Кларком, не устранили разногласия результатов определения размеров Земли на основании отдельных градусных измерений. Их результаты явились доказательством того факта, что геоид имеет весьма сложную форму и вряд ли может быть представлен трехосным эллипсоидом.

В 1888 г. профессор Московского университета Ф. А. Слудский впервые опубликовал работу «Общая теория фигуры Земли», в которой дал строгую теорию определения фигуры Земли по гравиметрическим и астрономо-геодезическим наблюдениям [5]. Это послужило началом использования гравиметрических данных для изучения фигуры Земли. Слудский в этой работе поступил, как Гаусс в своей теории земного магнетизма. Он выполнил разложение потенциала силы тяжести в сходящийся ряд по сферическим функциям и определил коэффициенты первых четырех порядков этого ряда из наблюдений силы тяжести с помощью маятников. Слудский получил уравнения, с помощью которых на основе астрономо-геодезических измерений и гравиметрических наблюдений появилась возможность определять высоты точек земной поверхности над поверхностью принятого эллипсоида и исследовать направления вектора силы тяжести. Так как наблюдательный материал крайне малочисленен и неоднороден по точности, то полученным результатам, по признанию самого Слудского, нельзя приписывать большой точности. Используя имеющиеся гравиметрические наблюдения, Слудский построил след пересечения поверхности геоида с поверхностью эллипсоида Листинга ($a = 6\,377\,377$ м и $\alpha = 0,0034664$). В результате он сделал вывод, что океанам соответствует повышение геоида, а континентам понижение. Этот вывод находился в противоречии с принятыми в то время мнением. Современные данные подтверждают выводы Слудского, причем он впервые предложил отказаться от каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли и использовать только фактические значения потенциала во внешнем пространстве.

В 1855 г. Дж. Эри и Праттом были предложены гипотезы изостатической компенсации, которые получили дальнейшее развитие в виде теории изостазии [6]. Термин «изостазия» был предложен в 1892 г. Даттоном.

Эта теория, используемая сначала для объяснения несогласия наблюдаемых уклонений отвесной линии с вычисленными на основе учета влияния неправильностей в распределении притягивающих масс, нашла в конце XIX и в начале XX в. широкое применение при выводе размеров земного эллипсоида и исследовании фигуры геоида только вследствие недостатка гравиметрических наблюдений.

В начале XX в. петербургский астроном А. А. Иванов, используя 367 маятниковых наблюдений силы тяжести, получил сжатие, равное $1 : 297,2$. Он же высказал мысль о несимметрии северного и южного полушарий.

Вышедшая в 1928 г. работа голландского геофизика Венинг-Мейнеса по определению уклонения отвеса гравиметрическим методом открывала новые возможности применения гравиметрии в геодезии.

В 1933 г., через 45 лет после опубликования работы Слудского, финский геодезист Хирвонен предпринял вторую попытку использовать имеющийся гравиметрический материал, который покрывал только 18 % поверхности Земли, для исследования ее глобальной фигуры. Для неизученной части гравитационного поля Хирвонен вычислил гипотетические аномалии, положив их равными топографо-изостатическим редуциям силы тяжести, взятыми с обратным знаком. Полученное таким образом искусственное гравитационное поле сильно отличается от реального.

Свои исследования Хирвонен основывал на применении формулы Стокса 1849 г. При анализе гравитационного поля Земли, большая часть которого получена гипотетически, он приходит к заключению, что сжатие Земли в северном полушарии выражено сильнее, чем в южном.

В 1940 г. при участии Ф. Н. Красовского и А. А. Изотова были получены размеры принятого в СССР и утвержденного в 1946 г. «эллипсоида Красовского» с параметрами $a = 6\,378\,245$ м и сжатием $1 : 298,3$. Высота геоида над этим эллипсоидом в Пулково равна нулю.

7 апреля 1946 г. постановлением Совета Министров СССР за № 760 была введена система геодезических координат и высот СК-42.

В 1945 г. М. С. Молоденский опубликовал работу «Основные вопросы геодезической гравиметрии» в 42-м выпуске трудов ЦНИИГАиК [7], в которой предложил определять физическую поверхность и внешнее гра-

витационное поле, минуя геоид. В этом случае задача геодезии состоит в определении земной поверхности и внешнего гравитационного поля лишь на основании измерений без использования каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли.

В 1960 г. выходит в свет основополагающий труд М. С. Молоденского, В. Ф. Еремеева и М. И. Юркиной «Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли» [8], который лежит в основе развития современной геодезии.

Как известно, геодезия – одна из наук о Земле, возникшая в глубокой древности, решение задач которой изначально носило количественный характер.

Термин «гравиметрия» первоначально означал измерение удельного веса тел; гравитационное поле, которое изучает гравиметрия, изначально связывает геодезию с астрономией, так как воздействие гравитации является основным фактором, определяющим и движение космических тел, и их форму.

Связь геодезии прежде всего с гравиметрией и астрономией обусловлена формулировкой главной научной задачи геодезии в соответствии с теорией М. С. Молоденского: «Определение во времени поверхности и внешнего гравитационного поля Земли в принятой системе координат».

Тактические задачи геодезии следуют из ее главной научной задачи. Гравиметрия и космическая геодезия предоставляют данные о внешнем гравитационном поле во времени, астрономия – о высокоточной во времени ориентировке системы координат, геодезия (высшая и низшая) – о физической поверхности и элементах гравитационного поля Земли во времени, геодинамика – об изменениях во времени координат пунктов земной поверхности и характеристик гравитационного поля Земли, метрология – об эталонных, образцовых и рабочих средствах геодезических (в широком смысле) измерений, обеспечивая тем самым единство измерений. Все указанные виды данных являются фундаментальной основой для создания высокоэффективной системы геодезического обеспечения, а также координатно-временного и навигационного обеспечения (КВНО).

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

1.1. Потенциалы протяжения и их свойства

1.1.1. Сила притяжения материальной точки другой материальной точкой, система материальных точек

Согласно закону всемирного тяготения (притяжения) Ньютона два тела, имеющие размеры бесконечно малые по сравнению с расстоянием между ними, притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной произведению масс тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. О силе притяжения двух тел, находящихся на расстоянии, соизмеримом с их размерами, закон Ньютона прямого ответа не дает. Для определения этой силы приходится каждый раз применять специальные математические приемы: разбивать каждое тело на бесконечно большое число частей (материальных точек), вычислять притяжение всех точек одного тела на каждую точку другого, а затем найти равнодействующую этих элементарных сил. Трудность решения задачи значительно уменьшается, если размеры одного тела неизмеримо больше другого. В этом случае задачу можно рассматривать как притяжение точки телом. Если притягивающее тело считать неподвижным, а притягиваемую точку с массой $m' = 1$ перемещать в пространстве, то вектор силы притяжения точки телом будет изменяться в пространстве по величине и направлению, и в каждой точке он будет полностью характеризоваться только свойствами притягивающего тела. Совокупность этих векторов, обусловленных притягивающим телом, называют полем тяготения данного тела.

Теория потенциалов тяготения занимается изучением свойств полей тяготения, создаваемых различными телами. Рассмотрим несколько случаев определения вектора силы тяготения. Первый случай показан на рис. 1.1.

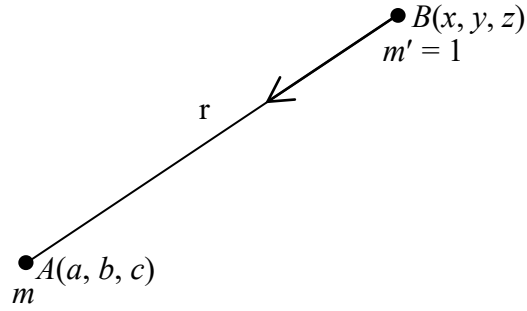


Рис. 1.1. Притяжение материальной точкой

Сила притяжения материальной точки B другой материальной точкой A , расположенной на расстоянии r , согласно закону Ньютона

$$F = f \frac{mm'}{r^2} . \quad (1.1)$$

Размерность постоянной тяготения f получим из равенства

$$f = \frac{r^2}{mm'} F ,$$

если вместо силы F подставить ее размерность в системе единиц CGS $[\Gamma][\text{см}][\text{сек}^{-2}]$, вместо r^2 – $[\text{см}^2]$ и вместо mm' – $[\Gamma^2]$, то $[f] = [\text{см}^3][\Gamma^{-1}][\text{сек}^{-2}]$. В системе СИ, в которой за единицу длины принят метр, за единицу массы – килограмм, а за единицу времени – секунда, $[f] = [\text{м}^3]\text{кг}^{-1}[\text{сек}^{-2}]$.

Величина этой постоянной принимает следующее значение, рекомендованное в 2018 г. комитетом CODATA [9] в системе CGS

$$f = 6,673 \pm 0,001 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \Gamma^{-1} \text{ сек}^{-2} ;$$

в системе СИ

$$f = 6,673 \pm 0,001 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2} .$$

Точку A с координатами (a, b, c) и массой будем считать неподвижной и называть притягивающей, а точку B с координатами (x, y, z) и мас-

сой $m' = 1$ г – притягиваемой. При этих условиях вектор силы притяжения F , приложенный к точке B , будет функцией координат x, y, z притягиваемой точки B

$$|\bar{F}| = f \frac{m}{r^2}, \quad (1.2)$$

где радиус-вектор $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ и направлен от точки A к точке B .

Проекции F на оси координат будут:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= |\bar{F}| \cos(\bar{F}, x) \\ F_y &= |\bar{F}| \cos(\bar{F}, y) \\ F_z &= |\bar{F}| \cos(\bar{F}, z) \end{aligned} \right\}, \quad (1.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{F}, x) &= -\cos(r, x) = -\frac{x-a}{r} \\ \cos(\bar{F}, y) &= -\cos(r, y) = -\frac{y-b}{r} \\ \cos(\bar{F}, z) &= -\cos(r, z) = -\frac{z-c}{r} \end{aligned} \right\}. \quad (1.4)$$

Подставляя в (1.3) значение $|F|$ из (1.2) и значения направляющих косинусов из (1.4), получим

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -fm \frac{x-a}{r^3} = -f \frac{m}{r^2} \cos(r, x) \\ F_y &= -fm \frac{y-b}{r^3} = -f \frac{m}{r^2} \cos(r, y) \\ F_z &= -fm \frac{z-c}{r^3} = -f \frac{m}{r^2} \cos(r, z) \end{aligned} \right\}. \quad (1.5)$$

Вектор силы тяготения вполне определяется значениями его составляющих по формуле: $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$.

В нашем случае

$$\vec{F} = fm \left[\frac{x-a}{r^3} \vec{i} + \frac{y-b}{r^3} \vec{j} + \frac{z-c}{r^3} \vec{k} \right]. \quad (1.6)$$

Второй случай представлен на рис. 1.2.

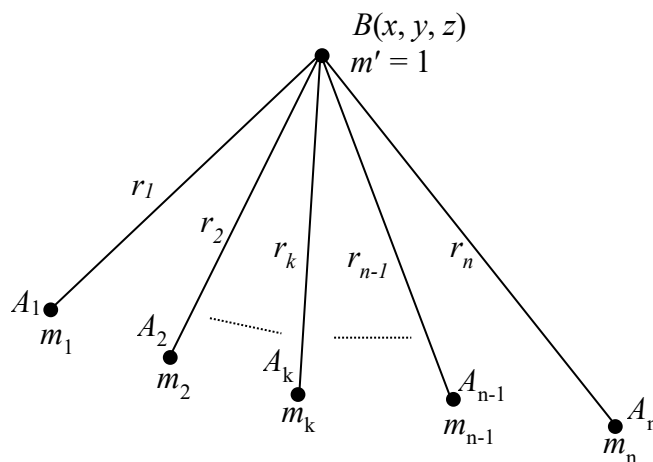


Рис. 1.2. Притяжение материальной точки системой

Сила притяжения материальной точки B системой n материальных точек $A_1, 2, \dots, n$ с массами $m_1, 2, \dots, n$ и расстояниями $r_1, 2, \dots, n$ будет равнодействующей всех сил, обусловленных массами $m_i, \dots, m_n$, и вектор силы тяготения определится по формуле

$$\vec{F} = -f \sum_{k=1}^n \frac{x-a_k}{r_k^3} m_k \vec{i} - f \sum_{k=1}^n \frac{y-b_k}{r_k^3} m_k \vec{j} - f \sum_{k=1}^n \frac{z-c_k}{r_k^3} m_k \vec{k}. \quad (1.7)$$

Третий случай рассмотрен на рис. 1.3.

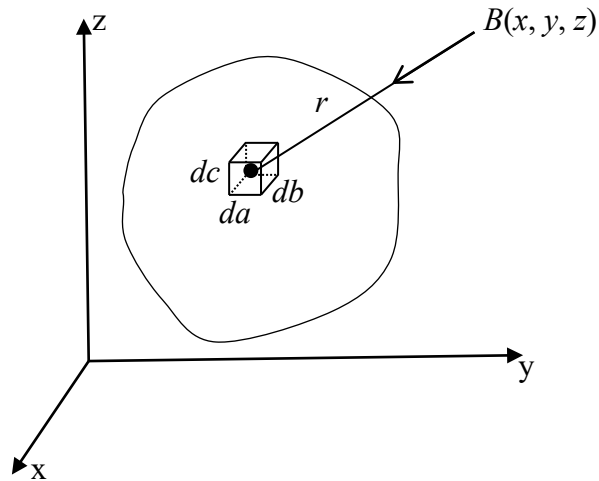


Рис. 1.3. Притяжение объемным телом

Определим вектор силы притяжения материальной точки B телом. Для этого вычислим составляющие этой силы по координатным осям. Произвольными плоскостями, параллельными принятым координатным осям, выделим внутри тела прямоугольный параллелепипед размерами da , db , dc .

Средняя плотность массы внутри параллелепипеда пусть будет δ и масса $dm = \delta \cdot da \cdot db \cdot dc$.

Проекции силы притяжения массой параллелепипеда на оси координат, согласно (1.6), будут равны:

$$dF_x = -f dm \frac{x-a}{r^3}$$

$$dF_y = -f dm \frac{y-b}{r^3}.$$

$$dF_z = -f dm \frac{z-c}{r^3}$$

где a , b , c – средние координаты притягивающего параллелепипеда;

x , y , z – координаты притягиваемой точки B ;

r – расстояние между точками с координатами (x, y, z) и (a, b, c) .

Проекции полной силы притяжения, обусловленной всеми массами тела, будут определяться формулами:

$$\left. \begin{matrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \right\} = -f \iiint_{\tau} \frac{\delta}{r^3} \left\{ \begin{matrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{matrix} \right\} d\tau, \quad (1.8)$$

где интегрирование распространяется на весь объем τ тела, силу притяжения которого необходимо вычислить.

Вектор силы притяжения материальной точки телом имеет вид

$$\vec{F} = -f \left[\vec{i} \iiint_{\tau} \delta \frac{x-a}{r^3} d\tau + \vec{j} \iiint_{\tau} \delta \frac{y-b}{r^3} d\tau + \vec{k} \iiint_{\tau} \delta \frac{z-c}{r^3} d\tau \right]. \quad (1.9)$$

Из приведенных примеров видно, что для определения силы притяжения, вызванной материальной точкой, системой материальных точек или произвольным телом, необходимо вычислять три составляющие, при этом составляющие по различным направлениям определяются сходными формулами. В дальнейшем покажем, что все три составляющие силы притяжения могут определяться с помощью одной функции, которая называется потенциалом притяжения.

1.2. Гравитационный потенциал точки, системы точек, тела, его математическое и физическое определение

Первый случай (см. рис. 1.1). Потенциал точки. Сохраняя принятые обозначения, будем считать, что координаты (a, b, c) притягивающей точки A с массой m постоянны, а координаты x, y, z притягиваемой точки B с массой $m' = 1$ г переменны. Расстояние между точками A и B $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, тогда функция

$$V = f \frac{mm'}{r} = f \frac{m}{r} \quad (1.10)$$

будет функцией координат x, y, z , а величины m, a, b и c будут являться ее параметрами.

Докажем, что функция (1.10) обладает замечательными свойствами. Определим частные производные от функции V по переменным x, y и z :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dx} = -\frac{fm}{r^2} \frac{dr}{dx} = -\frac{fm}{r^3} (x-a) \\ \frac{dV}{dy} &= \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dy} = -\frac{fm}{r^2} \frac{dr}{dy} = -\frac{fm}{r^3} (y-b) \\ \frac{dV}{dz} &= \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dz} = -\frac{fm}{r^2} \frac{dr}{dz} = -\frac{fm}{r^3} (z-c) \end{aligned} \right\}. \quad (1.11)$$

Из сравнения формул (1.11) и (1.5) следует, что

$$\frac{dV}{dx} = F_x; \frac{dV}{dy} = F_y; \frac{dV}{dz} = F_z \quad (1.12)$$

и вектор силы тяготения

$$\vec{F} = \frac{dV}{dx} \vec{i} + \frac{dV}{dy} \vec{j} + \frac{dV}{dz} \vec{k}. \quad (1.13)$$

Из соотношения (1.12) следует математическое определение:

функция, частные производные которой по осям координат равны проекциям вектора на оси, называется потенциалом этого вектора.

Таким образом, функция (1.10) $V(x,y,z)$ является потенциалом силы притяжения точечной единичной массы, точечной массой m' и обычно называется потенциалом точки с массой m' .

Размерность потенциала легко установить из соотношения

$$r|\vec{F}| = f \frac{mm'}{r^2} r = V.$$

Тогда в международной системе СИ единиц длины в метрах, массы в килограммах, времени в секундах получим

$$[V] = [\text{кг}][\text{м}][\text{сек}^{-2}][\text{см}] = [\text{кг}][\text{м}^2][\text{сек}^{-2}].$$

Отсюда видно, что потенциал тяготения V имеет размерность работы, так как выражается произведением силы на длину.

Вычислим работу, совершаемую силой притяжения точечной массы m , при переносе единицы массы из точки M в точку N . Будем считать, что точка с массой m и точки M и N лежат на одной прямой (рис. 1.4). В общем случае, дифференциал работы $dA = |F| \cos(F, ds) ds$.

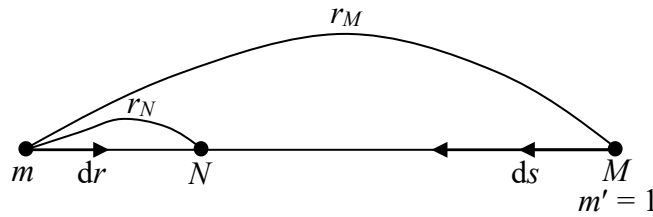


Рис. 1.4. Перенос единицы массы из точки M в точку N

В нашем случае $\cos(F, ds) ds = -dr$ и $dA = -\frac{fm}{r^2} dr$.

Полная работа, совершаемая силой F поля тяготения на прямой MN , будет равна интегралу

$$A = \int_{r_M}^{r_N} -\frac{fm}{r^2} dr = fm \left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_M} \right) = V_N - V_M. \quad (1.14)$$

Таким образом, разность потенциалов в двух точках поля тяготения равна работе, которую совершает сила тяготения при переносе единицы массы из одной точки в другую. Теперь пусть точка M удаляется в бесконечность $r_M \rightarrow \infty$. Потенциал в этой точке V_M будет стремиться к нулю, и работа A будет равна потенциалу в точке N .

Физическое определение потенциала:

потенциал силы тяготения равен работе, которую совершает сила тяготения при перемещении единицы массы из бесконечности в данную точку пространства.

Второй случай (см. рис. 1.2). Потенциал системы точек. Равнодействующая сил притяжения системы точек будет иметь потенциал

$$V(x, y, z) = f \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{r_k} = f \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{\sqrt{(x-a_k)^2 + (y-b_k)^2 + (z-c_k)^2}}, \quad (1.15)$$

где x, y, z – координаты притягиваемой точки с массой $m' = 1$;

a_k, b_k, c_k – координаты притягивающей точки, имеющей массу m_k .

Согласно математическому определению потенциала составляющие силы притяжения по координатным осям равны

$$F_x = \frac{dV}{dx}; F_y = \frac{dV}{dy}; F_z = \frac{dV}{dz}.$$

Дифференцируя выражение (1.15), будем иметь

$$\left. \begin{matrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \right\} = -f \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{r_k^3} \left\{ \begin{matrix} x-a_k \\ y-b_k \\ z-c_k \end{matrix} \right\}. \quad (1.16)$$

Сравнивая (1.16) с (1.9), убеждаемся, что формула (1.15) действительно определяет потенциал силы притяжения системы материальных точек и характеризует его скалярность, поэтому потенциал равнодействующей силы равен сумме потенциалов составляющих.

Третий случай (см. рис. 1.3). Потенциал тела. Сохраняя принятые обозначения, будем иметь потенциал, развиваемый элементарным параллелепипедом в точке $B(x, y, z)$

$$dV = f \frac{dm}{r}.$$

Для получения потенциала притяжения, развиваемого всем телом, необходимо выполнить интегрирование по всему объему тела τ

$$V^\tau(x, y, z) = f \iiint_\tau \frac{dm}{r} = f \iiint_\tau \frac{\delta d\tau}{r}. \quad (1.17)$$

Формула (1.17) определяет потенциал тела или, как часто говорят, потенциал объемных масс. Согласно математическому определению потенциала частные производные от V^τ по координатным осям должны равняться составляющим силы притяжения. Вычислим частную производную

$$\frac{dV^\tau}{dx} = f \iiint_\tau \frac{\delta d(1/r)}{dx} d\tau, \quad (1.18)$$

$$\frac{d(1/r)}{dx} = -\frac{1}{r^2} = -\frac{x-a}{r^3} = -\frac{\cos(r, x)}{r^2}. \quad (1.19)$$

С учетом (1.19) выражение (1.18) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV^\tau}{dx} &= -f \iiint_\tau \frac{\delta(x-a)}{r^3} d\tau = f \iiint_\tau \frac{\delta \cos(r, x)}{r^2} d\tau \\ \text{и аналогично по другим координатным осям} \\ \frac{dV^\tau}{dy} &= -f \iiint_\tau \frac{\delta(y-b)}{r^3} d\tau = f \iiint_\tau \frac{\delta \cos(r, y)}{r^2} d\tau \\ \frac{dV^\tau}{dz} &= -f \iiint_\tau \frac{\delta(z-c)}{r^3} d\tau = f \iiint_\tau \frac{\delta \cos(r, z)}{r^2} d\tau \end{aligned} \right\}. \quad (1.20)$$

Сравнивая формулы (1.20) с (1.8), убеждаемся, что формула (1.17) действительно определяет потенциал объемных масс.

1.3. Потенциал простого слоя и потенциал двойного слоя

В теории фигуры Земли и физической геодезии большое значение имеют функции, тесно связанные с потенциалом объемных масс и потен-

циалом точки, которые называются потенциалом простого слоя и потенциалом двойного слоя.

Построим эти функции.

Потенциал простого слоя. Возьмем две близкие, замкнутые поверхности σ и σ_1 так, чтобы σ_1 охватывала полностью поверхность σ (рис. 1.5). Расстояние между этими поверхностями по нормали n к поверхности σ обозначим через h и заполним массы плотностью δ . Пусть $d\sigma$ есть элементарная площадка на поверхности σ , тогда элемент объема $\delta\tau = h \cdot d\sigma$ и элементарная масса $dm = \delta \cdot h \cdot d\sigma$.

Будем неограниченно приближать поверхность σ_1 к поверхности σ ($h \rightarrow 0$), но при этом масса каждого элементарного объема остается неизменной. Тогда все массы, заполняющие пространство между поверхностями σ и σ_1 , будут конденсированы на поверхность σ . Таким построением получают на поверхности σ так называемый простой слой, на каждом элементе $d\sigma$ которого будет содержаться масса $dm = \delta \cdot h \cdot d\sigma$.

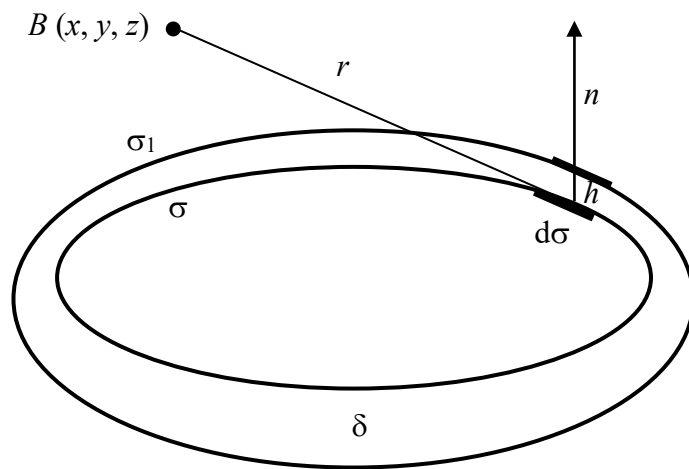


Рис. 1.5. Простой слой

Произведение $\delta \cdot h = \mu$ называется плотностью простого слоя (или поверхностной плотностью) и $dm = \mu \cdot d\sigma$.

Элементарный потенциал, обусловленный dm в точке $B(x, y, z)$, равен

$$dV^\sigma = f \frac{\mu d\sigma}{r},$$

а потенциал, создаваемый массами всего простого слоя,

$$V^\sigma = f \iint_{\sigma} \frac{\mu}{r} d\sigma. \quad (1.21)$$

По структуре потенциал простого слоя (1.21) очень похож на потенциал объемных масс (1.17). Отличие состоит лишь в том, что в одном случае интегрирование ведется по всему объему, а в другом – по поверхности. Соответственно этому и плотность в одном случае – объемная δ , а в другом – поверхностная μ . Однако эти потенциалы, как ниже будет показано, существенно отличаются по своим свойствам.

Потенциал двойного слоя. Пусть от поверхности σ отложены по внешним нормалю очень малые отрезки постоянной длины ε (рис. 1.6).

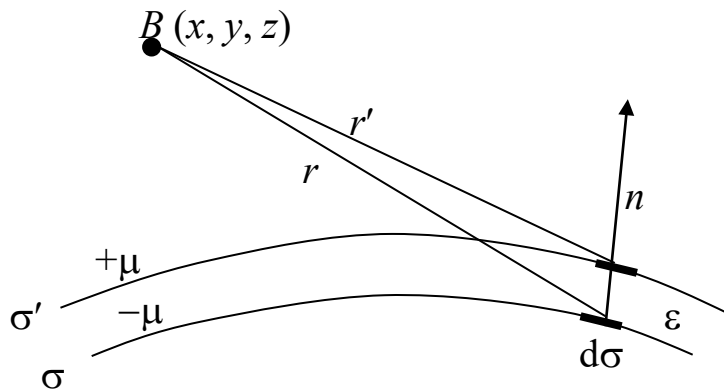


Рис. 1.6. Двойной слой

Концы этих отрезков образуют поверхность σ' . На поверхности σ' распределен простой слой переменной положительной плотности μ , а на поверхности σ распределен простой слой отрицательной плотности $-\mu$ так, чтобы во всех точках, расположенных на одном отрезке нормали ε , плотности были равны по абсолютной величине.

Потенциал двух таких простых слоев в точке $B(x, y, z)$ будет равен

$$V^\sigma + V^{\sigma'} = -f \iint_{\sigma} \frac{\mu}{r} d\sigma + f \iint_{\sigma'} \frac{\mu}{r'} d\sigma' = f \iint_{\sigma} \mu \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) d\sigma. \quad (1.22)$$

Так как из-за малости t приближенно можно считать $d\sigma = d\sigma'$;

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \approx \frac{d(1/r)}{dn} \varepsilon,$$

и интегрирование вести по σ , то выражение (1.22) примет вид

$$V^\sigma + V^{\sigma'} = f \iint_{\sigma} \varepsilon \mu \frac{d(1/r)}{dn} d\sigma.$$

Если теперь расстояние между поверхностями σ и σ' неограниченно уменьшать $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (V^\sigma + V^{\sigma'}) = W \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \mu = \nu - \text{плотность двойного слоя.}$$

W – предел совокупности двух простых слоев при $\varepsilon \rightarrow 0$ называют потенциалом двойного слоя с плотностью ν .

Таким образом, потенциал двойного слоя

$$W(x, y, z) = f \iint_{\sigma} \nu \frac{d(1/r)}{dn} d\sigma, \quad (1.23)$$

где n – внешняя нормаль к поверхности σ .

1.4. Потенциал однородного сферического простого слоя на внешнюю и внутреннюю точки

На сфере радиуса R распределен простой слой постоянной плотности μ . Радиус-вектор точки B $\rho = OB$ пересекает сферу в точке B_0 . Положение любой притягивающей точки A на сфере определяется сферическим расстоянием ψ и азимутом α (рис. 1.7).

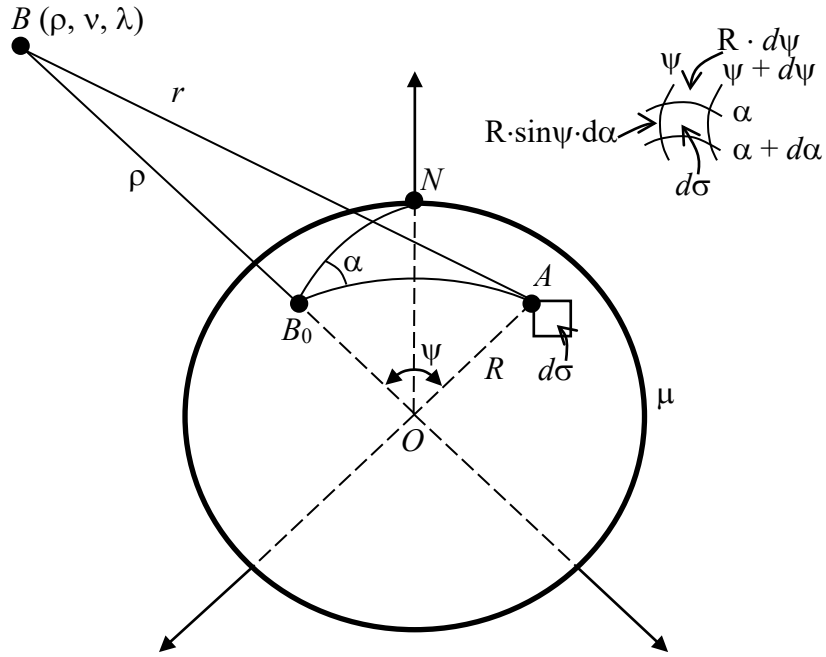


Рис. 1.7. Потенциал однородного сферического простого слоя

Если точку B_0 рассматривать как северный полюс, то ψ будет представлять полярное расстояние ϑ , а α – долготу λ .

Элемент поверхности сферы радиуса R равен

$$d\sigma = R^2 \sin \psi d\psi d\alpha. \quad (1.24)$$

Если сфера имеет радиус $R = 1$, то элемент ее поверхности

$$d\omega = \sin \psi d\psi d\alpha \text{ и } d\sigma = R^2 d\omega, \quad (1.25)$$

где $d\omega$ называют элементом телесного угла ω . Его можно положить равным $\sin \omega d\omega d\alpha$ или $\sin \vartheta d\vartheta d\lambda$ в зависимости от удобства интегрирования.

Так как в нашем случае элемент сферической поверхности $d\sigma$ имеет массу $\mu d\sigma$ и расстояние его до точки B равно r , то согласно (1.21) потенциал простого слоя

$$V = f \iint_{\sigma} \frac{\mu}{r} d\sigma. \quad (1.26)$$

Из треугольника AOB имеем

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi. \quad (1.27)$$

При перемещении текущей точки A по сфере расстояние r получит приращение dr , определяемое дифференцированием уравнения (1.27) по ψ :

$$rdr = R\rho \sin \psi d\psi. \quad (1.28)$$

Умножив левую и правую части (1.28) на $Rd\alpha$, с учетом (1.24) получим:

$$Rrdrd\alpha = \rho R^2 \sin \psi d\psi d\alpha = \rho d\sigma,$$

откуда

$$d\sigma = \frac{R}{\rho} rdrd\alpha.$$

Подставляя полученное выражение для $d\sigma$ в (1.26) и выполняя интегрирование по r и α , получим

$$V^{\sigma} = f \frac{\mu R}{\rho} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} drd\alpha = 2\pi f \mu \frac{R}{\rho} (r_2 - r_1). \quad (1.29)$$

Пределы интегрирования от r_1 (минимального) до r_2 (максимального) будут принимать различные значения в зависимости от положения точки B относительно сферы.

Если точка B находится вне сферы ($\rho > R$), то из рис. 1.7 пределы для r будут от $r_1 = \rho - R$ до $r_2 = \rho + R$. Подставляя значения этих пределов в (1.29), получим, что потенциал однородного простого сферического слоя на внешнюю точку

$$V_e^\sigma = 4\pi f\mu \frac{R^2}{\rho} \text{ при } \rho > R. \quad (1.30)$$

Если точка B находится внутри сферы ($\rho < R$), то пределы для r будут от $r_1 = R - \rho$ до $r_2 = R + \rho$ и потенциал однородного простого сферического слоя на внутреннюю точку

$$V_i^\sigma = 4\pi f\mu R \text{ при } \rho < R. \quad (1.31)$$

Из сравнения формул (1.30) и (1.31) следует важный вывод, что потенциал простого слоя не может быть выражен одной аналитической функцией для всего пространства. Он определяется разными аналитическими функциями вне слоя (1.30) и внутри сферического слоя (1.31).

Имея в виду, что поверхность сферы равна $4\pi R^2$, масса слоя $M = 4\pi R^2\mu$, формула (1.30) примет вид

$$V_e^\sigma = \frac{fM}{\rho}. \quad (1.32)$$

Сравнивая (1.32) с потенциалом точечной массы (1.10), заключаем, что однородный простой сферический слой создает во внешнем относительно сферы пространстве такой же потенциал и притягивает внешнюю точку так, как будто вся масса слоя содержится в центре сферы.

Из формулы (1.31) видно, что потенциал V_i^σ однородного простого сферического слоя не зависит от положения точки внутри сферы, является постоянным и, как следствие, однородный простой сферический слой внутреннюю точку не притягивает.

1.5. Потенциал шара, состоящего из концентрических сферических слоев, на внешнюю и внутреннюю точки

Будем различать два случая. Первый случай: притягиваемая точка B находится вне шара на расстоянии ρ от его центра. Внешний радиус шара равен R , $\rho > R$ (рис. 1.8).

По условию плотность δ – функция только расстояния ρ' от центра шара, поэтому его можно представить состоящим из бесконечно большого числа элементарных сферических слоев. Плотность каждого слоя постоянна, но изменяется от слоя к слою. Внутри шара concentрическими сферическими радиусами ρ' и $\rho'+d\rho'$ выделим слой толщиной $d\rho'$.

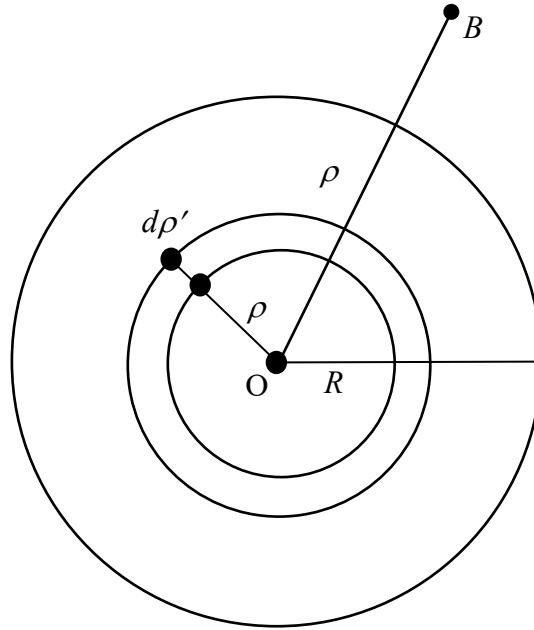


Рис. 1.8. Потенциал шара на внешнюю точку

Этот слой можно рассматривать как простой сферический слой с поверхностной плотностью $\mu = \delta d\rho'$. Тогда согласно (1.32) потенциал элементарного простого сферического слоя с массой dM в точке B будет

$$dV_e^\tau = f \frac{dM}{\rho}. \quad (1.33)$$

Чтобы получить потенциал всего шара, необходимо просуммировать выражение (1.33) по массам всех слоев

$$dV_e^\tau = \frac{f}{\rho} \int_0^M dM = f \frac{M}{\rho}, \quad (1.34)$$

где M – масса шара, равная $\frac{4}{3} \pi R^3 \delta$.

Учитывая это, потенциал шара на внешнюю точку (1.34) можно записать в виде

$$V_e^{\tau} = \frac{4}{3} \pi f \delta \frac{R^3}{\rho}. \quad (1.35)$$

Из формулы (1.34) следует: во-первых, шар, состоящий из концентрических, однородных, сферических слоев, создает во внешнем пространстве такой потенциал, будто вся масса шара сосредоточена в одной точке – центре шара; во-вторых, если в шаре переставить порядок слоев так, чтобы общая масса M шара не изменилась, то внешнее поле притяжения, создаваемое шаром, не изменится. Этот простой пример показывает, что одно и то же внешнее поле тяготения может создаваться разными телами.

Второй случай: притягиваемая точка B находится внутри шара на расстоянии ρ от центра шара, внешний радиус шара равен R , $\rho < R$ (рис. 1.9).

Через исследуемую точку B проведем концентрическую сферу радиуса ρ , которая разделит шар на две части относительно точки B : слой толщиной $R-\rho$ внешний относительно точки B и шар радиуса ρ , относительно которого точка B внешняя.

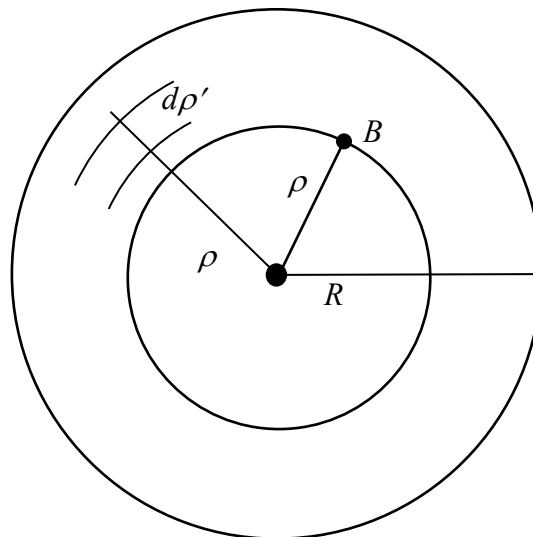


Рис. 1.9. Потенциал шара на внутреннюю точку

Сферический слой R - ρ можно рассматривать как состоящий из простых слоев толщиной $d\rho'$. Потенциал такого элементарного слоя на внутреннюю точку B определится по формуле (1.31) при $\mu = \delta d\rho'$ и $R = \rho'$

$$dV_{i,1} = 4\pi f \delta \rho' d\rho'.$$

Весь слой толщиной $R - \rho$ создает в точке B потенциал

$$V_{i,1}^{\tau} = 4\pi f \delta \int_{\rho}^R \rho' d\rho' = 2\pi f \delta (R^2 - \rho^2). \quad (1.36)$$

Потенциал шара радиуса ρ в точке B согласно (1.35), при $R = \rho$

$$V_{i,2}^{\tau} = \frac{4}{3} \pi f \delta \frac{R^3}{\rho} = \frac{4}{3} \pi f \delta \rho^2. \quad (1.37)$$

Складывая равенства (1.36) и (1.37), получим общий потенциал шара на внутреннюю точку B

$$V_i^{\tau} = 2\pi f \delta \left(R^2 - \frac{1}{3} \rho^2 \right). \quad (1.38)$$

Сила притяжения шаром внутренней точки

$$F_i = -\frac{dV_i^{\tau}}{d\rho} = \frac{4}{3} \pi f \delta \rho. \quad (1.39)$$

Внутри однородного шара сила притяжения пропорциональна расстоянию ρ притягиваемой точки от центра шара. В центре шара сила притяжения равна нулю.

Преобразуем формулу (1.39): умножив и разделив правую часть на ρ^2 и введя переменную массу шара $m = 4/3 \pi \rho^3 \delta$, получим

$$F_i = f \frac{m}{\rho^2}. \quad (1.40)$$

Из (1.40) следует, что точку, находящуюся внутри однородного шара, притягивают только те массы, которые находятся к центру шара ближе, чем притягиваемая точка, и притягивают так, как будто вся масса находится в центре шара.

1.6. Притяжение плоским однородным круговым простым слоем

Рассмотрим сначала физическую сущность. На плоскости (xy) построим круг σ радиуса a с центром O в начале координат и на нем распределим простой слой постоянной плотности μ (рис. 1.10).

Сила притяжения $\vec{F}$ этим слоем точки B , находящейся на оси Z , зависит от координат точки $B(0, 0, z)$ и направлена всегда к слою. Если точка B будет удаляться по оси Z в бесконечность ($z \rightarrow \infty$), то сила притяжения будет стремиться к нулю. Если точка B будет приближаться к плоскости (xy) ($z \rightarrow 0$), то модуль силы притяжения будет увеличиваться, а направление будет оставаться противоположным направлению положительной оси Z . Когда станет $z = 0$, точка B совпадет с центром O круга, и сила притяжения станет равна нулю. Если точка B перейдет через слой на отрицательную ось Z , модуль силы притяжения скачком возрастет, а направление будет совпадать с направлением положительной оси Z . Когда точка B совпадет с точкой $B'(0, 0, -z)$, модуль силы притяжения будет равен модулю в точке $B(0, 0, z)$.

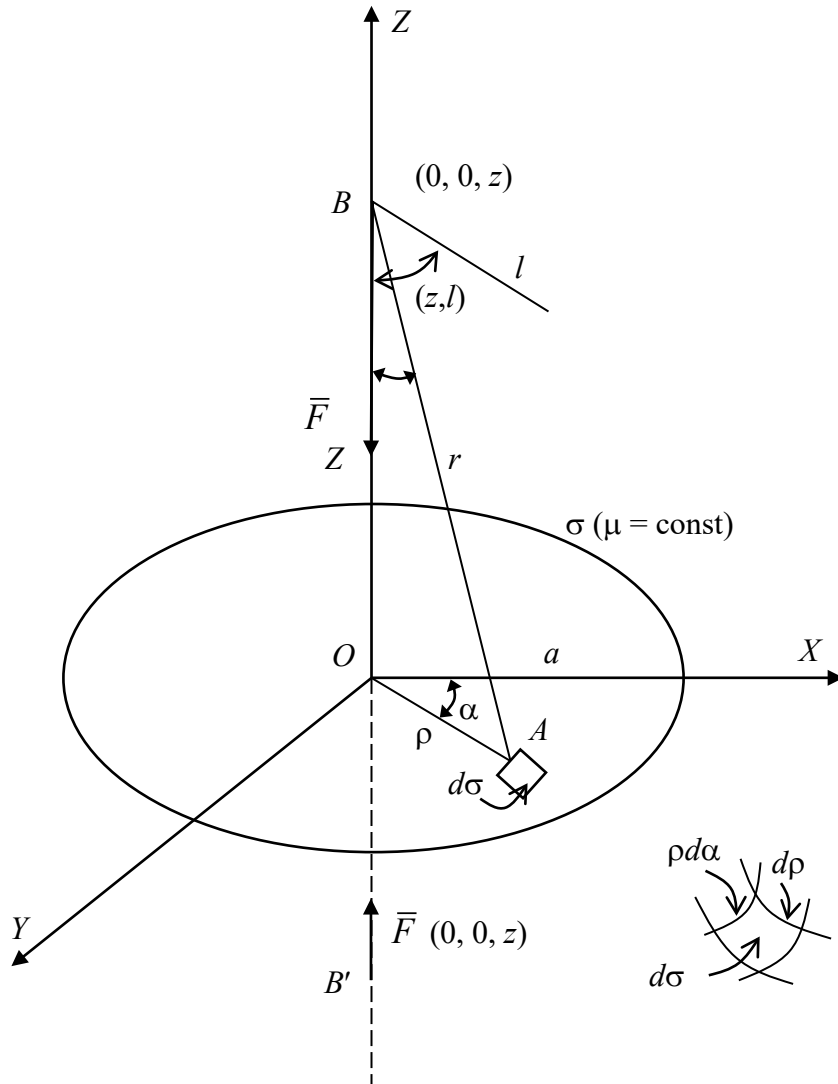


Рис. 1.10. Притяжение плоским однородным слоем

Таким образом, сила притяжения плоским однородным слоем терпит разрыв при прохождении слоя, достигая в окрестности слоя некоторого предела.

Теперь, имея в виду физическую сущность явления, вычислим проекции силы притяжения на ось Z в точках $B(0, 0, z)$ и $B'(0, 0, -z)$. Для этого вычислим производную по z от потенциала простого слоя (1.21)

$$F_z^B = \frac{dV^\sigma}{dz} = -f \iint_{\sigma} \frac{\mu \cos(r, z)}{r^2} d\sigma. \quad (1.41)$$

В плоскости (xy) введем полярные координаты ρ , α , тогда $r^2 = z^2 + \rho^2$. Дифференцируя это равенство, при z постоянном получим $rdr = \rho d\rho$. Элемент $d\sigma$ в полярных координатах будет $d\sigma = \rho d\rho d\alpha$ или $d\sigma = r dr d\alpha$, а из рис. 1.10 $\cos(z, r) = z / r$.

Подставляем в (1.41) полученные значения $d\sigma$, $\cos(z, r)$ и, выполняя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} F_z^B &= -fz\mu \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^{2\pi} \frac{rdrd\alpha}{r^3} = -2\pi\mu fz \int_{|z|}^{\sqrt{z^2+a^2}} \frac{dr}{r^2} = \\ &= -2\pi\mu fz - \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{1}{z} \right) = -2f\pi\mu \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \right) \text{ при } z > 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Знак минус означает, что сила направлена противоположно положительной оси Z . В точке B' при $z < 0$ сила притяжения

$$F_{-z}^{B'} = 2f\pi\mu \left(1 - z / \sqrt{z^2 + a^2} \right).$$

Кроме того, в точке 0 сила притяжения $F_0 = 0$.

Теперь найдем предел, к которому стремится сила F , когда точка B , лежащая на положительной оси Z , неограниченно приближается к центру круга 0:

$$F_e = -2f\pi\mu \lim_{z \rightarrow 0} \left[1 - z / \sqrt{z^2 + a^2} \right] = -2f\pi\mu. \quad (1.43)$$

Если точка B' , лежащая на отрицательной оси Z , неограниченно приближается к центру слоя, то предельное ее значение

$$F_i = +2f\pi\mu. \quad (1.44)$$

Таким образом, сила притяжения плоским однородным слоем терпит разрыв непрерывности при переходе через слой. В предельных положи-

ях сила равна $-2f\pi\mu$ или $+2f\pi\mu$, а прямое значение силы притяжения в центре O слоя равно нулю.

Если однородный простой слой распределен на бесконечной плоскости, то в (1.42) радиус круга $a \rightarrow \infty$ и сила $F_z^B = \pm 2f\pi\mu$ не зависит от расстояния притягиваемой точки до бесконечного однородного плоского простого слоя.

Рассмотрим более общий случай. Определим составляющую силы притяжения плоским однородным круговым слоем по любому направлению l , проходящему через точку B . Из (1.42) и рис. 1.10 получим

$$F_l^B = -2f\pi\mu \left(\left(1 - z / \sqrt{z^2 + a^2} \right) \cos(z, l) \right).$$

По аналогии для предельных и прямого значений составляющей получаем:

$$\left. \begin{aligned} (F_l)_e &= -2f\pi\mu \cos(z, l) \\ (F_l)_i &= +2f\pi\mu \cos(z, l) \\ (F_l)_0 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.45)$$

Таким образом, составляющая силы притяжения плоским однородным, простым, круговым слоем по произвольному направлению l терпит разрыв непрерывности при переходе точки через слой. Исключение составляет направление l , параллельное плоскости кругового слоя, когда $\cos(z, l) = 0$.

1.7. Основные свойства потенциала объемных масс и его первой и второй производной. Уравнения Пуассона и Лапласа

Потенциал точечной массы $V = f \cdot m / r$ — функция непрерывная и ограниченная во всем пространстве, кроме одной точки, в которой со-

средоточена притягивающая масса. В этой точке $r = 0$ и $V^\tau = f \cdot \iiint_\tau \frac{\delta}{r} d\tau$ – потенциал неограниченно возрастает.

Прежде всего, из формулы (1.17) видно, что если τ не обращается в нуль, то функция V^τ остается ограниченной и непрерывной. Сомнения вызывает значение V^τ при $\tau = 0$.

Это может быть только в тех случаях, когда потенциал V^τ вычисляется внутри тела или на его поверхности.

Возьмем точку B внутри объема (рис. 1.11) и введем местную сферическую систему координат (r, ϑ, λ) с началом в точке B .

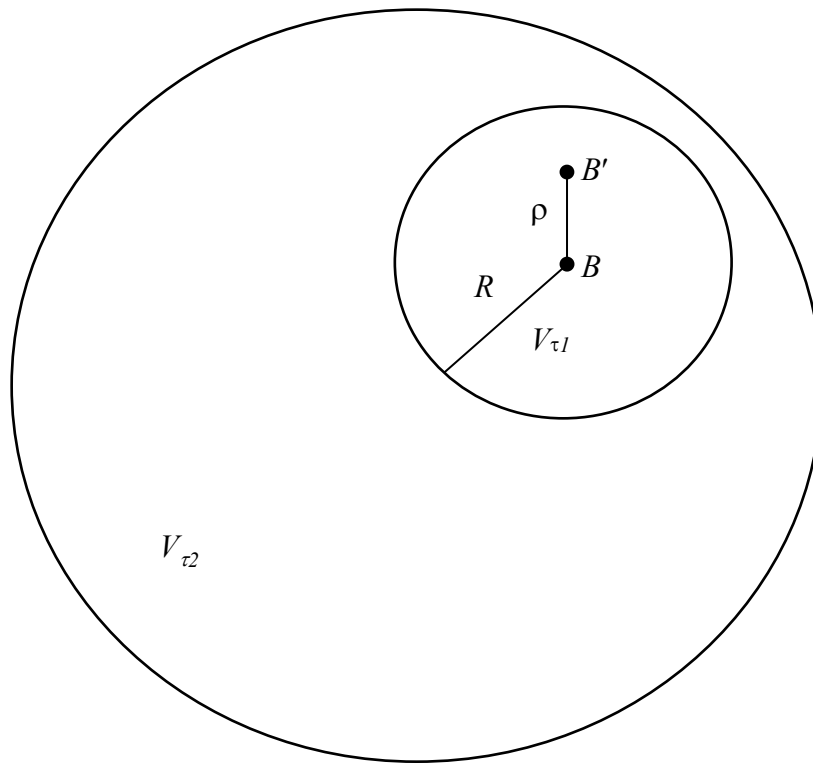


Рис. 1.11. Потенциал объемной массы

Тогда с учетом (1.25) элемент объема в этой системе

$$d\tau = r^2 dr d\omega,$$

где $d\omega$ – элемент поверхности единичной сферы, и формула (1.17) для вычисления потенциала преобразуется к виду

$$V^\tau = f \iiint_{\tau} \frac{\delta r^2 dr d\omega}{r} = f \iiint_{\tau} \delta r dr d\omega. \quad (1.46)$$

При таком написании формулы для потенциала V видно, что при $r = 0$ интеграл (1.46) остается ограниченным.

Для доказательства непрерывности потенциала объемных масс построим вокруг точки B внутри масс сферу такого радиуса R , чтобы плотность внутри нее можно считать постоянной (см. рис. 1.11). Такой прием позволяет представить потенциал в виде

$$V^\tau = V^{\tau_2} + V^{\tau_1},$$

где V^{τ_1} – потенциал масс, заключенных внутри вспомогательной сферы; V^{τ_2} – потенциал всех остальных масс тела. Потенциал V^{τ_2} будет функцией непрерывной, так как $r \neq 0$ (интегрирование ведется по объему V^{τ_2}), а точка B , в которой вычисляется потенциал, находится вне этого объема. Для доказательства непрерывности потенциала V^τ необходимо доказать непрерывность потенциала V^{τ_1} , развиваемого массами вспомогательной сферы. Испытаем на непрерывность функцию (1.38), определяющую потенциал внутри однородного шара малого радиуса R . Пусть δ – плотность внутри вспомогательной сферы. Тогда потенциал $V_1^{\tau_1}$ в точке B'

$$\left(V_1^{\tau_1}\right)_B = 2f\pi\delta\left(R^2 - 1/3 \cdot \rho^2\right),$$

а потенциал $V_1^{\tau_1}$ в точке B (центре сферы) –

$$\left(V_1^{\tau_1}\right)_B = 2f\pi\delta R^2$$

и приращение потенциала –

$$\left(V_1^{\tau_1}\right)_B - \left(V_1^{\tau_1}\right)_{B'} = 2/3 \cdot f\pi\delta\rho^2.$$

Радиус вспомогательной сферы $R \rightarrow 0$. Находим, что

$$\lim_{\substack{\text{при } B' \rightarrow B \\ \rho \rightarrow 0}} \left[\left(V_1^{\tau_1} \right)_B - \left(V_1^{\tau_1} \right)_{B'} \right] = \lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} \frac{2}{3} f \pi \delta \rho^2 = 0,$$

следовательно, потенциал V^τ – функция, непрерывная и внутри масс.

Аналогично можно доказать, что первая производная потенциала объемных масс по любому направлению l

$$\frac{dV^\tau}{dl} = f \iiint_{\tau} \delta \frac{d(1/r)}{dl} d\tau = -f \iiint_{\tau} \frac{\delta}{r^2} \cos(r, l) d\tau \quad (1.47)$$

также является функцией ограниченной и непрерывной во всем пространстве без исключения.

Вне притягивающих масс r нигде не обращается в нуль, поэтому дифференцирование потенциала по координатам x, y, z можно производить сколько угодно раз. Все производные будут функциями непрерывными и ограниченными.

Рассмотрим свойства второй производной потенциала объемных масс:

$$\frac{d^2 V^\tau}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV^\tau}{dx} \right) = f \iiint_{\tau} \delta \frac{d^2(1/r)}{dx^2} d\tau.$$

Так как

$$\frac{d(1/r)}{dx} = -\frac{1}{r^3} \frac{dr}{dx} = -\frac{x-a}{r^3},$$

то

$$\frac{d^2(1/r)}{dx^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3\cos^2(r, x)}{r^3}$$

и

$$\frac{d^2 V^\tau}{dx^2} = f \iiint_{\tau} \delta \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5} \right] d\tau. \quad (1.48)$$

Для вычисления второй производной потенциала объемных масс внутри тела поместим опять исследуемую точку B внутри вспомогательной сферы (см. рис. 1.11) такого малого радиуса R , чтобы плотность внутри нее можно было считать постоянной, тогда

$$\frac{d^2 V^\tau}{dx^2} = \frac{d^2 V^{\tau_1}}{dx^2} + \frac{d^2 V^{\tau_2}}{dx^2}.$$

В соответствии с (1.48)

$$\frac{d^2 V^{\tau_2}}{dx^2} = f \iiint_{\tau_2} \delta \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5} \right] d\tau$$

будет непрерывной и ограниченной, так как интегрирование ведется по объему τ_2 , внешнему относительно исследуемой точки B .

Для вычисления $\frac{d^2 V^{\tau_1}}{dx^2}$ используем выражение (1.38) потенциала ша-

ра на внутреннюю точку $V_1^{\tau_1} = 2f\pi\delta \left(R^2 - \frac{\rho^2}{3} \right).$

При этом надо иметь в виду, что $R = \text{const}$; центр вспомогательной сферы точка B (см. рис. 1.11) имеет координаты a, b, c и точка B' координаты x, y, z , а $\rho^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$, тогда

$$\frac{dV^{\tau_1}}{dx} = -\frac{4}{3} f\pi\delta\rho \frac{d\rho}{dx} = -\frac{4}{3} f\pi\delta\rho \frac{x-a}{\rho} = -\frac{4}{3} f\pi\delta(x-a),$$

и

$$\frac{d^2 V^{\tau_1}}{dx^2} = -\frac{4}{3} f\pi\delta. \quad (1.49)$$

Если теперь вспомогательную сферу уменьшать ($R \rightarrow 0$), то объем τ_2 будет стремиться к $\tau - 0$ — полному объему тела кроме одной точки, а δ — будет плотность в исследуемой точке $B(x, y, z)$. Таким образом,

$$\frac{d^2 V^\tau}{dx^2} = f \iiint_{\tau \rightarrow 0} \delta \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5} \right] d\tau - \frac{4}{3} f \pi \delta. \quad (1.50)$$

Здесь первое слагаемое представляет $\lim_{\tau_2 \rightarrow \tau} \frac{d^2 V^{\tau_2}}{dx^2}$. Оно всегда непрерывно, так как $r \neq 0$. Второе слагаемое показывает, что вторая производная во всем пространстве является ограниченной функцией, так как δ – величина ограниченная. Это же слагаемое показывает, что вторая производная потенциала объемных масс $\frac{d^2 V^\tau}{dx^2}$ терпит разрыв в тех точках, где плотность δ меняется скачком, на границе раздела плотностей, внутри и на поверхности тела. Поэтому V^τ нельзя представить одной аналитической функцией во всем пространстве.

По аналогии с (1.50) можно получить, что

$$\frac{d^2 V^\tau}{dy^2} = f \iiint_{\tau \rightarrow 0} \delta \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-b)^2}{r^5} \right] d\tau - \frac{4}{3} f \pi \delta \quad (1.50)$$

и

$$\frac{d^2 V^\tau}{dz^2} = f \iiint_{\tau \rightarrow 0} \delta \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-c)^2}{r^5} \right] d\tau - \frac{4}{3} f \pi \delta. \quad (1.50)$$

Складывая все три равенства (1.50), получим

$$\frac{d^2 V^\tau}{dx^2} + \frac{d^2 V^\tau}{dy^2} + \frac{d^2 V^\tau}{dz^2} = -4\pi\delta, \quad (1.51)$$

так как сумма трех интегральных членов равна нулю.

Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка (1.51) называется уравнением Пуассона (1813). Оно устанавливает связь вторых производных потенциала объемных масс в любой точке внутри притягивающих масс с плотностью в той же точке. В частности,

вне притягивающих масс, где плотность $\delta = 0$, уравнение Пуассона (1.51) принимает вид

$$\frac{d^2 V^\tau}{dx^2} + \frac{d^2 V^\tau}{dy^2} + \frac{d^2 V^\tau}{dz^2} = 0. \quad (1.52)$$

Уравнение (1.52) называется уравнением Лапласа (1782). Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими.

Уравнения Пуассона (1.51) и Лапласа (1.52) часто записывают в операторной форме:

$$\Delta V_1^\tau = -4f\pi\delta - \text{уравнение Пуассона}, \quad (1.53)$$

$$\Delta V_e^\tau = 0 - \text{уравнение Лапласа}, \quad (1.54)$$

где дифференциальный оператор Δ называется лапласиан и означает сумму вторых частных производных по координатным осям x, y, z .

Получим условия, которым удовлетворяет потенциал объемных масс на бесконечности. В этом случае расстояние от тела до притягиваемой точки бесконечно велико сравнительно с размерами тела, и поэтому на основании закона Ньютона $F = fM / r^2$ и потенциал $V = fM / r$.

Отсюда следует, что при $r \rightarrow 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} V = 0; \lim_{r \rightarrow \infty} rV = fM; \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \left| \frac{dV}{dr} \right| = fM. \quad (1.55)$$

Формулы (1.55) называются условиями регулярности. Они показывают, что потенциал объемных масс является функцией, регулярной (правильной) на бесконечности.

1.8. Основные свойства потенциала простого слоя и его первой производной. Формулы Племели

Потенциал простого слоя (1.21) $V^\sigma = f \iint_\sigma \mu / r \cdot d\sigma$ является функцией,

непрерывной во всем пространстве.

Доказательство этого положения аналогично доказательству непрерывности потенциала объемных масс. Поэтому ограничимся изложением основных этапов и особенностей доказательства. Прежде всего накладывают на поверхность σ условия в смысле ее «гладкости», сформулированные А. М. Ляпуновым. Поверхности Ляпунова в каждой точке имеют единственную касательную плоскость, и изменение кривизны поверхности ограничено. Поверхности Ляпунова очень широкого класса, и фактически к ним относятся все поверхности, с которыми приходится иметь дело на практике, в том числе и физическая поверхность Земли.

На поверхности Ляпунова σ (рис. 1.12), на которой распределен простой слой непрерывной плотности μ , выбирают точку B и около нее выделяют небольшой кусок σ_1 .

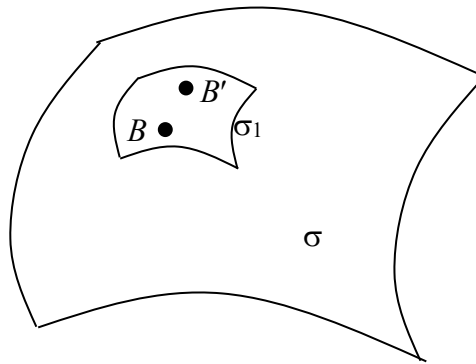


Рис. 1.12. Потенциал простого слоя

Таким путем представляют потенциал простого слоя:

$$V^{\sigma} = V^{\sigma_1} + V^{\sigma - \sigma_1}.$$

Потенциал $V^{\sigma - \sigma_1}$ будет функцией, непрерывной в точке B , так как точка B находится вне масс слоя $\sigma - \sigma_1$, по которому выполняется интегрирование. Далее необходимо доказать, что и потенциал V^{σ_1} также является функцией, непрерывной в точке B . Благодаря тому, что поверхность σ удовлетворяет условиям Ляпунова, интегрирование по σ_1 можно заменить интегрированием по касательной плоскости в точке B , при этом слой

на σ_1 заменяется плоским слоем новой плотности μ_1 и его плотность изменяется тем больше, чем дальше отклоняется поверхность σ_1 от касательной плоскости.

Затем вычисляют потенциал плоского слоя в точке B и в точке B' и показывают, что разность потенциалов $(V^{\sigma_1})_{B'} - (V^{\sigma_1})_B$ неограниченно убывает, если точка $B' \rightarrow B$, и на этом основании делается вывод, что потенциал простого слоя непрерывной плотности μ , распределенной на поверхности Ляпунова σ , является функцией, непрерывной во всем пространстве.

Потенциал простого слоя на бесконечность есть функция регулярная, удовлетворяющая условиям регулярности (1.55).

Потенциал простого слоя вне слоя удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V^\sigma = \frac{d^2 V^\sigma}{dx^2} + \frac{d^2 V^\sigma}{dy^2} + \frac{d^2 V^\sigma}{dz^2} = 0.$$

Первые производные потенциала простого слоя вне слоя являются функциями непрерывными, так как $r \neq 0$, но необходимо определить, как они будут вести себя в окрестности слоя и на самом слое.

Пусть на поверхности σ распределен простой слой переменной непрерывной плотности μ , тогда производная $\frac{dV}{dl}$ имеет предел, когда притягиваемая точка неограниченно приближается к слою, оставаясь все время с внешней или внутренней стороны поверхности σ . Значения этих пределов различны. Предельные значения этих производных будут:
внешняя —

$$\frac{dV_e^c}{dl} = \lim_{A \rightarrow C} \frac{dV^A}{dl} = - \lim f \iint_{\sigma} \frac{\mu \cos(r_A, l)}{r_A^2} d\sigma \quad (1.56)$$

и внутренняя —

$$\frac{dV_i^c}{dl} = \lim_{B \rightarrow C} \frac{dV^B}{dl} = - \lim_{B \rightarrow C} f \iint_{\sigma} \frac{\mu \cos(r_B, l)}{r_B^2} d\sigma \quad (1.57)$$

по произвольному направлению l .

Прямое значение производной в точке C

$$\frac{dV_0^c}{dl} = -f \iint_{\sigma} \frac{\mu \cos(r_c, l)}{r_c^2} d\sigma. \quad (1.58)$$

Для установления соотношения между этими тремя значениями производных представим их в виде сумм. Для этого выделим вокруг точки C на слое очень малую часть поверхности σ_0 (рис. 1.13), тогда выражения (1.56), (1.57) и (1.58) примут вид:

$$\frac{dV_e^c}{dl} = - \lim_{A \rightarrow C} f \iint_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \frac{\mu \cos(r_A, l)}{r_A^2} d\sigma - \lim_{A \rightarrow C} f \iint_{\sigma_0} \frac{\mu \cos(r_A, l)}{r_A^2} d\sigma, \quad (1.59)$$

$$\frac{dV_i^c}{dl} = - \lim_{B \rightarrow C} f \iint_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \frac{\mu \cos(r_B, l)}{r_B^2} d\sigma - \lim_{B \rightarrow C} f \iint_{\sigma_0} \frac{\mu \cos(r_B, l)}{r_B^2} d\sigma, \quad (1.60)$$

$$\frac{dV_0^c}{dl} = -f \iint_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \frac{\mu \cos(r_C, l)}{r_C^2} d\sigma - f \iint_{\sigma_0} \frac{\mu \cos(r_C, l)}{r_C^2} d\sigma. \quad (1.61)$$

Первые слагаемые правых частей (1.59) и (1.60) при движении точек A и B к точке C будут изменяться непрерывно и при совпадении с точкой C будут равны первому слагаемому правой части (1.61):

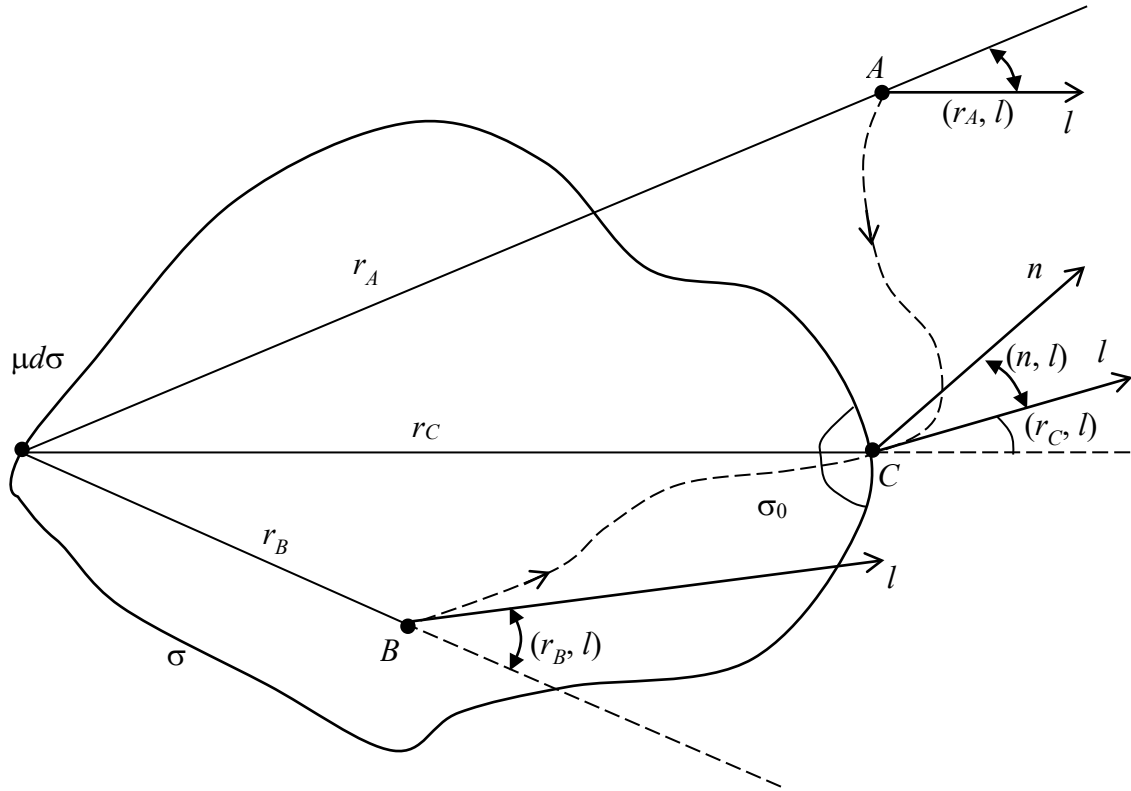


Рис. 1.13. Поведение первых производных потенциала простого слоя

$$\begin{aligned}
 \lim_{A \rightarrow C} f \iint_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \frac{\mu \cos(r_A, l)}{r_A^2} d\sigma &= \\
 &= \lim_{B \rightarrow C} f \iint_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \frac{\mu \cos(r_B, l)}{r_B^2} d\sigma = \\
 &= f \iint_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \frac{\mu \cos(r_C, l)}{r_C^2} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{1.62}$$

Это следует из того, что притягиваемая точка все время находится вне масс слоя поверхности $\sigma \rightarrow \sigma_0$, по которой выполняется интегрирование.

Для определения вторых слагаемых формул (1.59), (1.60) и (1.61) примем σ_0 за часть касательной плоскости в виде круга с центром в точке касания C . Плотность простого слоя μ внутри круга можно считать посто-

янной. При этих предположениях все три слагаемых определяются формулами (1.45). Только в этих формулах направление Z следует считать совпадающим с направлением внешней нормали n_c в точке C (см. рис. 1.13). С учетом этих замечаний формулы (1.59), (1.60) и (1.61) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_e^c}{dl} &= -f \iint_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\mu \cos(r_C, l)}{r_C^2} d\sigma - 2f\pi\mu_C \cos(n_c, l) \\ \frac{dV_i^c}{dl} &= -f \iint_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\mu \cos(r_C, l)}{r_C^2} d\sigma + 2f\pi\mu_C \cos(n_c, l) \\ \frac{dV_0}{dl} &= -f \iint_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\mu \cos(r_C, l)}{r_C^2} d\sigma \end{aligned} \right\}. \quad (1.63)$$

В общем случае, опуская обозначения, принадлежащие точке C слоя, получаем искомые соотношения, которые называются формулами Племли:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_e}{dl} &= \frac{dV_0}{dl} - 2f\pi\mu \cos(n, l) \\ \frac{dV_i}{dl} &= \frac{dV_0}{dl} + 2f\pi\mu \cos(n, l) \\ \frac{dV_0}{dl} &= -f \iint_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\mu \cos(r_C, l)}{r_C^2} d\sigma \end{aligned} \right\}, \quad (1.64)$$

отсюда прямое значение производной $\frac{dV_0}{dl}$:

$$\frac{dV_0}{dl} = \frac{1}{2} \left(\frac{dV_e}{dl} + \frac{dV_i}{dl} \right). \quad (1.65)$$

Величина скачка производной простого слоя при прохождении исследуемой точки через слой определится по формуле

$$\frac{dV_e}{dl} - \frac{dV_i}{dl} = -4f\pi\mu \cos(n, l). \quad (1.66)$$

Если производная берется по направлению нормали n к слою, то $\cos(n, l) = 1$ и величина разрыва будет наибольшей:

$$\frac{dV_e}{dn} - \frac{dV_i}{dn} = -4f\pi\mu. \quad (1.67)$$

Если же производная берется по направлению l , параллельному касательной плоскости в исследуемой точке на слое, то $\cos(n, l) = 0$ и предельные производные в этом случае будут равны прямому значению [10]:

$$\frac{dV_e}{dl} = \frac{dV_i}{dl} = \frac{dV_0}{dl}. \quad (1.68)$$

Итак, первые производные потенциала простого слоя терпят разрыв при пересечении слоя, и в окрестности слоя следует различать три первых производных потенциала: два предельных (внешнее и внутреннее) и одно прямое. Отсюда следует, что потенциал простого слоя нельзя представить одной аналитической функцией во всем пространстве.

1.9. Основные свойства потенциала двойного слоя переменной и постоянной плотности. Интегралы Гаусса

Потенциал двойного слоя был определен формулой (1.23):

$$W(x, y, z) = f \iint_{\sigma} \nu \frac{d(1/r)}{dn} d\sigma,$$

в которой производная $\frac{d(1/r)}{dn}$ берется по направлению внешней нормали в текущей точке слоя. Так как

$$\frac{d(1/r)}{dn} = -\frac{d(1/r)}{dx}\cos(n,x) - \frac{d(1/r)}{dy}\cos(n,y) - \frac{d(1/r)}{dz}\cos(n,z), \quad (1.69)$$

то, подставляя (1.69) в (1.23), получим эквивалентную формулу для потенциала двойного слоя:

$$\begin{aligned} W(x,y,z) = & -\frac{d}{dx}f \iint_{\sigma} \frac{v \cos(n,x)}{r} d\sigma - \\ & -\frac{d}{dy}f \iint_{\sigma} \frac{v \cos(n,y)}{r} d\sigma - \frac{d}{dz}f \iint_{\sigma} \frac{v \cos(n,z)}{r} d\sigma. \end{aligned} \quad (1.70)$$

В (1.70) интегралы можно рассматривать как потенциалы простых слоев V_1^σ , V_2^σ и V_3^σ с плотностями:

$$\mu_1 = -v \cos(n,x), \mu_2 = -v \cos(n,y), \mu_3 = -v \cos(n,z). \quad (1.71)$$

Но на слое первые производные потенциала простого слоя терпят разрыв, поэтому и потенциал двойного слоя на слое терпит разрыв. Докажем это положение.

В соответствии с (1.70) представим потенциал двойного слоя в точке A как сумму трех первых производных от потенциалов простых слоев с плотностями μ_1 , μ_2 , μ_3

$$W^A = \left(\frac{dV_1^\sigma}{dx} + \frac{dV_2^\sigma}{dy} + \frac{dV_3^\sigma}{dz} \right)_A.$$

Пусть теперь точка A неограниченно приближается к точке C на слое (рис. 1.14).

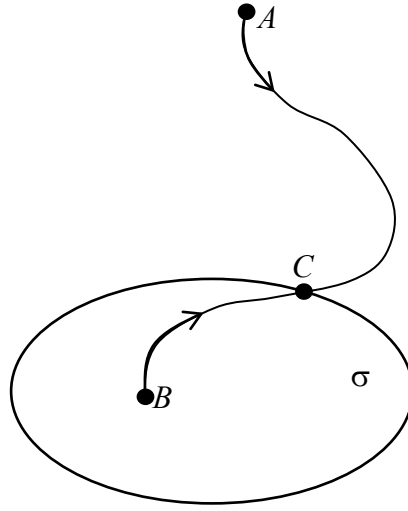


Рис. 1.14. Предельное значение потенциала двойного слоя

Тогда внешнее предельное значение потенциала двойного слоя с учетом формул Племели (1.64):

$$W_e = \lim_{A \rightarrow C} W_A = \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{dV_{1.0}^\sigma}{dx} + \frac{dV_{2.0}^\sigma}{dy} + \frac{dV_{3.0}^\sigma}{dz} \right)_0 - \\ &-2f\pi\mu_1 \cos(n, x) - \\ &-2f\pi\mu_2 \cos(n, y) - \\ &-2f\pi\mu_3 \cos(n, z) \end{aligned} \right\}. \quad (1.72)$$

Введем обозначение

$$W_0 = \left(\frac{dV_{1.0}^\sigma}{dx} + \frac{dV_{2.0}^\sigma}{dy} + \frac{dV_{3.0}^\sigma}{dz} \right) -$$

прямое значение потенциала двойного слоя на слое в точке C – и подставим значения μ_1, μ_2, μ_3 из (1.71), тогда (1.72) примет вид

$$W_e = \lim_{A \rightarrow C} W_A = W_0 + 2f\pi\nu \left[\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z) \right].$$

По аналогии для точки B , когда она стремится к двойному слою с внутренней стороны (см. рис. 1.14), имеем

$$W_i = \lim_{B \rightarrow C} W_B = W_0 - 2f\pi v.$$

Таким образом, потенциал двойного слоя при прохождении исследуемой точки через слой терпит разрыв непрерывности, и в окрестностях слоя следует различать два предельных значения W_e (внешнее) и W_i (внутреннее) и одно прямое значение W_0 потенциала двойного слоя. Связь между ними устанавливается формулами:

$$W_e = W_0 + 2f\pi v; \quad (1.73)$$

$$W_i = W_0 - 2f\pi v$$

Кроме формул (1.23) и (1.70) получим на основании соотношения (1.69) еще одну формулу, определяющую потенциал двойного слоя.

Учитывая, что частные производные, входящие в (1.69)

$$\begin{aligned} \frac{d(1/r)}{dx} &= -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dx} = -\frac{1}{r^2} \cos(x, r); \\ \frac{d(1/r)}{dy} &= -\frac{1}{r^2} \cos(y, r); \\ \frac{d(1/r)}{dz} &= -\frac{1}{r^2} \cos(z, r), \end{aligned}$$

имеем

$$\frac{d(1/r)}{dn} = \frac{1}{r^2} \left[\begin{aligned} &\cos(x, n) \cos(x, r) + \\ &+ \cos(y, n) \cos(y, r) + \\ &+ \cos(z, n) \cos(z, r) \end{aligned} \right] = \frac{1}{r^2} \cos(r, n). \quad (1.74)$$

С учетом (1.74) формула (1.23) принимает вид

$$W(x, y, z) = f \iint_{\sigma} v \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\sigma. \quad (1.75)$$

Применяя формулу (1.75), получим значения потенциала двойного слоя постоянной плотности для точек, расположенных вне слоя, на слое и внутри слоя.

Если двойной слой имеет постоянную плотность $fv = 1$, то его потенциал

$$W = \iint_{\sigma} \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\sigma. \quad (1.76)$$

Из рис. 1.15 видно, что $d\sigma_0 = d\sigma \cos(r, n)$ – проекция элемента $d\sigma$ на сферу с центром в точке B и радиусом r . С другой стороны, $d\sigma_0 = r^2 d\omega$, где $d\omega$ – элемент телесного угла.

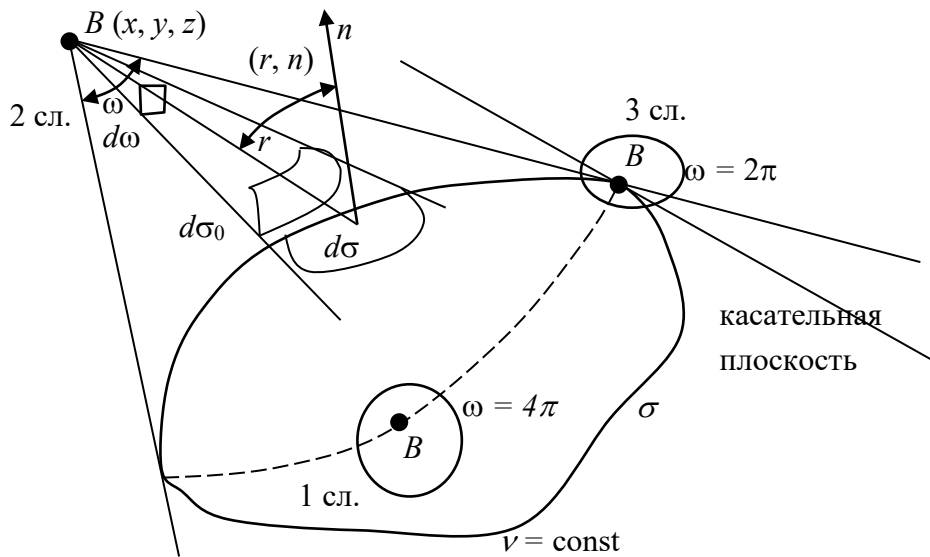


Рис. 1.15. Теорема Гаусса

Из этих соотношений получаем

$$d\omega = \frac{\cos(r, n) d\sigma}{r^2}$$

и (1.76) принимает вид

$$W = - \iint_{\omega} d\omega, \quad (1.77)$$

если считать, что $d\omega$ имеет знак, противоположный знаку $\cos(r, n)$.

Рассмотрим три возможных случая.

Первый случай. Потенциал W_i вычисляется внутри замкнутой поверхности σ_i , точка B внутри σ (см. рис. 1.15). Тогда $\cos(r_1, n)$ будет во всех точках поверхности σ отрицательным, а $a \iint_{\omega} d\omega = 4\pi$. Следовательно,

$$\iint_{\sigma} \frac{\cos(r_1, n)}{r_i^2} d\sigma = -4\pi. \quad (1.78)$$

Второй случай. Потенциал W_e вычисляется вне замкнутой поверхности σ , точка B вне σ (см. рис. 1.15). При этом на той части σ , которая видна из точки B под телесным углом ω , $\cos(r_e, n)$ будет положительным, а на остальной части, которая не видна с точки B , $\cos(r_e, n)$ будет отрицательным. Следовательно,

$$\iint_{\sigma} \frac{\cos(r_e, n)}{r_e^2} d\sigma = 0. \quad (1.79)$$

Третий случай. Потенциал W_0 вычисляется в точках на поверхности σ , точка B на поверхности σ (рис. 1.15), в которой можно провести только одну касательную плоскость, телесный угол $\omega = 2\pi$. Следовательно

$$\iint_{\sigma} \frac{\cos(r_0, n)}{r_0^2} d\sigma = -2\pi. \quad (1.80)$$

Интегралы (1.78), (1.79) и (1.80), равные -4π ; -2π ; 0 называются интегралами Гаусса (1839 г.).

Они подтверждают свойство (1.73) потенциала двойного слоя, а именно:

$$W_e = W_0 + 2\pi = -2\pi + 2\pi = 0;$$

$$W_i = W_0 - 2\pi = -2\pi - 2\pi = -4\pi.$$

1.10. Уровенные поверхности потенциалов притяжения и общие заключения об их свойствах

Вычислим полный дифференциал потенциала $V(x, y, z)$ в произвольном направлении l

$$dV = \frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{dz} dz.$$

Учитывая, что отношения $\frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}$ и $\frac{dz}{dl}$ – направляющие косинусы l , имеем

$$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{dx} \cos(x, l) + \frac{dV}{dy} \cos(y, l) + \frac{dV}{dz} \cos(z, l)$$

и на основании математического определения потенциала притяжения получим

$$\frac{dV}{dl} = |\bar{F}| \left[\cos(\bar{F}, x) \cos(x, l) + \cos(\bar{F}, y) \cos(y, l) + \cos(\bar{F}, z) \cos(z, l) \right] \quad (1.81)$$

$$\frac{dV}{dl} = |\bar{F}| \cos(\bar{F}, dl).$$

Из равенства (1.81) следует ряд важных выводов.

Во-первых, оно показывает, что производная потенциала по произвольному направлению l равна проекции вектора силы притяжения на это направление.

Во-вторых, если элемент dl ортогонален вектору $\bar{F}$, то

$$\begin{aligned}\cos(\bar{F}, dl) &= 0; \\ V(x, y, z) &= \text{const.}\end{aligned}\tag{1.82}$$

Равенство (1.82) определяет семейство уровенных поверхностей потенциала притяжения. Уровенная поверхность во всех точках ортогональна вектору $\bar{F}$. Вследствие однозначности потенциала уровенные поверхности не пересекаются. При разных значениях постоянной получаются различные уровенные поверхности семейства.

В-третьих, если перемещение dL происходит противоположно вектору $\bar{F}$, т. е. в сторону наибольшего убывания потенциала V , то, считая $dt = dh$, $\cos(F, dh) = -1$ и из (1.81) следует

$$dh = -dV / |\bar{F}|.\tag{1.83}$$

Общие заключения о свойствах потенциалов притяжения, которые получены и сформулированы в этом учебном пособии.

1. Все потенциалы характеризуются тем, что производная от потенциала по любому направлению l равна составляющей силы притяжения по этому направлению (1.81):

$$\frac{dV}{dl} = |\bar{F}| \cos(\bar{F}, dl).$$

2. Потенциалы сил притяжения

$$\text{простого слоя (1.21) } V^{\delta} = f \iint_{\sigma} \frac{\mu}{r} d\sigma$$

$$\text{и объемных масс (1.17) } V^{\tau} = f \iiint_{\tau} \frac{\delta}{r} d\tau -$$

функции, ограниченные и непрерывные во всем пространстве.

Потенциал точечной массы $V = f(\mu / r)$ теряет непрерывность и ограниченность при $r = 0$, т. е. в той точке, где сосредоточена притягивающая масса.

Потенциал двойного слоя на слое терпит разрыв.

На слое следует различать два предельных: внешнее W_e , внутреннее W_i и одно прямое W_0 значения потенциала двойного слоя. Связь между этими значениями устанавливается формулами (1.73):

$$\begin{aligned} W_e &= W_0 + 2f\pi\nu; \\ W_i &= W_0 - 2f\pi\nu. \end{aligned}$$

3. Все потенциалы притяжения вне притягивающих масс имеют непрерывные производные любого порядка n , т. е. вне масс потенциалы являются аналитическими функциями (могут быть представлены степенными рядами).

4. Вне масс все потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа (1.54)

$$\Delta V_e = \frac{d^2 V_e}{dx^2} + \frac{d^2 V_e}{dy^2} + \frac{d^2 V_e}{dz^2} = 0.$$

5. Все потенциалы притяжения на бесконечности – функции регулярные, удовлетворяют условиям (1.55):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0; \lim_{r \rightarrow \infty} rV = fM; \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \left| \frac{dV}{dr} \right| = fM.$$

6. Первые производные потенциала объемных масс (1.47)

$$\frac{dV^\tau}{dl} = -f \iiint_{\tau} \delta \frac{\cos(r, l)}{r^2} d\tau -$$

функции непрерывные во всем пространстве.

7. Вторые производные потенциала объемных масс (1.50)

$$\frac{d^2 V^\tau}{dx^2} = f \iiint_{\tau \rightarrow 0} \delta \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5} \right] d\tau - \frac{4}{3} f \pi \delta$$

теряют непрерывность там, где плотность изменяется скачком.

8. Внутри тела потенциал объемных масс удовлетворяет уравнению Пуассона (1.53)

$$\Delta V_i^\tau = \frac{d^2 V_i^\tau}{dx^2} + \frac{d^2 V_i^\tau}{dy^2} + \frac{d^2 V_i^\tau}{dz^2} = -4f\pi\delta.$$

9. Первые производные потенциала простого слоя терпят разрыв при пересечении слоя. На слое следует различать два значения предельных первых производных:

$$\text{внешнее } \frac{dV_e}{dl}; \text{ внутреннее } \frac{dV_i}{dl}; \text{ и одно прямое } \frac{dV_0}{dl};$$

значение производной, связь между этими производными устанавливается формулами Племели (1.64)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_e^\tau}{dl} &= \frac{dV_0^\tau}{dl} - 2f\pi\mu \cos(l, n) \\ \frac{dV_i^\tau}{dl} &= \frac{dV_0^\tau}{dl} + 2f\pi\mu \cos(l, n) \end{aligned} \right\}.$$

10. Из свойств 2, 7, 9 следует, что потенциалы не могут быть представлены во всем пространстве одной аналитической функцией. Аналитическими функциями потенциалы являются только вне масс.

11. Уровенные поверхности потенциалов определяются уравнениями (1.82)

$$V(x, y, z) = \text{const}.$$

12. Расстояние между близкими уровенными поверхностями определяется формулой (1.83)

$$dh = -\frac{dV}{|\bar{F}|}.$$

2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

2.1. Понятие о прямой и обратной задачах теории потенциала

Прямая задача – определение потенциала по заданному распределению масс – в общем виде может быть сформулирована так: определить функцию $\vartheta(x, y, z)$, регулярную на бесконечности так, чтобы удовлетворялось уравнение $\Delta\vartheta = F(x, y, z)$, где

$$\Delta\vartheta = \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \frac{d^2\vartheta}{dy^2} + \frac{d^2\vartheta}{dz^2} - \text{оператор Лапласа,}$$

а $F(x, y, z)$ – известная функция координат.

Вспомнив, что потенциал объемных масс $V^\tau = f \iiint_\tau \frac{\delta}{r} d\delta$ (1.17)

удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta V^\tau = -4\pi f \delta(x, y, z)$ (1.53)

и, положив $F(x, y, z) = -4\pi f \delta(x, y, z)$, имеем, что определяемая функция

$$\vartheta = -\frac{1}{4\pi} \iiint_\tau \frac{F(x, y, z)}{r} d\tau, \text{ где } \tau - \text{область, вне которой } F(x, y, z) \text{ везде равна}$$

нулю, т. е. область, занятая телом.

Обратная задача – определение плотности тела по заданному во всем пространстве или только внутри тела потенциалу – может быть решена с помощью уравнения Пуассона $\Delta V = -4\pi \delta(x, y, z)$ (1.53).

Действительно, если потенциал V известен, то оператор Лапласа ΔV можно вычислить в любой точке внутри тела, и тем самым плотность тела в этой точке будет определена.

Если известен потенциал только вне притягивающих масс, то однозначно определить плотность внутри тела нельзя, так как можно найти

множество различных распределений плотности внутри тела, соответствующих одинаковому внешнему потенциалу (например, потенциал однородного простого слоя и потенциал шара во внешней точке при равенстве масс шара и слоя).

В физической геодезии при изучении фигуры Земли решение ряда задач состоит в определении внешнего потенциала и его производных. Так возникла проблема определения внешнего потенциала без знания распределения плотностей внутри тела. Для решения этой проблемы необходимо знать форму этого тела, т. е. знать область, в которой потенциал V удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta V = 0$. Решение этого уравнения содержит много параметров, связанных с распределением плотности тела. Для их определения необходимо иметь дополнительные условия. Их задают в виде требования к искомой функции или ее производным на границе области существования (на поверхности тела) и называют их граничными, или краевыми условиями.

Таким образом, потенциал вне тела определяется по граничным условиям на поверхности тела потому, что известно дифференциальное уравнение Лапласа, которому он удовлетворяет. В зависимости от выбора граничных условий различают три краевые задачи теории потенциала: Дирихле, Неймана и смешанная.

2.2. Формула Остроградского

Изучение свойств функций, удовлетворяющих уравнениям Лапласа или Пуассона, основано на формуле Остроградского и формулах Грина. Получим формулу Остроградского (1828–1831).

Пусть в области τ_i , ограниченной поверхностью σ , дана функция $P(x, y, z)$, непрерывная вместе с ее первыми производными (рис. 2.1).

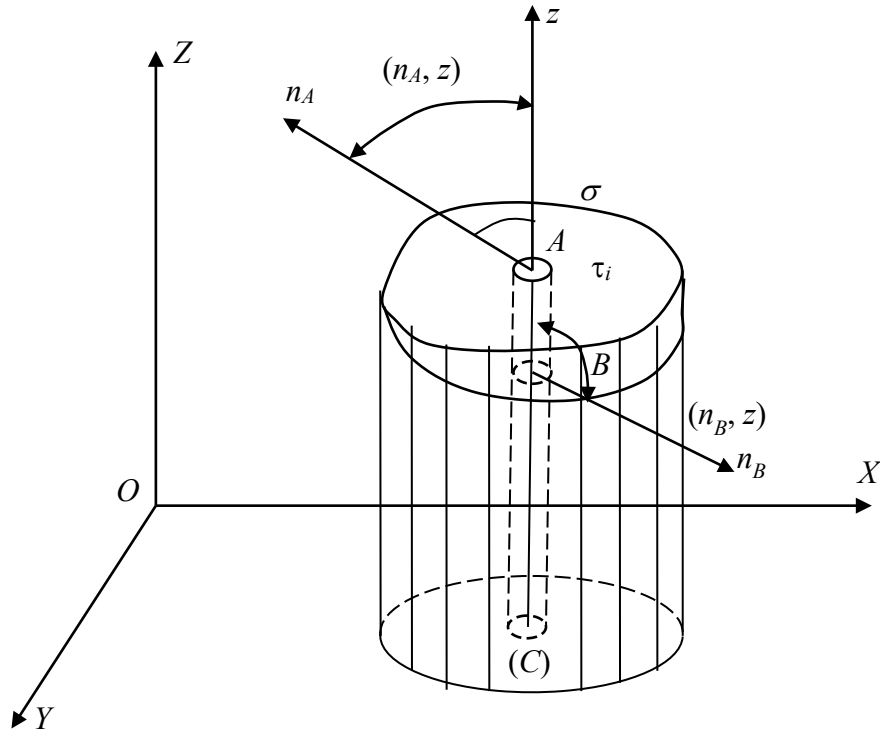


Рис. 2.1. Объемное тело

Спроектируем область на плоскость XOY и представим интеграл

$$\iiint_{(C)} \frac{dP}{dz} dx dy dz = \iint_{(C)} [P(x, y, z_A) - P(x, y, z_B)] dx dy, \quad (2.1)$$

выполнив интегрирование по координате Z . В (2.1) через z_A и z_B обозначены аппликаты противоположных элементов поверхности σ . Интегрирование в правой части (2.1) выполняется по плоской области (c) , элемент которой $dx dy$ равен проекциям элементов поверхности σ в точках A и B на плоскости XOY :

$$d\sigma_A \cos(n_A, z) = dx dy;$$

$$d\sigma_B \cos(n_B, z) = -dx dy, \quad (2.2)$$

где (n_A, z) – угол между внешней нормалью к поверхности σ в точке A и осью Z (он всегда острый), а (n_B, z) для точки B – всегда тупой. С учетом равенств (2.2) интеграл (2.1) примет вид

$$\iiint_{\tau_i} \frac{dP}{dz} dx dy dz = \iint_{\sigma} P(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma, \quad (2.3)$$

где интегрирование ведется по всей поверхности σ , ограничивающей область τ_i .

Если в той же области τ_i даны еще две функции $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, имеющие непрерывные первые производные, то, поступая по аналогии, т. е., проектируя область с функцией $Q(x, y, z)$ на плоскость ZOX , а с функцией $R(x, y, z)$ на плоскость ZOY , получим:

$$\iiint_{\tau_i} \frac{dQ}{dy} dx dy dz = \iint_{\sigma} Q(x, y, z) \cos(n, y) d\sigma, \quad (2.3)$$

$$\iiint_{\tau_i} \frac{dR}{dx} dx dy dz = \iint_{\sigma} R(x, y, z) \cos(n, x) d\sigma. \quad (2.3)$$

Складывая три формулы (2.3) и сокращая запись, запоминая, что R, Q, P являются функциями координат X, Y, Z , получим формулу М. В. Остроградского в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau_i} \left(\frac{dR}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dP}{dz} \right) d\tau = \\ & = \iint_{\sigma} [R \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + P \cos(n, z)] d\sigma. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.3. Формулы Грина для функций u_i и ϑ_i , заданных внутри области τ_i

Для вывода формул Грина введем новые функции u_i и ϑ_i , имеющие ограниченные вторые производные в области τ_i и связанные с функциями R, Q, P равенствами:

$$P = u_i \frac{d\vartheta_i}{dz}; Q = u_i \frac{d\vartheta_i}{dy}; R = u_i \frac{d\vartheta_i}{dx}. \quad (2.5)$$

Дифференцируя равенства (2.5) по X, Y, Z соответственно, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{dx} &= u_i \frac{d^2\vartheta_i}{dx^2} + \frac{du_i}{dx} \frac{d\vartheta_i}{dx} \\ \frac{dQ}{dy} &= u_i \frac{d^2\vartheta_i}{dy^2} + \frac{du_i}{dy} \frac{d\vartheta_i}{dy} \\ \frac{dP}{dz} &= u_i \frac{d^2\vartheta_i}{dz^2} + \frac{du_i}{dz} \frac{d\vartheta_i}{dz} \end{aligned} \right\}. \quad (2.6)$$

Введя дифференциальные операторы

$$\Delta\vartheta_i = \frac{d^2\vartheta_i}{dx^2} + \frac{d^2\vartheta_i}{dy^2} + \frac{d^2\vartheta_i}{dz^2}, \quad (2.7)$$

$$D(u_i, \vartheta_i) = \frac{du_i}{dx} \frac{d\vartheta_i}{dx} + \frac{du_i}{dy} \frac{d\vartheta_i}{dy} + \frac{du_i}{dz} \frac{d\vartheta_i}{dz},$$

и суммируя равенства (2.6), получим

$$\frac{dR}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dP}{dz} = u_i \Delta\vartheta_i + D(u_i, \vartheta_i). \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в левую часть формулы Остроградского (2.4) и заменяя функции R, Q, P в правой части через u_i и ϑ_i , получим:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau_i} [u_i \Delta\vartheta_i + D(u_i, \vartheta_i)] d\tau = \\ &= \iint_{\sigma} \left[\frac{d\vartheta_i}{dx} \cos(n, x) + \frac{d\vartheta_i}{dy} \cos(n, y) + \frac{d\vartheta_i}{dz} \cos(n, z) \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Учитывая, что

$$\frac{d\vartheta_i}{dx} = \frac{d\vartheta_i}{dn} \cos(n, x); \quad \frac{d\vartheta_i}{dy} = \frac{d\vartheta_i}{dn} \cos(n, y); \quad \frac{d\vartheta_i}{dz} = \frac{d\vartheta_i}{dn} \cos(n, z)$$

и

$$\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z) = 1, \quad (2.10)$$

получим первую формулу Грина

$$\iiint_{\tau_i} [u_i \Delta \vartheta_i + D(u_i, \vartheta_i)] d\tau = \iint_{\sigma} u_i \frac{d\vartheta_i}{dn} d\sigma, \quad (2.11)$$

которую можно записать в виде интегрирования по частям:

$$\iiint_{\tau_i} u_i \Delta \vartheta_i d\tau = \iint_{\sigma} u_i \frac{d\vartheta_i}{dn} d\sigma - \iint_{\tau_i} D(u_i, \vartheta_i) d\tau. \quad (2.12)$$

Меняя u_i и ϑ_i местами, получим:

$$\iiint_{\tau_i} \vartheta_i \Delta u_i d\tau = \iint_{\sigma} \vartheta_i \frac{du_i}{dn} d\sigma - \iint_{\tau_i} D(\vartheta_i, u_i) d\tau. \quad (2.13)$$

Вычитая из (2.12) формулу (2.13), получим вторую формулу Грина

$$\iiint_{\tau_i} (u_i \Delta \vartheta_i - \vartheta_i \Delta u_i) d\tau = \iint_{\sigma} \left(u_i \frac{d\vartheta_i}{dn} - \vartheta_i \frac{du_i}{dn} \right) d\sigma. \quad (2.14)$$

В формулах Грина (2.11) и (2.14) u_i и ϑ_i — функции трех переменных, имеющие ограниченные вторые производные в конечной области τ_i ; σ — поверхность, ограничивающая область τ_i ; n — внешняя нормаль к поверхности σ .

2.4. Формулы Грина для функций u_e и ϑ_e , заданных вне поверхности σ

Получим формулы Грина для функций u_e и ϑ_e , однозначных вне поверхности σ и имеющих ограниченные вторые производные вне этой поверхности. В этом случае функции u_e и ϑ_e должны быть на бесконечности регулярны, удовлетворяя условиям регулярности:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u_e = 0; \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho u_e = c_1; \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 \frac{du_e}{d\rho} = c_2;$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \vartheta_e = 0; \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \vartheta_e = c_3; \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 \frac{d\vartheta_e}{d\rho} = c_4,$$

где ρ – расстояние от точки на поверхности σ или внутри нее до точки, где вычисляется функция u_e или ϑ_e .

Для получения формул Грина зададим функции u_e и ϑ_e в конечной области τ_e , ограниченной двумя поверхностями: поверхностью σ и поверхностью сферы Σ радиуса ρ (рис. 2.2).

Применим первую формулу Грина (2.11) к такой двухсвязной области:

$$\iiint_{\tau_e} u_e \Delta \vartheta_e d\tau + \iiint_{\tau_e} D(u_e, \vartheta_e) d\tau = \iint_{\sigma} u_e \frac{d\vartheta_e}{dn} d\sigma + \iint_{\Sigma} u_e \frac{d\vartheta_e}{dn} d\Sigma. \quad (2.15)$$

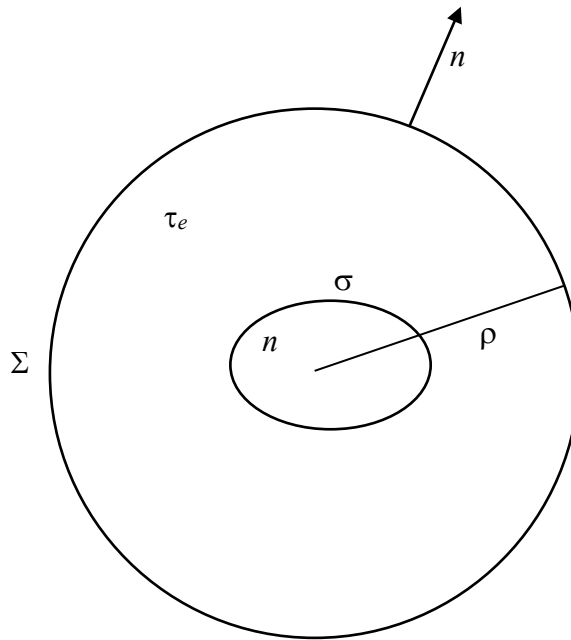


Рис. 2.2. Внешняя поверхность

Интеграл по поверхности, ограничивающей область τ_e , представлен суммой двух интегралов: по поверхности σ и по поверхности сферы Σ . Направление нормалей осталось прежнее – внешнее относительно области τ_e . Определим значение второго интеграла правой части, когда радиус ρ сферы Σ неограниченно возрастает. Так как элемент поверхности сферы $d\Sigma = \rho^2 d\omega$, то подинтегральное выражение

$$u_e \frac{d\vartheta_e}{dn} d\Sigma = u_e \rho^2 \frac{d\vartheta_e}{dn} d\omega.$$

На основании свойств регулярности на бесконечности $\rho^2 \frac{d\vartheta_e}{d\rho}$ будет иметь конечный предел при $\rho \rightarrow \infty$ и $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sigma = 0$, первая формула Грина примет вид

$$\iiint_{\tau_e} u_e \Delta \vartheta_e d\tau + \iiint_{\tau_e} D(u_e, \vartheta_e) d\tau = - \iint_{\sigma} u_e \frac{d\vartheta_e}{dn} d\sigma. \quad (2.16)$$

Знак минус появился в правой части потому, что внешняя нормаль n к поверхности σ теперь является внутренней относительно τ_e .

Меняя местами u_e и ϑ_e и вычитая почленно из (2.16), получим вторую формулу Грина

$$\iiint_{\tau_e} (u_e \Delta \vartheta_e - \vartheta_e \Delta u_e) d\tau = - \iint_{\sigma} \left(u_e \frac{d\vartheta_e}{dn} - \vartheta_e \frac{du_e}{dn} \right) d\sigma. \quad (2.17)$$

Формулы (2.16) и (2.17) не отличаются формально от формул (2.11) и (2.14), так как различие в знаках обусловлено переменной направления нормали относительно области. Существенным в формулах (2.16) и (2.17) является то, что функции u_e и ϑ_e должны быть регулярными на бесконечности.

2.5. Формулы Грина для гармонических функций. Стоксовы постоянные

Если во вторых формулах Грина (2.14) и (2.17) функции u_i , ϑ_i и u_e , ϑ_e гармонические, то оператора Лапласа от этих функций $\Delta u_i = \Delta \vartheta_i = \Delta u_e = \Delta \vartheta_e = 0$, и формулы принимают вид

$$\iint_{\sigma} \left(u \frac{d\vartheta}{dn} - \vartheta \frac{du}{dn} \right) d\sigma = 0. \quad (2.18)$$

Если область τ_i конечная, то одну из функций u_i и ϑ_i можно положить равной постоянной величине и формула (2.18) примет вид

$$\iint_{\sigma} \frac{d\vartheta_i}{dn} d\sigma = 0. \quad (2.19)$$

Этому условию удовлетворяют гармонические функции u_i и ϑ_i , одна из которых может быть принята равной постоянной величине внутри области τ_e . Если область, где гармонические функции u_e и ϑ_e занимают все пространство вне поверхности σ , то ни одну из этих функций нельзя положить постоянной, так как в этом случае при $\rho \rightarrow \infty$ нарушаются условия их регулярности на бесконечности, которым они должны удовлетворять.

Рассмотрим еще один частный случай применения второй формулы Грина (2.14). Пусть ограниченную область τ занимают массы плотностью δ ; потенциал тяготения, создаваемый этими массами, обозначим V . Кроме того, введем в рассмотрение произвольную гармоническую в τ функцию u . В этом случае на основании второй формулы Грина (2.14), так как $\Delta u = 0$, имеем

$$\iiint_{\tau} u \Delta V d\tau = \iint_{\sigma} \left(u \frac{dV}{dn} - V \frac{du}{dn} \right) d\sigma. \quad (2.20)$$

Учитывая, что потенциал тяготения объемных масс удовлетворяет внутри притягивающих масс уравнению Пуассона $\Delta V = -4\pi\delta$, формула (2.20) принимает вид

$$-4f\pi \iiint_{\tau} \delta u d\tau = \iint_{\sigma} \left(u \frac{dV}{dn} - V \frac{du}{dn} \right) d\sigma. \quad (2.21)$$

Из формулы (2.21) следует: если на поверхности σ тела известны потенциал тяготения V и его нормальная производная $\frac{dV}{dn}$, то можно определить интегралы вида $\iiint_{\tau} \delta u d\tau$ как так называемые стоксовы постоянные, где δ – плотность масс, а u – произвольная гармоническая функция внутри σ . Рассмотрим физическую сущность некоторых стоксовых постоянных. Пусть в (2.21) $u = 1$, тогда имеем

$$-4f\pi \iiint_{\tau} \delta d\tau = \iint_{\sigma} \frac{dV}{dn} d\sigma \quad \text{или} \quad -4fM\pi = \iint_{\sigma} \frac{dV}{dn} d\sigma. \quad (2.22)$$

Формула (2.22) называется формулой Гаусса. Она позволяет определить массу M тела, если известна поверхность σ и значение нормальной производной потенциала тяготения $\frac{dV}{dn}$ на ней.

Полагая в (2.21) последовательно $u = a$, $u = b$, $u = c$, где a , b , c – координаты текущей точки внутри поверхности σ , получим интегралы вида

$$-4f\pi \iiint_{\tau} \delta a d\tau = \iint_{\sigma} a \frac{dV}{dn} d\sigma. \quad (2.23)$$

Применяя к правой части теорему о среднем и учитывая формулу

Гаусса, имеем $-4f\pi \iiint_{\tau} \delta a d\tau = -a_0 4fM\pi$; отсюда получаем $a_0 = \frac{\iiint_{\tau} \delta a d\tau}{M}$

$$\text{и по аналогии } b_0 = \frac{\iiint_{\tau} \delta b d\tau}{M}, \quad c_0 = \frac{\iiint_{\tau} \delta c d\tau}{M}. \quad (2.24)$$

Формулы (2.24) определяют координаты центра тяжести тела.

Полагая в (2.21) последовательно $u = bc$, $u = ac$, $u = ab$, получим интегралы вида $\iiint_{\tau} \delta bcd\tau$, $\iiint_{\tau} \delta acd\tau$ и $\iiint_{\tau} \delta abd\tau$, определяющие центробежные моменты инерции тела.

Таким образом, масса тела, координаты центра тяжести тела и моменты инерции тела различных порядков являются стоксовыми постоянными. Они определяются уравнением (2.21), если известна поверхность тела, значение потенциала тяготения и его нормальной производной на этой поверхности. Одна из основных задач современной физической геодезии состоит в определении стоксовых постоянных Земли и планет. Определение стоксовых постоянных аномальных тел внутри Земли составляет основную задачу гравитационной разведки.

2.6. Фундаментальная формула Грина

В формуле (2.21) будем считать $u_i = 1/r$. На рис. 2.3 расстояние от текущей точки $A(a, b, c)$ до фиксированной точки $B(x, y, z)$, расположенной вне тела τ , обозначим r .

Тогда выражение $u_i = 1/r$, рассматриваемое как функция координат (a, b, c) , будет гармонической внутри тела τ , так как

$$\Delta u_i = \Delta(1/r) = 0.$$

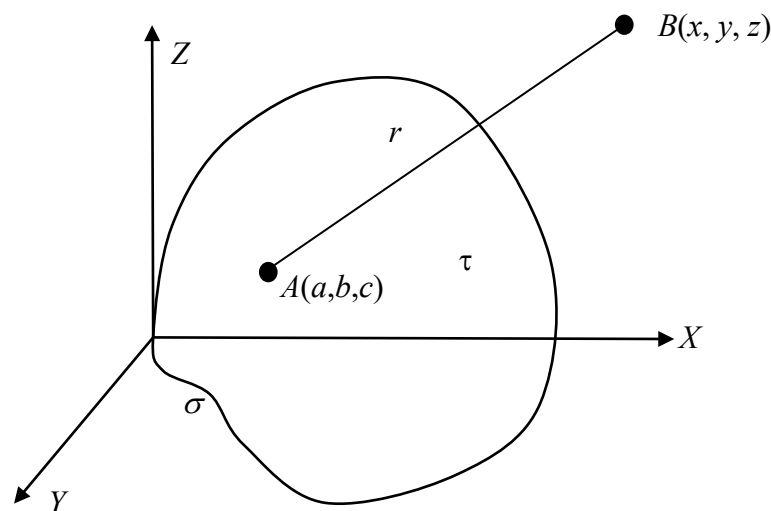


Рис. 2.3. Расположение точки вне тела

Поэтому формула (2.21) примет вид

$$-4f\pi\iiint_{\tau}\frac{\delta}{r}d\tau=\iint_{\sigma}\frac{dV}{dn}\frac{1}{r}d\sigma-\iint_{\sigma}V\frac{d(1/r)}{dn}d\sigma.$$

Так как выражение $f\iiint_{\tau}\delta\frac{d\tau}{r}$ есть потенциал тела V_e во внешней точке с координатами x, y, z , то получим

$$-4\pi V_e(x, y, z)=\iint_{\sigma}\frac{dV}{dn}\frac{1}{r}d\sigma-\iint_{\sigma}V\frac{d(1/r)}{dn}d\sigma. \quad (2.25)$$

Формулу (2.25) называют фундаментальной формулой Грина, или теоремой Грина. Она показывает, во-первых, что потенциал тяготения вне тела может быть определен, если известны его значения и значения его нормальной производной на поверхности тела σ ; во-вторых, что потенциал объемных масс вне тела может быть представлен суммой двух потенциалов: потенциала простого слоя с плотностью $\mu = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}$ и потенциала

двойного слоя с плотностью $\nu = \frac{1}{4\pi}V$, распределенных по поверхности σ тела. Она позволяет вычислить потенциал объемных масс и на самой поверхности σ . Только при переходе на поверхность σ необходимо учесть разрыв потенциала двойного слоя по формулам (1.73) $W_e = W_0 + 2f\pi\nu$ и $W_i = W_0 - 2f\pi\nu$.

Для нашего случая имеем:

$$\left(\iint_{\sigma}V\frac{d(1/r)}{dn}d\sigma\right)_e=\left(\iint_{\sigma}V\frac{d(1/r)}{dn}d\sigma\right)_0+2\pi V,$$

и фундаментальная формула Грина примет вид

$$-2\pi V=\iint_{\sigma}\left[\frac{dV}{dn}\frac{1}{r}-V\frac{d(1/r)}{dn}\right]d\sigma. \quad (2.26)$$

Используя свойства потенциала двойного слоя с постоянной плотностью (интегралы Гаусса (1.78), (1.79), (1.80)), М. С. Молоденский представил фундаментальную формулу Грина в следующем виде:

$$-4\pi V = \iint_{\sigma} \left[\frac{dV}{dn} \frac{1}{r} - (V - V_0) \frac{d(1/r)}{dn} \right] d\sigma, \quad (2.27)$$

где V_0 – постоянная, равная значению V в избранной точке поверхности σ . Если точка, в которой вычисляется потенциал V , находится вне поверхности σ , то согласно интегралам Гаусса $V_0 \iint_{\sigma} \frac{d(1/r)}{dn} d\sigma = 0$ (1.79), формула (2.27) совпадает с (2.25).

2.7. Краевые задачи теории потенциала и их решение с помощью функций Грина

В теории потенциала для его определения решаются три краевые задачи: первая краевая задача – задача Дирихле, вторая краевая задача – задача Неймана и третья краевая задача, или смешанная.

Эти задачи отличаются граничными условиями, задаваемыми на краевой поверхности σ , ограничивающей область распределения масс, развивающих потенциал тяготения. В задаче Дирихле в качестве граничного условия на поверхности должно быть задано (известно) значение самого потенциала V_{σ} . В задаче Неймана в качестве граничного условия на краевой поверхности должно быть задано (известно) значение нормальной производной потенциала $\left(\frac{dV}{dn} \right)_{\sigma}$.

В смешанной задаче в качестве граничного условия на краевой поверхности должна быть известна линейная комбинация значений потенциала и его нормальной производной $\left(\alpha V + \frac{dV}{dn} \right)_{\sigma}$.

Решение этих краевых задач осуществляется тремя методами: методом, основанным на применении специальных функций – функций Грина;

методом, основанным на применении шаровых (или сферических) функций и методом составления и решения интегральных уравнений. В зависимости от того, где требуется определить значение потенциала: внутри или вне краевой поверхности, на которой заданы граничные условия, различают соответствующие внешние или внутренние краевые задачи теории потенциала.

Ниже мы рассмотрим все три метода решения краевых задач теории потенциала, получим и приведем необходимые формулы. В этом разделе получим интегральные формулы, решающие три краевые задачи теории потенциала с помощью применения функций Грина.

Для этого применим вторую формулу Грина (2.17) ко всему пространству, окружающему тело τ (см. рис. 2.3). Пусть V – потенциал тела во внешнем пространстве, а u_e – произвольная гармоническая функция вне тела, регулярная на бесконечности. Тогда, учитывая, что вне тела $\Delta u = \Delta V = 0$, функция (2.17) принимает вид (2.18) для гармонических функций. Затем, вычитая из (2.18) фундаментальную формулу Грина (2.22), получим

$$4\pi V = - \iint_{\sigma} \left[\frac{dV}{dn} \left(u + \frac{1}{r} \right) - V \frac{d}{dn} \left(u + \frac{1}{r} \right) \right] d\sigma. \quad (2.28)$$

Формула (2.28) является общей, позволяющей при определенных условиях построения функций Грина $(u + 1/r)$ получить интегральные формулы, решающие первую, вторую и третью краевые задачи теории потенциала.

Для получения формулы, решающей первую краевую задачу, потребуем, чтобы произвольная гармоническая функция $u = 1/r$ располагалась на поверхности σ и обозначим функцию $u + 1/r = G$. Эту функцию называют функцией Грина для задачи Дирихле. Она должна равняться нулю на поверхности σ . Функция Грина G должна быть определена вне тела.

Следовательно, в этом случае слагаемое $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$ уже не будет связано с координатами

точки тела. Переменные координаты a, b, c относятся к точкам, находящимся вне тела или на его поверхности. Координаты x, y, z точки, в которой вычисляется потенциал V , рассматриваются как постоянные. Функция u выбрана так, что только на поверхности σ тела она равняется $1/r$. Вне поверхности тела u не будет равняться $1/r$, так как u должна быть гармонической всюду вне тела, а $1/r$ теряет это свойство в точке, в которой $a = x, b = y, c = z$. Таким образом, функция Грина для задачи Дирихле G обращается в нуль на поверхности тела, на бесконечности – регулярна, вне тела – гармоническая всюду, кроме одной точки ($a = x, b = y, c = z$).

Подставив выбранную таким образом функцию Грина G в формулу (2.25), получим

$$4\pi V(x, y, z) = - \iint_{\sigma} V \frac{dG}{dn} d\sigma. \quad (2.29)$$

Формула (2.29) решает первую краевую задачу – задачу Дирихле. Она показывает, что потенциал $V(x, y, z)$ вне тела может быть определен, если его значения заданы (известны) только на поверхности тела. Для практического применения формулы (2.29) необходимо найти функцию Грина для задачи Дирихле.

Для получения формулы, решающей вторую краевую задачу, потребуем, чтобы в (2.28) функция $(u + 1/r) = H$ – функция Грина для задачи Неймана – на поверхности σ тела подчинялась требованию $\left(\frac{dH}{dn} \right)_{\sigma} = 0$.

Значение нормальной производной от функции H на поверхности σ должно равняться нулю. Подставив выбранную таким образом функцию Грина H в формулу (2.25), получим

$$4\pi V(x, y, z) = \iint_{\sigma} \frac{dV}{dn} H d\sigma. \quad (2.30)$$

Формула (2.30) решает вторую краевую задачу – задачу Неймана. Она показывает, что потенциал $V(x, y, z)$ вне (или внутри) тела может быть определен, если на поверхности тела заданы (известны) значения нор-

мальной производной потенциала $\frac{dV}{dn}$ и построена (определена) H – функция Грина для задачи Неймана.

В физической геодезии и теории фигуры Земли большое значение имеет третья (смешанная) краевая задача теории потенциала. В этом случае на поверхности σ тела в качестве граничного условия должна быть задана (известна) функция

$$f = \alpha V + \frac{dV}{dn},$$

где α – известный коэффициент.

Для получения формулы, решающей третью (смешанную) краевую задачу, потребуем в (2.28), чтобы функция $(u + 1/r) = S$ на поверхности σ подчинялась условию $\alpha S + \frac{dS}{dn} = 0$. Подставив выбранную таким образом функцию S Грина для смешанной краевой задачи в формулу (2.28), получим

$$4\pi V(x, y, z) = \iint_{\sigma} \left(\frac{dV}{dn} S - V \frac{dS}{dn} \right) d\sigma.$$

С учетом поставленного условия для функции S подинтегральная функция преобразуется $\frac{dV}{dn} S - V \frac{dS}{dn} = \frac{dV}{dn} S + \alpha VS = fS$, и получим

$$4\pi V(x, y, z) = \iint_{\sigma} fS d\sigma. \quad (2.31)$$

Формула (2.31) решает третью (смешанную) краевую задачу. Она показывает, что потенциал $V(x, y, z)$ вне тела может быть определен, если на поверхности σ тела заданы (известны) значения функции f , т. е. линейная комбинация значений самого потенциала и его нормальной производной, а также построена (определена) функция S Грина для смешанной задачи. Функция S определена для поверхности сферы. Ее значение на сфере по-

сит название функции Венинг-Мейнеса, а если точка, в которой определяется потенциал $V(x, y, z)$, тоже находится на сфере, то функцию S называют функцией Стокса. Все сказанное выше о свойствах функции G Грина для задачи Дирихле остается в силе и для функции Грина H и S . Для решения краевых задач (Дирихле, Неймана или смешанных) фактически необходимо знать не сами функции Грина, а только те значения, которые они принимают на поверхности σ тела.

Подинтегральные функции в формулах (2.29), (2.30) и (2.28) состоят из двух множителей. Первый из них $\left(V, \frac{dV}{dn} \text{ или } \alpha V + \frac{dV}{dn} \right)$ непосредственно должен быть задан в виде краевого условия на поверхности σ тела, он зависит только от переменных интегрирования, т. е. координат a, b, c .

Второй множитель $\left(\frac{dG}{dn}, H \text{ или } S \right)$ в условиях задач непосредственно не дан. Он зависит от типа решаемой задачи (Дирихле, Неймана или смешанной) и от поверхности σ . Функции Грина найдены только для наиболее простых поверхностей. Это обстоятельство сильно ограничивает практическое применение метода Грина для решения краевых задач теории потенциала. Формально отличие первого множителя от второго состоит в том, что функции Грина зависят от переменных a, b, c и от параметров x, y, z , а краевое условие зависит только от a, b, c .

Если считать, что точка A имеет координаты x, y, z , а текущая точка M поверхности σ имеет координаты a, b, c , то формулы (2.29), (2.30) и (2.31) можно представить символически в виде

$$V(A) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(M) F(AM) d\sigma, \quad (2.32)$$

где $f(M)$ – данная в краевом условии функция $\left(V, \frac{dV}{dn}, \alpha V + \frac{dV}{dn} \right)$;

$F(AM)$ – функция Грина для соответствующей краевой задачи $\left(\frac{dG}{dn}, H, S \right)$;

$V(A)$ – искомая гармоническая вне σ функция, регулярная на бесконечности (потенциал тяготения).

Интегралы типа (2.32) встречаются в теории интегральных уравнений. Функция $F(A, M)$ называется ядром, а $f(M)$ – обкладкой.

2.8. Задача Дирихле для сферы и бесконечной плоскости. Интеграл Пуассона

Внешняя задача Дирихле для сферы в общем случае формулируется так: пусть на сфере σ радиуса R (рис. 2.4) известна функция $f(\vartheta, \lambda)$ полярного расстояния ϑ и долготы λ .

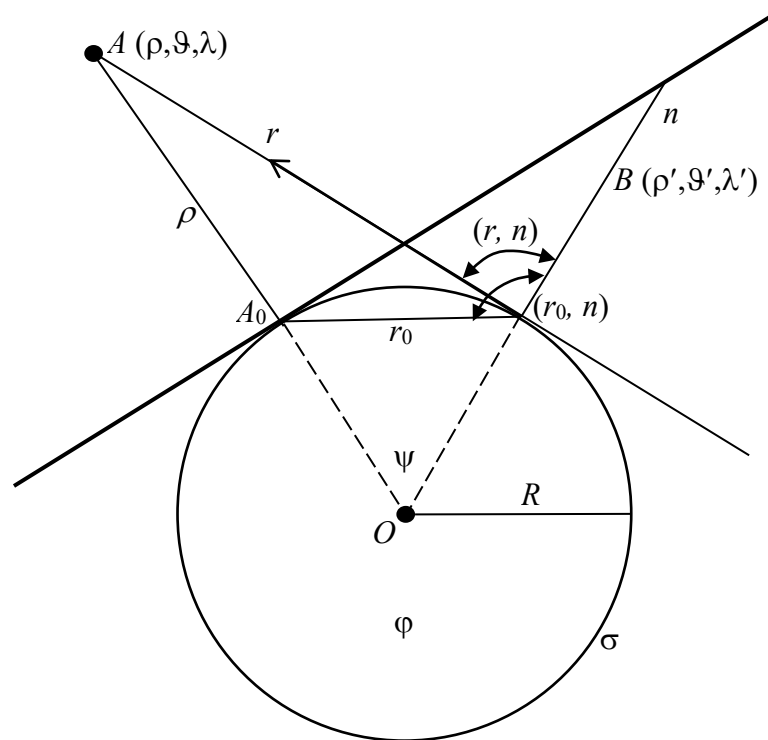


Рис. 2.4. Внешняя задача Дирихле

Требуется найти вне σ такую функцию $V_e(\rho, \vartheta, \lambda)$, чтобы она была гармонической $\Delta V_e = 0$, регулярной на бесконечности $\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_e = 0$ и на поверхности сферы совпадала с граничным условием

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_e = f(\vartheta, \lambda).$$

Определяемую функцию $V_e(\rho, \vartheta, \lambda)$ на основании фундаментальной формулы Грина (2.25) можно представить как сумму потенциалов простого и двойного слоев, распределенных на поверхности σ сферы:

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \iint_{\sigma} \frac{\mu}{r} d\sigma + \iint_{\sigma} \frac{\nu \cos(r, R)}{r^2} d\sigma, \quad (2.33)$$

так как каждый из потенциалов удовлетворяет уравнение Лапласа $\Delta V = 0$ и регулярен на бесконечности. Необходимо определить плотности простого μ и двойного ν слоев из предельного условия

$$\lim_{\rho \rightarrow R} V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = f(\vartheta, \lambda).$$

При этом будем иметь в виду, что потенциал простого слоя – функция непрерывная, а потенциал двойного слоя терпит на слое разрыв $W_e = W_0 + 2f\pi\nu$ и $W_i = W_0 - 2f\pi\nu$; (1.23), поэтому

$$\lim_{\rho \rightarrow R} V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \iint_{\sigma} \frac{\mu}{r_0} d\sigma + \iint_{\sigma} \frac{\nu \cos(r_0, R)}{r_0^2} d\sigma + 2\pi\nu(\vartheta, \lambda) = f(\vartheta, \lambda). \quad (2.34)$$

Если учесть, что угол между хордой r_0 и R в текущей точке B больше $\pi/2$ и $\cos(r_0, R) = -r_0/2R$, то прямое значение потенциала двойного слоя можно представить в виде

$$\iint_{\sigma} \frac{\nu \cos(r_0, R)}{r_0^2} d\sigma = -\iint_{\sigma} \frac{\nu}{2Rr_0} d\sigma,$$

и (2.34) примет вид

$$\lim_{\rho \rightarrow R} V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \iint_{\sigma} \left[\mu - \frac{\nu}{2R} \right] \frac{1}{r_0} d\sigma + 2\pi\nu(\vartheta, \lambda) = f(\vartheta, \lambda). \quad (2.35)$$

Теперь выберем произвольные плотности μ и ν так, чтобы интегральный член в квадратных скобках в (2.35) обращался в нуль, т. е., чтобы $\mu(\vartheta, \lambda) - \frac{\nu(\vartheta, \lambda)}{2R} = 0$, тогда $\lim_{\rho \rightarrow R} V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = 2\pi\nu(\vartheta, \lambda) = f(\vartheta, \lambda)$.

Отсюда находим, что $\nu(\vartheta, \lambda) = \frac{1}{2\pi} f(\vartheta, \lambda)$ и $\mu(\vartheta, \lambda) = \frac{1}{4\pi R} f(\vartheta, \lambda)$.

Подставляя найденные значения g и ν в (2.32), будем иметь

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') \left[\frac{1}{rR} + \frac{2\cos(r, R)}{r^2} \right] d\sigma \quad (2.36)$$

или, учитывая эквивалентную формулу (1.26) для потенциала двойного слоя,

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') \left[\frac{1}{rR} + \frac{2d(1/r)}{dR} \right] d\sigma. \quad (2.37)$$

Преобразуем ядро интеграла (2.36). Из рис. 2.4 определим

$$\rho^2 = R^2 + r^2 + 2Rr \cos(r, R), \text{ или } \rho^2 - R^2 = r^2 + 2Rr \cos(r, R).$$

Разделив левую и правую части последнего равенства на Rr^3 , получим $\frac{1}{rR} + \frac{2\cos(r, R)}{r^2} = \frac{\rho^2 - R^2}{r^3}$; интеграл (2.36) примет вид

$$V_e(\rho, \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^3} d\sigma. \quad (2.38)$$

Формулу (2.38) и эквивалентные ей формулы (2.36), (2.37) называют интегралом Пуассона для внешнего пространства. Он решает внешнюю краевую задачу Дирихле для сферы при $\rho > R$.

Повторив все вычисления для внутренней точки, можно доказать, что интеграл Пуассона

$$V_i(\rho, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') \frac{R^2 - \rho^2}{R\rho^3} d\sigma \quad (2.39)$$

решает внутреннюю задачу Дирихле для сферы при $\rho < R$.

В пределе при $\rho \rightarrow R$ (2.38) и (2.39) принимают вид

$$\lim_{\rho \rightarrow R = \varepsilon^2 \rightarrow 0} V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \lim_{\rho \rightarrow R = \varepsilon^2 \rightarrow 0} V_i(\rho, \vartheta, \lambda) = f(\vartheta, \lambda), \quad (2.40)$$

где ε^2 – бесконечно малая величина второго порядка малости.

Однако при $\rho = R$ обе формулы дают $V_e = V_i = 0$. Следовательно, интеграл Пуассона имеет легко устранимый разрыв при $\rho = R$. Это объясняется тем, что при вычислении V_e непосредственно на сфере (2.32) вместо предельного приходится брать прямое значение потенциала двойного слоя.

Решение задачи Дирихле для бесконечной плоскости S можно получить из интеграла Пуассона, если радиус R сферы неограниченно увеличивать, удаляя ее центр в бесконечность. В этом случае сфера будет превращаться в бесконечную плоскость S , касающуюся сферы в точке A_0 . Элемент поверхности сферы $d\sigma$ будет стремиться к элементу площади dS и потенциал

$$V_e = \lim_{R \rightarrow \infty} V_0(\rho, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{f(\vartheta', \lambda')}{r^3} dS \lim_{R \rightarrow \infty} V_0 \frac{\rho^2 - R^2}{R}. \quad (2.41)$$

Высота точки A над бесконечной плоскостью $z = \rho - R$; найдем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{z(\rho + R)}{R} = Z \lim_{R \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\rho}{R} + 1 - 1 \right) = 2Z + \lim_{R \rightarrow \infty} V \frac{\rho - R}{R} = 2Z,$$

и формула (2.41), решающая задачу Дирихле для бесконечной плоскости S , принимает вид

$$V_e = \frac{z}{2p} \iint_S \frac{f(\vartheta', \lambda')}{r^3} dS. \quad (2.42)$$

2.9. Понятие о шаровых и сферических функциях. Свойство ортогональности

При решении краевых задач для сферы часто используют шаровые и сферические функции. Шаровой функцией порядка (степени) n называется гармоническая однородная функция $S_n(x, y, z)$ степени n .

Выразим $S_n(x, y, z)$ в сферических координатах $(\rho, \vartheta, \lambda)$, учитывая, что:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \vartheta \cos \lambda \\ y &= \rho \sin \vartheta \sin \lambda \\ z &= \rho \cos \vartheta \end{aligned} \quad (2.43)$$

В общем виде после преобразований и, вынося общий множитель ρ^n , получим:

$$S_n(x, y, z) = \rho^n Y_n(\vartheta, \lambda), \quad (2.44)$$

где $Y_n(\vartheta, \lambda)$ – однородная функция степени n от $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta \cos \lambda$ и $\sin \vartheta \sin \lambda$. Она определена на сфере единичного радиуса и называется сферической функцией (степени) n .

Применим вторую формулу Грина для гармонических функций (2.18)

$$\iint_{\sigma} \left(u \frac{dV}{dn} - V \frac{du}{dn} \right) d\sigma = 0$$

к шаровым функциям $S_n(x, y, z)$ и $S_m(x, y, z)$, выбрав σ в виде сферы. В этом случае производные $\frac{dS}{dn}$ по нормали к поверхности σ совпадут с производными по направлению ρ – радиуса сферы, поэтому

$$\iint_{\sigma} \left[\rho^n \rho^{m-1} m Y_n(\vartheta, \lambda) - \rho^m \rho^{n-1} n Y_m(\vartheta, \lambda) \right] d\sigma = 0. \quad (2.45)$$

Вынося за квадратную скобку $\rho^{m+n-1} \Big|_{\sigma} = R^{m+n-1}$ и сокращая, получим

$$(m-n) \iint_{\sigma} Y_n(\vartheta, \lambda) Y_m(\vartheta, \lambda) d\sigma = 0. \quad (2.46)$$

Это свойство сферических функций называется ортогональностью функций $Y_n(\vartheta, \lambda)$ и $Y_m(\vartheta, \lambda)$ на сфере.

Благодаря свойству ортогональности (2.46) сферических функций на сфере, их широко применяют для разложений функций, заданных на сфере в ряды, аналогичные рядам Фурье.

2.10. Частный случай сферических функций. Представление функции $1/r$ в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра. Рекуррентная формула для их вычисления

Рассмотрим сначала частный случай. Возьмем функцию:

$$\frac{1}{r} = \left(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi \right)^{-1/2}, \quad (2.47)$$

где r определяется из треугольника AOB (см. рис. 2.4) и характеризует расстояние между текущей точкой $B(\rho', \vartheta', \lambda')$ и фиксированной точкой $A(\rho, \vartheta, \lambda)$, в которой вычисляется потенциал; ψ определяется из сферического треугольника A_0BP (рис. 2.5), в котором точка P – полюс, точка B – текущая, точка A_0 – проекция по радиусу-вектору точки A на сферу:

$$\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + (\cos \lambda \cos \lambda' + \sin \lambda \sin \lambda') \sin \vartheta \sin \vartheta'. \quad (2.48)$$

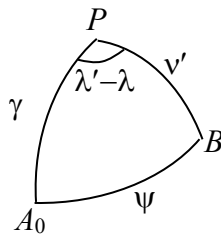


Рис. 2.5. Сферический треугольник

Вынося в формуле (2.47) R за скобки и раскладывая в ряд по степеням отношения ρ/R , получаем

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left[1 + \frac{\rho}{R} \cos \psi + \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right) + \dots + \left(\frac{\rho}{R} \right)^n P_n(\cos \psi) + \dots \right]$$

или

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{R^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (2.49)$$

Ряд (2.49) будет сходиться при $\rho < R$, т. е., когда точка A , в которой вычисляется значение функции $1/r$, находится внутри сферы.

Если все рассуждения повторить для точки A , когда она находится вне сферы, вынося в формуле (2.47) ρ за скобки, то ряд аналогичный ряду (2.49), при $\rho > R$, будет иметь вид

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (2.50)$$

В рядах (2.49) и (2.50) $\frac{\rho^n}{R^{n+1}} P_n(\cos \psi)$ и $\frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi)$ – частный вид шаровых функций, а $P_n(\cos \psi)$ – частный вид сферических функций порядка n . Они представляют собой целые многочлены степени n от $\cos \psi$ и называются многочленами Лежандра.

Многочлен Лежандра можно последовательно вычислять по рекуррентной формуле:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad (2.51)$$

где $x = \cos \psi$.

Запомнив, что полином Лежандра нулевой степени $P_0(x) = 1$, а первой степени $P_1(x) = x$, по рекуррентной формуле (2.51) можно последовательно получить:

$$P_2(x) = 3/2 \cdot x^2 - 1/2;$$

$$P_3(x) = 4/2 \cdot (5x^2 - 3x) \text{ и так далее.}$$

2.11. Представление гармонических функций вне и внутри сферы в виде разложения в ряды по шаровым функциям. Интегральная формула, определяющая сферическую функцию порядка n

Теперь рассмотрим общий случай. Представим произвольную гармоническую функцию $V_i(\rho, \vartheta, \lambda)$ внутри сферы радиуса R рядом шаровых функций. Для этого используем интеграл Пуассона (2.37) в виде

$$V_i(\rho, \vartheta, \lambda) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\bar{\sigma}} f(\vartheta', \lambda') \left[\frac{1}{Rr} + \frac{2d(1/r)}{dR} \right]$$

и разложим ядро интеграла в ряд по степеням ρ . Для этого используем ряд (2.49)

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{R^{n+1}} P_n(\cos \psi).$$

Дифференцируя его по R и умножая на 2, будем иметь

$$2 \frac{d(1/r)}{dR} = - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n-1) \frac{\rho^n}{R^{n+2}} P_n(\cos \psi). \quad (2.52)$$

Складывая ряд (2.49), предварительно разделив его на R , и ряд (2.52), получим

$$\left[\frac{1}{Rr} + 2 \frac{d(1/r)}{dR} \right] = -\frac{1}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{\rho}{R} \right)^n P_n(\cos \psi). \quad (2.53)$$

Подставляя выражение (2.53) в формулу (2.37) и интегрируя почленно, будем иметь

$$V_i(\rho, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{R^n} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \iint_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \psi) d\sigma. \quad (2.54)$$

Переходя к интегрированию по единичной сфере ω и учитывая, что $R^2 d\omega = d\sigma$, получим

$$V_i(\rho, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{R^n} \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \psi) d\omega. \quad (2.55)$$

Обозначим:

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \psi) d\omega. \quad (2.56)$$

Интегральная формула (2.56) определяет любую сферическую функцию степени n . С учетом (2.56) окончательно получим, что гармоническая функция внутри сферы при $\rho < R$ представляется рядом шаровых функций вида

$$V_i(\rho, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{R^n} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (2.57)$$

Аналогично представим произвольную гармоническую функцию $V_e(\rho, \vartheta, \lambda)$ вне сферы радиуса R в виде ряда шаровых функций. Для этого снова используем интеграл Пуассона (2.37) в виде

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\vartheta', \lambda') \left[\frac{1}{Rr} + \frac{2d(1/r)}{dR} \right] d\sigma$$

и ряд (2.50)

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi) \text{ при } \rho > R.$$

Дифференцируя этот ряд по R и умножая его на 2, получим

$$2 \frac{d(1/r)}{dR} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (2.58)$$

Складывая ряд (2.49), предварительно разделив его на R , с рядом (2.58), представим ядро интеграла Пуассона (2.34) в виде

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{Rr} + 2 \frac{d(1/r)}{dR} \right] = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi) + \sum_{n=0}^{\infty} 2n \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi) = \\ & = (2n+1) \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Подставляя (2.59) в интеграл Пуассона, заменяя $d\sigma = R^2 d\omega$ и почленно интегрируя, получим

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n-1}}{\rho^{n+1}} \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \psi) R^2 d\omega.$$

Принимая во внимание обозначение (2.56), окончательно получим, что гармоническая функция $V_e(\rho, \vartheta, \lambda)$ вне сферы при $\rho > R$ представляется следующим рядом:

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (2.60)$$

Пределы рядов (2.57) и (2.60) при $\rho \rightarrow R$ должны, с одной стороны, равняться заданной на сфере функции $f(\vartheta', \lambda')$, т. е.

$$\lim_{\rho \rightarrow R} V_i(\rho, \vartheta, \lambda) = f(\vartheta', \lambda') \text{ и } \lim_{\rho \rightarrow R} V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = f(\vartheta', \lambda').$$

Это следует из решения внешней и внутренней задачи Дирихле для сферы. С другой стороны:

$$\lim_{\rho \rightarrow R} V_i(\rho, \vartheta, \lambda) = V_i(R, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda);$$

$$\lim V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = V_e(R, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda).$$

Это следует непосредственно из рядов (2.57) и (2.60) при $\rho \rightarrow R$. Таким образом, разрыв, который имеют интегралы Пуассона (2.38) и (2.39), при $\rho = R$ легко устраняется в рядах (2.57) и (2.60) и на сфере для обоих рядов:

$$f(\vartheta', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (2.61)$$

Формула (2.58) показывает, что граничное условие, заданное на сфере в виде гармонической функции $f(\vartheta', \lambda')$, может быть представлено бесконечным рядом сферических функций $Y_n(\vartheta, \lambda)$.

Следовательно, любая гармоническая функция может быть представлена рядами шаровых функций: рядом (2.57) в области $\rho < R$ и рядом (2.60) в области $\rho > R$. Оба ряда сходятся и при $\rho = R$ представляются рядом (2.60).

2.12. Представление сферической функции степени n в явном виде. Присоединенные сферические функции и дифференциальная формула для их определения

Для получения выражения сферических функций в явном виде в интегральную формулу (2.56)

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \psi) d\omega,$$

вместо полинома Лежандра $P_n(\cos \psi)$ степени n от сферического расстояния ψ необходимо представить его через сферические координаты текущей точки $B(\vartheta', \lambda')$ и проекцией фиксированной точки $A_0(\vartheta, \lambda)$ на сфере

$$P_n(\cos \psi) = P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta') + \ddot{e} + \quad (2.62)$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [\cos m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda'] P_n^k(\vartheta) P_n^m(\vartheta').$$

Формула (2.62) в теории сферических функций называется теоремой их сложения. Она показывает, какой вид принимает многочлен Лежандра $P_n(\cos \psi)$ после подстановки в него вместо $\cos \psi$ его выражения (2.48) из сферического треугольника PA_0B (см. рис. 2.5).

В формуле (2.62) функции вида $P_n^m(\vartheta)$ называются присоединенными функциями Лежандра степени n и порядка m . Их можно вычислять с помощью дифференциальной формулы

$$P_n^m(\vartheta) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \text{ при } x = \cos \vartheta. \quad (2.63)$$

Для практического применения формулы (2.63) необходимо предварительно получить по рекуррентной формуле (2.51) полином Лежандра $P_n(x)$ соответствующего степени n .

Например, для вычисления

$$P_1^1(\vartheta), \quad n=1, m=1, P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta = x,$$

применяя формулу (2.63), получим

$$P_1^1(\vartheta) = (1-x^2)^{1/2} \frac{dx}{dx} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 \vartheta} = \sin \vartheta \text{ и т. д.}$$

Подставляя (2.62) в (2.56) и учитывая, что координаты фиксированной точки $A(\vartheta, \lambda)$ при выполнении интегрирования являются параметрами, получим:

$$\begin{aligned}
Y_n(\vartheta, \lambda) = & \left[\frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \vartheta') d\omega \right] P_n(\cos \vartheta) + \\
& + \sum_{m=1}^n \left\{ \left[\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') \cos m\lambda' d\omega \right] \cos m\lambda + \right. \\
& \left. + \left[\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') \sin m\lambda' d\omega \right] \sin m\lambda \right\} P_n^m(\vartheta).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

В формуле (2.64) выражения в квадратных скобках определяют гармонические коэффициенты соответствующих сферических функций. Введем обозначения этих коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned}
A_{n,0} &= \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos \vartheta') d\omega \\
A_n^k &= \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') \cos m\lambda' P_n^m(\vartheta') d\omega \\
B_n^k &= \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') \sin m\lambda' P_n^m(\vartheta') d\omega
\end{aligned} \right\}. \tag{2.65}$$

Подставляя принятые обозначения (2.65) в (2.64), получим

$$\begin{aligned}
Y_n(\vartheta, \lambda) &= A_n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{m=1}^n \left(A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda \right) P_n^m(\vartheta) = \\
&= \sum_{k=0}^n \left(A_n^k \cos m\lambda + B_n^k \sin m\lambda \right) P_n^k(\vartheta).
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Формулы (2.66) и (2.65) представляют выражение сферических функций в явном виде. В этих формулах для удобства записи обозначено $P_n^k(\vartheta) = P_n^k(\cos \vartheta)$.

Запишем ряд (2.61) с учетом (2.66) в развернутом виде

$$\begin{aligned}
V(\theta, \lambda) = & A_0 P_0(\cos \theta) + A_{10} P_1(\cos \theta) + (A_{11} \cos \lambda + B_{11} \sin \lambda) P_{11}(\cos \theta) + \\
& + A_{20} P_2(\cos \theta) + (A_{21} \cos \lambda + B_{21} \sin \lambda) P_{21}(\cos \theta) + \\
& + (A_{22} \cos 2\lambda + B_{22} \sin 2\lambda) P_{22}(\cos \theta) + \dots \\
& + A_{n0} P_n(\cos \theta) + (A_{n1} \cos \lambda + B_{n1} \sin \lambda) P_{n1}(\cos \theta) + \dots \\
& + (A_{nn} \cos n\lambda + B_{nn} \sin n\lambda) P_{nn}(\cos \theta) + \dots
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Произведения $A_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda$ и $B_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \sin k\lambda$ в выражении (2.67) называются гармониками, которые представляют функцию $V(\theta, \lambda)$ в определенной частотной области. Коэффициенты разложения A_{nm} и B_{nm} – амплитуды этих гармоник. Эти коэффициенты определяются из системы заданных значений функции $V(\theta, \lambda)$. Каждая строка разложения в (2.67) является так называемым игроком Лапласа Y_n в соответствии с (2.66) и содержит сферические многочлены только одной степени n . Причем чем выше степень гармоник, тем выше ее разрешающая способность, т. е. тем более мелкую область она представляет. Гармоники с индексом $m = 0$ представляют широтные изменения гравитационного поля.

Первые члены каждой строки содержат многочлены Лежандра $P_{n0}(\cos \theta)$ и не зависят от долготы λ . Многочлены $P_{n0}(\cos \theta)$ обращаются в 0 на n параллелях, которые делят земную сферу на $n + 1$ зон. При переходе от одной зоны к другой меняется знак функции $P_{n0}(\cos \theta)$, причем каждая зональная гармоника симметрична относительно оси вращения. Гармоники, имеющие четные значения n , определяют зоны, симметричные относительно $\theta = \pi / 2$, т. е. относительно экватора, а нечетные гармоники характеризуют экваториальную асимметрию Земли. Эти первые члены каждой строки разложения с $m = 0$ носят название *зональных сферических функций*.

При $n = m$ сферические гармоники обращаются в 0 на $2m$ меридианах, отстоящих друг от друга на π/n , изменяя знак присоединенного полинома $P_{nn}(\cos \theta)$ при переходе через меридиан. Эти гармоники называются *секториальными*.

Сферические гармоники, для которых $n \neq m$, обращаются в нуль на $n - m + 1$ параллелях и $2m$ меридианах и попеременно меняют знак внутри сферических трапеций и в районе полюсных треугольников, ограниченных выбранной системой параллелей и меридианов. Эти гармоники называются тессеральными.

На рис. 2.6 изображены схемы земного эллипсоида относимости, на которой в сферической аппроксимации с ошибкой порядка 0,33 % показано деление сферы на зоны, секторы и сферические трапеции, соответствующие индексам n и m сферических гармоник до $n = 10$.

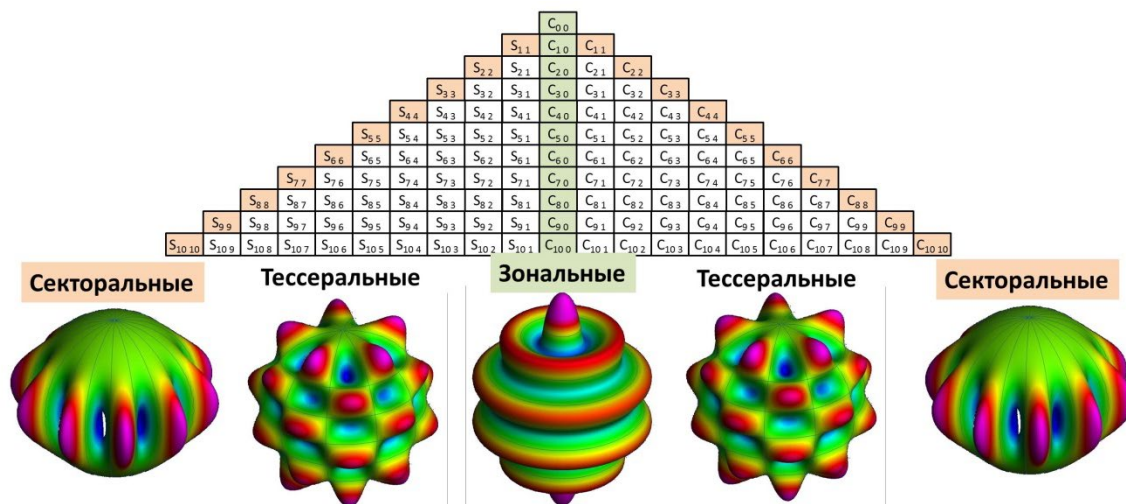


Рис. 2.6. Сферические гармоники до $n = 10$

2.13. Применение сферических функций для решения краевых задач. Ряд Стокса

Внутренняя и внешняя задачи Дирихле для сферы фактически уже рассмотрены нами в подразд. 2.11. Действительно, если на сфере радиуса R дана функция $f(\vartheta, \lambda)$, то ее всегда можно разложить в ряд (2.61) сферических функций

$$f(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (2.61)$$

Для этого служат формулы (2.65) и (2.66). Определив гармонические коэффициенты $A_{n,0}, A_n^m, B_n^m$, получают сферические функции $Y_n(\vartheta, \lambda)$ по формуле (2.66) и затем составляют ряды (2.57) и (2.60):

$$V_i(\rho, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{R^n} Y_n(\vartheta, \lambda) \text{ при } \rho < R, \quad (2.57)$$

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} Y_n(\vartheta, \lambda) \text{ при } \rho > R. \quad (2.60)$$

Эти ряды и определяют гармонические функции внутри сферы или вне сферы, то есть решают внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле.

Внешнюю задачу Неймана решает ряд

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = -R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{n+1}. \quad (2.68)$$

Этот ряд представляет гармоническую функцию, регулярную на бесконечности. Кроме того, если нормальная производная от этой функции на сфере совпадает с граничным условием $f(\vartheta, \lambda)$, то ряд (2.68) решает задачу Неймана. Для доказательства этого найдем

$$\lim_{\rho \rightarrow R} \frac{dV_e}{d\rho} = \lim_{\rho \rightarrow R} \left[-R \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(n+1)R^{n+1}}{\rho^{n+2}} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{n+1} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda) = f(\vartheta, \lambda).$$

Следовательно, ряд (2.68) действительно решает внешнюю задачу Неймана.

Более подробно рассмотрим решение третьей (смешанной) краевой задачи для сферы. Краевое условие в этой задаче имеет вид

$$\left| \alpha V_e(\rho, \vartheta, \lambda) + \frac{dV_e(\rho, \vartheta, \lambda)}{d\rho} \right|_{\rho \rightarrow R} = f(\vartheta, \lambda), \quad (2.69)$$

где $f(\vartheta, \lambda)$ – заданная на сфере функция.

Разложив ее в ряд (2.60), определив гармонические коэффициенты по формулам (2.65) и составив сферические функции $Y_n(\vartheta, \lambda)$ по формуле (2.66), будем считать сферические функции $Y_n(\vartheta, \lambda)$ известными.

Искомая функция, решающая третью (смешанную) краевую задачу, должна иметь вид

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} X_n(\vartheta, \lambda), \quad (2.70)$$

где $X_n(\vartheta, \lambda)$ – сферические функции, подлежащие определению.

Для их определения используем краевое условие (2.69). Выполняя дифференцирование ряда (2.70) по ρ и складывая результат с рядом (2.70), умноженным на α , при $\rho \rightarrow R$, получаем предельное равенство

$$\begin{aligned} \left| \alpha V_e + \frac{dV_e}{d\rho} \right|_{\rho \rightarrow R} &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha - (n+1) \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+2}} \right] X_n(\vartheta, \lambda) \right|_{\rho \rightarrow R} = \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha - \frac{(n+1)}{R} \right] X_n(\vartheta, \lambda) \right|_{\rho=R} \end{aligned}$$

и краевое условие, которое принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha R - n - 1}{R} X_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (2.71)$$

Равенство (2.71) выполнимо только в том случае, когда сферические функции одинаковых порядков слева и справа равны друг другу, т. е.

$$\frac{\alpha R - n - 1}{R} X_n(\vartheta, \lambda) = Y_n(\vartheta, \lambda), \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty). \quad (2.72)$$

Если α задано так, что $\alpha R - n - 1 \neq 0$ при всех целых неотрицательных n , то все $X_n(\vartheta, \lambda)$ определяются из выражения (2.72), и тогда решение третьей (смешанной) внешней краевой задачи будет иметь вид

$$X_n(\vartheta, \lambda) = R \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{\alpha R - n - 1}. \quad (2.73)$$

Подставив (2.73) в (2.70), окончательно получим:

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = R \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{\alpha R - n - 1}. \quad (2.74)$$

В физической геодезии и теории фигуры Земли особое значение имеет задача, когда $\alpha R = 2$. В этом случае, при $n = 1$ множитель $(\alpha R - n - 1)$ в знаменателе в формуле (2.73) обращается в нуль, и тогда определить сферическую функцию $X_1(\vartheta, \lambda)$ нельзя. Все остальные сферические функции $X_n(\vartheta, \lambda)$ при $n \neq 1$ определяются по формуле

$$X_n(\vartheta, \lambda) = R \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{1 - n}, \quad (n = 0, 2, \dots, n). \quad (2.75)$$

Подставив (2.75) в (2.70), получим решение третьей краевой задачи в виде

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \frac{R^2 Y_0(\vartheta, \lambda)}{\rho} - R \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{n - 1} + \frac{R^2 X_1(\vartheta, \lambda)}{\rho^2}, \quad (2.76)$$

где $X_1(\vartheta, \lambda)$ – произвольная сферическая функция первого порядка.

Из выражения (2.74) следует, что при $\alpha R = 2$ функция $Y_1(\vartheta, \lambda) = \infty$. Это означает, что краевое условие $f(\vartheta, \lambda)$ не может быть задано произвольно, а должно соблюдаться условие

$$\iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') \cos \omega d\omega = 0. \quad (2.77)$$

При несоблюдении этого условия третью краевую задачу решить невозможно. Такого рода условия называют условиями существования решения

Ряд (2.76) при $\rho = R$ называется Стокса (1849):

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = RY_0(\vartheta, \lambda) - R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{n-1} + X_1(\vartheta, \lambda). \quad (2.78)$$

2.14. Интегральная формула Стокса

Обобщенный ряд Стокса (2.76)

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \frac{R^2}{\rho} Y_n(\vartheta, \lambda) - R \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{n-1} + \frac{R^2}{\rho^2} X_1(\vartheta, \lambda)$$

сходится медленно и малопримогоден для практического применения. Поэтому Стокс просуммировал его при $\rho = R$ и получил широко применяемую в физической геодезии интегральную формулу. Получим эту формулу в общем виде, при $\rho > R$. Для этого подставим в ряд (2.78) соответствующие значения $Y_n(\vartheta, \lambda)$ из (2.56) и учитывая, что $P_0(\cos \psi) = 1$, будем иметь:

$$\begin{aligned} V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = & \frac{R^2}{4\pi\rho} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') d\omega + \frac{R^2}{\rho^2} X_1(\vartheta, \lambda) - \\ & - \frac{R}{4\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \right] d\omega. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Обозначая в (2.79) выражение в квадратных скобках как

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) = RS(\rho, \psi), \quad (2.80)$$

получим обобщенную интегральную формулу Стокса

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \frac{R^2}{4\pi\rho} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') d\omega + \frac{R^2}{\rho^2} X_1(\vartheta, \lambda) - \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') S(\rho, \psi) d\omega. \quad (2.81)$$

Функцию $S(\rho, \psi)$ называют обобщенной функцией Стокса. Найдем эту функцию в явном виде, то есть определим сумму ряда (2.80). Для этого возьмем ряд (2.50) в виде

$$\frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2} - 2 \frac{R}{\rho} \cos \psi \right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi),$$

и обозначим $R/\rho = x$, тогда получим

$$1 / \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\cos \psi). \quad (2.82)$$

Выделим из правой части (2.82) члены при $n = 0$, $n = 1$ и перенесем их в левую:

$$1 / \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} - 1 - x \cos \psi = \sum_{n=2}^{\infty} x^n P_n(\cos \psi). \quad (2.83)$$

Умножим обе части (2.83) на dx/x^2 и проинтегрируем в пределах от $x \rightarrow 0$ до x ; получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} P_n(\cos \psi) = \int_{x \rightarrow 0}^x \left[1 / \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} - 1 - x \cos \psi \right] \frac{dx}{x^2}.$$

Учтем, что

$$\int -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}; \quad u \int -\cos \psi \frac{dx}{x} = -\ln x \cos \psi, \text{ а}$$

$\int dx / x^2 \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1}$ есть табличный интеграл вида

$$\begin{aligned} \int dx / x^2 \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} = \\ = -1 / x \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} + b / 2 \ln \left(\frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} + \frac{1}{x} + \frac{b}{2} \right). \end{aligned}$$

Тогда в нашем случае $b = -2 \cos \psi$ и

$$\begin{aligned} \int dx / x^2 \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} &= -(1/x) \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} - \\ &- \cos \psi \ln \left((1/x) \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} + (1/x) - \cos \psi \right) = \\ &= -(1/x) \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} + \cos \psi \ln x - \\ &- \cos \psi \ln \left(\sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} + 1 - x \cos \psi \right). \end{aligned}$$

Учитывая полученные выше значения неопределенных интегралов и выполняя приведение подобных членов, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{x \rightarrow 0}^x \left(1 / \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} - 1 - x \cos \psi \right) \frac{dx}{x^2} &= \left[(1/x) \left(1 - \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} \right) - \right. \\ &- \left. \cos \psi \ln \left(\sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} + 1 - x \cos \psi \right) \right]_{x \rightarrow 0}^x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} P_n(\cos \psi). \end{aligned}$$

Подставляя пределы, при верхнем пределе мы имеем выражение, стоящее в квадратных скобках, а при нижнем пределе

$$\lim_{x \rightarrow 0} J = \lim_{x \rightarrow 0} (1/x) \left[1 - \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} \right] - \cos \psi \ln 2.$$

Возникает неопределенность $0/0$, которая раскрывается по правилу Лопиталя [11,12]

$$\lim_{x \rightarrow 0} J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi'(x)}{\varphi'(x)}.$$

В нашем случае: $\phi'(x) = -\frac{x - \cos \psi}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1}}$, а $\varphi'(x) = 1$ и

$$\lim_{x \rightarrow 0} J = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-(x - \cos \psi) / \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} \right) - \cos \psi \ln 2 = \cos \psi - \cos \psi \ln 2.$$

Вычитая значение интеграла при нижнем пределе, получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} P_n(\cos \psi) = \frac{1}{x} \left[1 - x \cos \psi - \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} \right] - \cos \psi \ln \frac{\sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} + 1 - x \cos \psi}{2}. \quad (2.84)$$

Определяемую функцию (2.80) представим в виде суммы двух рядов:

$$\begin{aligned} S(\rho, \psi) &= \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1+2-2}{n-1} x^{n+1} P_n(\cos \psi) = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} 2x^{n+1} P_n(\cos \psi) + \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n-1} x^{n+1} P_n(\cos \psi). \end{aligned} \quad (2.85)$$

В (2.80) первое слагаемое получим, умножив ряд (2.78) на $\frac{2x}{R}$, а второе слагаемое – умножив ряд (2.79) на $\frac{3x^2}{R}$. Подставим полученные выражения, тогда

$$\begin{aligned} S(\rho, \psi) &= \frac{1}{R} \left[\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1}} - 2x - 2x^2 \cos \psi + \right. \\ &\quad \left. + 3x \left(1 - x \cos \psi - \sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 3x^2 \cos \psi \ln \frac{\sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} + 1 - x \cos \psi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Приведя подобные члены и подставив вместо $x = R/\rho$, а вместо $\sqrt{x^2 - 2x \cos \psi + 1} = r/\rho$, получим обобщенную функцию Стокса в явном виде:

$$S(\rho, \psi) = \frac{2}{r} + \frac{1}{\rho} - \frac{3r}{\rho^2} - \frac{5R}{\rho^2} \cos \psi - \frac{3R}{\rho^2} \cos \psi \ln \frac{r + \rho - R \cos \psi}{2\rho}. \quad (2.86)$$

Соединяя в (2.81) оба интегральных члена вместе, можно записать обобщенную интегральную формулу Стокса в более удобном виде:

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = -\frac{R^2}{4\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') \left[S(\rho, \psi) - \frac{1}{\rho} \right] d\omega + \frac{R^2}{\rho^2} X_1(\vartheta, \lambda). \quad (2.87)$$

Ядро $\left[S(\rho, \psi) - \frac{1}{\rho} \right]$ и сам интеграл включают в себя сферические функции всех порядков, кроме первого.

Положив в (2.87) $\rho = R$, получим формулу Стокса:

$$V_e(R, \vartheta, \lambda) = -\frac{R}{4\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') [S(\psi) - 1] d\omega + X_1(\vartheta, \lambda). \quad (2.88)$$

в которой $S(\psi) = RS(R, \psi)$.

При $\rho = R$ из (2.80) получаем выражение функции Стокса в виде ряда:

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi). \quad (2.89)$$

При $\rho = R$ и учитывая, что при этом $r^2 = \rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \psi$ трансформируется в $r = 2R \sin \psi / 2$, из (2.82) получаем выражение функции Стокса в явном виде:

$$\begin{aligned} S(\psi) &= RS(R, \psi) = \\ &= \cos \psi / 2 - 6 \sin \psi / 2 + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \psi / 2 + \sin^2 \psi / 2 \right). \end{aligned} \quad (2.90)$$

2.15. Краевые задачи и интегральные уравнения для их решения

Решение задачи Дирихле (внешней и внутренней) для произвольной поверхности σ удобно искать в виде одного потенциала — потенциала двойного слоя (1.75):

$$W(x, y, z) = \iint_{\sigma} \frac{\phi \cos(r, n)}{r^2} d\sigma, \quad (2.91)$$

где ϕ — известная плотность двойного слоя, распределенная на поверхности σ .

Предельное граничное условие для задачи Дирихле получается тогда, когда точка $A'(x, y, z)$ будет неограниченно приближаться к точке A поверхности σ (рис. 2.7).

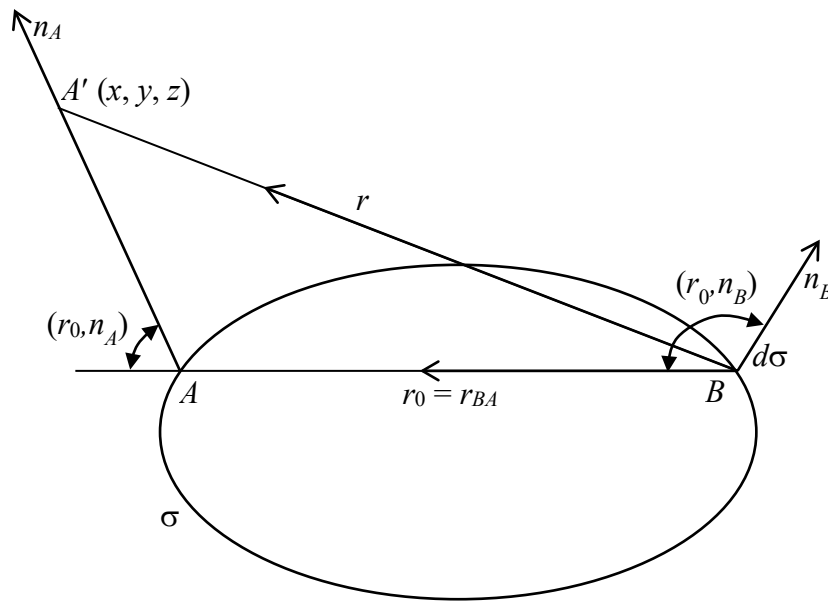


Рис. 2.7. Предельное граничное условие для задачи Дирихле

Внешнее предельное и внутреннее предельное значения потенциала W двойного слоя определяются формулами (1.73)

$$W_e = W_0 + 2f\pi v;$$

$$W_i = W_0 - 2f\pi v.$$

В нашем случае $f v = \phi$ и

$$\iint_{\sigma} \frac{\phi \cos(r_0, n)}{r_0^2} d\sigma \pm 2\pi\phi = f$$

или

$$\iint_{\bar{\sigma}} \frac{\phi \cos(r_{BA}, n_B)}{r_{BA}^2} d\bar{\sigma}_B \pm 2\pi\phi_A = f_A, \quad (2.92)$$

где $r_0 = r_{BA}$ хорда, соединяющая точку B на элементе $d\sigma_B$ с той точкой A поверхности σ , к которой относится граничное значение f_A заданной функции (см. рис. 2.7).

Знак у слагаемого $2\pi\phi_A$ будет различный при решении внешней и внутренней задачи. Уравнение (2.92) содержит одну неизвестную функцию ϕ , которая стоит под знаком интеграла. Такие уравнения называются интегральными.

Решение задачи Неймана (внутренней и внешней) будем искать в виде потенциала простого слоя (1.21):

$$V(x, y, z) = \iint_{\sigma} \frac{\phi}{r} d\sigma, \quad (2.93)$$

с известной плотностью ϕ , распределенной на σ .

Предельное граничное условие для задачи Неймана получают с помощью формул Племили (1.64):

$$\frac{dV_e}{dn} = \frac{dV_0}{dn} - 2f\pi\mu \text{ и } \frac{dV_i}{dn} = \frac{dV_0}{dn} + 2f\pi\mu.$$

В нашем случае $f\mu = \phi$, и предельное граничное условие для задачи Неймана имеет вид:

$$-\iint_{\bar{\sigma}} \frac{\cos(r_0, n)}{r_0^2} d\bar{\sigma} \mp 2\pi\phi = f,$$

или

$$-\iint_{\bar{\sigma}} \frac{\phi_B \cos(r_{BA}, n_A)}{r_{BA}^2} d\bar{\sigma}_B \mp 2\pi\phi_A = f_A, \quad (2.94)$$

где верхний знак «−» слагаемого $2\pi\phi_A$ соответствует внешней задаче, а нижний знак «+» – внутренней задаче Неймана.

Полученное интегральное уравнение (2.94) и интегральное уравнение (2.92) отличаются только ядрами, а именно, в уравнении (2.92) ядро равно $\frac{\cos(r_{BA}, n_B)}{r_{BA}^2}$, а в уравнении (2.94) $\frac{-\cos(r_{BA}, n_A)}{r_{BA}^2}$.

Такие уравнения называются союзными. Следовательно, интегральное уравнение (2.92) и союзное ему уравнение (2.94) решают внутренние и внешние задачи Дирихле и Неймана.

Определение условий существования и условий единственности решения краевых задач для поверхностей сложной формы требует выполнения специальных исследований, для решения интегральных уравнений применяют различные методы последовательных приближений. Один из таких методов состоит в том, что поверхность σ разбивают на достаточно большое число m элементарных площадок $\Delta\sigma_k$. Расстояние от площадки $\Delta\sigma_k$ до площадки $\Delta\sigma_0$ обозначают $r_{k,i}$, направление нормали на $\Delta\sigma_k$ обозначают n_k , тогда приближенное значение интегрального уравнения (2.92) для площадки $\Delta\sigma_k$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^m \frac{\phi_k \cos(r_{k,i}, n_k)}{r_{k,i}^2} \Delta\sigma_k \pm 2\pi\phi_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Составляют такие уравнения для всех m площадок и получают систему m линейных уравнений для определения значений плотности ϕ на каждой из m площадок.

Если решение существует, то процесс последовательных приближений будет сходящимся.

Составление интегрального уравнения для решения третьей (смешанной) краевой задачи требует более подробного рассмотрения.

2.16. Интегральное уравнение для третьей (смешанной) краевой задачи для сферы и его решение с помощью интегральной формулы Стокса

Составим интегральное уравнение, соответствующее третьей (смешанной) краевой задаче для сферы σ . Краевое условие возьмем в виде, когда $\alpha R = 2$:

$$\left. \frac{2V_e}{R} + \frac{dV_e}{d\rho} \right|_{\rho \rightarrow R} = f(\vartheta, \lambda). \quad (2.95)$$

Определяемую гармоническую вне σ функцию $V_e(\rho, \vartheta, \lambda)$, регулярную на бесконечности, будем искать в виде потенциала простого слоя неизвестной плотности μ , распределенного на σ :

$$V_e(\rho, \vartheta, \lambda) = \iint_{\sigma} \frac{\mu}{r} d\sigma. \quad (2.96)$$

Согласно формул Племили (1.64), получим

$$\left. \frac{dV_e}{d\rho} \right|_{\rho \rightarrow R} = - \iint_{\sigma} \frac{\mu \cos(r_0, R)}{r_0^2} d\sigma - 2\pi\mu(\vartheta, \lambda).$$

На сфере (рис. 2.8) $\cos(r_0, R) = \frac{r_0}{2R}$.

Поэтому

$$\left. \frac{dV_e}{d\rho} \right|_{\rho \rightarrow R} = - \frac{1}{2R} \iint_{\sigma} \frac{\mu}{r_0} d\sigma - 2\pi\mu(\vartheta, \lambda). \quad (2.97)$$

Подставив предельное равенство (2.97) в краевое условие (2.95), получим

$$\frac{2}{R} \iint_{\sigma} \frac{\mu}{r_0} d\sigma - \frac{1}{2R} \iint_{\sigma} \frac{\mu}{r_0} d\sigma - 2\pi\mu(\vartheta, \lambda) = f(\vartheta, \lambda).$$

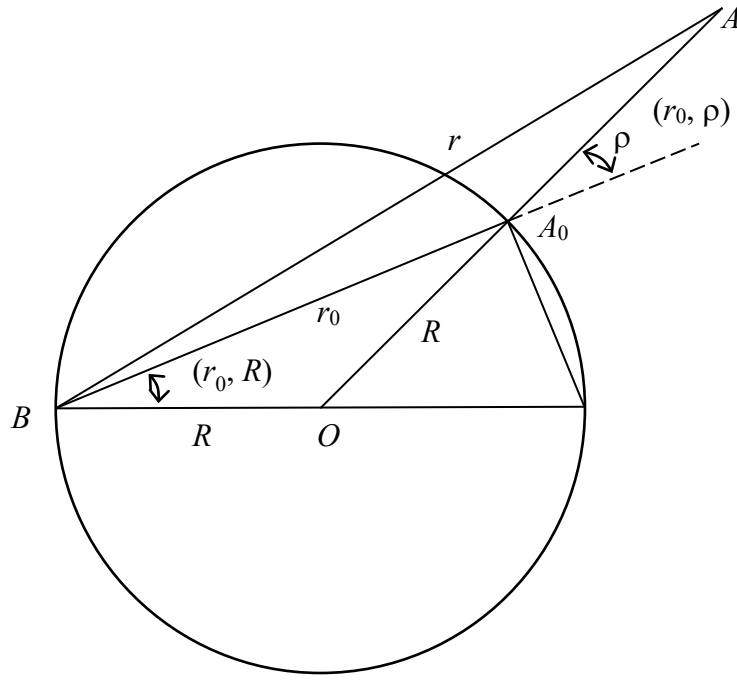


Рис. 2.8. Сферы σ

После приведения подобных членов:

$$2\pi\mu(\vartheta, \lambda) = -f(\vartheta, \lambda) + \frac{3}{2R} \iint_{\bar{\sigma}} \frac{\mu(\vartheta', \lambda')}{r_0} d\sigma. \quad (2.98)$$

Это и есть определяемое интегральное уравнение для плотности $\mu(\vartheta, \lambda)$.

Значение потенциала на сфере:

$$V_e(R, \vartheta, \lambda) = \iint_{\bar{\sigma}} \frac{\mu(\vartheta', \lambda')}{r_0} d\sigma = R^2 \iint_{\omega} \frac{\mu(\vartheta', \lambda')}{r_0} d\sigma.$$

Значение этого интеграла уже было нами определено через краевое условие на сфере ω в виде интегральной формулы Стокса (2.89), т. е.:

$$R^2 \iint_{\omega} \frac{\mu(\vartheta', \lambda')}{r_0} d\omega = -\frac{R}{2\pi} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') [S(\psi) - 1] d\omega + X_1(\vartheta, \lambda).$$

Подставив (2.88) в (2.98), получим решение интегрального уравнения (2.98) для определения плотности простого слоя $\mu(\vartheta, \lambda)$ в следующем виде:

$$-\mu(\vartheta, \lambda) = \frac{f(\vartheta, \lambda)}{2\pi} + \frac{3}{(4\pi)^2} \iint_{\omega} f(\vartheta', \lambda') [S(\psi) - 1] d\omega - \frac{3}{4\pi} \frac{X_1(\vartheta, \lambda)}{R}. \quad (2.99)$$

Формулы (2.98), (2.88), (2.99) используются в физической геодезии и теории фигуры Земли при решении основного интегрального уравнения гравиметрии методом М. С. Молоденского для определения фигуры Земли и ее внешнего потенциала силы тяжести.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие «Теория фигуры Земли» содержит изложение математического аппарата, который используется при решении задач современной фундаментальной теории изучения фигуры Земли и ее внешнего потенциала силы тяжести, а также проблем физической геодезии, разработанных М. С. Молоденским, В. А. Магницким, В. В. Броваром, М. И. Юркиной, В. Ф. Еремеевым, Л. П. Пеллененом и другими учеными. Этот математический аппарат по существу является теоретическим фундаментом таких дисциплин, как физическая геодезия, теория фигуры Земли и планет и др.

Проблема изучения фигуры Земли возникла значительно раньше появления закона всемирного тяготения и решалась чисто геометрически. Геометрический метод определения фигуры Земли и в настоящее время является ведущим. Он позволяет определить как форму Земли, так и ее линейные размеры, а гравиметрический (физический) – только форму Земли. Эти два независимых метода изучения фигуры Земли успешно дополняют друг друга.

Таким образом, основной объект изучения в теории фигуры Земли – гравитационное поле Земли.

Изучение гравитационного поля и фигуры Земли необходимо для решения задач высшей и прикладной геодезии, космической геодезии, геодинамики, метрологии, метеорологии, океанологии, оборонных нужд, навигации, геофизики, для решения задач небесной механики, определения фундаментальных геодезических постоянных.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / пер. с лат. и примеч. А. Н. Крылова. – М. : Наука, 1989. – 688 с.
2. Клеро А. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики / пер. с франц. – М. – Л., 1947. – 358 с.
3. Гаусс К. Ф. Избранные геодезические сочинения . Т. II / под ред. и введением Г. В. Багратуни. – М. : Геодезиздат, 1958. – 244с.
4. Статьи о силе тяжести и фигуре Земли : переводы / Д. Стокс, Г. Брунс, А. Пуанкаре, Ф. Венинг Мейнес ; под общ. ред. [и с предисл.] чл.-кор. АН СССР А. А. Михайлова. – М. : Геодезиздат, 1961. – 152 с.
5. Слудский Ф. А. Общая теория фигуры Земли. – М., 1888. – 74 с.
6. Михайлов А. А. Курс гравиметрии и теории фигуры Земли. – М. : Редбюро ГУГК при СНК СССР, 1939. – 432 с.
7. Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии : тр. ЦНИИГиК. – 1945. – Вып. 42. – С. 10–61.
8. Молоденский М. С., Еремеева В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли : тр. ЦНИИГиК. – 1960. – Вып. 131. – 250 с.
9. E. Tiesinga, P. J. Mohr, D. B. Newell, B. N. Taylor. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018 // J. Phys. Chem. Ref. Data. – 2021. – Vol. 50. – № 3. – Article 033105. – P. 1–61.
10. Coulomb (1786) "Quatrième mémoire sur l'électricité," Histoire de l'Académie Royale des Sciences, pages 67–77.
11. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Изд. 6-е. – М. : Наука, 1966.
12. Moritz, H. Geodetic Reference System 1980. In: C. C. Tscherning (ed.), The Geodesist's Handbook 1984. Bull. Geod. 58, 388–398, 1984.

Учебное издание

Канушин Вадим Федорович
Голдобин Денис Николаевич

ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

Редактор *О. В. Георгиевская*
Компьютерная верстка *Я. А. Лесных*
Дизайн обложки *Я. А. Лесных*

Изд. лиц. ЛР № 020461 от 04.03.1997.

Подписано в печать 17.09.2026. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 6,39. Тираж 96 экз. Заказ 177.

Гигиеническое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000147.12.02. от 10.12.2002.

Издательско-полиграфический центр СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 10.

Отпечатано в издательско-полиграфическом центре СГУГиТ
630108, Новосибирск, ул. Плеханова, 8