

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«СИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ»
(ФГБОУ ВПО «СГГА»)

Институт оптики и оптических технологий

Кафедра наносистем и оплотехники

КУРС ЛЕКЦИЙ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
СЕТИ И СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

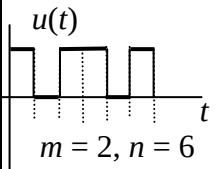
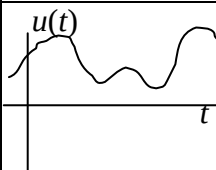
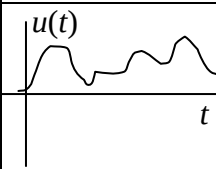
Новосибирск
СГГА

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ СВЯЗИ

1.1. Информация, сообщения, сигналы

Под **информацией** понимают совокупность каких-либо сведений о явлениях, объектах и т.п. **Сообщения** представляют собой материальную форму существования информации и могут иметь различную физическую природу. **Сигналами** в электрической связи служат процессы (функции времени) электрической природы, посредством которых осуществляется передача сообщений на расстояние. Общее и различное в этих основополагающих понятиях теории связи поясняется таблицей 1.1. В ней также указаны возможные преобразователи сообщений в сигналы, которые называют **датчиками сигналов**.

Таблица 1.1.

Вид сообщения	Математ. модель	Сигнал $u(t)$	Датчик сигнала
Текст	$a_i(k)$ $k = 1, 2, \dots, n$ $a_i \in \{a_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$		Клавиатура ЭВМ
Звук	$p = p(t)$		Микрофон
Факс Видео	$b = b(x, y)$ $b = b(x, y, t)$		ФЭ и УР Видеокамера

Текстовые сообщения представляют собой последовательности символов из некоторого конечного множества $\{a_i\}$ (языка) с известным объемом алфавита m . Преобразование такого рода сообщений в сигнал может осуществляться, например, клавиатурой ЭВМ путем поочередного кодирования отдельных символов сообщения k -разрядными комбинациями из 0 и 1, которым соответствуют два разных уровня напряжения.

Звуковые сообщения представляют собой изменения давления воздушной среды в заданной точке пространства во времени $p(t)$. С помощью микрофона они преобразуются в переменный электрический сигнал $u(t)$, который в определенном смысле является копией сообщения и отличается от него лишь физической размерностью.

Видеообщения можно рассматривать как распределение яркости на поверхности объекта $b(x, y)$, неподвижное изображение которого требуется передать на расстояние (фототелеграф), или более сложный процесс $b(x, y, t)$ (черно-белое телевидение). Характерной особенностью при передаче видеообщений

является необходимость преобразования описывающих их многомерных функций в одномерный сигнал $u(t)$. Это достигается использованием в датчиках видеосигналов устройств развертки (УР) для поэлементного преобразования яркости отдельных точек объектов в уровень электрического сигнала с помощью фотоэлементов (ФЭ) или иных фотоэлектрических преобразователей.

Классификация сигналов

По относительной ширине спектра сигналы делят на низкочастотные (называемые также НЧ, видео, широкополосные сигналы) и высокочастотные (ВЧ, радио, узкополосные, полосовые сигналы).

Для **НЧ сигналов** $\Delta F/F_{\text{ср}} > 1$, где

$\Delta F = F_{\text{max}} - F_{\text{min}}$ – абсолютная ширина спектра сигнала,

$F_{\text{ср}} = (F_{\text{max}} + F_{\text{min}})/2$ – средняя частота спектра сигнала,

F_{max} – максимальная частота в спектре сигнала,

F_{min} – минимальная частота в спектре сигнала.

Для **ВЧ сигналов** $\Delta F/F_{\text{ср}} \ll 1$.

Как правило, первичные сигналы на выходе датчиков являются низкочастотными. Полезно помнить диапазоны частот, в которых располагаются спектры типичных сигналов в системах связи и вещания:

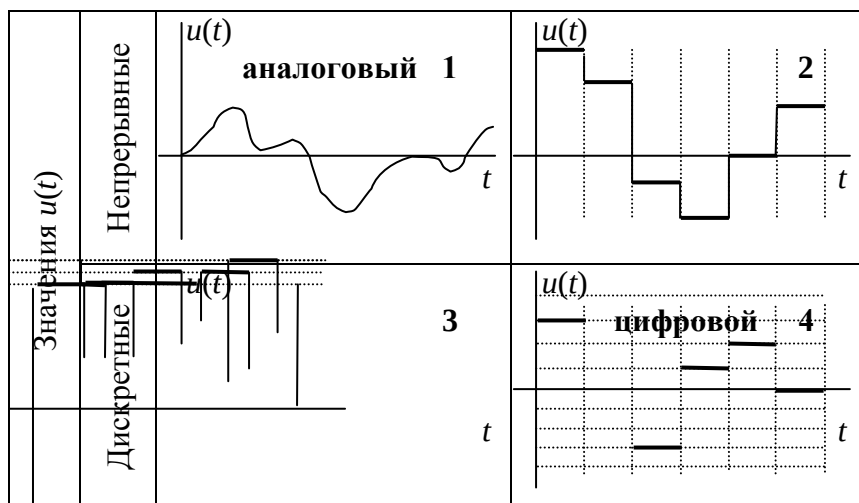
- 1) телефонный – 300 ÷ 3400 Гц (стандартный канал тональной частоты),
- 2) радиовещательный – от 30–50 Гц до 6–15 кГц,
- 3) телевизионный – 0 ÷ 6 МГц (для вещательного стандарта разложения изображения, принятого в России).

По своей природе различают сигналы детерминированные и случайные. **Детерминированные** сигналы считаются известными в каждой точке временной оси. В отличие от них значения **случайных (стохастических)** сигналов в каждый момент времени являются случайной величиной с той или иной вероятностью. Очевидно, что детерминированные сигналы в силу своей полной определенности не могут нести никакой информации. Их удобно использовать в теории для анализа различных функциональных узлов (**ФУ**), а на практике в качестве испытательных сигналов для измерения неизвестных параметров и характеристик отдельных звеньев трактов систем связи.

По форме сигналы можно разделить на четыре вида, приведенные в таблице 1.2.

Таблица 1.2.

	Время t	
	непрерывное	дискретное



Сигнал (1), непрерывный по времени и состояниям, называют **аналоговым**. Сигнал (4), дискретный по времени и состояниям, – **цифровым**. Эти сигналы чаще всего используются в различных узлах систем связи. Соответственно различают **аналоговые и цифровые ФУ** по форме сигналов на их входах и выходах. Возможны преобразования аналогового сигнала в цифровой с помощью **аналого-цифрового преобразователя (АЦП)** и, наоборот, – с помощью **цифро-аналогового преобразователя (ЦАП)**. Условные графические обозначения (УГО) этих типовых ФУ приведены на рис. 1.1.

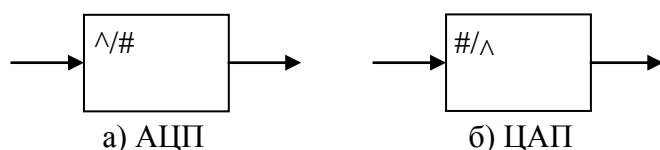


Рис. 1.1. УГО АЦП и ЦАП

Сигналы можно рассматривать в качестве объектов транспортировки по каналам связи и характеризовать основными параметрами, такими как

- **длительность сигнала** T_c ,
- **ширина его спектра** F_c ,
- **динамический диапазон** $D_c = 10 \cdot \lg \frac{P_{\max}}{P_{\min}}$ [дБ], где

$P_{\max}$ и $P_{\min}$ – максимальная и минимальная
мгновенные мощности сигнала.

Пользуются также более общей характеристикой – **объемом сигнала** $V_c = T_c \cdot F_c \cdot D_c$. На интуитивном уровне очевидно, чем больше объем сигнала, тем он информативнее, но тем и выше требования к качеству канала для его передачи.

1.2. Обобщенная структурная схема системы связи

Под системой связи (СС) понимают совокупность технических средств и среды распространения сигнала, служащих для передачи сообщений от источника к получателю.

Обобщенная структурная схема системы связи приведена на рис. 1.2. Она включает только основные ФУ (преобразователи сигналов), необходимые для передачи как дискретных, так и непрерывных сообщений.

Любая система связи начинается с источника, сообщения которого требуется доставить получателю сообщений. В зависимости от вида источника и канала возможны три основных варианта построения систем связи.

Вариант 1. В центральной части рис. 1.2 изображена структура системы передачи дискретных сообщений (СПДС). В нее входят следующие основные ФУ:

- 1) **Кодер источника**, служащий, прежде всего, для согласования объемов алфавитов дискретного источника ($m \gg 2$) и дискретного канала ($m=2$). В результате каждый символ источника преобразуется в k -разрядную двоичную комбинацию из 0 и 1. Очевидно, что $k \geq \log_2 m$.

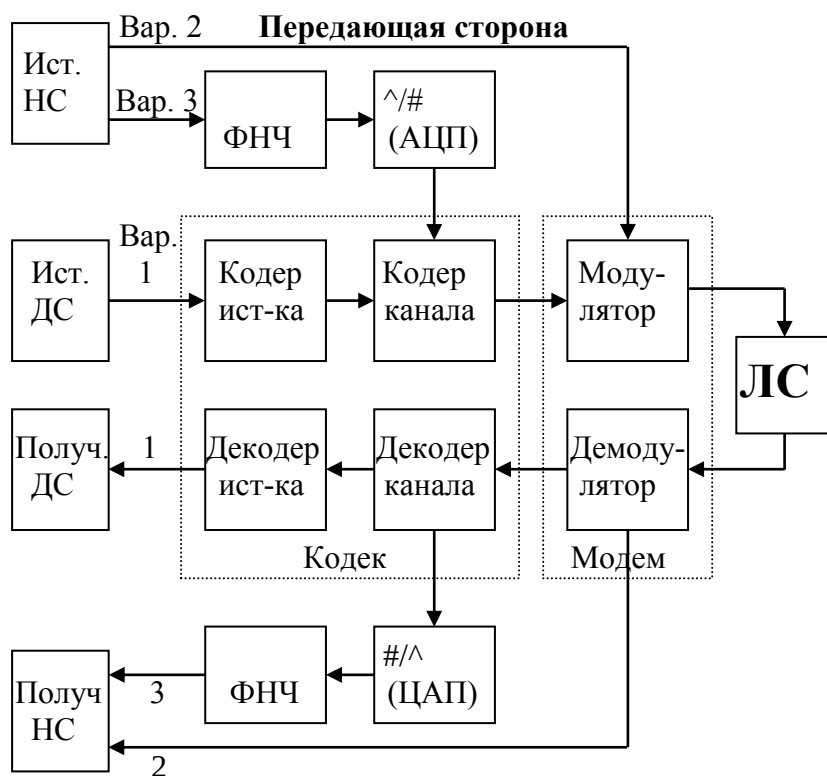


Рис. 1.2. Обобщенная структурная схема системы связи

- 2) **Кодер канала**, используемый для повышения помехоустойчивости связи. В нём к входным (информационным) кодовым комбинациям добавляются дополнительные символы, называемые проверочными, которые вместе с правилом их формирования позволяют на приемной стороне обнаруживать и (или) исправлять некоторые из возможных ошибок передачи.
- 3) **Модулятор**, служащий для согласования первичного сигнала на выходе кодирующего устройства с характеристиками линии связи. Как правило, это преобразование сводится к преобразованию НЧ сигнала в ВЧ сигнал.

- 4) **Линия связи (ЛС)**, представляющая собой среду распространения сигнала в части пространства, разделяющего передающую и приемную стороны СС. В ЛС сигнал подвергается искажениям и действию помех.
- 5) **Демодулятор**, осуществляющий анализ смеси сигнала с помехой на своем входе в течение времени его существования (временные параметры анализа обеспечиваются системой синхронизации, которая считается идеально работающей и не показана на данной схеме) и на его основе принимающий решение (возможно ошибочное) о том, какой вариант сигнала (из известного множества на входе модулятора) передавался. В результате на выход выдается «чистая» копия этого сигнала, но уже на следующем тактовом интервале.
- 6) **Декодер канала**, обнаруживающий и (или) исправляющий некоторые ошибки во входных кодовых комбинациях, вызванные действием помех в ЛС, по известному ему правилу формирования проверочных символов в коде канала.
- 7) **Декодер источника** преобразующий информационную часть кодовой комбинации в первичное сообщение (символ источника дискретных сообщений) при не обнаружении ошибок передачи.

Совокупность кодера и декодера, выполненных в виде самостоятельного ФУ, называют **кодеком**, а пару модулятор и демодулятор – **модемом**.

В тех случаях, когда сообщения по своей природе являются непрерывными (речь, музыка, видео и т.п.), а первичные сигналы соответственно аналоговыми, возможны два варианта их передачи.

Вариант 2. Передача аналогового сигнала непосредственно по ЛС, если она пропускает первичный сигнал с допустимым качеством (городская телефонная сеть), либо с использованием модулятора, реализующего прежнюю функцию согласования сигнала с ЛС. При этом несколько меняется функция демодулятора на приемной стороне, который в этой ситуации обычно называют детектором. Его задача теперь заключается в наиболее точном воспроизведении формы первичного сигнала в результате обработки принятого колебания.

Вариант 3. Передача аналогового сигнала по цифровому каналу связи. В этом случае на передающей стороне возникает необходимость преобразования аналогового первичного сигнала в цифровой с помощью АЦП (функция ФНЧ, ограничивающая спектр сигнала на входе АЦП, станет ясной при изучении в дальнейшем теоремы отсчетов). На приемной стороне полученные после декодирования числовые значения отсчетов с помощью ЦАП преобразуются в соответствующие уровни напряжения и после сглаживания в ФНЧ поступают к получателю в аналоговой форме.

Классификация систем связи

По виду передаваемых сообщений различают:

- 1) **телеграфию** (передача текста),
- 2) **телефонию** (передача речи),
- 3) **фототелеграфию** (передача неподвижных изображений),
- 4) **телевидение** (передача подвижных изображений),

- 5) **телеметрию** (передача результатов измерений),
- 6) **телеуправление** (передача управляющих команд),
- 7) **передачу данных** (в вычислительных системах и АСУ).

По диапазону частот – в соответствии с декадным делением диапазонов электромагнитных волн от **мириаметровых** ($3 \div 30$) кГц до **децимиллиметровых** ($300 \div 3000$) ГГц.

По назначению – **вещательные** (высококачественная передача речи, музыки, видео от малого числа источников сообщений большому количеству их получателей) и **профессиональные** (связные), в которых число источников и получателей сообщений одного порядка.

Различают следующие режимы работы СС:

- 1) **симплексный** (передача сигналов в одном направлении),
- 2) **дуплексный** (одновременная передача сигналов в прямом и обратном направлениях),
- 3) **полудуплексный** (поочередная передача сигналов в прямом и обратном направлениях).

Уточним уже использованный нами термин **канал связи**. Под ним принято понимать часть СС между точками А на передающей и Б на приемной сторонах. В зависимости от выбора этих точек, иначе говоря, по виду сигналов на входе и выходе различают каналы:

- 1) **непрерывные**,
- 2) **дискретные**,
- 3) **дискретно-непрерывные**,
- 4) **непрерывно-дискретные**.

Каналы связи можно характеризовать по аналогии с сигналами следующими тремя параметрами:

- **временем доступа** T_k ,
- **шириной полосы пропускания** F_k ,
- **динамическим диапазоном** $D_k = 10 \cdot \lg \frac{P_{\text{к.доп.}}}{P_{\text{ш}}}$ [дБ],

где $P_{\text{к.доп.}}$ – максимально допустимая мощность сигнала в канале,

$P_{\text{ш}}$ – мощность собственных шумов канала.

Обобщенным параметром канала является его **емкость**

$$V_k = T_k \cdot F_k \cdot D_k.$$

Очевидным необходимым условием согласования сигнала и канала является выполнение неравенства $V_c < V_k$.

Менее очевидно то, что это условие является также достаточным и вовсе не обязательно добиваться аналогичного согласования по частным параметрам (длительности, спектру, динамическому диапазону), так как возможен «обмен» ширины спектра сигнала на его длительность или динамический диапазон.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения понятиям информация, сообщение сигнал. Какие между ними связи и различия?

2. Приведите примеры сообщений разной физической природы и соответствующих им датчиков сигналов.
3. Каким образом сообщения, описываемые многомерными функциями, преобразуются в сигналы? Приведите примеры.
4. Классифицируйте сигналы по особенностям их формы и спектра.
5. По какому признаку различают НЧ и ВЧ сигналы?
6. По какому критерию различают аналоговые и цифровые сигналы и ФУ?
7. Укажите основные параметры сигналов.
8. Нарисуйте структурные схемы систем связи для:
 - передачи дискретных сообщений,
 - передачи непрерывных сообщений,
 - передачи непрерывных сообщений по цифровым каналам.
9. Укажите назначение следующих ФУ систем связи:
 - кодера источника и кодера канала,
 - модулятора,
 - демодулятора,
 - декодера канала и декодера источника.
10. Что общего и различного в задачах, решаемых демодуляторами СПДС и СПНС?
11. Какие системы связи Вам известны:
 - по виду передаваемых сообщений,
 - по диапазону используемых частот,
 - по назначению,
 - по режимам работы?
12. Дайте определение термину «канал связи». Какая классификация каналов связи Вам известна?
13. Укажите основные параметры каналов связи.
14. Сформулируйте условия согласования сигналов и каналов связи.

Рекомендации по проведению экспериментальных исследований сигналов в системах связи

Для закрепления полученных в разделах 1.1 и 1.2. знаний полезно выполнить лабораторную работу № 14 «Знакомство с системами ПДС» (из перечня тем виртуальной учебной лаборатории) в полном объеме. Эта работа носит ознакомительный характер и позволяет наблюдать все основные процессы получения, преобразования и приёма сигналов в системах передачи дискретных сообщений (рис. 1.3). Следует обратить внимание на осциллограммы и спектрограммы сигналов на выходах типовых ФУ (кодера источника при выборе разных типов интерфейса, кодера канала при выборе разных помехоустойчивых кодов, модулятора при разных видах модуляции, демодулятора и декодера), входящих в системы ПДС, и сопоставить с ними свои представления, полученные в ходе изучения раздела.

Рекомендуется по результатам наблюдения сигналов в разных точках тракта СПДС провести их классификацию, определить их основные параметры, а также выделить в СПДС разные типы каналов (непрерывный, дискретный, дискретно-непрерывный и непрерывно-дискретный). Полезно также получение наглядного представления о функции каждого ФУ СПДС.

Для закрепления полученных сведений о различии НЧ и ВЧ сигналов и

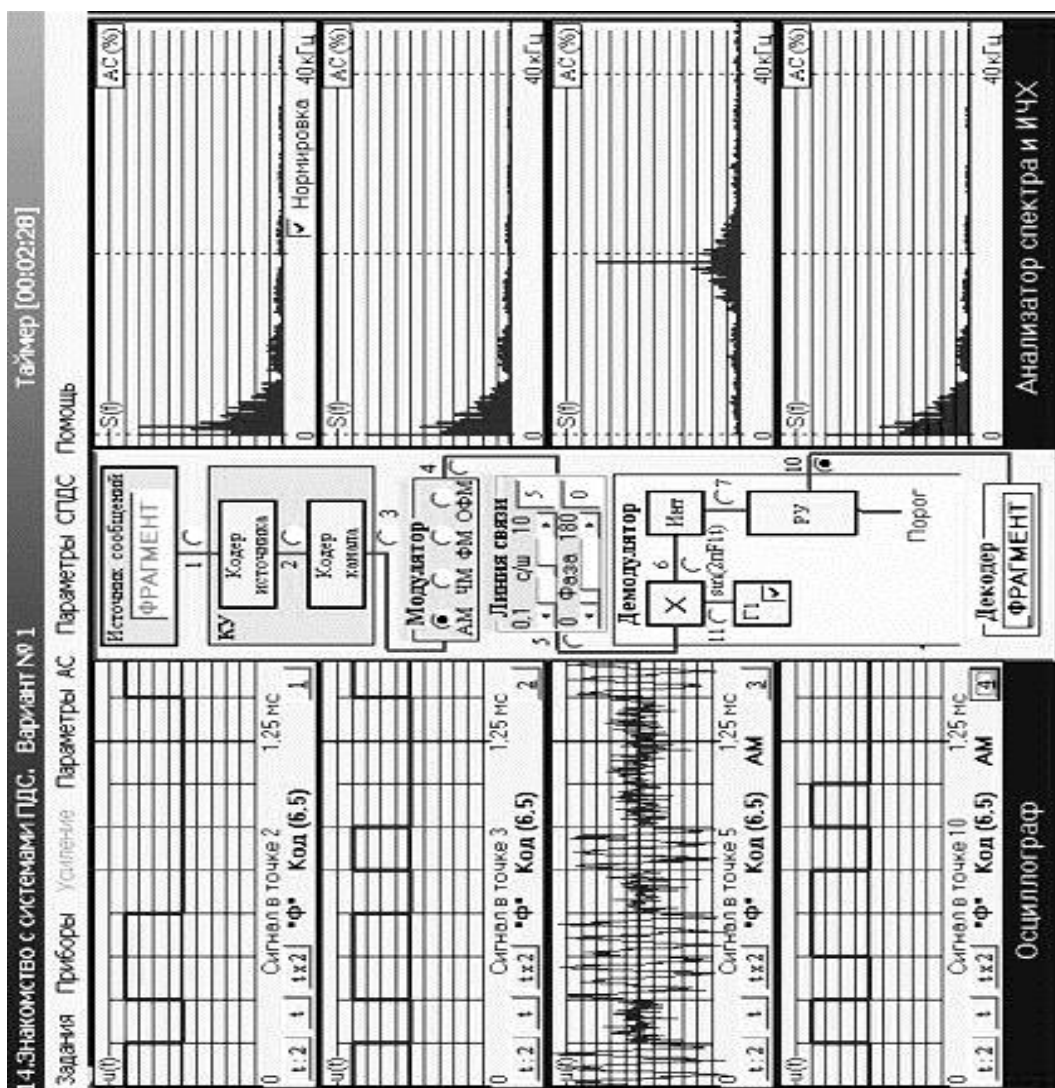


Рис. 1.3. Некоторые сигналы и их спектры в системе ПДС

наполнения их практическим содержанием целесообразно провести исследования в рамках лабораторной работы № 4 «Модулированные сигналы». Выбирая

в качестве первичных НЧ сигналы разных форм, обратите внимание не только на различие осциллограмм и спектрограмм первичных (НЧ) и модулированных (ВЧ) сигналов, но и на объединяющие их признаки при использовании разных видов модуляции (рис. 1.4).

При выполнении указанных работ не обязательно строго придерживаться имеющихся в них заданий. Используйте возможности ресурсов ВЛ для проведения исследований по своему усмотрению и желанию.

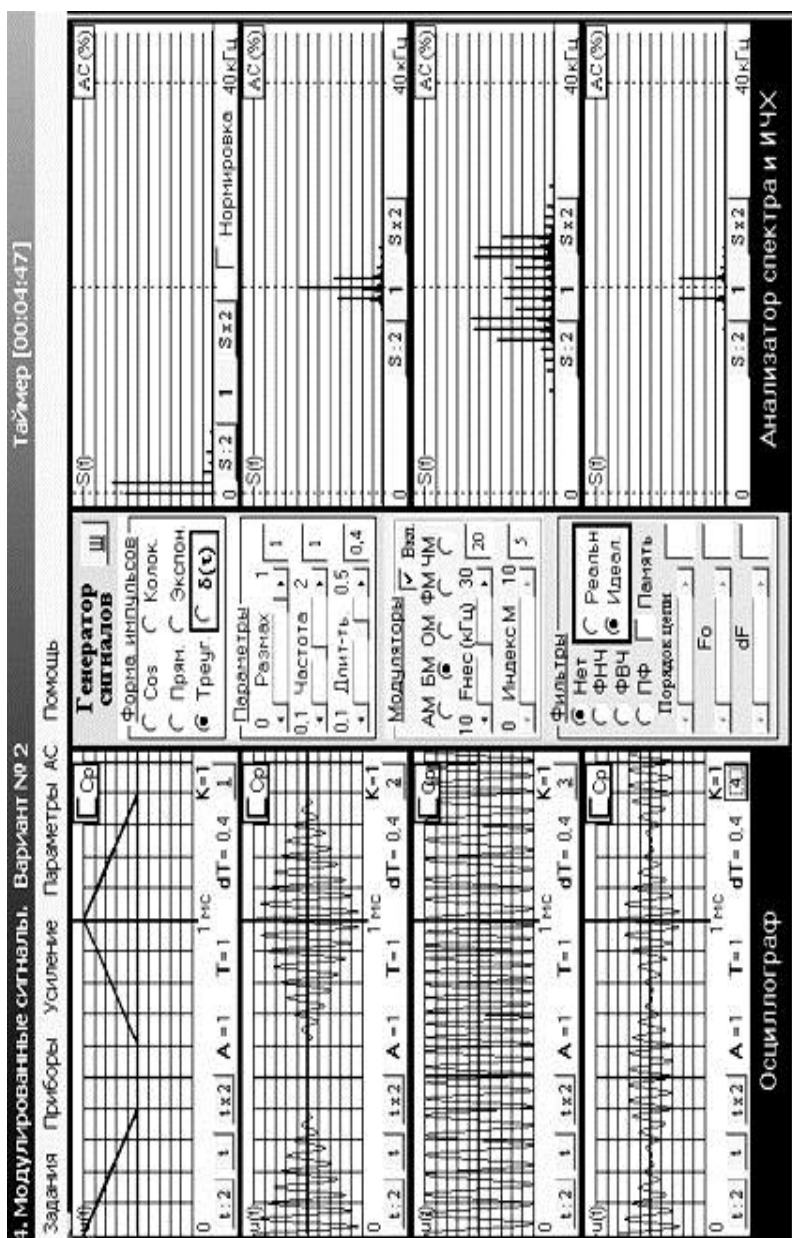


Рис. 1.4. Некоторые сигналы и их спектры

2. Математические модели сигналов

2.1. Сигналы как элементы функциональных пространств

Сигналы – это, прежде всего, процессы, т.е. функции времени $x(t)$, существующие на ограниченном интервале T (в теории возможно $T \rightarrow \infty$). Их можно изобразить графически (рис. 2.1) и описывать упорядоченной последовательностью значений в отдельные моменты времени t_k

$$x(t) \rightarrow x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_k), \dots, x(t_n) = \bar{x}$$

(вектор строка).

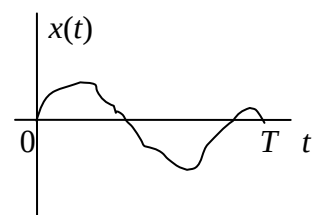


Рис. 2.1. График сигнала

Разные сигналы отличаются формой (набором значений $x(t_k)$). Вместо сложной совокупности точек кривой $x(t)$ в простой области – двумерном пространстве можно ввести в рассмотрение более сложные пространства (пространства сигналов), в которых каждый сигнал изображается простейшим элементом – точкой (вектором).

В математике под пространством понимают множество объектов (любой физической природы), наделенных некоторым общим свойством. Свойства, которыми целесообразно наделять пространства сигналов, должны отражать наиболее существенные свойства реальных сигналов, такие как их длительность, энергия, мощность и т.п.

Метрические пространства

Первое свойство, которым мы наделим пространство сигналов, называют метрикой.

Метрическое пространство – это множество с подходящим образом определенным расстоянием между его элементами. Само это расстояние, как и способ его определения, называют **метрикой** и обозначают $d(\bar{x}, \bar{y})$. Метрика должна представлять собой функционал, т.е. отображение любой пары элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ множества на действительную ось, удовлетворяющее интуитивно понятным требованиям (аксиомам):

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1) $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$ | (равенство при $\bar{x} = \bar{y}$), |
| 2) $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$, | |
| 3) $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y})$ | (аксиома треугольника). |

Следует отметить, что метрики можно задать разными способами и в результате для одних и тех же элементов получить разные пространства.

Примеры метрик:

- | | |
|---|--------------------|
| 1) $d_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i - y_i $, | |
| 2) $d_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ | евклидова метрика, |
| 3) $d_3(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\int_0^T [x(t) - y(t)]^2 dt}$ | евклидова метрика. |

Линейные пространства

Усовершенствуем структуру пространства сигналов, наделив его простыми алгебраическими свойствами, присущими реальным сигналам, которые можно алгебраически складывать и умножать на числа.

Линейным пространством L над полем F называют множество элементов $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in L$, называемых векторами, для которых заданы две операции – сложение элементов (векторов) $\bar{x} + \bar{y}$ и умножение векторов на элементы $\lambda \in F$ из поля F (называемые **скалярами**) $\lambda \bar{x}$. Не вдаваясь в математические детали, в дальнейшем, под полем скаляров будем понимать множества вещественных чисел R (случай действительного пространства L) или комплексных чисел C (случай комплексного пространства L). Эти операции должны удовлетворять системе аксиом линейного пространства.

- | | |
|--|------------------|
| 1. Замкнутость операций сложения и умножения на скаляр: | |
| $\forall(\bar{x}, \bar{y} \in L) \quad \exists!(\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \in L),$ | |
| $\forall(\bar{x} \in L, \lambda \in F) \quad \exists!(\bar{y} = \lambda \bar{x} \in L).$ | |
| 2. Свойства сложения: | |
| $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$ | ассоциативность, |

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

коммутативность.

3. Свойства умножения на скаляр:

$$\alpha(\beta\vec{x}) = \alpha\beta\vec{x}$$

ассоциативность,

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$$

дистрибутивность суммы векторов,

$$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$$

дистрибутивность суммы скаляров.

4. $\exists!(\vec{0}) \Rightarrow \forall(\vec{x} \in L) \Rightarrow \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ существование нулевого вектора.

5. $\forall(\vec{x} \in L) \exists!(-\vec{x} \in L) \Rightarrow -\vec{x} + \vec{x} = \vec{0}$ существование противоположного вектора.

Вектор, образованный суммированием нескольких векторов со скалярными коэффициентами

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i,$$

называют **линейной комбинацией** (многообразиям). Легко видеть, что множество всех линейных комбинаций векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ при разных α_i (не затрагивая $\vec{x}_i$,) также образует линейное пространство, называемое **линейной оболочкой** для векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.

Множество векторов называют **линейно независимыми**, если равенство

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$$

возможно лишь при всех $\alpha_i = 0$. Например, на плоскости любые два неколлинеарные вектора (не лежащие на одной прямой) являются линейно независимыми.

Система линейно независимых и ненулевых векторов $\{\vec{e}_i\}$, $\vec{e}_i \in L$ образует в пространстве L **базис**, если

$$\forall(\vec{x} \in L) \exists!(\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i, \alpha_i \in F).$$

Этот единственный набор скаляров $\{\alpha_i\}$, соответствующий конкретному вектору $\vec{x}$, называют его **координатами (проекциями)** по базису $\{\vec{e}_i\}$.

Благодаря введению базиса операции над векторами превращаются в операции над числами (координатами)

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \vec{e}_i.$$

Если в линейном пространстве L можно отыскать n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторов зависимы, то n – **размерность** пространства L ($\dim L = n$).

Нормированные пространства

Следующий наш шаг в совершенствовании структуры пространства сигналов – объединение геометрических (характерных для метрических пространств) и алгебраических (для линейных пространств) свойств путем введения действи-

тельного числа, характеризующего «размер» элемента в пространстве. Такое число называют **нормой** вектора и обозначают $\|\vec{x}\|$.

В качестве нормы можно использовать любое отображение линейного пространства на действительную ось, удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1) $\|\vec{x}\| \geq 0$, $\|\vec{0}\| = 0$,
- 2) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$,
- 3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Пространства со скалярным произведением

Введем еще одну дополнительную геометрическую характеристику (операцию) в пространстве сигналов в виде отображения упорядоченной пары векторов на поле скаляров из F . Эту операцию называют **скалярным (внутренним) произведением** векторов и записывают в виде $(\vec{x}, \vec{y})$, т.е.

$$\forall (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle; \vec{x}, \vec{y} \in L) \quad \exists! (\alpha = (\vec{x}, \vec{y}), \alpha \in F).$$

Скалярное произведение должно удовлетворять следующей системе аксиом (над полем комплексных чисел):

- | | |
|---|--|
| 1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})^*$ | эрмитова симметрия, |
| 2) $(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$ | дистрибутивность, |
| 3) $(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$ | ассоциативность, $(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha^*(\vec{x}, \vec{y})$ |
| 4) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, | если $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. |

Из этих аксиом следует, что

$$(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2, \vec{y}) = \alpha_1(\vec{x}_1, \vec{y}) + \alpha_2(\vec{x}_2, \vec{y}).$$

Если $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, то векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ **ортогональны** $[\vec{x} \perp \vec{y}]$.

Если $\{\vec{x}_i\} \Rightarrow (\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$), то система векторов $\{\vec{x}_i\}$ **ортонормированная**. Легко показать, что система ортонормированных векторов – линейно независимая.

В линейном пространстве со скалярным произведением целесообразно норму и метрику определять через скалярное произведение

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}, \quad d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y})}.$$

Весьма важное значение имеет соотношение, называемое **неравенством Коши-Буняковского-Шварца**

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

На основе скалярного произведения можно ввести понятие **угла** φ между двумя векторами, исходя из соотношения

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos \varphi.$$

В ТЭС наибольший практический интерес представляют следующие линейные нормированные метрические пространства:

1. R_n – n -мерное вещественное евклидово пространство, в котором каждый вектор определяется совокупностью n его координат $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Скалярное произведение векторов в этом пространстве

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Оно порождает норму и расстояние

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

2. $L_2(T)$ – бесконечномерные пространства (Гильберта), которое образуют непрерывные комплексные $\dot{x}(t)$ или вещественные $x(t)$ функции, заданные на интервале $(0, T)$.

Скалярное произведение векторов в этом пространстве

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \int_0^T \dot{x}(t) \dot{y}^*(t) dt.$$

$$\text{Квадрат нормы } \|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = \int_0^T \dot{x}(t) \dot{x}^*(t) dt = \int_0^T |\dot{x}(t)|^2 dt$$

имеет ясный физический смысл энергии E_x сигнала, если под $x(t)$ иметь в виду напряжение (или ток) на сопротивлении 1 Ом. Квадрат расстояния между вещественными сигналами $x(t)$ и $y(t)$ определяется соотношением

$$d^2(\vec{x}, \vec{y}) = \int_0^T [x(t) - y(t)]^2 dt$$

и имеет смысл энергии разностного сигнала.

3. $L_2(\infty)$ – бесконечномерные пространства (Гильберта), которое образуют непрерывные комплексные $\dot{x}(t)$ или вещественные $x(t)$ функции, заданные на интервале $(-T/2, T/2)$ при $T \rightarrow \infty$. Если для вещественных функций условие

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

не выполняется, но выполняется условие ограничения мощности

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt < \infty,$$

то можно ввести скалярное произведение векторов в этом пространстве с размерностью мощности

$$(\vec{x}, \vec{y})_p = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{x}(t) \dot{y}^*(t) dt$$

$$\text{и норму } \|\vec{x}\|_p = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})_p} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\dot{x}(t)|^2 dt}.$$

4. 2_n – n -мерное пространство Хэмминга, которые образуют двоичные n -последовательности (кодовые комбинации из 0 и 1), широко используемые в системах ПДС. Норму и метрику в этом пространстве задают в виде

$$\|\vec{x}\| = \sum_{i=1}^n x_i, \quad d(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i \oplus y_i|,$$

где знак $\oplus$ обозначает операцию сложения по модулю 2 (по правилам: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$).

Таким образом, норма вектора в пространстве Хэмминга определяется общим количеством содержащихся в нем единиц, а расстояние между двоичными векторами – количеством позиций (разрядов) кодовых комбинаций, в которых они различаются.

Следует отметить, что вещественные пространства R_n (при $n \rightarrow \infty$), $L_2(T)$ и $L_2(\infty)$ **изоморфны (эквивалентны)**. Это означает, что между их элементами (равно как суммами элементов, их произведениями на скаляры и скалярными произведениями) можно установить взаимно-однозначное соответствие. Изоморфны также соответствующие им комплексные пространства. Понятие изоморфизма имеет большое практическое значение, так как позволяет представить одну модель сигнала другой.

2.2. Разложение сигналов в обобщенный ряд Фурье

Введем в пространстве $L_2(T)$ базис $\{\psi_i(t)\}$. Для упрощения последующих вычислений будем полагать, что он **ортонормированный**, т.е. отвечает условию

$$(\bar{\Psi}_i, \bar{\Psi}_j) = \int_{-T/2}^{T/2} \Psi_i(t) \Psi_j(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Тогда любую функцию $x(t)$ из $L_2(T)$ можно представить через проекции C_i вектора $\vec{x}$ на оси базиса – функции $\{\psi_i(t)\}$ **обобщённым рядом Фурье**

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \Psi_i(t). \quad (2.1)$$

Для нахождения проекций C_j , называемых также **коэффициентами разложения** $x(t)$ в обобщенный ряд Фурье, вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\vec{x}, \bar{\Psi}_j) &= \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \Psi_j(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} C_i \Psi_i(t) \right] \Psi_j(t) dt = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int_{-T/2}^{T/2} \Psi_i(t) \Psi_j(t) dt = C_j \|\bar{\Psi}_j\|^2 = C_j \end{aligned}$$

Таким образом

$$C_j = (\vec{x}, \bar{\Psi}_j) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \Psi_j(t) dt.$$

Получим еще одно важное соотношение

$$(\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) \cdot dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \Psi_i(t) \right]^2 \cdot dt = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 = E_x, \text{ являющееся частным слу-}$$

чаем **равенства Парсеваля**.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под «пространством сигналов»?

2. Какие пространства называют метрическими?
3. Что такое «метрика» пространства и каким требованиям она должна удовлетворять?
4. Какие пространства называют линейными?
5. Сформулируйте аксиомы линейного пространства.
6. Каковы условия линейной независимости векторов?
7. Что такое «линейная оболочка» векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$?
8. Что такое «базис» в пространстве L ?
9. Что называют координатами (проекциями) вектора по заданному базису?
10. Какие пространства называют нормированными?
11. Что представляет собой норма вектора и каким требованиям она должна удовлетворять?
12. Какой физический смысл имеет норма сигнала в пространствах $L_2(T)$ и $L_2(\infty)$?
13. Что представляет собой скалярное произведение векторов и какими свойствами оно обладает?
14. Как определяют «угол» между векторами (сигналами)?
15. Приведите примеры пространств со скалярным произведением. Как оно вычисляется в этих пространствах?
16. Как скалярное произведение порождает норму и метрику?
17. Что называют обобщённым рядом Фурье?
18. Как вычисляют коэффициенты разложения в обобщённый ряд Фурье?
19. Напишите равенство Парсеваля и дайте ему физическую трактовку.

2.3. Спектральное представление сигналов

Спектры периодических сигналов

Периодическими называют сигналы, обладающие следующим свойством

$$x(t) = x(t - kT), \text{ где } T - \text{период, } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Как известно, такие функции (если они удовлетворяют известным из математики условиям Дирихле, которые для интересующих нас случаев всегда выполняются) можно представить суммой тригонометрического ряда (**ряда Фурье**)

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \quad (2.2)$$

$$\text{где } a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos k\omega_1 t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin k\omega_1 t dt,$$

$$\omega_1 = 2\pi F_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Форма (2. 1) ряда Фурье удобна с точки зрения простоты вычисления коэффициентов разложения a_k и b_k . Ряд Фурье можно записать иначе

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k), \quad (2.3)$$

$$\text{где} \quad A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k},$$

$$\dot{A}_k = a_k - jb_k = A_k e^{j\varphi_k}.$$

Совокупность амплитуд A_k называют **амплитудным**, а совокупность фаз φ_k – **фазовым спектрами**. Их можно изображать графически (рис. 2.1). Амплитудный и фазовый спектры сигнала в совокупности однозначно определяют его форму (временную зависимость).

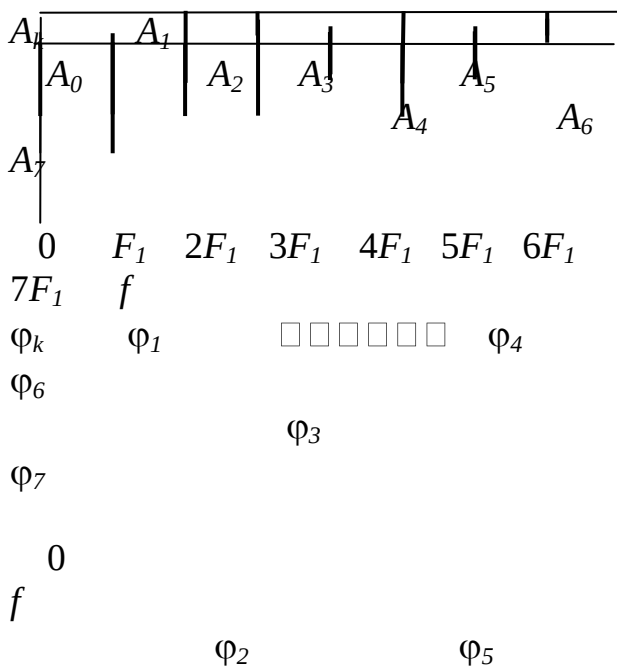


Рис. 2.1. Амплитудный и фазовый спектры

Наиболее компактной является запись ряда Фурье в комплексной форме

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (2.4)$$

$$\text{где} \quad \dot{C}_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

Комплексный спектр (2.4) можно интерпретировать как представление $x(t)$ в виде сумм спектральных составляющих $\dot{C}_k \cdot e^{jk\omega_1 t}$, каждая из которых представляет собой пару гармонических колебаний с половинной амплитудой $\frac{\dot{A}_k}{2}$ на положительной $(+|k|\omega_1)$ и отрицательной $(-|k|\omega_1)$ частотах. Для вещественных функций $x(t)$

$A_k = A_{-k}$ – амплитудный спектр – чётная функция частоты,

$\varphi_k = -\varphi_{-k}$ – фазовый спектр – нечётная функция частоты.

Сопоставляя (2.2) и (2.4) с (2.1), нетрудно убедиться, что ряд Фурье является частным случаем обобщённого ряда Фурье при выборе в качестве базиса совокупности тригонометрических $\{\cos(k\omega_1 t), \sin(k\omega_1 t)\}$ или экспоненциальных $\{e^{jk\omega_1 t}\}$ функций.

Выводы

1. Математическим аппаратом спектрального анализа периодических сигналов являются ряды Фурье.
2. Спектры периодических сигналов дискретные (линейчатые), представляют собой совокупность амплитуд и фаз гармонических колебаний (составляющих) следующих по оси частот через интервалы $\Delta f = f_1 = 1/T$.
3. Ряд Фурье является частным случаем обобщенного ряда Фурье при использовании в качестве базиса

$$\left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot kt\right), \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot kt\right) \right\} \text{ или } \left\{ e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot kt} \right\}.$$

Спектры Т-финитных сигналов

Т-финитными называют ограниченные по времени сигналы. По определению они не могут быть периодическими и, следовательно, к ним не применимо разложение в ряды Фурье.

Чтобы получить адекватное описание таких сигналов в частотной области используют следующий прием. На первом этапе от заданного сигнала $x(t)$, имеющего начало в точке t_1 и конец в точке t_2 переходят к сигналу $x_{\Pi}(t)$, являющемуся периодическим повторением $x(t)$ на бесконечной оси времени с периодом $T > \frac{1}{t_2 - t_1}$. Сигнал $x_{\Pi}(t)$ можно разложить в ряд Фурье

$$x_{\Pi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k T e^{jk\omega_1 t} \Delta f,$$

$$\text{где } \Delta f = \frac{1}{T} = F_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}.$$

Введём в рассмотрение текущую частоту $\omega_k = k\omega_1$ и спектральную плотность амплитуд $\dot{S}_k(f_k) = \frac{\dot{C}_k}{\Delta f} = \dot{C}_k T$.

$$\text{Тогда} \quad x_{\Pi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}_k e^{j\omega_k t} \Delta f.$$

Исходный сигнал $x(t)$ можно получить из $x_{\Pi}(t)$ в результате предельного перехода $T \rightarrow \infty$.

При этом

$$\begin{aligned} \Delta f &\rightarrow df, \quad \omega_k \rightarrow \omega = 2\pi f, \quad \sum \rightarrow \int, \\ \dot{S}_k &\rightarrow \dot{S}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \dot{C}_k = \lim_{T \rightarrow \infty} T \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega_k t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \dot{C}_k = \dot{S}_k(f_k) \Delta f \rightarrow \dot{S}(f) df = d\dot{C}(f), \\ x_{\Pi}(t) &\rightarrow x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_{\Pi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f) e^{j\omega t} df \end{aligned}$$

Таким образом, для описания спектра финитного сигнала приходим к известному в математике интегральному преобразованию Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(j2\pi f) e^{j2\pi f t} df \quad - \text{ прямое,}$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad - \text{ обратное.}$$

В данном случае (и в дальнейшем) комплексную функцию $\dot{S}(\omega)$ записали в виде $S(j\omega)$, как это принято в научно-технической литературе.

Из полученных соотношений следует, что спектр Т-финитного сигнала сплошной. Он представляет собой совокупность бесконечного числа спектральных составляющих с бесконечно малыми амплитудами $d\dot{C}(\omega)$, непрерывно следующих по оси частот. Вместо этих бесконечно малых амплитуд используют спектральную функцию (спектральную плотность амплитуд)

$$S(j\omega) = \frac{d\dot{C}(\omega)}{d\omega} = 2\pi \frac{d\dot{C}(2\pi f)}{df} = 2\pi S(jf) = S(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где $S(\omega) = |S(j\omega)|$ – амплитудный спектр,

$\varphi(\omega) = \arg[S(j\omega)]$ – фазовый спектр.

Выводы

1. Математическим аппаратом спектрального анализа Т-финитных сигналов является интегральное преобразование Фурье.
2. Спектры Т-финитных сигналов сплошные и описываются непрерывными функциями частоты в виде модуля спектральной плотности амплитуд $S(\omega) = |S(j\omega)|$ (амплитудный спектр) и её аргумента $\varphi(\omega) = \arg[S(j\omega)]$ (фазовый спектр).

Свойства преобразования Фурье

1. Прямое и обратное преобразование Фурье являются **линейными операторами**, следовательно, действует принцип суперпозиции.

$$\text{Если } x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t), \text{ то } S_x(j\omega) = \sum_{i=1}^n S_{x_i}(j\omega).$$

2. Прямое и обратное преобразование Фурье являются **взаимно однозначными**.

3. **Свойство запаздывания.**

Если $x(t) \rightarrow S_x(j\omega)$, то

$$\begin{aligned} x_\tau(t) = x(t - \tau) &\rightarrow S_{x_\tau}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(y) e^{-j\omega(y + \tau)} dy = S_x(j\omega) e^{-j\omega\tau} \end{aligned}$$

(в данном случае использованы подстановки: $t - \tau = y$, $t = y + \tau$, $dt = dy$).

4. **Спектральная функция δ -функции.**

Используя общее выражение спектральной функции и фильтрующее свойство δ -функции, получим

$$S_{\delta}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

5. Спектральная функция комплексного гармонического сигнала
 $\dot{x}(t) = \dot{C} e^{j\omega_0 t}.$

$$S_{\dot{x}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{C} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \dot{C} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \quad (2.5)$$

Используя одно из определений δ -функции $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} df$

и выполняя в нём взаимную замену t и ω (или f), получим

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt \text{ и } \delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} dt = 2\pi\delta(\omega).$$

Сопоставляя полученный результат с (2.5), имеем

$$S_{\dot{x}}(j\omega) = 2\pi\dot{C}\delta(\omega - \omega_0) = \dot{C}\delta(f - f_0) \quad (2.6)$$

6. Скалярное произведение комплексных сигналов в спектральной области. Пусть $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ – комплексные функции на интервале $(-T/2, T/2)$. Их скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\vec{\dot{x}}, \vec{\dot{y}}) &= \int_{-T/2}^{T/2} \dot{x}(t) \dot{y}^*(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(j\omega) e^{j\omega t} df \cdot \dot{y}^*(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(j\omega) df \int_{-T/2}^{T/2} \dot{y}^*(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(j\omega) S_{\dot{y}}^*(j\omega) df. \end{aligned}$$

Из полученного результата для вещественных функций $x(t)$ вытекает **равенство Парсеваля** (обобщённая формула Рэлея)

$$(\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) S_x^*(j\omega) df = \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j\omega)|^2 df = E_x,$$

где E_x – энергия сигнала $x(t)$,

а $W_x(\omega) = |S_x(j\omega)|^2$ – спектральная плотность энергии.

Для сигналов $x(t)$, заданных на бесконечной оси времени $(-\infty, +\infty)$, с $E_x \rightarrow \infty$, но имеющих ограниченную мощность P_x , вместо спектральной плотности энергии $W_x(\omega)$ можно использовать спектральную плотность мощности (энергетический спектр)

$$G_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} W_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_x(j\omega)|^2.$$

Тогда $P_x = (\vec{\dot{x}}, \vec{\dot{x}})_p = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) df = 2 \int_0^{\infty} G_{x0}(\omega) d\omega$, т.к.

$G_x(\omega) = G_x(-\omega)$ и $W_x(\omega) = W_x(-\omega)$ – чётные функции, $G_{x0}(\omega) = 2G_x(\omega)$ – односторонняя спектральная плотность мощности (энергетический спектр).

7. **Скалярное произведение комплексных сигналов $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}_\tau(t) = \dot{y}(t - \tau)$ в спектральной области.** $(\vec{x}, \vec{y}_\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(j\omega) S_{\dot{y}_\tau}^*(j\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(j\omega) S_{\dot{y}}^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$.

При $\dot{x}(t) = x(t)$ и $\dot{y}_\tau(t) = x_\tau(t) = x(t - \tau)$

$$(\vec{x}, \vec{x}_\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) S_x^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = B_{x,E}(\tau),$$

$$(\vec{x}, \vec{x}_\tau)_p = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = B_x(\tau) -$$

– **корреляционная функция сигнала $x(t)$.**

Из последнего выражения вытекают важные соотношения между корреляционной функцией и энергетическим спектром сигнала

$$\boxed{\begin{aligned} B_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \\ G_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{aligned}}$$

8. **Спектр произведения сигналов $z(t) = ax(t)y(t)$.**

$$\begin{aligned} S_z(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\xi) e^{j\xi t} d\xi \right] y(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j(\omega - \xi)t} dt = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\xi) S_y[j(\omega - \xi)] d\xi = \frac{a}{2\pi} S_x(j\omega) \otimes S_y(j\omega), \\ S_x(j\omega) \otimes S_y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\xi) S_y[j(\omega - \xi)] d\xi - \text{свертка функций } S_x(j\omega) \\ &\text{и } S_y(j\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, спектральная функция произведения двух сигналов является свёрткой их спектральных функций.

Справедливо также и обратное соотношение

$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = 2\pi S_x(j\omega) S_y(j\omega).$$

9. **Свойство смещения спектра.**

$$\begin{aligned} \text{Если } \dot{y}(t) &= x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}, \text{ то} & S_y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \\ & & &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = S_x[j(\omega - \omega_0)]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

10. **Ширина спектра.**

Теоретически ширина спектра сигналов бесконечна. Однако, учитывая, что интенсивность спектральных составляющих реальных сигналов уменьшается с ростом их частоты (не обязательно монотонно), можно ввести понятие практической (конечной) ширины спектров (рис. 2.3 и 2.4). Практическую ширину спектра $\Delta\Omega$ можно определять как ширину частотного интервала, в пределах которого амплитудный спектр $S(\omega)$ не

меньше некоторого условного уровня γ (например $\gamma = 0,1$) от $S(\omega)_{\max}$ или энергия (мощность) сигнала составляет определённую часть γ (например $\gamma = 0,9$) от полной

$$\frac{1}{2p_{\text{ДВ}}} \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j\omega)|^2 d\omega = \frac{\gamma}{2p_{\text{Г}}} \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j\omega)|^2 d\omega = \gamma E_x.$$

Для импульсов простых форм (прямоугольной, треугольной и т.п.), спектральная функция которых периодически принимает нулевые значения с ростом частоты (рис. 2.3 и 2.4), практическую ширину спектра часто определяют по первому или второму или иному «нулю» амплитудного спектра.

Независимо от способа определения практической ширины спектра T -финитного сигнала выполняется общая закономерность – произведение практической ширины спектра на длительность сигнала Δt есть константа C , зависящая только от формы импульса

$$\Delta\Omega \cdot \Delta t = C.$$

Это соотношение имеет фундаментальное значение в теории связи. Из него вытекает, что чем короче сигнал, тем шире его спектр и, следовательно, тем более широкополосный канал требуется для его передачи.

Контрольные вопросы

1. Какие сигналы являются периодическими?
2. Какой математический аппарат используется для спектрального анализа периодических сигналов?
3. Что называют амплитудным и фазовым спектрами периодического сигнала?
4. Какими свойствами обладают спектры периодических сигналов?
5. Как вычисляют амплитуды и фазы спектральных составляющих периодических сигналов?
6. Какие сигналы называют T -финитными?
7. Какой математический аппарат используется для спектрального анализа T -финитных сигналов?
8. Что такое спектральная функция (спектральная плотность амплитуд) сигнала и какова её размерность?
9. Что понимают под амплитудным и фазовым спектрами T -финитного сигнала?
10. Как изменяется спектр сигнала в результате его задержки на время τ ?
11. Что представляет собой спектр δ -функции?
12. Какова спектральная функция гармонического колебания?
13. Как можно вычислить скалярное произведение сигналов в спектральной области?
14. Что представляют собой спектральные плотности энергии и мощности сигналов? Каковы их размерности и свойства?
15. Что представляет собой корреляционная функция сигнала $B_x(\tau)$?
16. Как вычисляют спектр произведения сигналов?

17. Как изменяется спектр сигнала в результате его умножения на гармоническое колебание?

Рекомендации по проведению экспериментальных исследований ортогональности и спектров сигналов

Для закрепления полученных в разделе 2.1 знаний полезно провести экспериментальные исследования на базе лабораторной работы № 5 «Ортогональность сигналов» (из перечня тем виртуальной учебной лаборатории) в полном объеме (рис. 2.2). Она позволяет понять, как на практике реализуется вычисление скалярного произведения двух сигналов, экспериментально определить являются ли выбранные пары сигналов ортогональными на установленном временном интервале. Обратите внимание на условия ортогональности двух гармонических сигналов разных частот и их связь с интервалом ортогональности.

Для закрепления полученных в разделе 2.3 знаний по спектральному представлению периодических сигналов полезно выполнить лабораторную работу № 1 «Сигналы и спектры» в полном объеме, а также провести дополнительные экспериментальные исследования, используя иные виды сигналов в рамках предоставляемых этой работы ресурсов (рис. 2.3). Обратите внимание на дискретность спектров и связи их характеристик с параметрами и формой сигналов.

Для закрепления полученных в разделе 2.3 знаний по спектральному представлению финитных сигналов полезно на базе лабораторной работы № 22 «Согласованная фильтрация сигналов известной формы» провести экспериментальные исследования спектров одиночных импульсов разных форм, используя генератор сигналов, предоставляемый этой работой (рис. 2.4). Обратите внимание на сплошной характер спектров одиночных импульсов и на их связь с формой импульсов.

При выполнении указанных работ не обязательно строго придерживаться имеющихся в них заданий. Используйте возможности ресурсов ВЛ для проведения исследований по своему усмотрению и желанию.

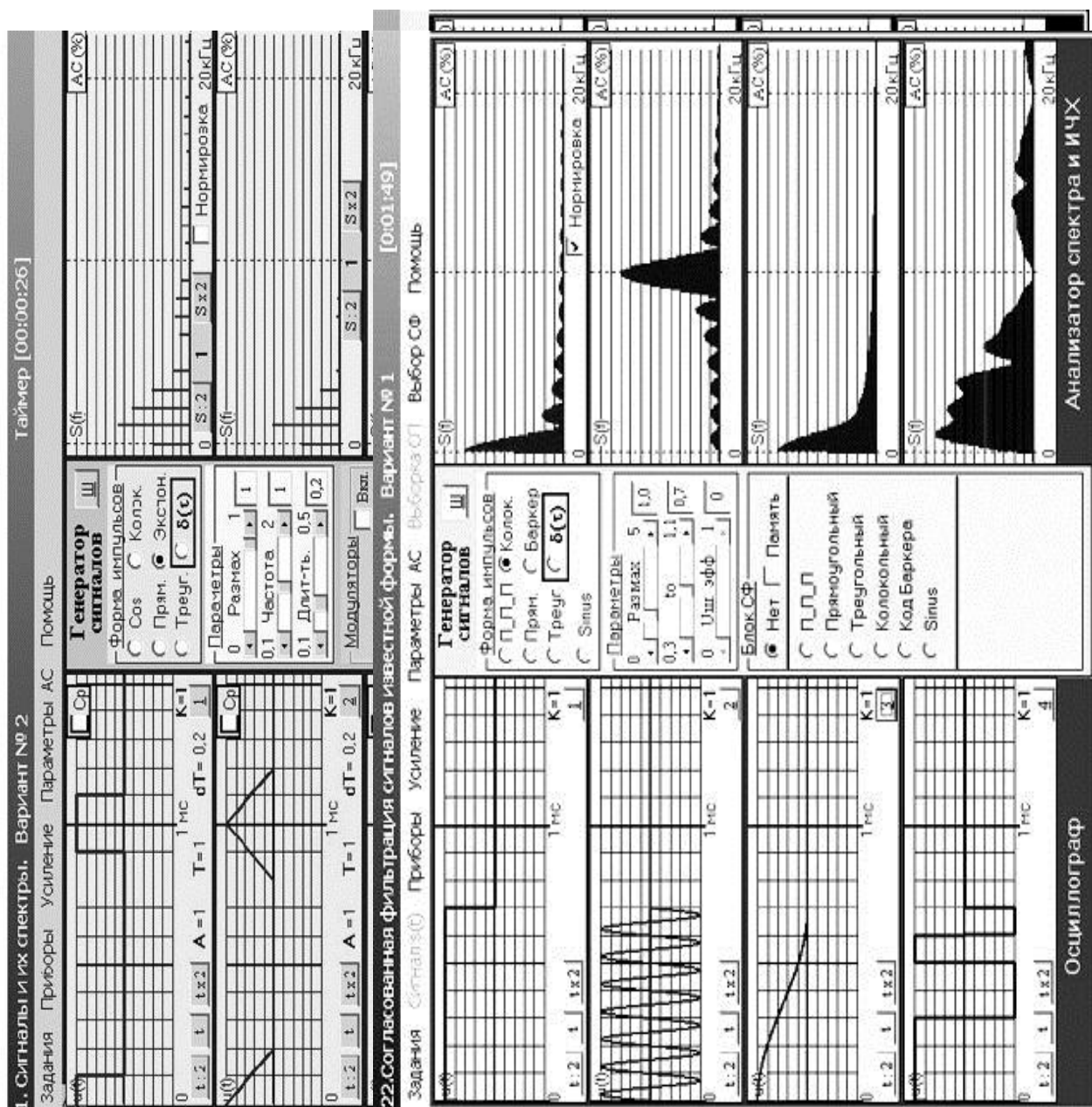


Рис. 2.4. Структурное устройство формирования сигналов

2.4. Дискретизация и восстановление сигналов

Под дискретизацией сигналов (в узком смысле) понимают преобразование аналогового сигнала $x(t)$ в последовательность отсчётов его мгновенных значений, взятых через интервалы времени Δt (рис. 2.5)

$$x(t) \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

Δt – шаг дискретизации,

$$f_d = \frac{1}{\Delta t} \text{ – частота дискретизации.}$$

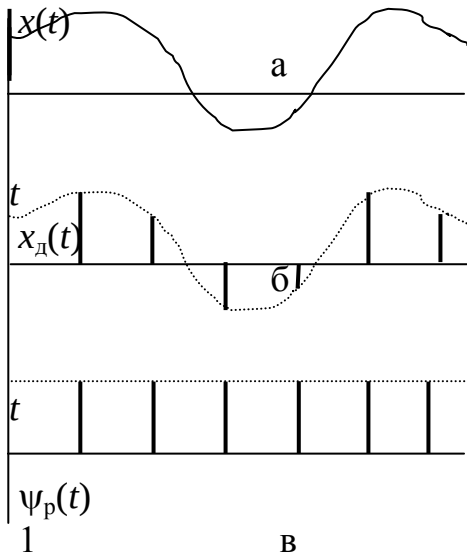


Рис. 2.5. Дискретизация сигнала

Для аналитического описания процесса дискретизации используем решётчатую функцию $\psi_p(t)$ (рис. 2.5, в) вида $\psi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(t - k\Delta t)$,

$$\text{где } \psi(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}.$$

Функция $\psi(t)$ связана с функцией $1(t)$ (единичного скачка) и δ -функцией следующим образом

$$\psi(t) = 1(t + dt) - 1(t) = d1(t) = \frac{d1(t)}{dt} dt = \delta(t) dt. \quad (2.8)$$

Введение функции $\psi_p(t)$ позволяет процесс дискретизации аналогового сигнала $x(t)$ выразить произведением вида (рис. 2.5, б)

$$x_d(t) = x(t)\psi_p(t).$$

Как и δ -функция $\psi_p(t)$ обладает фильтрующим свойством

$$x_d(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t).$$

Поскольку $\psi_p(t)$ периодическая функция с периодом Δt , то её можно представить рядом Фурье

$$\psi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_d t}, \text{ где}$$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \psi(t) e^{-jk\omega_d t} dt = \frac{dt}{\Delta t} \text{ (фильтрующее свойство!)}$$

$$\text{и, следовательно, } \psi_p(t) = \frac{dt}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_d t}.$$

Учитывая свойство спектральной функции комплексного гармонического колебания (2.6) и выражение (2.8), имеем

$$S_{\psi_p}(j\omega) = 2\pi \frac{dt}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_d) = 2\pi \frac{dt}{\Delta t d\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_d) d\omega = 2\pi \frac{dt}{\Delta t d\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(\omega - k\omega_d).$$

Исходя из очевидных соотношений $\frac{dt}{d\omega} = \frac{\Delta t}{\Delta\omega} = \frac{\Delta t}{\omega_d}$, получим

$$S_{\psi_p}(j\omega) = 2\pi \frac{\Delta t}{\Delta t \omega_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(\omega - k\omega_d) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(\omega - k\omega_d). \quad (2.9)$$

Окончательно

$$x_d(t) = x(t)\psi_p(t) = x(t) \frac{dt}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_d t} \quad (2.10)$$

и по свойству смещения спектра (2.7)

$$S_{x_d}(j\omega) = \frac{dt}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_x[j(\omega - k\omega_d)].$$

Из (2.10) вытекает, что процесс дискретизации сигналов можно реализовать на перемножителе (рис.2.6).

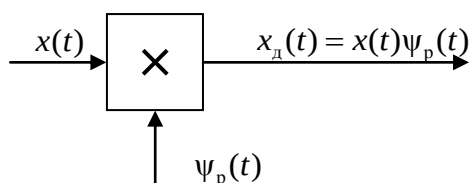


Рис. 2.6. Дискретизатор сигналов

Дискретизация сигналов широко используется в системах связи. Она является необходимой операцией при передаче аналоговых сигналов по цифровым каналам (для преобразования аналогового сигнала в цифровой поток его отсчётов) и в системах многоканальной передачи с временным уплотнением (для разделения заданного множества аналоговых сигналов во временной области). Во всех этих случаях важнейшими являются вопросы о выборе частоты дискретизации сигналов, способе их восстановления (обратного преобразования отсчётов в аналоговый сигнал) и степени искажений в процессе таких преобразований. Ответы на эти вопросы даёт теорема отсчётов (часто называемая именем Котельникова В.А. – автора одного из её доказательств в 1933 г.).

Теорема отсчётов

Любой F -финитный сигнал (сигнал с ограниченным частотой F_B спектром) точно определяется последовательностью своих отсчётов, взятых через интервалы $\Delta t \leq \frac{1}{2F_B}$.

Справедливость этого утверждения следует из рассмотрения спектров, приведённых на рис. 2.7. На рис. 2.7(а) изображён двусторонний спектр исходного аналогового сигнала $S_x(f)$, ограниченный частотой F_B . На рис. 2.7(б) – спектр решетчатой функции $S_{\psi_p}(f)$, построенный по выражению (2.9). На рис. 2.7 (в, г и д) представлены спектры дискретизированного сигнала $S_{x_d}(f)$ при разных соотношениях частот дискретизации f_d и F_B . Обратите внимание, что в результате дискретизации сигнала его спектр периодически повторяется по оси частот с периодом f_d .

Исходя из свойства взаимно однозначного соответствия временного и спектрального представлений сигнала, можно утверждать, что точное восстановление сигнала в аналоговой форме по его отсчётам возможно, если из спектров $S_{x_d}(f)$ (рис.2.7 (в, г и д)) можно получить спектр $S_x(f)$ (рис. 2.7 (а)). Очевидно, что это достижимо:

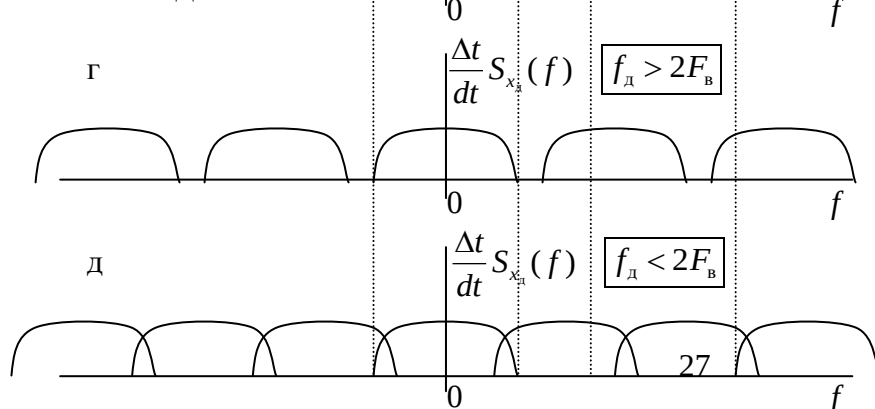


Рис. 2.7. Спектры сигналов в процессе дискретизации

- 1) **фильтрацией** дискретизированного сигнала с помощью **идеального ФНЧ** с частотой верхнего среза F_B ,
- 2) только в случае $f_d \geq 2F_B$, когда **отсутствует наложение спектров**, такое, как показано на рис. 2.7 (д).

Таким образом, процедура восстановления сигнала по отсчётам может быть осуществлена идеальным ФНЧ с передаточной функцией

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \leq \Omega_B \\ 0 & \omega > \Omega_B \end{cases}, \quad \Omega_B = 2\pi F_B$$

и, соответственно, с импульсной характеристикой

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_B}^{\Omega_B} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\Omega_B}{\pi} \frac{\sin \Omega_B t}{\Omega_B t}.$$

Поскольку импульсная характеристика цепи есть её реакция на воздействие в виде δ -функции $\delta(t) \rightarrow g(t)$, то легко определить реакцию идеального ФНЧ на дискретизированный сигнал $x_d(t)$

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \psi(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) dt \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) g(t - k\Delta t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\Omega_B}{\pi} \frac{\sin \Omega_B(t - k\Delta t)}{\Omega_B(t - k\Delta t)} dt. \end{aligned}$$

Выражение $x(t) = c \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \cdot \frac{\sin \Omega_B(t - k\Delta t)}{\Omega_B(t - k\Delta t)}$ известно в литературе как **ряд Котельникова** (с масштабным коэффициентом c) и представляет собой частный случай обобщенного ряда Фурье, где базисом является система функций $\left\{ \frac{\sin \Omega_B(t - k\Delta t)}{\Omega_B(t - k\Delta t)} \right\}$, а коэффициентами разложения служат отсчёты мгновенных значений сигнала $x(k\Delta t)$.

На практике абсолютно точное восстановление сигналов по их отсчётам невозможно по следующим причинам:

- 1) **Идеальный ФНЧ – физически нереализуемая цепь**, т.к. его импульсная характеристика отлична от 0 при $t < 0$. Характеристики реальных ФНЧ могут быть приближены к идеальным лишь с определенной погрешностью, тем меньшей, чем больше задержка.
- 2) **Реальные сигналы являются T -финитными**, а следовательно имеют неограниченный по частоте спектр. Если всё же спектр сигнала ограничить частотой F_B , то на интервале существования сигнала T число независимых отсчётов N , определяющих сигнал с заданной погрешностью, становится конечным

$$N = \frac{T}{\Delta t} + 1 = 2F_B T + 1 \cong 2F_B T,$$

где $2F_B T$ – база сигнала.

При осуществлении дискретизации сигнала, когда частота дискретизации f_d выбрана, необходимо использовать **антиэлайсинговый** ФНЧ с частотой верхнего среза $F_v = \frac{f_d}{2}$ для ограничения спектра сигнала и предотвращения тем самым искажений, вызванных перекрытием спектров (рис.2.4 (д)) (антиэлайсинговый – от слова «элайсинг», означающего наложение спектров).

Контрольные вопросы

1. В чём заключается операция дискретизации непрерывных сигналов? Как её записать математически?
2. Как изменяется спектр сигнала в результате его дискретизации?
3. Приведите примеры практического использования дискретизации сигналов в системах связи.
4. Сформулируйте теорему отсчётов. В чём состоит её фундаментальное значение?
5. Из каких соображений выбирается частота дискретизации непрерывных сигналов?
6. Каким образом и каким ФУ обеспечивается восстановление непрерывного сигнала по его отсчётам?
7. Укажите причины погрешностей восстановления непрерывных сигналов по их отсчётам.
8. Напишите выражение сигнала в виде ряда Котельникова.
9. Какой базис используется при разложении сигналов в ряд Котельникова?
10. Как определяются коэффициенты разложения сигналов в ряд Котельникова?
11. Объясните необходимость использования антиэлайсингового фильтра при дискретизации сигналов.
12. Приведите примеры проявления искажений, связанных с наложением спектров сигнала после его дискретизации (при $f_d < 2F_v$).

Рекомендации по проведению экспериментальных исследований дискретизации и восстановления сигналов

Для закрепления полученных в разделе 2.4 знаний полезно выполнить лабораторную работу № 3 «Дискретизация и восстановление сигналов» (из перечня тем виртуальной учебной лаборатории) в полном объёме, а также провести дополнительные экспериментальные исследования, используя иные виды сигналов в рамках предоставляемых этой работы ресурсов (рис. 2.8). Обратите особое внимание на характер изменения спектра сигнала при его дискретизации, на его зависимость от частоты дискретизации, а также на связь точности восстановления сигналов по их отсчётам с качеством и параметрами фильтров-восстановителей. Выясните, как влияет наличие (отсутствие) схемы выборки-хранения (СВХ) в составе дискретизатора на форму и спектр дискретизированного сигнала.

2.5. Квазигармоническое представление сигналов

Во многих случаях сигнал $x(t)$ удобно записывать в **квазигармонической форме** в виде

$$x(t) = A(t) \cos \Psi(t) = A(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)],$$

где $A(t)$ – называют **огибающей**,

$\Psi(t) = \omega_c t + \varphi(t)$ – **полной фазой**,

ω_c – **частотой** (выбираемой произвольно),

$\varphi(t)$ – **начальной фазой** сигнала.

Для определения $A(t)$ и $\Psi(t)$ введём в рассмотрение комплексный сигнал $\dot{x}(t)$, получаемый из действительного сигнала $x(t)$ следующим образом:

$$\dot{x}(t) = x(t) + jx'(t) = A(t)e^{j\Psi(t)} =$$

$x'(t)$ – называют сопря-

жённым сигналом (связанным некоторым образом с $x(t)$). Тогда

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + x'^2(t)}, \quad \Psi(t) = \arctg \frac{x'(t)}{x(t)}.$$

Поскольку сопряженный $x'(t)$ сигнал можно связать с исходным $x(t)$ разными способами, то задача вычисления огибающей и полной фазы оказывается неоднозначной.

По ряду причин, часть из которых станет понятной из дальнейшего, в качестве сопряжённого удобно выбрать преобразованный по Гильберту исходный сигнал

$$x'(t) = \tilde{x}(t) = H[x(t)].$$

Комплексный сигнал вида $\dot{x}(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$ называют **аналитическим сигналом**.

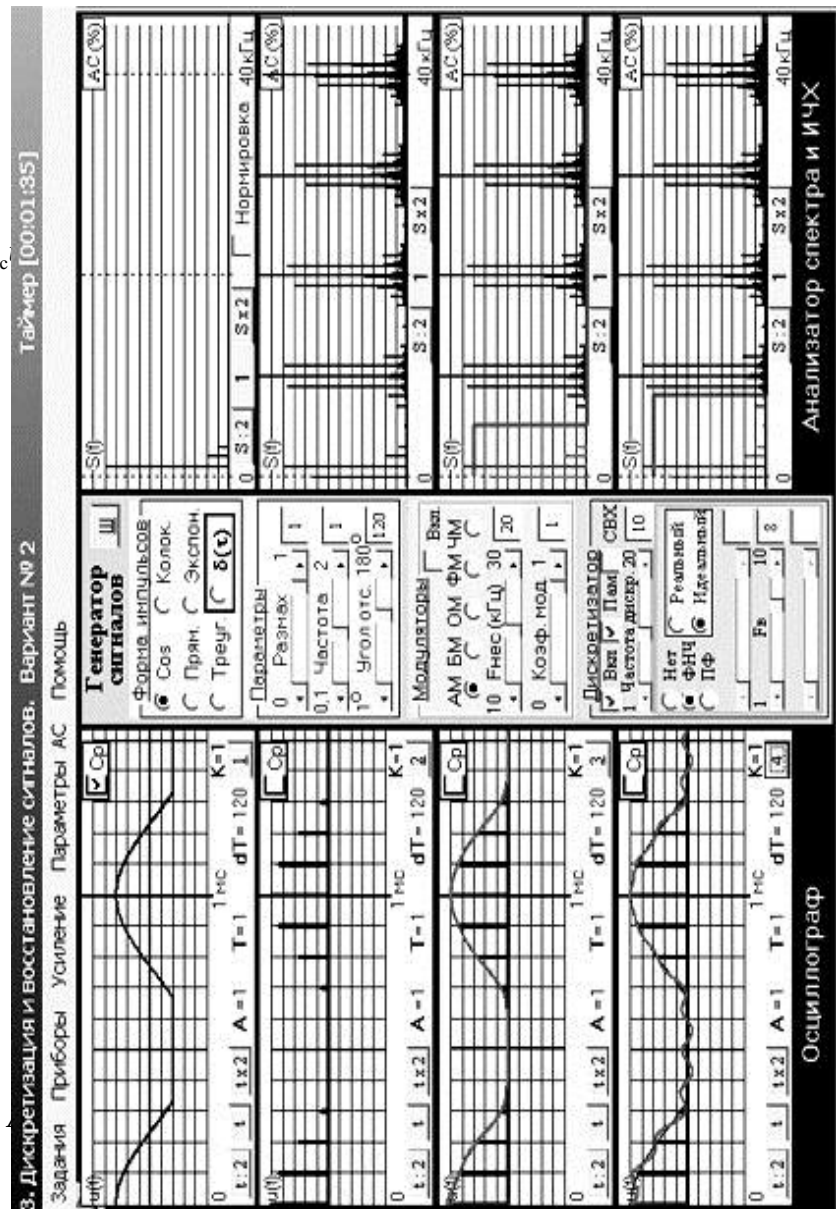
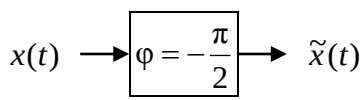


Рис. 2.8. Исследование дискретизации и восстановления сигналов

Преобразование Гильберта $H[x(t)]$ в спектральной области сводится к сдвигу фаз всех спектральных составляющих сигнала $x(t)$ на угол $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ в области положительных ($\omega > 0$) и на $\varphi = \frac{\pi}{2}$ в области отрицательных ($\omega < 0$) частот.

С точки зрения схемотехники преобразователь Гильберта – это фазовращатель (рис. 2.9) с передаточной функцией



$$H_H(j\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases}$$

$$\text{или } H_H(j\omega) = -j \operatorname{sign}(\omega),$$

Рис. 2.9. Преобразователь Гильберта

где $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ – знаковая функция.

Найдём импульсную характеристику преобразователя Гильберта

$$\begin{aligned} g_H(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-j \operatorname{sign}(\omega)] e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-j \operatorname{sign}(\omega)] \cos \omega t d\omega}_0 + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-j \operatorname{sign}(\omega)] \sin \omega t d\omega. \end{aligned}$$

Первый интеграл в полученном выражении равен 0 в силу интегрирования нечетной функции при симметричных пределах, а второй сводится к табличному интегралу вида

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin mx \cdot dx = \frac{m}{\alpha^2 + m^2} \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0.$$

Окончательно получаем

$$g_H(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \omega} \sin \omega t d\omega = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{t}{\pi(t^2 + \alpha^2)} = \frac{1}{\pi t}.$$

Из полученного результата с очевидностью вытекает невозможность физической реализации преобразования Гильберта, т.к. $g_H(t) \neq 0$ при $t < 0$. Тем не менее, реально преобразование Гильберта осуществляют приближённо, допуская временную задержку, тем большую, чем выше требования к точности преобразования.

Рассмотрим преобразование Гильберта во временной области. Из рис. 2.9 вытекает

$$\tilde{x}(t) = x(t) \otimes g_H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau.$$

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau \quad \text{– прямое преобразование Гильберта.}$$

Поскольку

$$S_{\tilde{x}}(j\omega) = -j \operatorname{sign}(\omega) S_x(j\omega),$$

то, после умножения обеих частей равенства на $j \operatorname{sign}(\omega)$, получим

$$j \operatorname{sign}(\omega) S_{\tilde{x}}(j\omega) = \operatorname{sign}^2(\omega) S_x(j\omega) = S_x(j\omega),$$

откуда следует, что передаточная функция обратного преобразования Гильберта $H^{-1}[x(t)]$ отличается от передаточной функции прямого только знаком

$$H_{H^{-1}}(j\omega) = j\text{sign}(\omega) = -H_H(j\omega).$$

Соответственно

$$x(t) = H^{-1}[\tilde{x}(t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau -$$

– обратное преобразование Гильберта.

Свойства аналитического сигнала

1. Аналитический сигнал является естественным обобщением символического изображения гармонического колебания $x(t) = A\cos(\omega_c t + \varphi)$ на произвольный сигнал

$$\dot{x}(t) = Ae^{j\varphi}e^{j\omega_c t} = \dot{A}e^{j\omega_c t} = A\cos(\omega_c t + \varphi) + jA\sin(\omega_c t + \varphi).$$

$$\sin \omega t = H[\cos \omega t].$$

2. Спектр аналитического сигнала располагается только в области положительных частот $\omega > 0$

$$S_{\dot{x}}(j\omega) = S_x(j\omega) + jS_{\tilde{x}}(j\omega) = S_x(j\omega) + \text{sign}(\omega)S_x(j\omega) = \begin{cases} 2S_x(j\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}.$$

3. Сигналы $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ ортогональны на интервале $(-\infty, \infty)$ (в пространстве $L_2(\infty)$)

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \tilde{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\tilde{x}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega)S_{\tilde{x}}^*(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega)j\text{sign}(\omega)S_x^*(j\omega)d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j\omega)|^2}_{\text{нечётная функция}} j\text{sign}(\omega)d\omega = 0. \end{aligned}$$

4. Сдвиг всех спектральных составляющих действительного сигнала $x(t)$ на некоторый угол θ соответствует умножению его аналитического сигнала $\dot{x}(t)$ на $e^{j\theta}$.

Действительно, если

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) = \text{Re}[\dot{x}(t)] = \text{Re}\left[\sum_k A_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k)}\right], \text{ то} \\ x_{\theta}(t) &= \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k + \theta) = \text{Re}[\dot{x}_{\theta}(t)] = \text{Re}\left[\sum_k A_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k + \theta)}\right] = \\ &= \text{Re}\left[e^{j\theta} \underbrace{\sum_k A_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k)}}_{\dot{x}(t)}\right] = \text{Re}[e^{j\theta} \dot{x}(t)]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\dot{x}_{\theta}(t) = \dot{x}(t)e^{j\theta}.$$

Из полученного результата следует возможный алгоритм получения общего фазового сдвига всех спектральных составляющих действительного сигнала вида

$$\begin{aligned}x_{\theta}(t) &= \operatorname{Re}[\dot{x}(t)e^{j\theta}] = \operatorname{Re}\{[x(t) + j\tilde{x}(t)](\cos\theta + j\sin\theta)\} = \\&= x(t)\cos\theta - \tilde{x}(t)\sin\theta.\end{aligned}$$

5. Преобразование частоты сигнала $x(t)$ (смещение его спектра на интервал $\Delta\omega$ по оси частот) эквивалентно умножению его аналитического сигнала $\dot{x}(t)$ на $e^{j\Delta\omega t}$. Это видно из п.4 при замене θ на $\Delta\omega t$

$$\dot{x}_{\Delta\omega}(t) = e^{j\Delta\omega t} \underbrace{\sum_k A_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k)}}_{\dot{x}(t)} = \dot{x}(t)e^{j\Delta\omega t}.$$

Из этого выражения вытекает широко используемый алгоритм преобразования частоты

$$\boxed{x_{\Delta\omega}(t) = \operatorname{Re}[\dot{x}_{\Delta\omega}(t)] = x(t)\cos\Delta\omega t - \tilde{x}(t)\sin\Delta\omega t}.$$

Представление действительного сигнала $x(t)$ через его квадратурные компоненты

Любой действительный сигнал $x(t)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}x(t) &= \operatorname{Re}[\dot{x}(t)] = \operatorname{Re}[A(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_c t}] = \operatorname{Re}\{A(t)[\cos\varphi(t) + j\sin\varphi(t)](\cos\omega_c t + j\sin\omega_c t)\} = \\&= \underbrace{A(t)\cos\varphi(t)}_{A_c(t)}\cos\omega_c t - \underbrace{A(t)\sin\varphi(t)}_{A_s(t)}\sin\omega_c t.\end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = A_c(t)\cos\omega_c t - A_s(t)\sin\omega_c t},$$

где $A_c(t) = A(t) \cdot \cos\varphi(t)$ – **косинусная**,

$A_s(t) = A(t) \cdot \sin\varphi(t)$ – **синусная**

квадратурные компоненты сигнала $x(t)$,

$$\begin{aligned}\dot{A}(t) &= A(t)e^{j\varphi(t)} = A(t)\cos\varphi(t) + jA(t)\sin\varphi(t) = \\&= A_c(t) + jA_s(t) \text{ – комплексная огибающая.}\end{aligned}$$

Представление $x(t)$ через квадратурные компоненты особенно полезно для узкополосных сигналов, у которых они оказываются медленно меняющимися функциями по сравнению с $\cos\omega_c t$ (при выборе ω_c внутри спектра сигнала $x(t)$). Формально условие узкополосности сигнала «в расширенном смысле» можно записать следующим образом

$$F_b < f_c, \text{ где } F_b \text{ – верхняя частота в спектре } A_c(t) \text{ и } A_s(t).$$

Обработку узкополосных сигналов можно выполнить проще и точнее через обработку их квадратурных компонентов. Действительно, если выполняется условие узкополосности сигнала, то спектр комплексного сигнала вида

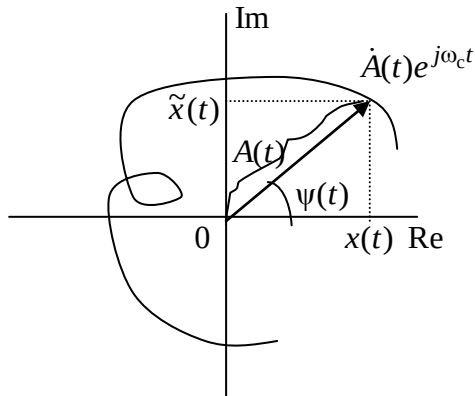
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{A}(t)e^{j\omega_c t} = [A_c(t) + jA_s(t)] \cdot (\cos\omega_c t + j\sin\omega_c t) = \\&= \underbrace{A_c(t)\cos\omega_c t - A_s(t)\sin\omega_c t}_{x(t)} + j\underbrace{[A_c(t)\sin\omega_c t + A_s(t)\cos\omega_c t]}_{\tilde{x}(t)},\end{aligned}$$

получаемого сдвигом спектра огибающей $\dot{A}(t)$ вверх на ω_c полностью располагается в области положительных частот, следовательно этот сигнал – аналитический и его мнимая часть является преобразованием Гильберта действительной части

$$\begin{aligned}x(t) &= A_c\cos\omega_c t - A_s\sin\omega_c t \\ \tilde{x}(t) &= A_c\sin\omega_c t + A_s\cos\omega_c t = A_c H[\cos\omega_c t] - A_s H[\sin\omega_c t].\end{aligned}$$

Таким образом, можно считать, что преобразование Гильберта узкополосного сигнала сводится к сдвигу фаз на угол -90° гармонических колебаний $\cos \omega_c t$ и $\sin \omega_c t$ и не затрагивает его квадратурных компонентов.

На рис 2.10 приведена векторная диаграмма аналитического сигнала. Она представляет собой комплексную плоскость с вращающимся и меняющим свою длину вектором $\dot{A}(t)$.



Угловая скорость его вращения изменяется во времени по закону

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}.$$

Рис. 2.10. Векторная диаграмма $\dot{x}(t)$

Контрольные вопросы

1. Как выглядит квазигармоническая форма записи произвольного сигнала $x(t)$?
2. Как определяют огибающую, фазу и мгновенную частоту сигнала $x(t)$?
3. Почему задача определения огибающей и фазы сигналов не является однозначной?
4. Какой сигнал называют аналитическим?
5. В чём заключается преобразование Гильберта в частотной области?
6. Как схемотехнически реализуют преобразование Гильберта?
7. Напишите выражение передаточной функции преобразователя Гильберта.
8. Какова импульсная характеристика преобразователя Гильберта?
9. Напишите аналитическое выражение преобразования Гильберта во временной области.
10. Чем обратное преобразование Гильберта отличается от прямого?
11. Какая связь аналитического сигнала с символическим изображением гармонического колебания, используемым в символическом методе.
12. Каковы особенности спектра аналитического сигнала?
13. Как изменяется аналитический сигнал при сдвиге фаз всех его спектральных составляющих на один и тот же угол φ ?
14. Как с помощью аналитического сигнала записать операцию смещения спектра сигнала на $\Delta\omega$?
15. Что называют квадратурными компонентами сигнала?
16. Запишите аналитическое выражение сигнала $x(t)$ через его квадратурные компоненты.
17. Как огибающая и фаза сигнала связаны с его квадратурными компонентами?
18. Почему обработку узкополосных сигналов проще и точнее реализуют через их квадратурные компоненты?
19. Что представляет собой векторная диаграмма аналитического сигнала?

Рекомендации по проведению экспериментальных исследований компонентов аналитического сигнала

Для закрепления полученных в разделе 2.5 знаний по квазигармоническому представлению сигналов целесообразно на базе лабораторной работы № 29 «Аналитический сигнал» провести экспериментальные исследования связи форм и спектров НЧ и ВЧ сигналов $x(t)$ (от генератора сигналов) с их преобразованиями по Гильберту $H[x(t)]$, огибающими $A(t)$, фазой $\Phi(t)$, квадратурными косинусной $A_c(t)$ и синусной компонентами $A_s(t)$ (рис. 2.11). Обратите внимание на существенное различие форм исходного и преобразованного по Гильберту сигналов при полной идентичности их амплитудных спектров. Полезно также наблюдать огибающие ВЧ сигналов с разными видами линейной модуляции (АМ, БМ и ОМ). Попробуйте на основании такого рода наблюдений определить связи огибающих ВЧ сигналов с соответствующими модулирующими НЧ сигналами.

При выполнении указанных работ не обязательно строго придерживаться имеющихся в них заданий. Используйте возможности ресурсов ВЛ для проведения исследований по своему усмотрению и желанию.

3. Преобразования сигналов в типовых функциональных узлах систем связи

К анализу и синтезу функциональных узлов (ФУ) систем связи можно подходить с позиций «чёрного ящика», имеющего один или несколько входов и выход (рис. 3.1). Входные сигналы ФУ называют воздействиями, а выходной – реакцией ФУ на воздействия.

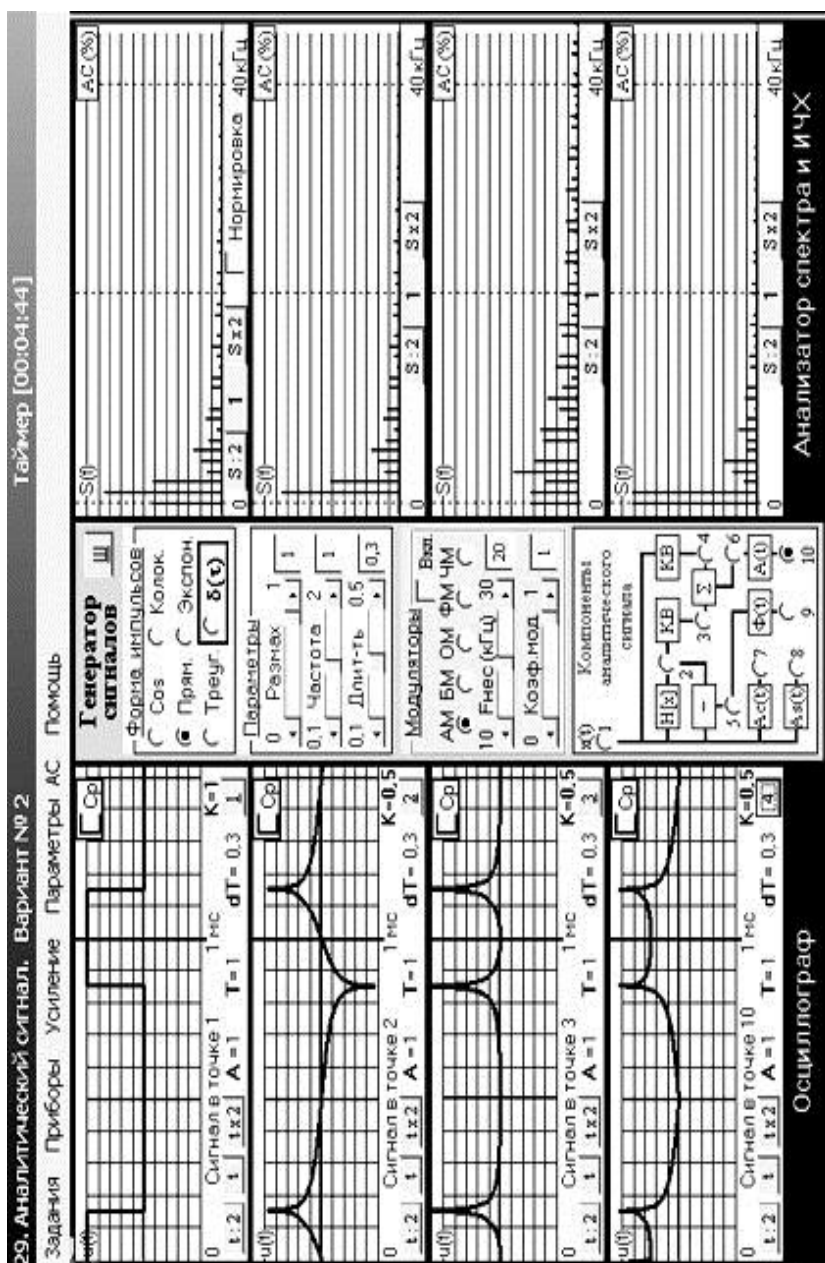


Рис. 2.11. Исследование компонентов аналитического сигнала

Связь между воздействием $x(t)$ и реакцией

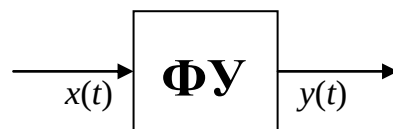


Рис. 3.1. Функциональный узел $y(t)$, в общем случае, описывается некоторым оператором A

$$y(t) = A[x(t)],$$

который однозначно определяет сам ФУ и который будем называть его функциональной характеристикой. По виду этого оператора производят классификацию ФУ на линейные, параметрические и нелинейные.

В теории цепей приходится решать задачи анализа и синтеза ФУ в зависимости от цели и исходных условий.

В задаче **анализа** известными считают воздействие $x(t)$ и ФУ

(оператор A), а объектом расчёта – реакцию ФУ $y(t)$

В задаче **синтеза** в качестве заданных рассматриваются воздействие $x(t)$ и реакция $y(t)$, а объект расчёта – ФУ.

Широко используется и смешанный (эвристический) подход, при котором, как и в задаче синтеза, заданными являются воздействие $x(t)$ и реакция $y(t)$, но сам ФУ находят не в результате расчёта, а выбирают (изобретают), исходя из физических предпосылок и интуиции, а затем в результате его анализа определяют степень соответствия полученной и заданной реакций. В дальнейшем, при рассмотрении конкретных ФУ будем использовать все эти методы.

3.1. Особенности преобразования сигналов в линейных, параметрических и нелинейных ФУ

Линейные преобразования сигналов и ФУ

Линейные ФУ по определению описываются линейными дифференциальными уравнениями (в том числе нулевого порядка для резистивных цепей) с постоянными коэффициентами. С точки зрения схемотехники это значит, что все элементы ФУ (R, C, L) имеют постоянные параметры. Оператором преобразования воздействия $x(t)$ в реакцию $y(t)$ для них может служить одна из форм интеграла наложения (Дюамеля) во временной области

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau,$$

или передаточная функция $H(j\omega)$ ФУ в частотной области

$$S_y(j\omega) = S_x(j\omega) \cdot H(j\omega),$$

а в качестве функциональной характеристики линейного ФУ можно использовать его импульсную характеристику $g(t)$ или передаточную функцию $H(j\omega)$.

Простым колебанием для линейных цепей является гармоническое $U \cos(\omega t + \varphi)$. Его форма не изменяется при прохождении через любую линейную цепь. В линейных цепях действует принцип суперпозиции – реакция цепи на сумму воздействий есть сумма её реакций на каждое из воздействий в отдельности. Из этих свойств вытекают следующие **выводы**:

1. Форма сложного сигнала (с полигармоническим или сплошным спектром) при его прохождении через линейную цепь может изменяться только вследствие изменения соотношения между амплитудами и фазами спектральных составляющих воздействия. Принципиально важно, что **в реакции линейного ФУ не могут возникнуть спектральные компоненты, отсутствующие в спектре воздействия**.

2. Из вывода 1 вытекают возможности построения на основе линейных цепей ограниченного класса типовых ФУ:

а) **усилителей и аттенюаторов** (ФУ для изменения мощности сигналов без искажения их формы), передаточная функция которых в полосе частот, занимаемой спектром воздействия, имеет вид

$$H(j\omega) = H_0 e^{-j\omega\tau_0}, \quad \text{где } H_0 \text{ и } \tau_0 - \text{константы};$$

б) **фильтров разных типов** (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ, интеграторов, дифференциаторов, фазовращателей и т.п.), передаточная функция которых в полосе частот, занимаемой спектром воздействия, имеет вид

$$H(j\omega) = H(\omega) e^{-j\varphi(\omega)},$$

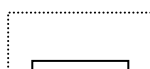
где $H(\omega)$ (АЧХ) и $\varphi(\omega)$ (ФЧХ) – заданные функции частоты.

Параметрические преобразования сигналов и ФУ

По определению параметрические ФУ описываются линейными дифференциальными уравнениями (в том числе нулевого порядка для резистивных цепей), у которых есть коэффициенты, зависящие от независимой переменной (времени).

$$\begin{array}{l} k(t) = az(t) \\ x(t) \quad y(t) = k(t) \cdot x(t) \\ az(t) \\ \Gamma \end{array}$$

Схемотехнически это означает, что параметрический ФУ содержит хотя бы один элемент,



параметр(ы) которого зависит от времени. В подавляющем большинстве случаев параметрические ФУ строятся на использовании перемножителя сигналов (рис. 3.2). Действительно, если генератор колебания $z(t)$ рассматривать как внутренний элемент ФУ («чёрного ящика»), то $y(t) = az(t) \cdot x(t)$ можно записать в виде

$$y(t) = k(t) \cdot x(t),$$

где $k(t) = az(t)$ (коэффициент передачи параметрического звена) может служить его функциональной характеристикой.

Рассмотрим реакцию параметрического звена (рис. 3.1) при $k(t) = K \cos \Omega t$ на воздействие вида $x(t) = X \cos \omega_c t$.

$$\begin{aligned} y(t) &= k(t) \cdot x(t) = K \cos \Omega t \cdot X \cos \omega_c t = \\ &= \frac{1}{2} KX \cos(\omega_c + \Omega)t + \frac{1}{2} KX \cos(\omega_c - \Omega)t. \end{aligned}$$

Спектры воздействия и реакции приведены на рис. 3.3. Из их рассмотрения можно сделать следующие **выводы**:

1. Параметрические ФУ **обогащают спектр воздействия** новыми спектральными составляющими.
2. Частоты новых спектральных составляющих в реакции параметрических ФУ определяются **частотами спектральных составляющих воздействия и частотами изменения параметров ФУ**.

Нелинейные преобразования сигналов и ФУ

Нелинейные преобразователи сигналов описываются нелинейными дифференциальными уравнениями (в том числе нулевого порядка для резистивных цепей), у которых хотя бы один коэффициент зависит от их решения (искомой функции). Соответственно, их схема содержит хотя бы один

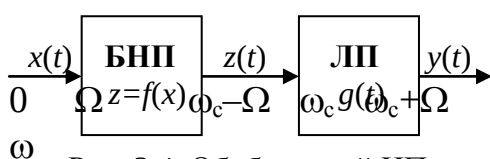
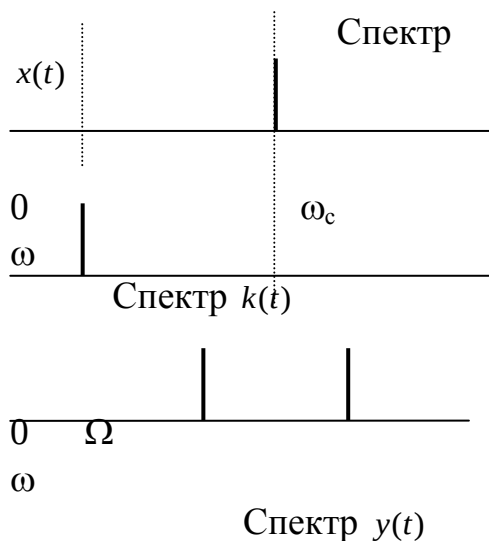


Рис. 3.4. Обобщённый НП
Рис. 3.3. Спектры $x(t)$, $k(t)$ и $y(t)$

нелинейный элемент, параметр(ы) которого зависит от протекающего тока или приложенного напряжения.

Анализ нелинейных ФУ в общем случае является сложной задачей, которая существенно упрощается, если возможно разделить ФУ на две независимые части, сосредоточив всю нелинейность в безынерционном нелинейном преобразователе (БНП) а всю инерционность – в линейном (ЛП), как это показано на рис. 3.4. Назовём такую структуру обобщённым нелинейным преобразователем (ОНП). Для анализа ОНП достаточно по известной функциональной характеристике БНП $z = f(x)$ (для безынерционной цепи это обычная функция, а не оператор) определить его реакцию $z(t) = f[x(t)]$ на заданное воздействие $x(t)$, а затем проанализировать прохождение $z(t)$ через ЛП одним из вышеуказанных методов.

дов.

Рассмотрим возможности изменения спектра сигнала при его прохождении через БНП – цепь 0-го порядка. Для таких цепей в теории широко используют два основных метода спектрального анализа реакции в зависимости от вида аппроксимации функциональной характеристики БНП:

1) метод кратных дуг – при полиномиальной аппроксимации

$$z = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

2) метод угла отсечки (коэффициентов Берга) – при кусочно-линейной аппроксимации.

Чтобы воспользоваться первым методом, достаточно помнить тригонометрическую формулу

$$\cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t = \frac{1}{2} \cos(\omega_1 - \omega_2)t + \frac{1}{2} \cos(\omega_1 + \omega_2)t$$

и её частный случай (при $\omega_1 = \omega_2 = \omega$)

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t.$$

Результаты анализа спектрального состава реакции БНП с полиномиальной функциональной характеристикой при моно- и бигармоническом воздействии приведены в таблице 3.1. В ней указаны только частоты спектральных составляющих реакции.

Из этой таблицы следует, что БНП обогащает спектр воздействия постоянной составляющей, кратными гармониками и колебаниями комбинационных частот вида $l\omega_1 + m\omega_2$, где $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, причём **порядок**

комбинационных частот $p = |l| + |m| \leq n$ (не превосходит степени n полинома, аппроксимирующего функциональную характеристику БНП). Этот вывод можно распространить и на случай полигармонического воздействия.

Выводы

1. Нелинейные ФУ **обогащают** спектр воздействия новыми спектральными компонентами.

2. Новые спектральные компоненты реакции нелинейных ФУ являются **гармониками** частот воздействия или **колебаниями комбинационных частот** вида

$$l\omega_1 + m\omega_2 + k\omega_3 + \dots, \quad \text{где } l, m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таблица 3.1

$z =$	Спектральный состав $z(t)$ при	
	$x(t) = X \cos \omega_0 t$	$x(t) = X_1 \cos \omega_1 t + X_2 \cos \omega_2 t$
$a_0 +$	0	0
$+ a_1 x$	ω_0	ω_1, ω_2
$+ a_2 x^2$	$0, 2\omega_0$	$0, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2$
$+ a_3 x^3$	$\omega_0, 3\omega_0$	$\omega_1, \omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + 2\omega_2, 2\omega_1 - \omega_2, 2\omega_2 - \omega_1$
$+ \dots$		
$+ a_k x^k$	$0, 2\omega_0, 4\omega_0, \dots, k\omega_0$ при $k = 2q$, $\omega_0, 3\omega_0, \dots, k\omega_0$ при $k = 2q+1$, $q = 1, 2, 3, \dots$	$l\omega_1 + m\omega_2; l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k,$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k,$ $p = l + m = 2q \leq k$ при $k = 2q$, $p = l + m = 2q+1 \leq k$ при $k = 2q+1, q = 1, 2, 3, \dots$
$+ \dots$		
$+ a_n x^n$	$0, 2\omega_0, 4\omega_0, \dots, n\omega_0$ при $n = 2q$, $\omega_0, 3\omega_0, \dots, n\omega_0$ при $n = 2q+1$, $q = 1, 2, 3, \dots$	$l\omega_1 + m\omega_2; l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n,$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n,$ $p = l + m = 2q \leq n$ при $n = 2q$, $p = l + m = 2q+1 \leq n$ при $n = 2q+1, q = 1, 2, 3, \dots$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачи анализа и синтеза ФУ.
2. Дайте классификацию ФУ по виду описывающих их дифференциальных уравнений.
3. Каковы принципиальные ограничения на возможности преобразования сигналов в линейных ФУ?

4. Что можно использовать в качестве функциональных характеристик линейных ФУ?
5. Какие типовые ФУ, используемые в системах связи, можно реализовать в классе линейных цепей?
6. Каковы возможности параметрических ФУ по преобразованию сигналов?
7. Опишите характер обогащения спектров сигналов в параметрических ФУ.
8. Каковы возможности нелинейных ФУ по преобразованию сигналов?
9. Какие виды аппроксимации функциональных характеристик безынерционных нелинейных преобразователей целесообразны в режимах а) слабого сигнала, б) сильного сигнала?
10. Какой метод спектрального анализа реакции нелинейного ФУ используют при аппроксимации его функциональной характеристики степенным полиномом?
11. Какой метод спектрального анализа реакции нелинейного ФУ используют при кусочно-линейной аппроксимации его функциональной характеристики?
12. Опишите спектральный состав реакции нелинейного ФУ на моногармоническое воздействие.
13. Опишите спектральный состав реакции нелинейного ФУ на полигармоническое воздействие.
14. Нарисуйте схему перемножителя сигналов и укажите назначение её элементов.

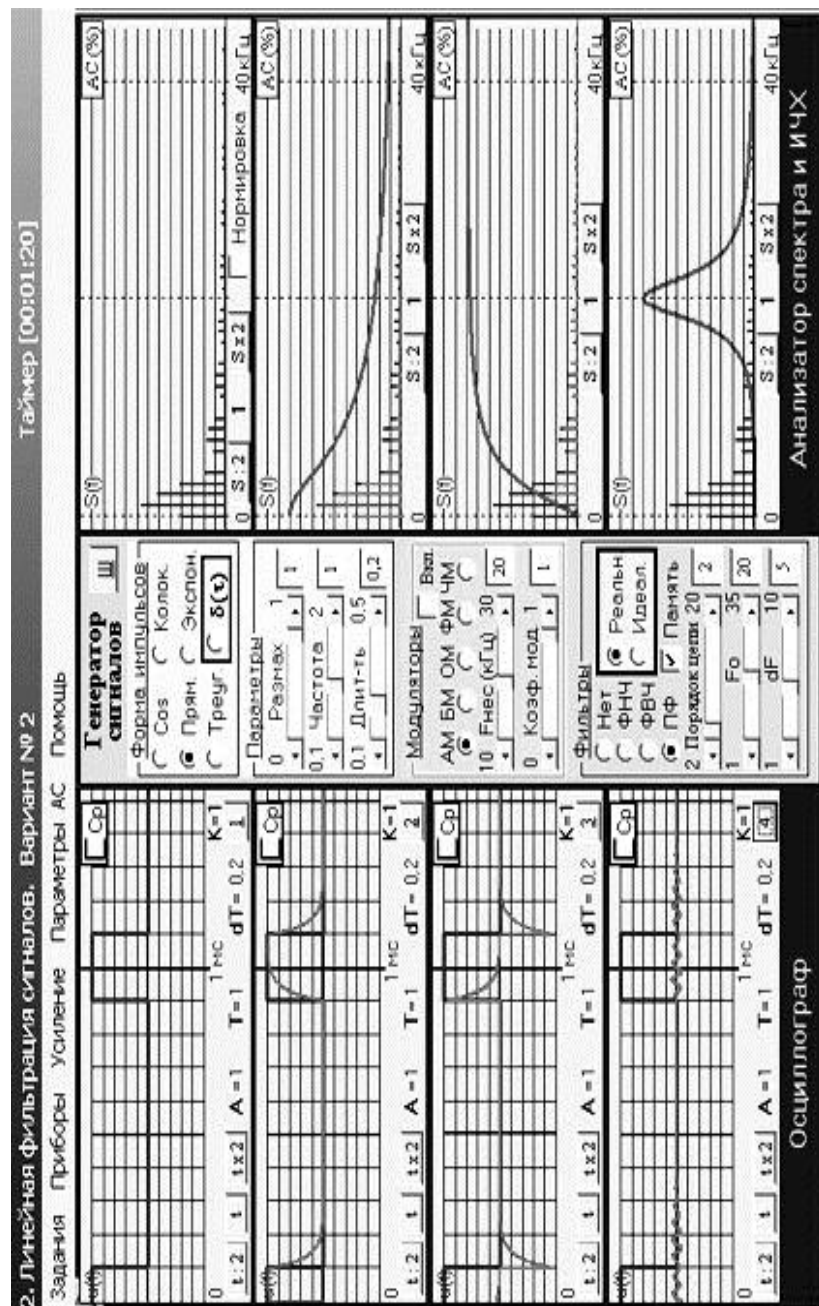


Рис. 3.5. Исследование преобразований сигналов в линейных ФУ

15. При каких условиях кольцевой диодный перемножитель обеспечивает «чистое» перемножение сигналов?
16. В чём сущность метода фазовой компенсации побочных продуктов нелинейного преобразования сигналов?

Рекомендации по проведению экспериментальных исследований преобразований сигналов в линейных, нелинейных и параметрических ФУ

Для закрепления полученных в разделе 3.1 знаний полезно выполнить лабораторные работы № 2 «Линейная фильтрация сигналов» (рис. 3.5), № 6 «Преобразование сигналов в нелинейных цепях» (рис. 3.6) и № 7 «Нелинейное усиление и умножение частоты сигналов» (из перечня тем виртуальной учебной лаборатории) (рис. 3.7) в полных объёмах, а также провести дополнительные экспериментальные исследования, используя иные виды сигналов в рамках предоставляемых этими работами ресурсов. Обратите, прежде всего, внимание на принципиальные различия в характере трансформации спектров входных сигналов в результате их линейных и нелинейных преобразований. Сформулируйте, в чём состоят эти отличия и какие практически важные следствия они имеют с точки зрения реализации ФУ раз-

личного назначения. Обратите внимание на функции нелинейного элемента и его линейной нагрузки в нелинейных преобразователях и конкретизируйте из применительно к нелинейному усилителю и умножителю частоты сигналов.

Для экспериментальных исследований параметрических преобразований сигналов можно воспользоваться параметрическими преобразователями, входящими в состав системы передачи непрерывных сообщений из лабораторной работы № 11 «Линейные виды модуляции и синхронное детектирование» (рис. 3.8). В рамках ресурсов, предоставляемых этой работой, можно провести наблюдение осциллограмм и спектрограмм произведения произвольного сигнала $s_1(t)$ с гармоническим колебанием. В качестве произвольного входного сигнала $s_1(t)$ используйте как НЧ, так и ВЧ сигналы, выбирая их с помощью пункта меню «Сигналы/ $s_1(t)$ » этой работы. Обратите внимание на характер обогащения спектра параметрическим преобразователем и определите частоты новых спектральных составляющих на его выходе.

3.2. Перемножение сигналов

В качестве первого типового ФУ рассмотрим перемножитель сигналов, тем более, что он используется в параметрическом звене (рис. 3.1). По определению перемножителем является ФУ с

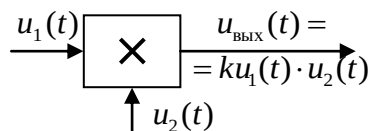


Рис. 3.9. Перемножитель

двумя входами, выходной сигнал которого пропорционален произведению входных сигналов (рис.3.9). Поскольку операция перемножения не

является линейной, то схемотехническое решение перемножителя следует искать в классе нелинейных цепей.

Проанализируем схему кольцевого (мостового) перемножителя (рис. 3.10), в которой в качестве нелинейных элементов используются диоды. Предварительно сделаем следующие

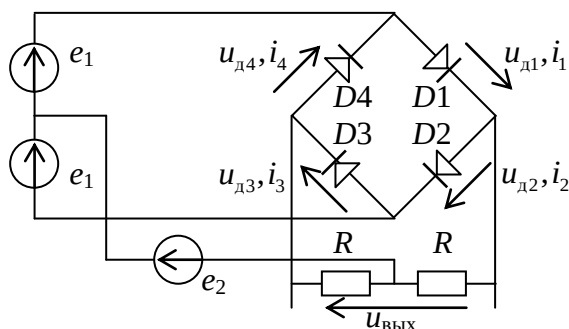


Рис. 3.10. Кольцевой диодный перемножитель сигналов

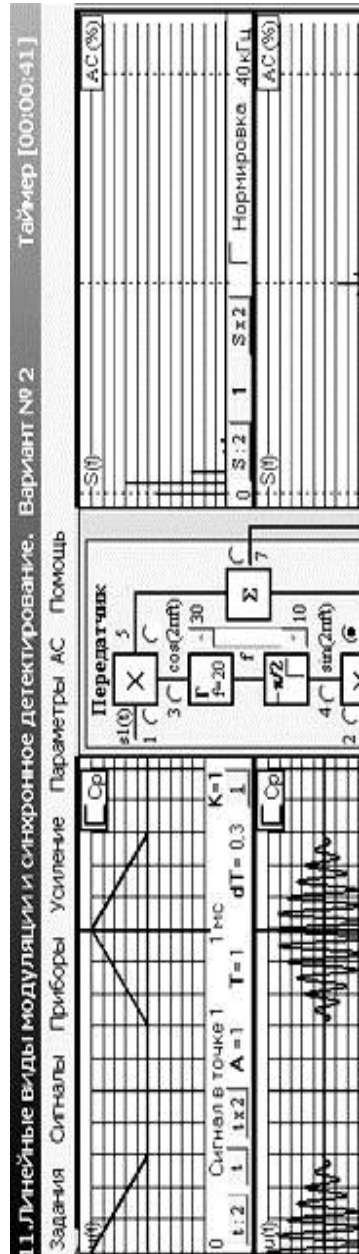
допущения:

1) все диоды имеют квадратичные вольт-амперные характеристики (режим слабого сигнала)

$$i = a_0 + a_1 u_d + a_2 u_d^2$$

с одинаковыми коэффициентами a_0, a_1, a_2 ,

2) сопротивления нагрузочных резисторов R одинаковы (симметрия схемы),



3) один из входных сигналов поступает от двух идентичных источников (e_1) (симметрия схемы).

Выходное напряжение $u_{\text{вых}}$

$$u_{\text{вых}} = R(i_1 - i_2 - i_3 + i_4).$$

Для определения токов диодов подставим в выражение их вольтамперной характеристики соответствующие напряжения u_d , определяя последние через входные сигналы e_1 и e_2 . Падением напряжения на нагрузке при этом будем пренебрегать. Произведём алгебраическое суммирование токов:

$$\begin{aligned} &+ i_1 = a_0 + a_1(e_1 + e_2) + a_2(e_1 + e_2)^2 \\ &- i_2 = -a_0 - a_1(e_1 - e_2) - a_2(e_1 - e_2)^2 \\ &- i_3 = -a_0 - a_1(-e_1 + e_2) - a_2(-e_1 + e_2)^2 \\ &+ i_4 = a_0 + a_1(-e_1 - e_2) + a_2(-e_1 - e_2)^2 \\ \hline &u_{\text{вых}} = R(0 + 0 + 0 + 8a_2e_1 \cdot e_2) = 8Ra_2e_1 \cdot e_2. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что $u_{\text{вых}}$ является «чистым» произведением e_1 и e_2 , хотя в составе тока любого диода много посторонних слагаемых. Объясняется это тем, что при сложении токов диода в реакции ФУ их полезные составляющие (пропорциональные произведению e_1 и e_2) оказались синфазными, а все посторонние – противофазными. В результате первые сложились арифметически, а вторые компенсировались. Такой способ очистки реакции нелинейного преобразователя от побочных продуктов преобразования называют **методом фазовой компенсации** и широко используют в схемотехнике.

Выводы

1. ФУ (рис. 3.10) является «чистым» перемножителем произвольных сигналов $e_1(t)$ и $e_2(t)$ (в рамках выше сделанных допущений о режиме слабого сигнала, симметрии схемы, идентичности характеристик диодов).

2. «Чистота» операции перемножения достигнута методом фазовой компенсации.

3. Суть метода фазовой компенсации заключается в следующем:

- ФУ строится по симметричной многоканальной схеме,
- выходные реакции каналов суммируются,
- на входы каналов сигналы подают с таким подбором фаз, чтобы при сложении реакций каналов полезные составляющие оказались бы синфазными и суммировались, а побочные были бы противофазными и взаимно компенсировались.

3.3. Амплитудная модуляция

Модуляция в системах связи используется тогда, когда непосредственная передача первичного сигнала по линии связи оказывается невозможной. Согла-

сование передаваемого сигнала с характеристиками линии связи достигается использованием колебания, которое хорошо распространяется в имеющейся линии связи. Один или несколько параметров этого колебания связывают с первичным сигналом. Такое колебание называют **переносчиком**, процесс изменения его параметра(ов) – **модуляцией**, первичный сигнал – **модулирующим**, а получаемый вторичный сигнал – **модулированным**.

В качестве переносчика широко применяют гармоническое **несущее** колебание $A\cos(\omega t + \varphi)$, обладающее тремя параметрами: амплитудой A , частотой ω и начальной фазой φ . Соответственно возможны три простых вида модуляции: амплитудная, частотная и фазовая. При амплитудной модуляции первичный сигнал $u_{\text{мод}}(t)$ отображают в амплитуде (**огibaющей**) A несущего колебания следующим образом

$$u_{\text{AM}}(t) = \underbrace{K_{\text{AM}}[U_0 + u_{\text{мод}}(t)]}_{A(t)} \cos \omega_{\text{н}} t. \quad (3.1)$$

Добавление к модулирующему сигналу $u_{\text{мод}}(t)$ постоянной составляющей U_0 необходимо, чтобы сделать эту сумму унipoлярной, т.к. $A(t) \geq 0$ по определению. Разумеется, если модулирующий сигнал сам по себе является унipoлярным, например, сигнал изображения в телевидении, то никакой добавки не требуется ($U_0 = 0$).

Спектры АМ сигналов

1. Спектр простого АМ сигнала.

Модулированный сигнал называют простым, если в качестве модулирующего сигнала $u_{\text{мод}}(t)$ использовано гармоническое колебание. Таким образом, простой АМ сигнал имеет вид $u_{\text{AM}}(t) = K_{\text{AM}}(U_0 + U_{\text{мод}} \cos \Omega t) \cos \omega_{\text{н}} t =$
 $= K_{\text{AM}} U_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_{\text{н}} t = U_{\text{н}} (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_{\text{н}} t, \quad (3.2)$

где $U_{\text{н}}$ – амплитуда несущего колебания,

m – коэффициент (глубина) модуляции, $0 \leq m \leq 1$.

Для получения спектра сигнала простого АМ сигнала достаточно в выражении (3.2) раскрыть скобки

$$u_{\text{AM}}(t) = U_{\text{н}}(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_{\text{н}} t = U_{\text{н}} \cos \omega_{\text{н}} t + \frac{1}{2} m U_{\text{н}} \cos(\omega_{\text{н}} - \Omega)t + \frac{1}{2} m U_{\text{н}} \cos(\omega_{\text{н}} + \Omega)t.$$

Таким образом, спектр простого АМ сигнала содержит несущее и два боковых колебания (рис.3.11). Нетрудно видеть, что его ширина $\Delta\omega_{\text{AM}} = 2\Omega$ или $\Delta f_{\text{AM}} = 2F_{\text{мод}}$, где $F_{\text{мод}}$ – частота модулирующего сигнала. Обратите внимание на то, что амплитуда несущего колебания не зависит от модулирующего сигнала в отличие от амплитуд боковых колебаний. Это говорит о том, что информации о модулирующем сигнале в несущем колебании не содержится. Она содержится исключительно в боковых колебаниях, которые возникают в процессе осуществления амплитудной модуляции.

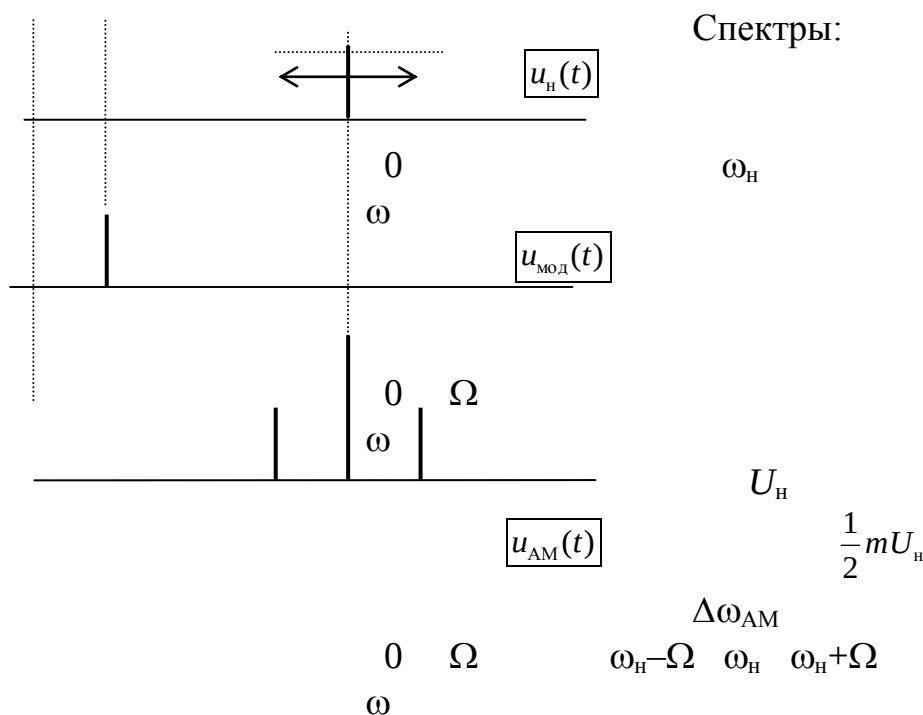


Рис.3.11. Спектры $u(t)$, $u_{\text{мод}}(t)$ и $u_{\text{АМ}}(t)$

2. Спектр сложного АМ сигнала

На основе выражения (3.2) спектр сложного АМ сигнала при полигармоническом модулирующем сигнале можно записать в виде

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_{\text{H}} (1 + m_1 \cos \Omega_1 t + m_2 \cos \Omega_2 t + \dots) \cos \omega_{\text{H}} t, \quad (3.3)$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ – частоты модулирующего сигнала,

$m_1, m_2, \dots$ – парциальные коэффициенты модуляции.

В случае T -финитного модулирующего сигнала соответствующий АМ сигнал выглядит следующим образом

$$u_{\text{АМ}}(t) = U_{\text{H}} \underbrace{[1 + k_{\text{АМ}} u_{\text{мод}}(t)]}_{A(t)} \cos \omega_{\text{H}} t,$$

где $k_{\text{АМ}}$ – нормирующий коэффициент, обеспечивающий условие $A(t) \geq 0$.

Для нахождения его спектральной функции перейдем к комплексному сигналу

$$\dot{u}_{\text{АМ}}(t) = U_{\text{H}} \underbrace{[1 + k_{\text{АМ}} u_{\text{мод}}(t)]}_{A(t)} e^{j\omega_{\text{H}} t} = U_{\text{H}} e^{j\omega_{\text{H}} t} + U_{\text{H}} k_{\text{АМ}} u_{\text{мод}}(t) e^{j\omega_{\text{H}} t}.$$

Используя свойства преобразования Фурье (2.6) и (2.7), получим

$$S_{\dot{u}_{\text{АМ}}}(j\omega) = U_{\text{H}} \delta[j(\omega - \omega_{\text{H}})] + k_{\text{АМ}} U_{\text{H}} S_{u_{\text{мод}}}[j(\omega - \omega_{\text{H}})]. \quad (3.4)$$

Спектры сигналов (3.3) и (3.4) приведены на рис.3.12.

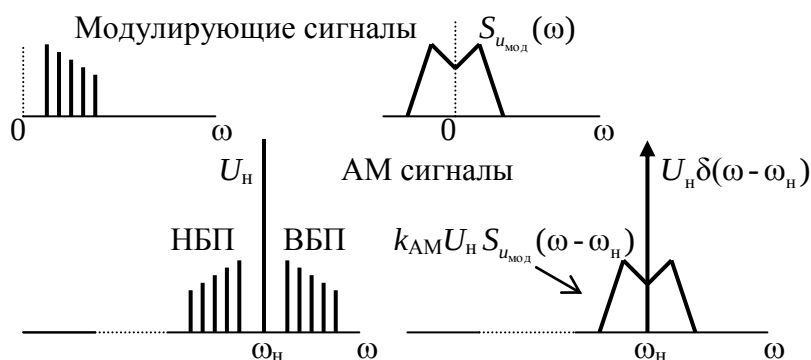


Рис.3.12. Спектры сложных АМ сигналов

Выводы

1. Спектр АМ сигнала содержит:

- несущее колебание на частоте ω_{H} ,
- верхнюю боковую полосу (ВБП), представ-

ляющую собой спектр модулирующего сигнала $u_{\text{мод}}(t)$, смещённый по оси частот вверх на ω_n ,

в) **нижнюю боковую полосу (НБП)**, являющуюся «зеркальным отражением» ВБП относительно ω_n .

2. Ширина спектра АМ сигнала вдвое больше максимальной модулирующей частоты $\Delta\omega_{\text{АМ}} = 2\Omega_{\text{макс}}$

Энергетика АМ сигналов

Определим **мощность простого АМ сигнала**, понимая под ней среднее за период несущего колебания значение квадрата сигнала (3.2)

$$P_{\text{АМ}}(t) = \frac{1}{2} U_n^2 (1 + m \cos \Omega t)^2 = P_n (1 + m \cos \Omega t)^2,$$

где P_n – **мощность несущего колебания**.

Максимальная (пиковая) мощность, на которую рассчитывают усилители АМ сигналов,

$$P_{\text{АМмакс}} = P_n (1 + m)^2 \leq 4P_n,$$

до 4 раз превышает мощность P_n .

Средняя мощность АМ сигнала за период модулирующего сигнала (потребляемая от источников питания модулятора или усилителя АМ сигнала)

$$P_{\text{АМ}} = P_n \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) = P_n + P_{\text{бок}},$$

где $P_{\text{бок}} = \frac{m^2}{2} P_n$ – **мощность боковых колебаний**.

Из полученных результатов можно сделать вывод о низкой энергетической эффективности амплитудной модуляции, так как полезная (в информационном смысле) мощность боковых колебаний $P_{\text{бок}}$ не превышает половины от мощности несущего колебаний P_n и трети от средней мощности $P_{\text{АМ}}$.

Векторная диаграмма простого АМ сигнала

Из общего выражения АМ сигнала (3.1) видно, что его векторная диаграмма, т.е. изображение комплексной огибающей $\dot{A}(t)$ на комплексной плоскости, представляет собой вектор, длина которого меняется во времени, а начальная фаза остаётся неизменной. На рис.3.13 приведена векторная диаграмма простого АМ колебаний, на которой вектор огибающей представлен в виде суммы векторов всех трёх его спектральных составляющих. Для удовлетворения вышеуказанным требованиям векторы боковых колебаний должны располагаться симметрично вектору несущего колебания и вращаться в противоположных направлениях с угловыми скоростями $\pm\Omega$.

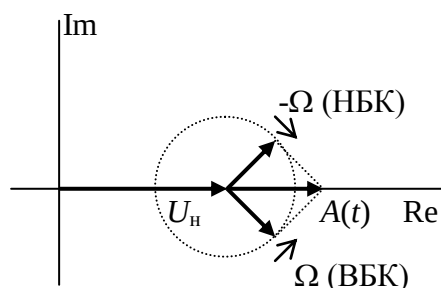


Рис.3.13. Векторная диаграмма простого АМ сигнала

го АМ колебаний, на которой вектор огибающей представлен в виде суммы векторов всех трёх его спектральных составляющих. Для удовлетворения вышеуказанным требованиям векторы боковых колебаний должны располагаться симметрично вектору несущего колебания и вращаться в противоположных направлениях с угловыми скоростями $\pm\Omega$.

Построение амплитудных модуляторов

Амплитудный модулятор является типовым ФУ с двумя входами (для модулирующего сигнала и не-

$u_{\text{мод}}(t)$

$u_{\text{АМ}}(t)$

$U_n \cos \omega_n t$

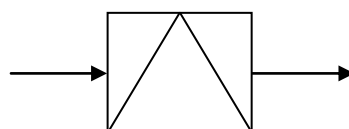


Рис. 3.14. Амплитудный модулятор

сущего колебания), на выходе которого получается АМ сигнал (рис. 3.14).

Поскольку в спектре АМ сигнала должны быть новые спектральные компоненты (боковые полосы), которых нет во входных сигналах, что схемотехническое решение амплитудного модулятора следует искать в классе параметрических или нелинейных цепей.

Параметрическая реализация амплитудного модулятора непосредственно вытекает из выражения АМ сигнала (3.1), если его рассматривать как алгоритм обработки модулирующего и несущего сигналов (рис.3.15).

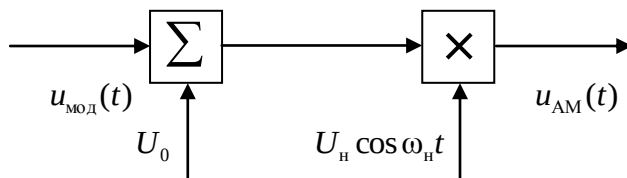


Рис. 3.15. Параметрический амплитудный модулятор

Для построения **амплитудного модулятора на нелинейной** основе воспользуемся структурой обобщённого нелинейного преобразователя (рис. 3.4). В качестве БНП использу-

ем полевой транзистор, а в качестве ЛП – простейший полосовой фильтр – колебательный LC контур. В результате получим схему, изображённую на рис. 3.16. В ней генераторы e_1 и e_2 служат источниками несущего и модулирующего сигналов, источник напряжения смещения $E_{см}$ позволяет устанавливать оптимальный режим работы модулятора.

Выходной ток i транзистора VT , который должен работать в нелинейном режиме, обогащается новыми спектральными компонентами, среди которых кроме полезных (боковых – комбинационных колебаний суммарной и разностной частот e_1 и e_2) много побочных (помех). Последние устраняются из спектра выходного напряжения $u_{вых}$ благодаря избирательной нагрузке – LC контуру, настроенному на несущую частоту $\omega_0 = \omega_H$. Полоса про-

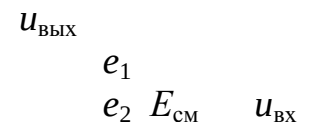


Рис. 3.16. Амплитудный модулятор

пускания контура $2\Delta\omega^* = \frac{\omega_0}{Q}$ выбирается из компромиссных со-

ображений. С одной стороны, необходимо обеспечить неравенство $2\Delta\omega^* > \Delta\omega_{АМ}$ во избежание заметных линейных искажений огибающей спектра боковых полос при преобразовании тока i в выходное напряжение $u_{вых}$. С другой стороны, чем меньше $2\Delta\omega^*$, тем больше степень подавления спектра модулирующего сигнала и побочных продуктов нелинейного преобразования (модулированных гармоник несущей частоты). Оба этих требования легко обеспечить, если $\omega_H \gg \Omega_{макс}$, что обычно выполняется на практике.

Для определения оптимального режима модулятора пользуются статической модуляционной характеристикой (СМХ)

$$I_1 = f(E_{см}) \text{ при } E_1 = \text{const}, e_2 = 0,$$

где I_1 – амплитуда первой гармоники тока частоты ω_H ,

E_1 – амплитуда несущего колебания на входе модулятора.

СМХ можно рассчитать или снять экспериментально. Типичный вид СМХ при модуляции смещением приведён на рис. 3.17. Для предотвращения замет-

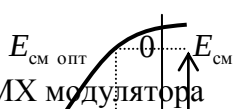


Рис. 3.17. СМХ модулятора

ных нелинейных искажений огибающей АМ сигнала необходимо выбирать достаточно линейный участок СМХ в качестве рабочего, а рабочую точку ($E_{\text{см. опт.}}$) располагать в его середине. Из рисунка видно, что чем больше рабочий участок, тем более глубокая получается модуляция, но и тем больше нелинейные искажения. По СМХ легко определить параметры оптимального режима модулятора:

- оптимальное напряжение смещения $E_{\text{см. опт.}}$,
- максимальную амплитуду модулирующего сигнала $E_{\Omega \text{ макс.}}$,
- среднюю амплитуду первой гармоники тока $I_{1 \text{ ср.}}$,
- максимальное изменение амплитуды первой гармоники тока ΔI_1 ,
- оптимальный коэффициент модуляции $m = \frac{\Delta I_1}{I_{1 \text{ ср.}}}$.

3.4. Другие виды линейной модуляции (БМ, ОМ, КАМ)

Амплитудная модуляция относится к линейным видам модуляции вследствие линейной зависимости модулированного сигнала от модулирующего (3.1). Выше отмечалась её низкая энергетическая эффективность. Первое очевидное решение для преодоления этого недостатка заключается в исключении из спектра АМ сигнала несущего колебания. В результате приходим к **двухполосной передаче** с подавленной несущей. Получение такого двухполосного сигнала весьма просто – достаточно из модулирующего сигнала исключить постоянную составляющую (если она есть), используя, например, разделительный конденсатор C_p и умножить его на несущее колебание (рис. 3.18).

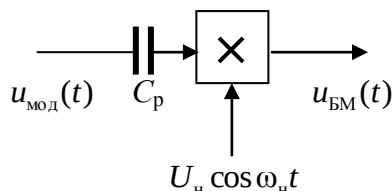


Рис. 3.18. Балансный модулятор

$$u_{\text{БМ}}(t) = k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) \cdot \cos \omega_n t. \quad (3.5)$$

Такой модулятор (перемножитель), строят обычно по балансной схеме (рис. 3.10) и называют балансным, а двухполосный сигнал – **БМ сигналом**. Существенно то, что огибающая БМ сигнала не повторяет форму модулирующего колебания, как в случае АМ, а воспроизводит его модуль

$$A_{\text{БМ}}(t) = k_{\text{БМ}} \cdot |u_{\text{мод}}(t)|,$$

причём в моменты смен знака $u_{\text{мод}}(t)$ наблюдаются скачки фазы БМ сигнала на 180° . Таким образом, БМ сигнал можно трактовать как сигнал с амплитудной и фазовой модуляциями одновременно.

Как отмечалось выше при рассмотрении спектра АМ сигнала, нижняя боковая полоса является «зеркальным отражением» верхней, т.е. не содержит никакой дополнительной информации о модулирующем сигнале. Отсюда возникает возможность передачи сигналов с помощью **однополосной модуляции (ОМ)**. При этом безразлично какую из двух полос ВБП или НБП использовать при однополосной передаче.

ОМ сигнал можно получать из БМ сигнала фильтровым или фазокомпенсационным методами. Фильтровый метод в силу своей очевидности не требует

дополнительных пояснений. Отметим лишь высокие требования к крутизне ската АЧХ полосового фильтра для выделения ВБП или НБП (по причине малого «частотного зазора» $2\Omega_{\text{мин}}$ между ними), возрастающие с увеличением несущей частоты.

Синтезируем однопольный модулятор на основе фазокомпенсационного метода подавления одной из боковых полес. Для этого обратимся к аналитическому модулирующему сигналу $\dot{u}_{\text{мод}}(t)$, спектр которого полностью располагается в области положительных частот (рис. 3.19)

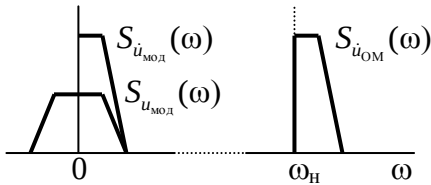


Рис. 3.19. Спектры ОМ сигналов

$\dot{u}_{\text{мод}}(t) = u_{\text{мод}}(t) + j\tilde{u}_{\text{мод}}(t)$. Умножая $\dot{u}_{\text{мод}}(t)$ на $e^{j\omega_H t}$, получим аналитический сигнал со спектром, смещённым вверх по оси частот на ω_H , т.е. по нашей терминологии комплексный ОМ сигнал ВБП

$$\dot{u}_{\text{ОМ}}(t) = \dot{u}_{\text{мод}}(t) \cdot e^{j\omega_H t}.$$

Вернёмся к действительному ОМ сигналу

$$u_{\text{ОМ}}(t) = \text{Re}[\dot{u}_{\text{ОМ}}(t)] = \text{Re}\{u_{\text{мод}}(t) + j\tilde{u}_{\text{мод}}(t)\} \cos \omega_H t + j\tilde{u}_{\text{мод}}(t) \sin \omega_H t = u_{\text{мод}}(t) \cos \omega_H t - \tilde{u}_{\text{мод}}(t) \sin \omega_H t. \quad (3.6)$$

Рассматривая полученное выражение как алгоритм, приходим к параметрической реализации однопольного модулятора в виде, представленном на рис. 3.20.

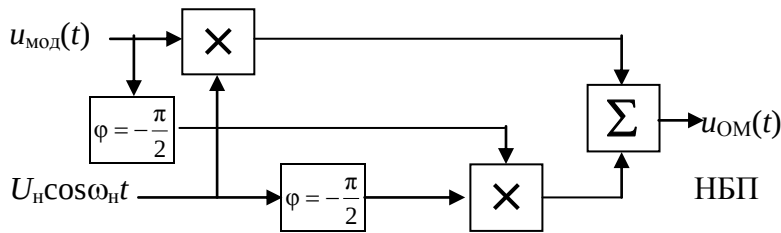


Рис. 3.20. Однопольный модулятор

Самостоятельно убедитесь в том, что для получения НБП достаточно в выражении (3.6) разность заменить на сумму.

Подставим в (3.6) модулирующий сигнал в квази-

гармонической форме $u_{\text{мод}}(t) = A_{\text{мод}}(t) \cos \psi_{\text{мод}}(t)$

$$\begin{aligned} u_{\text{ОМ}}(t) &= A_{\text{мод}}(t) \cos \psi_{\text{мод}}(t) \cdot \cos \omega_H t - A_{\text{мод}}(t) \sin \psi_{\text{мод}}(t) \cdot \sin \omega_H t = \\ &= A_{\text{мод}}(t) \cos[\psi_{\text{мод}}(t) + \omega_H t]. \end{aligned}$$

Из полученного результата видно, что в результате однопольной модуляции сохраняется огибающая модулирующего сигнала, а мгновенная частота возрастает на ω_H

$$\omega_{\text{ОМ}}(t) = \frac{d[\psi_{\text{мод}}(t) + \omega_H t]}{dt} = \omega_{\text{мод}}(t) + \omega_H.$$

Однопольную модуляцию можно рассматривать как самую простую – перенос (транспонирование) спектра модулирующего сигнала с сохранением его огибающей, а можно как сложную – амплитудную и фазовую одновременно. Она является самой узкополосной – ширина спектров модулирующего и однопольного сигналов одна и та же. Важным преимуществом ОМ по сравнению с АМ является энергетический выигрыш, достигающий (в зависимости от статистики модулирующего сигнала) до 10 раз.

К недостаткам ОМ можно отнести большие сложности получения и приёма однополосного сигнала.

Ещё одним видом линейной модуляции является **квадратурная амплитудная модуляция (КАМ)**, сущность которой заключается в передаче двух разных сигналов методами АМ или БМ на одной несущей частоте. Спектры этих двух сигналов полностью перекрываются и их разделение с помощью фильтров невозможно.

Чтобы сохранить возможность разделения сигналов на приёмной стороне, несущие колебаний на модуляторы подают с фазовым сдвигом 90° (в квадратуре). Схема формирования КАМ сигнала приведена на рис. 3.21. Достоинством КАМ по сравнению с обычными АМ или БМ, является вдвое большее количество сигналов, которые можно независимо передавать в одной и той же полосе частот.

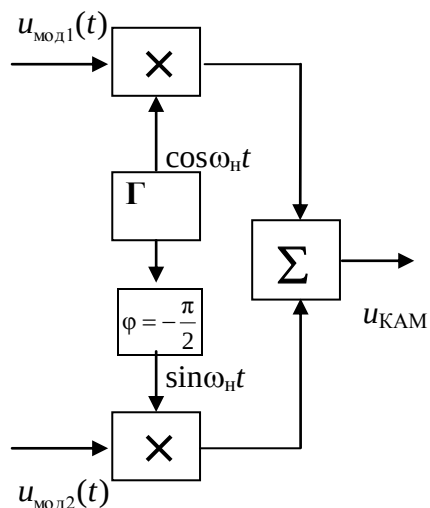


Рис. 3.21. Квадратурная АМ

Контрольные вопросы

1. В чём существо амплитудной модуляции? Напишите аналитическое выражение АМ сигнала.
2. Что называют коэффициентом модуляции m ?

Как его можно определить по осциллограмме и спектрограмме АМ сигнала?

3. Нарисуйте спектр простого АМ сигнала.
4. Каков спектр сложного АМ сигнала?
5. От чего зависит ширина спектра АМ сигнала?
6. Укажите причины низкой энергетической эффективности амплитудной модуляции.
7. Нарисуйте векторную диаграмму простого АМ сигнала.
8. Нарисуйте схему параметрического амплитудного модулятора. Укажите назначение её элементов.
9. Нарисуйте схему нелинейного амплитудного модулятора. Укажите назначение её элементов.
10. Что такое СМХ?
11. Как по СМХ определяют оптимальный режим работы амплитудного модулятора?
12. Назовите известные Вам виды линейной модуляции.
13. Нарисуйте спектр БМ сигнала.
14. Каковую огибающую имеет БМ сигнал?
15. В чём суть однополосной модуляции? Каков спектр ОМ сигнала?
16. Приведите алгоритм и схему получения ОМ сигнала.
17. Нарисуйте схему получения сигнала КАМ.

Рекомендации по проведению экспериментальных исследований получения АМ, БМ, ОМ и КАМ сигналов

Для закрепления по-

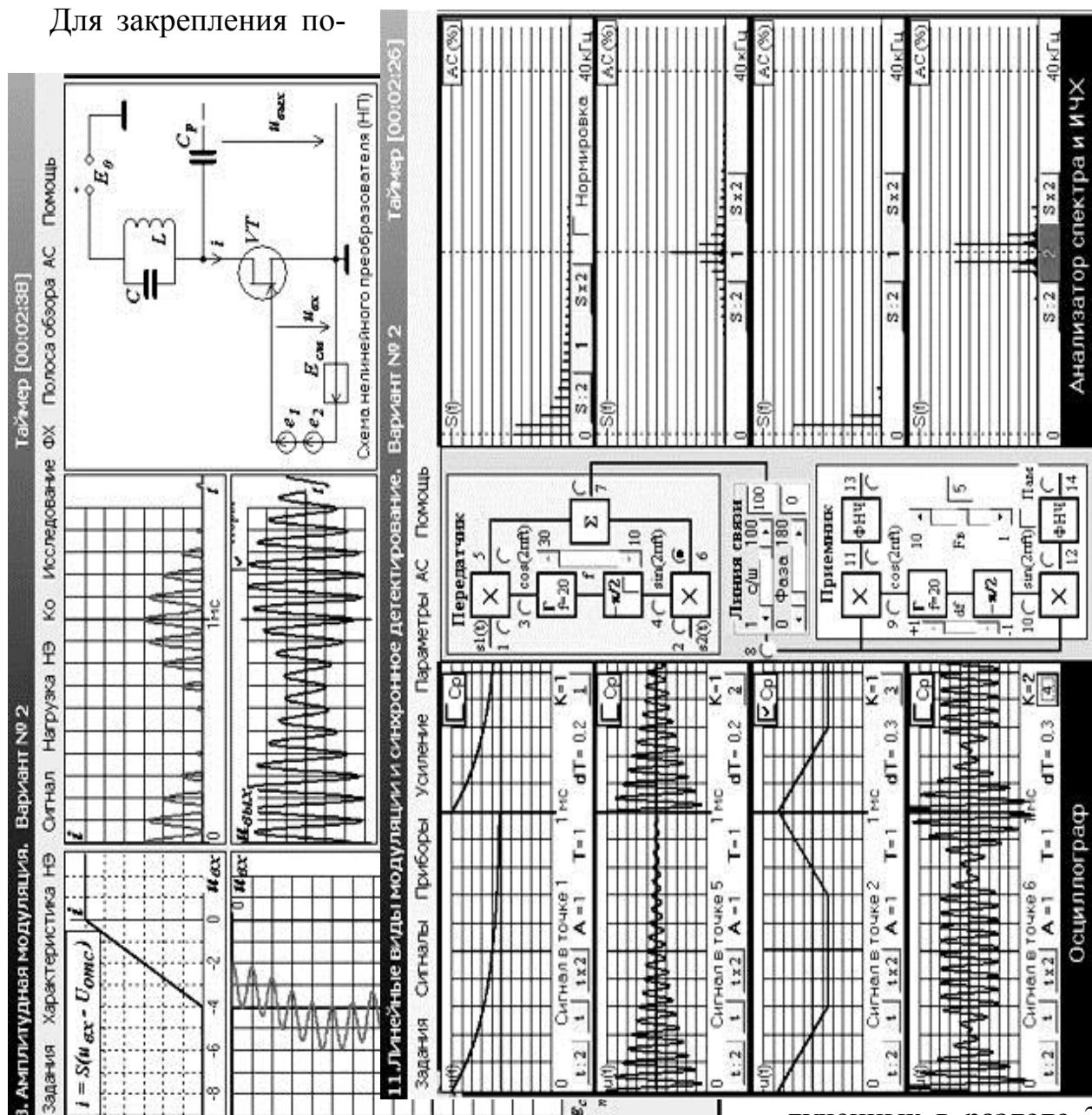


Рис. 3.23. Исследование преобразований сигналов в параметрических ФУ

лученных в разделе 3.3 и 3.4 знаний полезно выполнить лабораторные работы № 8 «Амплитудная модуляция» в полном объёме (рис. 3.22) и № 11 «Линейные виды модуляции и синхронное детектирование» (рис. 3.23) в части, относящейся к исследованию модуляции, а также провести дополнительные экспериментальные исследования, используя иные виды сигналов в рамках предоставляемых этими работами ресурсов. Обратите, прежде всего, внимание на роль каждого ФУ в нелинейном и параметрическом амплитудных модуляторах, осциллограммы и спектрограммы сигналов в отдельных их точках. Укажите смысл СМХ, способ её экспериментального снятия и использования для определения оптимального режима модулятора. Для параметрических модуляторов укажите различия в них применительно к получению АМ, БМ, ОМ и КАМ сигналов.

3.5. Детектирование сигналов с линейными видами модуляции

При приёме модулированных сигналов над ними необходимо выполнять операцию обратную модуляции, т.е. преобразование, в результате которого будет получен сигнал, пропорциональный модулирующему на передающей стороне. Такое преобразование называют детектированием, а выполняющий его ФУ – детектором.

Из сопоставления спектров модулирующего и модулированного сигналов (см., например, рис. 3.12) с очевидностью вытекает невозможность построения детекторов модулированных колебаний в классе линейных цепей.

Детектирование АМ сигналов

У АМ сигнала $u_{\text{АМ}}(t) = A(t) \cos \omega_n t$ информация о модулирующем сигнале заключена в огибающей $A(t)$, следовательно необходим **амплитудный детектор (детектор огибающей)**. По определению такой ФУ должен осуществлять измерение огибающей входного сигнала, т.е. формировать выходной сигнал вида $u_{\text{вых}}(t) = K_{\text{дет}} \cdot A(t)$. Простейшая схема детектора огибающей на нелинейной основе приведена на рис. 3.24. В ней в качестве нелинейного элемента для обогащения спектра тока i низкочастотными составляющими модулирующего сигнала

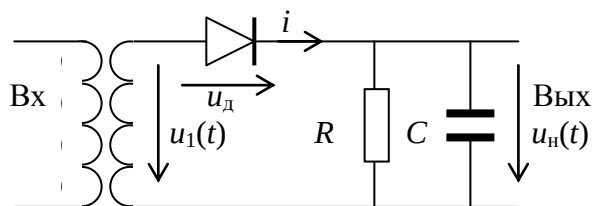


Рис. 3.24. Диодный детектор огибающей

(напомним, что их нет в спектре входного АМ сигнала $u_1(t)$) используется диод. Для подавления высокочастотных спектральных составляющих (АМ сигнала и побочных продуктов нелинейного преобразования) служит простейший ФНЧ 1-го порядка – нагрузочная RC цепь. На рис. 3.25 приведены спектры входного $u_1(t)$ и выходного $u_n(t)$ напряжений, тока i диода и зависимость модуля сопротивления нагрузки от частоты $z_{RC}(\omega)$, вытекающие из приведённых рассуждений.

На рис. 3.25 приведены спектры входного $u_1(t)$ и выходного $u_n(t)$ напряжений, тока i диода и зависимость модуля сопротивления нагрузки от частоты $z_{RC}(\omega)$, вытекающие из приведённых рассуждений.

Проанализируем работу диодного детектора огибающей в **режиме сильного сигнала**. В этом случае целесообразно воспользоваться кусочно-линейной аппроксимацией вольтамперной характеристики (ВАХ) $i = f(u_d)$ диода и расчёт вести методом угла отсечки. Можно наметить следующую последовательность рассуждений:

- для вычисления $u_n(t)$ при известной нагрузке (R и C) надо предварительно определить ток i ,
- для вычисления тока i при выбранном диоде (известной ВАХ $i = f(u_d)$) надо знать напряжение на нём u_d ,
- для определения напряжения $u_d = u_1(t) - u_n(t)$, надо знать искомое напряжение $u_n(t)$.

В результате образовался «замкнутый круг» – вычисление искомой функции требует знания её самой на стадии промежуточных вычислений. Для его

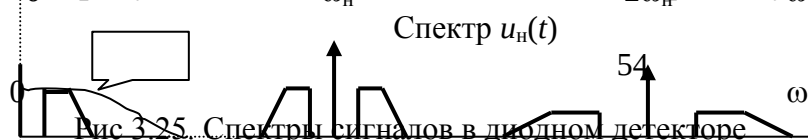


Рис. 3.25. Спектры сигналов в диодном детекторе

«разрыва» воспользуемся методом итераций (последовательных приближений), суть которого в том, что задаются начальным («нулевым») приближением к искомой функции $u_n(t)^{(0)}$ и производят вычисление её «первого» приближения $u_n(t)^{(1)}$ по выше намеченной процедуре (в обратном порядке):

- 1) $u_d^{(0)} = u_1(t) - u_n(t)^{(0)}$,
- 2) $i^{(0)} = f(u_d^{(0)})$,
- 3) $u_n(t)^{(1)}$ через $i^{(0)}$ и известные R и C ,
- 4) сравнивают разность $u_n(t)^{(1)} - u_n(t)^{(0)}$ с допустимой погрешностью.

При циклическом повторении этой процедуры с ростом числа приближений возможны два варианта:

- процесс последовательных приближений сходится к истинному решению,
- процесс расходится.

В первом случае цикл прерывают по достижении заданной точности вычислений. Второй случай может свидетельствовать о «плохом» выборе «нулевого» приближения.

Для «удачного» выбора «нулевого» приближения и существенного сокращения числа итераций рекомендуется использование квазилинейного метода, в основе которого лежит допущение о форме искомого колебаний (вида функции), которым задаются с точность до его параметров.

Так, в нашем случае анализа диодного детектора, в качестве «нулевого» приближения к искомому напряжению на нагрузке примем постоянное напряжение $u_n(t)^{(0)} = U_0$, не задавая его численно. Основания для этого чисто физические – напряжение на выходе ФНЧ не может быстро меняться во времени. Тогда, в соответствии с методом угла отсечки (см. рис. 3.26), имеем

$$u_d^{(0)} = u_1(t) - U_0 = A \cos \omega_n t - U_0 ;$$

$$i^{(0)} = f(u_d^{(0)}) = \begin{cases} S \cdot u_d^{(0)}; & u_d^{(0)} > 0 \\ 0; & u_d^{(0)} \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} SA(\cos \omega_n t - \cos \theta); & u_d^{(0)} > 0 \\ 0; & u_d^{(0)} \leq 0 \end{cases}, \text{ где } \cos \theta = \frac{U_0}{A};$$

$$I_0 = \alpha_0(\theta) i_{\max} = \alpha_0(\theta) SA(1 - \cos \theta),$$

где S – крутизна наклонного участка ВАХ диода;

$$u_n^{(1)} = I_0 R = SRA\alpha_0(\theta)(1 - \cos \theta) = U_0. \quad (3.6)$$

Уравнивая $u_n^{(1)} = u_n^{(0)} = U_0$, мы имеем возможность численно определить U_0 и завершить процесс итераций.

Из (3.6) вытекает следующий результат

$$K_{\text{дет}} = \frac{U_0}{A} = SRA\alpha_0(\theta)(1 - \cos \theta) = \cos \theta, \quad (3.7)$$

на основе которого можно сделать следующие **выводы**:

1. Угол отсечки θ и, соответственно, $K_{\text{дет}}$ не зависят от огибающей A , следовательно, детектирование в режиме сильного сигнала осуществляется **линейно**.

2. Для повышения эффективности детектирования (увеличения $K_{\text{дет}}$) следует стремиться к **уменьшению угла отсечки θ** , что достигается увеличением произведения $S \cdot R$.

3. Выражение (3.7) можно использовать в качестве **формулы для расчёта сопротивления R** нагрузки после выбора диода (становится известной крутизна S его ВАХ) и величины $K_{\text{дет}}$.

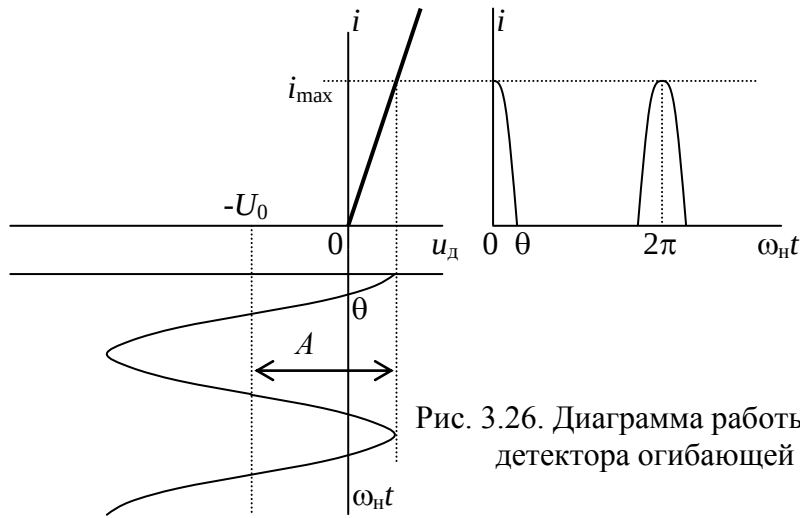


Рис. 3.26. Диаграмма работы детектора огибающей

4. Величину ёмкости C нагрузки следует определять из очевидного неравенства

$$\Omega_{\text{макс}} \ll \frac{1}{RC} \ll \omega_n.$$

Проведём анализ детектора огибающей в **режиме слабого сигнала**.

В этом случае ВАХ диода целесообразно аппроксимировать полиномом второй степени

$$i = a_0 + a_1 u_d + a_2 u_d^2.$$

Ограничимся определением «первого» приближения $u_n(t)^{(1)}$, приняв $u_n(t)^{(0)} = 0$. Тогда $u_d^{(0)} = A \cos \omega_n t$ и

$$i^{(0)} = a_0 + a_1 A \cos \omega_n t + a_2 A^2 \cos^2 \omega_n t = a_0 + a_1 A \cos \omega_n t + \underbrace{\frac{a_2}{2} A^2}_{\text{полезная часть}} + \frac{a_2}{2} A^2 \cos 2\omega_n t.$$

В результате имеем (с учетом очевидного $a_0 = 0$)

$$U_0^{(1)} = I_0 R = \frac{a_2}{2} A^2 R = K_{\text{дет}} A^2.$$

При простом АМ сигнале, когда $A(t) = A(1 + m \cos \Omega t)$

$$\begin{aligned} U_0^{(1)} &= K_{\text{дет}} A^2(t) = K_{\text{дет}} A^2 (1 + m \cos \Omega t)^2 = \\ &= K_{\text{дет}} \cdot A^2 \left(1 + 2m \cos \Omega t + \frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} \cos 2\Omega t \right). \end{aligned}$$

Из полученного результата видно, что детектирование сопровождается нелинейными искажениями с коэффициентом гармоник

$$k_r = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1} = \frac{\frac{m^2}{2}}{2m} = \frac{m}{4}$$

и можно сделать следующие **выводы**:

1. В режиме слабого сигнала имеет место **квадратичное детектирование**, сопровождаемое нелинейными искажениями.

2. **Величина нелинейных искажений**, определяемая k_r , зависит от коэффициента модуляции m ($k_r = \frac{m}{4}$).

Детектирование БМ, ОМ и КАМ сигналов

Рассмотренный выше детектор огибающей не пригоден для детектирования БМ (двухполосных без несущей), ОМ и КАМ сигналов, поскольку их огибаю-

щие не повторяют форму модулирующих сигналов и, кроме амплитудной, имеет место фазовая модуляция. Соответствующий детектор должен обладать не только амплитудной, но и фазовой чувствительностью. Такого рода детектор реализуют на параметрической основе и называют синхронным (рис. 3.27).

Рассмотрим процесс детектирования сигналов с разными видами линейной модуляции синхронным детектором (СД).

1. Детектирование АМ сигналов

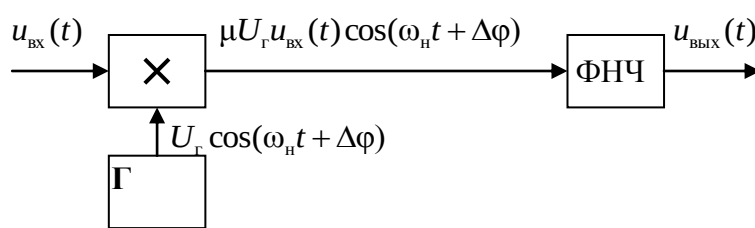


Рис. 3.27. Синхронный детектор

В этом случае

$$u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{АМ}}(t) = \underbrace{U_{\text{н}} [1 + k_{\text{АМ}} u_{\text{мод}}(t)]}_{A(t)} \cos \omega_{\text{н}} t = A(t) \cos \omega_{\text{н}} t.$$

На выходе перемножителя получим

$$\begin{aligned} \mu U_{\text{р}} A(t) \cos \omega_{\text{н}} t \cos(\omega_{\text{н}} t + \Delta \varphi) &= \\ = \frac{1}{2} \mu U_{\text{р}} A(t) \cos \Delta \varphi + \frac{1}{2} \mu U_{\text{р}} A(t) \cos(2\omega_{\text{н}} t + \Delta \varphi) \end{aligned}$$

а на выход СД через ФНЧ пройдет лишь первое (НЧ) слагаемое этого произведения

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2} \mu U_{\text{р}} A(t) \cos \Delta \varphi = K_{\text{дет}} A(t).$$

Для достижения наибольшего коэффициента детектирования $K_{\text{дет}} = \frac{1}{2} \mu U_{\text{р}} \cos \Delta \varphi$ следует добиваться не только синхронности, но и синфазности ($\Delta \varphi = 0$) опорного и несущего колебаний.

2. Детектирование двухполосных (БМ) сигналов

В этом случае (3.5)

$$u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{БМ}}(t) = k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) \cos \omega_{\text{н}} t.$$

На выходе перемножителя имеем

$$\begin{aligned} \mu U_{\text{р}} k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) \cos \omega_{\text{н}} t \cos(\omega_{\text{н}} t + \Delta \varphi) &= \\ = \frac{1}{2} \mu U_{\text{р}} k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) \cos \Delta \varphi + \frac{1}{2} \mu U_{\text{р}} k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) \cos(2\omega_{\text{н}} t + \Delta \varphi). \end{aligned}$$

После ФНЧ на выходе СД получим

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2} \mu U_{\text{р}} k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t) \cos \Delta \varphi = K_{\text{дет}} u_{\text{мод}}(t),$$

где $K_{\text{дет}} = \frac{1}{2} \mu U_{\text{р}} k_{\text{БМ}} \cos \Delta \varphi$ — коэффициент детектирования.

3. Детектирование однополосных (ОМ) сигналов

В этом случае (3.6)

$$u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{ОМ}}(t) = u_{\text{мод}}(t) \cos \omega_{\text{н}} t - \tilde{u}_{\text{мод}}(t) \sin \omega_{\text{н}} t.$$

На выходе перемножителя получаем

$$\begin{aligned} \mu U_{\text{р}} [u_{\text{мод}}(t) \cos \omega_{\text{н}} t - \tilde{u}_{\text{мод}}(t) \sin \omega_{\text{н}} t] \cos(\omega_{\text{н}} t + \Delta \varphi) &= \\ = \frac{1}{2} \mu U_{\text{р}} u_{\text{мод}}(t) [\cos \Delta \varphi + \cos(2\omega_{\text{н}} t + \Delta \varphi)] - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\mu U_{\Gamma}\tilde{u}_{\text{мод}}(t)[- \sin \Delta\varphi + \sin(2\omega_{\text{н}}t + \Delta\varphi)].$$

После ФНЧ на выходе СД при условии $\Delta\varphi = 0$ имеем

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma} \cdot u_{\text{мод}}(t) = K_{\text{дет}} u_{\text{мод}}(t),$$

где $K_{\text{дет}} = \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma}$ – коэффициент детектирования.

4. Детектирование и разделение КАМ сигналов

В этом случае (см. рис 3.21)

$$u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{КАМ}}(t) = u_{\text{мод1}}(t) \cos \omega_{\text{н}}t + u_{\text{мод2}}(t) \sin \omega_{\text{н}}t.$$

На выходе перемножителя получаем

$$\begin{aligned} \mu U_{\Gamma} [u_{\text{мод1}}(t) \cos \omega_{\text{н}}t + u_{\text{мод2}}(t) \sin \omega_{\text{н}}t] \cos(\omega_{\text{н}}t + \Delta\varphi) = \\ = \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma} u_{\text{мод1}}(t) [\cos \Delta\varphi + \cos(2\omega_{\text{н}}t + \Delta\varphi)] + \\ + \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma} u_{\text{мод2}}(t) [- \sin \Delta\varphi + \sin(2\omega_{\text{н}}t + \Delta\varphi)]. \end{aligned}$$

После ФНЧ на выходе СД имеем:

при условии $\Delta\varphi = 0$

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma} u_{\text{мод1}}(t),$$

при условии $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2}\mu U_{\Gamma} u_{\text{мод2}}(t).$$

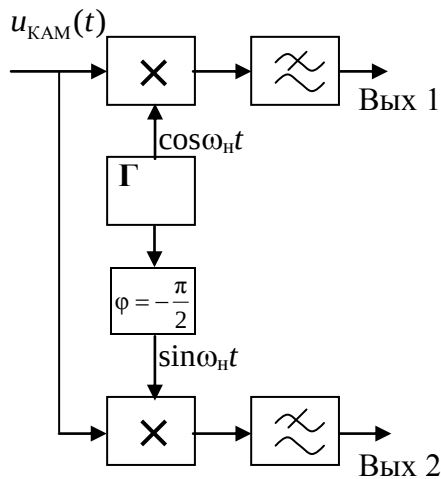


Рис. 3.28. Приём КАМ сигнала

Таким образом, при использовании двух СД с квадратурными опорными колебаниями (парно синфазными с квадратурными несущими КАМ сигнала) наряду с детектированием обеспечивается полное разделение двух передаваемых сигналов $u_{\text{мод1}}(t)$ и $u_{\text{мод2}}(t)$. Схема приёма КАМ сигналов приведена на рис. 3.28.

Выводы

1. Синхронный детектор позволяет детектировать сигналы с **любым видом линейной модуляции без искажений** независимо от уровня сигнала.
2. Синхронный детектор обладает наряду с амплитудной ещё и **фазовой чувствительностью**, что позволяет использовать его в качестве измерителя разности фаз входного и опорного колебаний (фазового детектора).
3. Отсутствие в СД синфазности несущего и опорного колебаний $\Delta\varphi \neq 0$ приводит:

- при приёме АМ и БМ сигналов – к уменьшению коэффициента детектирования $K_{\text{дет}} = \frac{1}{2} \mu U_{\Gamma} \cdot \cos \Delta\varphi$;
- при приёме ОМ сигналов – к искажению формы выходного сигнала за счёт суммирования $u_{\text{мод}}(t) \cos \Delta\varphi + \tilde{u}_{\text{мод}}(t) \sin \Delta\varphi$, что, впрочем, не является существенным при приёме звуковых сообщений, т.к. эти искажения связаны с изменением фазового спектра сигнала при сохранении амплитудного (см. свойства преобразования Гильберта), а слуховой аппарат человека не обладает чувствительностью к фазовым искажениям;
- при приёме КАМ сигналов – к перекрёстным искажениям (не полному разделению сигналов), когда

$$u_{\text{вых1}} = u_{\text{мод1}}(t) \cos \Delta\varphi - u_{\text{мод2}}(t) \sin \Delta\varphi,$$

$$u_{\text{вых2}} = u_{\text{мод1}}(t) \sin \Delta\varphi + u_{\text{мод2}}(t) \cos \Delta\varphi.$$

Контрольные вопросы

1. Нарисуйте схему детектора огибающей. Приведите спектры сигналов в её отдельных точках.
2. Каковы особенности работы детектора огибающей в режиме сильного сигнала?
3. Каковы особенности работы детектора огибающей в режиме слабого сигнала?
4. Как выполняют детектирование БМ, ОМ и КАМ сигналов?
5. Нарисуйте схему синхронного детектора и спектры сигналов в отдельных её точках.
6. Как влияет на качество детектирования АМ, БМ и ОМ сигналов неточность восстановления фазы опорного колебания?
7. Как влияет на качество разделения сигналов с КАМ неточность восстановления фазы опорного колебания?

Рекомендации по проведению экспериментальных исследований детектирования АМ, БМ, ОМ и КАМ сигналов

Для закрепления полученных в разделе 3.5 знаний целесообразно выполнить лабораторные работы № 9 «Детектирование АМ сигналов» (рис. 3.29), № 21 «Детектор огибающей сигнала» (рис. 3.30) в полных объёмах и № 11 «Линейные виды модуляции и синхронное детектирование» (рис. 3.31) в части исследования синхронных детекторов. Обратите внимание на роль каждого ФУ в нелинейном и параметрическом детекторах, осциллограммы и спектрограммы сигналов в отдельных их точках, на причины и характер искажений сигналов при использовании нелинейных и параметрических детекторов.

Задания: Сигналы Приборы Усиление Параметры АС Помощь

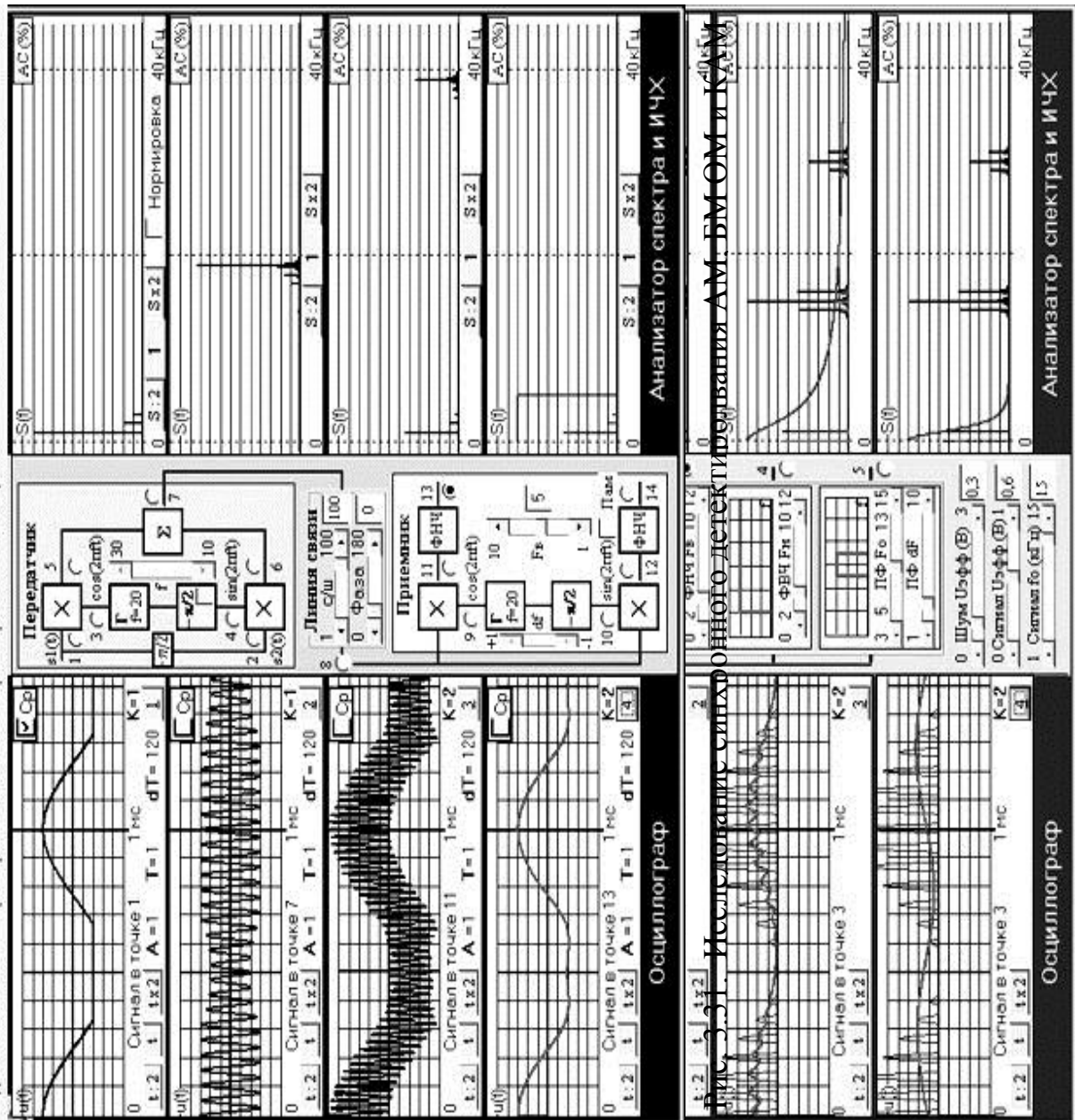


Рис. 3.30. Исследование детектора огибающей АМ сигнала

3.6. Преобразование частоты сигналов

Преобразованием частоты называют перенос (транспонирование) спектра сигнала (обычно узкополосного) по оси частот «вверх» или «вниз» на некоторое расстояние ω_r , задаваемое гетеродином – маломощным генератором гармонического колебания $U_r \cos \omega_r t$. При этом сохраняются вид модуляции и структура спектра сигнала, изменяется только его положение на оси частот.

Преобразователь частоты состоит из смесителя частот и гетеродина (рис. 3.32).

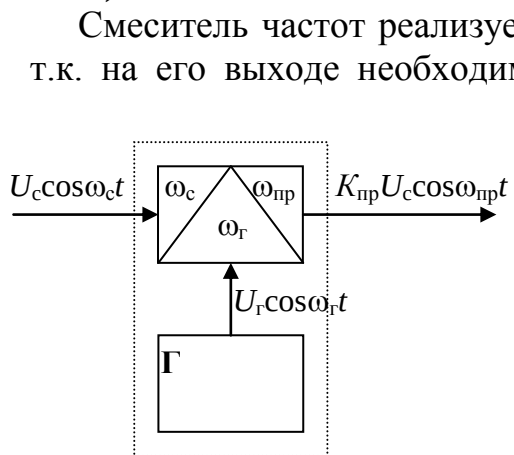


Рис. 3.32. Преобразователь частоты

Смеситель частот реализуется на параметрической или нелинейной основе, т.к. на его выходе необходимо получить колебание комбинационных частот входных сигналов второго порядка (суммарных или разностных). Среднюю частоту выходного сигнала $\omega_{пр} = \omega_c - \omega_r$ или $\omega_{пр} = \omega_c + \omega_r$ называют промежуточной. Собственно говоря, ничего нового в операции преобразования частоты для нас нет, с ней мы уже встречались при рассмотрении свойств преобразования Фурье (п. 9), свойств аналитического сигнала (п. 5) и параметрической реализации однополосного модулятора (рис. 3.20). Схема, приведённая на рис.3.20, может быть использована

в качестве параметрического преобразователя частоты без каких либо изменений. Нелинейный преобразователь частоты может быть выполнен также по выше рассмотренной схеме амплитудного модулятора (рис. 3.16) при настройке нагрузочного колебательного LC контура на промежуточную частоту $\omega_0 = \omega_{пр}$.

Преобразователи частоты входят в состав подавляющего большинства современных радиоприёмных устройств (супергетеродинов). Их применение позволяет основную додетекторную обработку сигналов в этих приёмниках – фильтрацию и усиление производить не на частоте сигнала (которая может быть слишком высокой и изменяться в широком диапазоне частот), а на фиксированной промежуточной. Это позволяет существенно улучшить чувствительность и избирательность приёмников, а также упростить их перестройку в широком диапазоне принимаемых частот.

Контрольные вопросы

1. Какой ФУ называют преобразователем частоты?
2. Приведите алгоритм и схему параметрического преобразователя частоты.
3. Объясните назначение каждого элемента схемы параметрического преобразователя частоты.
4. Нарисуйте схему преобразователя частоты на нелинейной основе и объясните назначение её элементов.
5. Какие преимущества даёт использование преобразователя частоты в радиоприёмных устройствах?

Рекомендации по проведению экспериментальных исследований преобразования частоты сигналов

Для закрепления полученных в разделе 3.6 знаний полезно выполнить лабораторные работы № 12 «Преобразование частоты на параметрической основе» (рис. 3.33) и №10 «Преобразование частоты сигналов на нелинейной основе» в

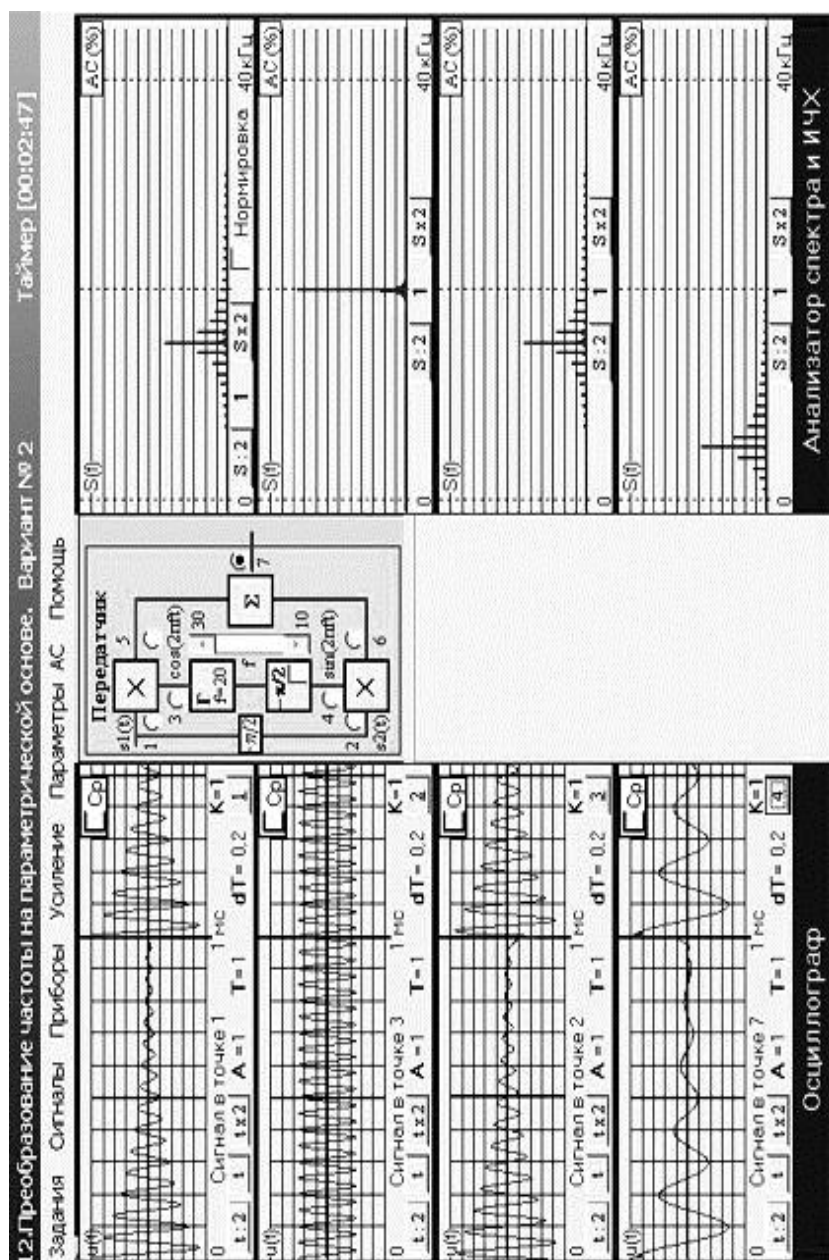


Рис. 3.33. Исследование параметрического преобразователя частоты

полных объёмах. Обратите внимание на роль каждого ФУ в нелинейном и параметрическом преобразователях частоты, осциллограммы и спектрограммы сигналов в отдельных их точках.

3.7. Угловая (ЧМ и ФМ) модуляция

При угловой модуляции (УМ) информация о модулирующем сигнале закладывается в полную фазу $\Psi(t)$ гармонического переносчика

$$u_{\text{ум}}(t) = U_0 \cos \Psi(t) = U_0 \cos[\omega_{\text{н}} t + \varphi(t)]. \quad (3.8)$$

В зависимости от того, как это делается, различают два варианта УМ:

1) **фазовая модуляция (ФМ)**, при которой

$$\varphi(t) = K_{\text{ФМ}} u_{\text{мод}}(t)$$

2) **частотная модуляция (ЧМ)**, при которой

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = K_{\text{ЧМ}} u_{\text{мод}}(t)$$

Поскольку фаза $\Psi(t)$ и мгновенная частота $\omega(t)$ связаны между собой известным соотношением

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d[\omega_{\text{н}} t + \varphi(t)]}{dt} = \omega_{\text{н}} + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_{\text{н}} + \Delta\omega(t),$$

то столь же тесно связаны между собой ФМ и ЧМ.

В частности, при ФМ

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d[K_{\text{ФМ}} u_{\text{мод}}(t)]}{dt} = K_{\text{ФМ}} \frac{du_{\text{мод}}(t)}{dt},$$

а при ЧМ

$$\varphi(t) = \int \Delta\omega(t) dt = K_{\text{ЧМ}} \int u_{\text{мод}}(t) dt.$$

Из этих соотношений вытекает возможность получения обоих видов угловой модуляции с помощью одного типа модулятора (либо фазового, либо частотного) (рис. 3.34).

Векторная диаграмма колебания с УМ

Из аналитического выражения колебания с УМ (3.8) видно, что его амплитуда U_0 сохраняется неизменной, следовательно, вектор комплексной амплитуды $u_{\text{ум}}(t)$ не изменяет свою длину и может только вращаться на комплексной

плоскости (рис. 3.35). Годограф этого вектора представляет собой окружность.

Аналитическое выражение простого колебания с УМ имеет следующий вид

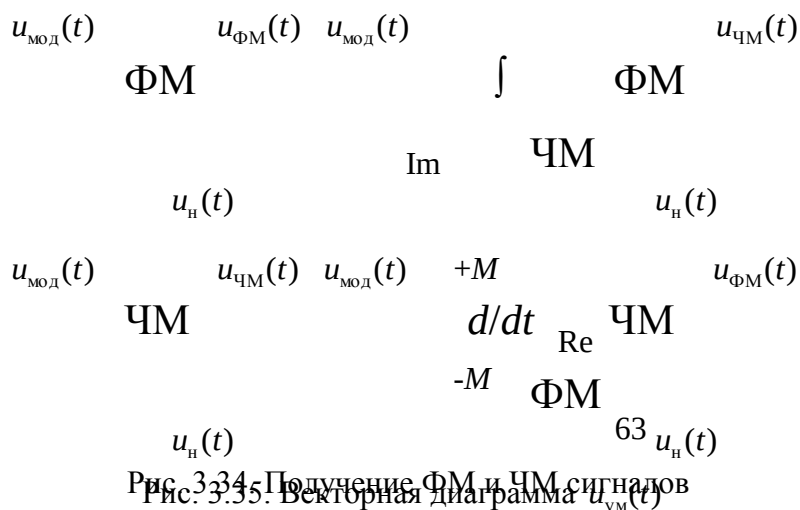
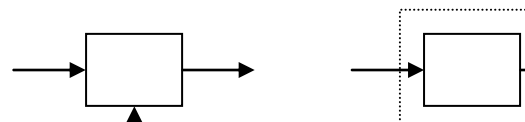


Рис. 3.34. Получение ФМ и ЧМ сигналов

Рис. 3.35. Векторная диаграмма $u_{\text{ум}}(t)$



$$u_{\text{ym}}(t) = U_0 \cos(\omega_n t + M \sin \Omega t),$$

где M – максимальное отклонение фазы от среднего значения называют **индексом модуляции**.

Изменение мгновенной частоты простого колебания с УМ происходит по закону

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d(M \sin \Omega t)}{dt} = \underbrace{M\Omega}_{\Delta\omega} \cos \Omega t,$$

где $\Delta\omega = M\Omega$ ($\Delta f = MF$) – **девиация частоты**.

Спектр простого колебания с УМ

Для определения спектра простого колебания с УМ удобно перейти к его комплексному сигналу

$$\dot{u}_{\text{ym}}(t) = U_0 e^{j(\omega_n t + M \sin \Omega t)} = U_0 e^{j\omega_n t} e^{jM \sin \Omega t}. \quad (3.9)$$

Из теории функций Бесселя известно, что

$$e^{jM \sin \Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(M) e^{jk\Omega t}, \quad (3.10)$$

где $J_k(M)$ – функции Бесселя первого рода порядка k от аргумента M ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Они обладают свойством

$$J_k(M) = (-1)^k J_{-k}(M).$$

Графики функций Бесселя приведены на рис. 3.36.

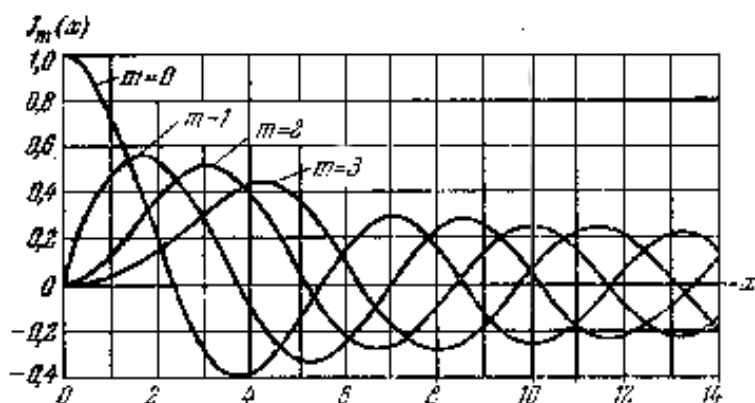


Рис. 3.36. Графики функций Бесселя

Подставляя (3.10) в (3.9), получаем

$$\dot{u}_{\text{ym}}(t) = U_0 e^{j\omega_n t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(M) \cdot e^{jk\Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_0 J_k(M) e^{j(\omega_n + k\Omega)t}$$

Вернёмся к действительному сигналу

$$u_{\text{ym}}(t) = \text{Re}[\dot{u}_{\text{ym}}(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_0 J_k(M) \cos(\omega_n + k\Omega)t$$

Спектр простого сигнала с УМ, соответствующий полученному выражению, приведён на рис. 3.37.

Для определения ширины спектра простого сигнала с УМ учтём ещё одно свойство функций Бесселя – с ростом их порядка увеличивается начальная область значений аргумента M , при которых модуль этих функций очень мал. Обычно, пренебрегают боковыми компонентами с номерами $k >$

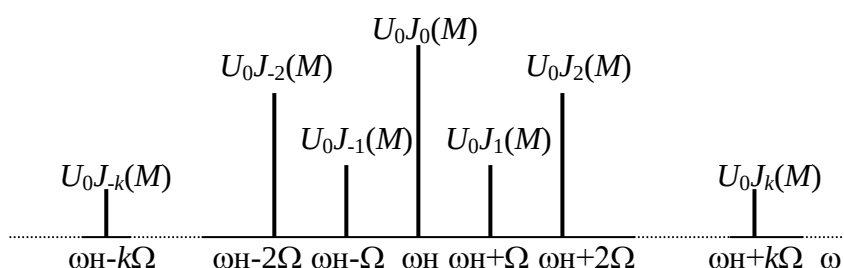


Рис. 3.37. Спектр простого колебания с УМ

ласть значений аргумента M , при которых модуль этих функций очень мал. Обычно, пренебрегают боковыми компонентами с номерами $k >$

$M+1$, считая практическую ширину спектра

$$\Delta\omega_{\text{УМ}} = 2\Omega(M+1) \text{ или } \Delta f_{\text{УМ}} = 2F(M+1).$$

Таким образом, при $M \gg 1$

$$\Delta\omega_{\text{УМ}} \cong 2\Omega M = 2\Delta\omega \text{ или } \Delta f_{\text{УМ}} \cong 2FM = 2\Delta f$$

и можно считать, что ширина спектра простого колебания с УМ вдвое больше его девиации частоты и существенно больше (в M раз) ширины спектра АМ сигнала.

При $M \ll 1$ достаточно в спектре этого колебания удержать первую пару боковых и считать его ширину

$$\Delta\omega_{\text{УМ}} = 2\Omega \text{ или } \Delta f_{\text{УМ}} = 2F$$

равной ширине спектра простого АМ сигнала.

Методы осуществления угловой модуляции

Различают два основных метода осуществления угловой модуляции – прямой и косвенный. По прямому методу реализуют частотные модуляторы на основе генераторов, частота колебаний которых управляется внешним напряжением (ГУН) (рис. 3.38). Особенностью ГУН является включение в его колебательную систему, от собственной частоты ω_0 которой зависит частота ω_r генерируемых колебаний, управляемого реактивного элемента (УРЭ). В качестве УРЭ можно использовать варикап, «реактивный транзистор», ёмкость (индуктивность) которых зависит от приложенного напряжения (протекающего тока).

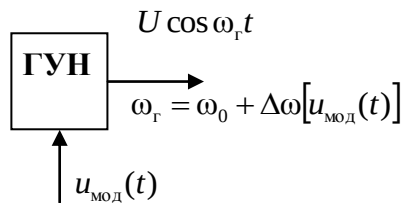


Рис. 3.38. Частотный модулятор

Достоинством прямого метода является возможность получения большой девиации частоты ($M \gg 1$), т.е. широкополосной частотной модуляции, а основным недостатком – трудность обеспечения высокой стабильности несущей частоты.

стоты.

По косвенному методу реализуют фазовые модуляторы на основе схемы,

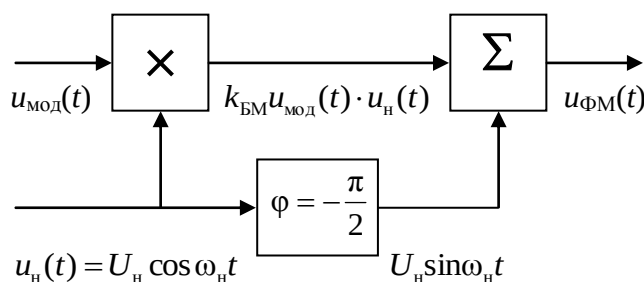


Рис. 3.39. Фазовый модулятор

представленной на рис. 3.39. Выясним условия, при которых эта схема обеспечивает ФМ. На выходе сумматора имеем

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(t) &= k_{\text{БМ}} u_{\text{МОД}}(t) U_{\text{Н}} \cos \omega_{\text{Н}} t + U_{\text{Н}} \sin \omega_{\text{Н}} t = \\ &= U_{\text{Н}} [k_{\text{БМ}} u_{\text{МОД}}(t) \cos \omega_{\text{Н}} t + \sin \omega_{\text{Н}} t] = \\ &= U_{\text{Н}} \left\{ \sqrt{[k_{\text{БМ}} u_{\text{МОД}}(t)]^2 + 1} \right\} \sin \{ \omega_{\text{Н}} t + \arctg [k_{\text{БМ}} u_{\text{МОД}}(t)] \}. \end{aligned}$$

При выполнении условия $k_{\text{БМ}}|u_{\text{мод}}(t)|_{\text{макс}} \ll 1$

$$u_{\text{вых}}(t) \cong U_{\text{н}} \sin[\omega_{\text{н}} t + k_{\text{БМ}} u_{\text{мод}}(t)] = u_{\text{ФМ}}(t).$$

Таким образом установили, что рассмотренная схема может служить фазовым модулятором только при выполнении указанного неравенства, иначе говоря, только при малом индексе модуляции ($M \ll 1$) выходного сигнала $u_{\text{ФМ}}(t)$. Это её основной недостаток, а достоинством является высокая стабильность несущей частоты $u_{\text{ФМ}}(t)$ при использовании высокостабильного генератора несущего колебания.

3.8. Детектирование сигналов с угловой модуляцией

Детектирование ФМ сигналов

Для детектирования ФМ сигналов можно использовать ранее рассмотренный **синхронный детектор** (рис. 3.27). При $u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{ФМ}}(t) = U_0 \cos[\omega_{\text{н}} t + \varphi(t)]$ в качестве опорного колебания используют $u_{\text{г}}(t) = U_{\text{г}} \sin \omega_{\text{н}} t$. Это позволяет получить характеристику детектирования $u_{\text{вых}}(t) = f(\varphi)$ в виде

$$u_{\text{вых}}(t) = \{ \mu U_0 U_{\text{г}} \cos[\omega_{\text{н}} t + \varphi(t)] \sin \omega_{\text{н}} t \}_{\text{НЧ}} = \frac{1}{2} \mu U_0 U_{\text{г}} \sin \varphi(t), \quad (3.11)$$

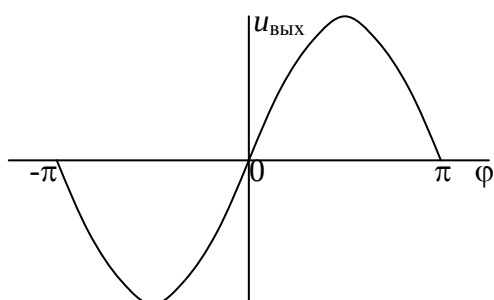


Рис. 3.40. Характеристика детектирования ФД

где $\{...\}_{\text{НЧ}}$ обозначает низкочастотную часть выражения в фигурных скобках (после прохождения через ФНЧ). График характеристики детектирования фазового детектора приведён на рис. 3.40.

Детектирование ЧМ сигналов

Для построения частотных детекторов используются два метода связанные с преобразованием вида модуляции:

- 1) преобразование **ЧМ в АМ** с последующим амплитудным детектированием,
- 2) преобразование **ЧМ в ФМ** с последующим фазовым детектированием

Первый метод реализован в схеме **частотного детектора** с расстроенными контурами (рис. 3.41). Преобразователь ЧМ в АМ выполнен на двух колебательных контурах, расстроенных относительно частоты сигнала $\omega_{01} = \omega_{\text{с}} + \Delta\omega_{\text{р}}$ и $\omega_{02} = \omega_{\text{с}} - \Delta\omega_{\text{р}}$, где $\Delta\omega_{\text{р}}$ (расстройка) выбирается таким образом, чтобы получить максимальную линейность рабочего участка характеристики детектирования. Амплитудные детекторы выполнены по выше рассмотренной схеме диодного детектора огибающей (рис. 3.24).

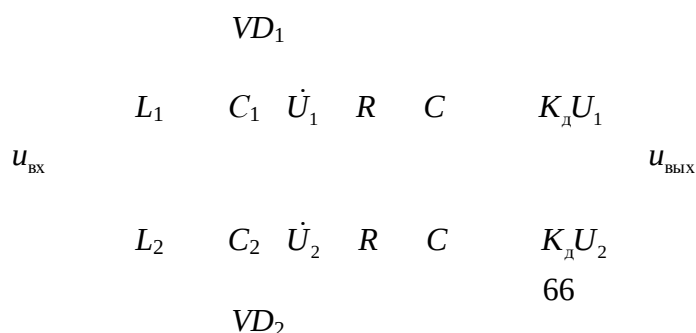
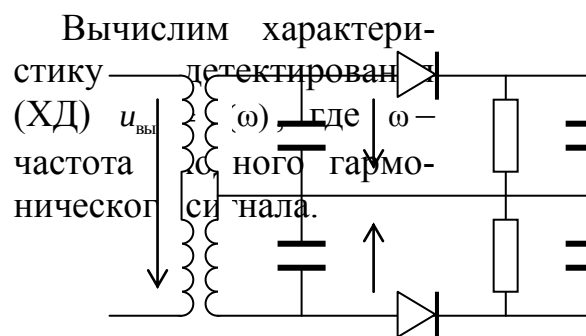


Рис. 3.41. Частотный детектор с расстроенными контурами



$$u_{\text{вых}} = K_d(U_1 - U_2) = K_d \mu U_c \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_2^2}} \right), \quad (3.12)$$

где U_c – амплитуда входного сигнала $u_{\text{вх}} = U_c \cos \omega_c t$,

μ – коэффициент передачи входного трансформатора,

$$\xi_1 = Q \left(\frac{\omega}{\omega_{01}} - \frac{\omega_{01}}{\omega} \right) \cong 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_{01}} - \text{обобщённая расстройка}$$

1-го контура,

$$\xi_2 = Q \left(\frac{\omega}{\omega_{02}} - \frac{\omega_{02}}{\omega} \right) \cong 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_{02}} - \text{обобщённая расстройка}$$

2-го контура.

На рис. 3.42 утолщённой линией приведён график ХД, соответствующий выражению (3.12). Относительно линейная часть ХД используется в качестве её

рабочей области. Нетрудно видеть, что требуется тщательное симметрирование схемы ($Q_1 = Q_2 = Q$) и настройка контуров на частоты $\omega_c \pm \Delta\omega_p$, правильный выбор которых зависит

от добротности Q . **Сложность настройки** – главный недостаток данного частотного детектора, а к его достоинствам можно отнести возможность получения **высокой крутизны ХД** при $Q \gg 1$.

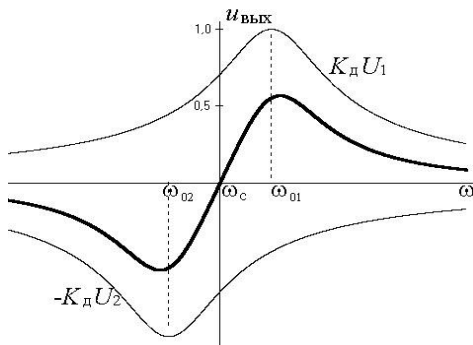


Рис. 3.42. ХД частотного детектора

Выводы

1. Частотный детектор с расстроенными контурами работает по методу преобразования **ЧМ в АМ** с последующим амплитудным детектированием.

2. Достоинством данного частотного детектора является возможность достижения высокой крутизны его ХД.

3. Основной недостаток – сложность настройки. От неё зависит степень линейности рабочего участка ХД.

4. Частотный детектор (рис. 3.41) целесообразно использовать при приёме сигналов с **цифровой ЧМ**, когда важна крутизна ХД, а степень её линейности роли не играет.

Преобразование ЧМ в ФМ с последующим фазовым детектированием используется в **частотном**

дискриминаторе, схема которого приведена на рис. 3.43. В этой схеме преобразование ЧМ сигнала $u_1(t)$ в ФМ сигнал $u_2(t)$ осуществляется колебательным контуром L_2

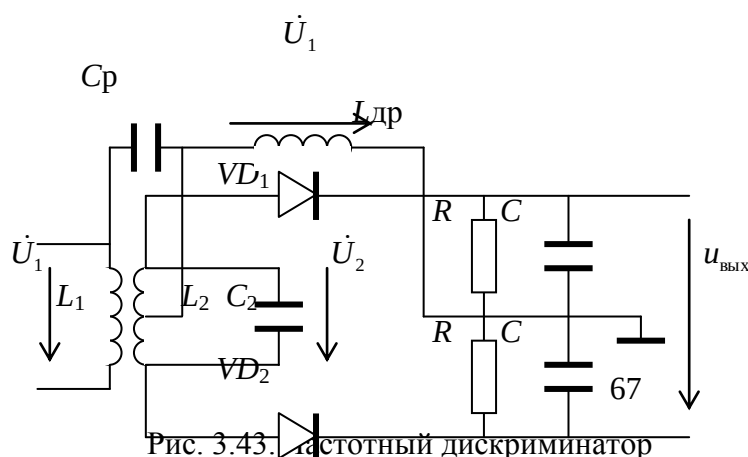


Рис. 3.43. Частотный дискриминатор

С2, настроенным на частоту сигнала $\omega_0 = \omega_c$ а фазовый детектор (ФД) выполнен по балансной схеме, содержащей перемножитель напряжений $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ на диодах VD1, VD2 и ФНЧ 1-го порядка (RC нагрузка). Вспомогательные элементы разделительный конденсатор C_p и дроссель $L_{др}$ служат для подачи входного напряжения $\dot{U}_1$ в качестве опорного на второй вход перемножителя. Определим ХД частотного дискриминатора – зависимость его выходного напряжения от частоты ω_c входного гармонического сигнала $u_{вх} = U_1 \cos \omega_c t$. Учитывая (3.11), имеем

$$u_{\text{вых}} = \gamma U_1 U_2 \cos \Delta\varphi,$$

где γ – коэффициент пропорциональности, $U_1 = \text{const}$,

$$\Delta\varphi - \text{фазовый сдвиг между } \dot{U}_2 \text{ и } \dot{U}_1 \quad \Delta\varphi = \arg \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}.$$

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \cong \pm j \frac{M}{L_1} \cdot \frac{\rho}{r(1+j\xi)} = \pm j \frac{M}{L_1} \cdot \frac{Q}{(1+j\xi)},$$

где M – взаимная индуктивность между L_1 и L_2 ,

$\rho = \omega_0 L$ – характеристическое сопротивление контура,

r – сопротивление потерь контура,

Q – добротность контура,

$\xi = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q$ – обобщённая расстройка.

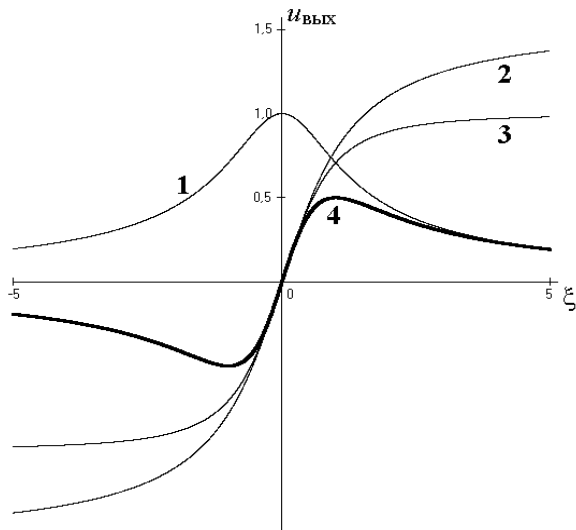
$$\Delta\varphi = \arg \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \pm \frac{\pi}{2} - \arctg \xi. \quad U_2 = U_1 \frac{MQ}{L_1} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

$$u_{\text{вых}} = \gamma U_1 U_2 \cos \Delta\varphi = \gamma U_1 U_1 \frac{MQ}{L_1} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \cos\left(\pm \frac{\pi}{2} - \arctg \xi\right) =$$

$$= \pm K_{\text{чд}} \frac{\sin(\arctg \xi)}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad (3.13)$$

где $K_{\text{чд}} = \gamma U_1^2 \frac{MQ}{L_1}$.

На рис. 3.44 приведён график ХД (кривая 4), построенный по выражению (3.13), а также ряд вспомогательных кривых:



$$1) \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}},$$

$$2) \arctg \xi,$$

$$3) \sin(\arctg \xi).$$

Рис. 3.44. Характеристика детектирования частотного дискриминатора

Выводы

1. Частотный дискриминатор реализует метод преобразования **ЧМ в ФМ** с

последующим фазовым детектированием.

2. Частотный дискриминатор **прост** в настройке, т.к. его контур настраивается на частоту сигнала $\omega_0 = \omega_c$.

3. Обеспечивается **высокая степень линейности** рабочего участка ХД вне зависимости от настройки контура.

4. Частотный дискриминатор целесообразно применять при приёме сигналов с **аналоговой ЧМ**, когда важна линейность ХД.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения видам модуляции: угловая, фазовая, частотная.
2. Каким образом можно с помощью фазового модулятора получить ЧМ сигнал?
3. Каким образом можно с помощью частотного модулятора получить ФМ сигнал?
4. Что представляет собой векторная диаграмма колебания с угловой модуляцией?
5. Дайте определения индексу модуляции и девиации частоты. Какая между ними связь?
6. Какой спектр имеет простое колебание с УМ?
7. Как определяют практическую ширину спектра ФМ и ЧМ сигналов?
8. Нарисуйте схему фазового детектора. Какой вид имеет его ХД?
9. Какие методы используются при построении частотных детекторов?
10. Нарисуйте схему частотного детектора с расстроенными контурами.
11. Напишите аналитическое выражение ХД частотного детектора с расстроенными контурами, нарисуйте и объясните её форму.
12. Нарисуйте схему частотного дискриминатора.
13. Напишите аналитическое выражение и нарисуйте форму ХД частотного дискриминатора.
14. Проведите сравнительный анализ частотных детекторов разных типов.

Рекомендации по проведению экспериментальных исследований ФМ и ЧМ сигналов и фазового детектора

Для закрепления полученных в разделе 3.7 знаний полезно выполнить лабораторную работу № 4 «Модулированные сигналы» (из перечня тем виртуальной учебной лаборатории) в части исследования сигналов с фазовой и частотной модуляцией (рис. 3.45), а также провести дополнительные экспериментальные исследования, используя иные виды сигналов в рамках предоставляемых этими работами ресурсов. Обратите внимание на общее и разное в ЧМ и ФМ сигналах при одном и том же модулирующем сигнале (особенно при использовании в качестве модулирующего сигнала гармонического колебания и импульсов треугольной формы). Убедитесь в расширении спектра ФМ и ЧМ сигналов с увеличением индекса модуляции, определите для каждого случая их практическую ширину.

Для закрепления полученных в разделе 3.8 знаний рекомендуется выполнить лабораторную работу № 13 «Детектирование ФМ сигналов» (рис. 3.46) в

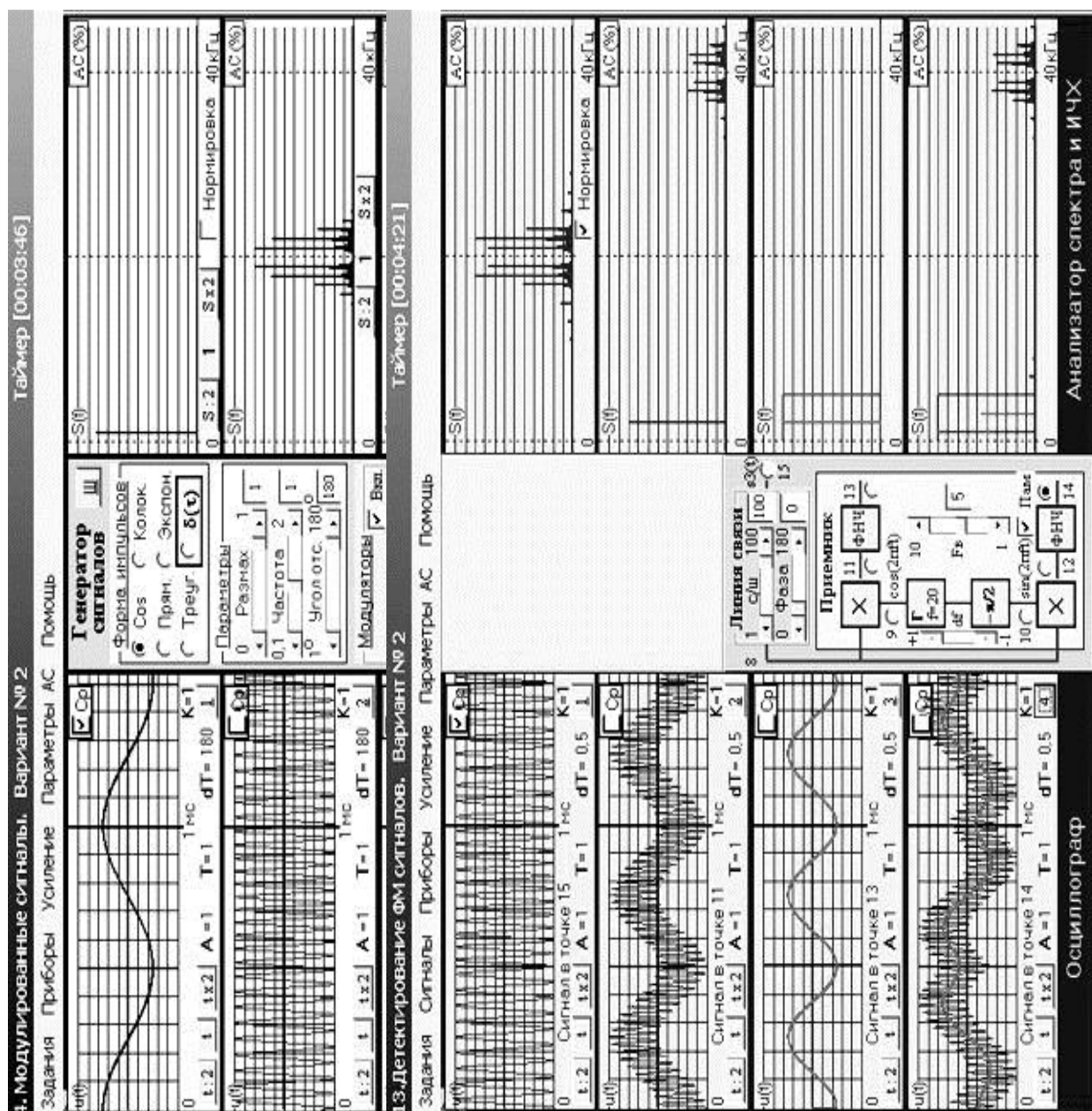


Рис. 3.46. Исследование фазового детектора

полном объёме, а также провести дополнительные экспериментальные исследования, используя иные виды сигналов в рамках предоставляемых этими работами ресурсов. Обратите внимание на вид экспериментально получаемой характеристики детектирования фазового детектора и на влияние выбора протяжённости её рабочего участка на степень искажений выходного сигнала.

3.9. Виды модуляции, используемые при передаче дискретных сообщений

При передаче дискретных сообщений – последовательностей кодовых символов $b_n^{(k)}$ (n порядковый номер символа, $k = 1, 2, \dots, m$ – номер символа из кодового алфавита объёмом m) первичный сигнал представляет собой

$$u_{\text{ц}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)} x(t - nT),$$

где T – длительность тактового интервала на котором передаётся один кодовый символ,

$x(t)$ – функция, описывающая форму импульса на интервале T .

Форму импульса $x(t)$ выбирают из соображений ограничения его спектра полосой пропускания канала и удобства формирования (прямоугольную, гауссовскую, синусквадратичную). Для простоты дальнейших рассуждений ограничимся прямоугольной формой импульсов и использованием двоичного кода ($m=2$), алфавит которого содержит всего два символа $b^{(0)} = +1$ и $b^{(1)} = -1$. Тогда

$$u_{\text{ц}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \pm 1(t - nT). \quad (3.14)$$

При использовании гармонического переносчика модуляцию цифровым первичным сигналом называют **цифровой (ЦМ)**. По виду модулируемого параметра различают цифровые амплитудную (**ЦАМ**), фазовую (**ЦФМ**) и частотную (**ЦЧМ**) модуляции. Принципиальным отличием ЦМ от ранее рассмотренной аналоговой является конечный набор вариантов сигнала на выходе модулятора (в нашем случае всего два варианта $s_0(t)$ и $s_1(t)$ при передаче b_0 и b_1 соответственно). Это обстоятельство существенно меняют задачу приёма таких сигналов. При приёме сигналов с аналоговой модуляцией главным является воспроизведение формы модулирующего сигнала с минимальной погрешностью в результате его детектирования (непрерывного измерения информационного параметра). В случае приёма сигналов с ЦМ решается задача различения (обнаружения) вариантов сигналов с минимальной вероятностью ошибок (демодуляция). Вопросы демодуляции сигналов с цифровой модуляцией подробно будут рассмотрены во второй части курса ТЭС.

Описание сигналов с ЦМ во временной и спектральной областях можно рассматривать как частный случай аналогичного описания сигналов с аналоговой модуляцией, соответствующий конкретной форме модулирующего сигнала (3.14). В частности, имеем:

при ЦАМ

$$\begin{aligned} s_{\text{ЦАМ}}(t) &= \frac{1}{2} [1 + u_{\text{ц}}(t)] U_{\text{н}} \cos \omega_{\text{н}} t = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{\text{н}} \frac{1}{2} [1 \pm 1(t - nT)] \cos \omega_{\text{н}} t, \end{aligned} \quad (3.15)$$

при ЦФМ

$$\begin{aligned}
s_{\text{ЦФМ}}(t) &= U_{\text{н}} \cos \left\{ \omega_{\text{н}} t + \left[1 + u_{\text{ц}}(t) \right] \frac{\pi}{2} \right\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} U_{\text{н}} \cos \left\{ \omega_{\text{н}} t + \left[1 \pm 1(t - nT) \right] \frac{\pi}{2} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{\text{н}} [\pm 1(t - nT)] \cos \omega_{\text{н}} t \\
&= u_{\text{ц}}(t) \cdot U_{\text{н}} \cos \omega_{\text{н}} t,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

при ЦЧМ

$$\begin{aligned}
s_{\text{ЦЧМ}}(t) &= U_{\text{н}} \cos [\omega_{\text{н}} + \Delta\omega \cdot u_{\text{ц}}(t)] t = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} U_{\text{н}} \cos [\omega_{\text{н}} \pm \Delta\omega \cdot 1(t - nT)] t,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

где девиацию частоты $\Delta\omega$ выбирают из условия обеспечения ортогональности сигналов $s_0(t)$ и $s_1(t)$.

На рис. 3.47 полученные сигналы изображены в виде векторов в пространстве сигналов. Из него видно, что расстояние между сигналами $s_0(t)$ и $s_1(t)$ с ЦМ (при равных $U_{\text{н}}$)

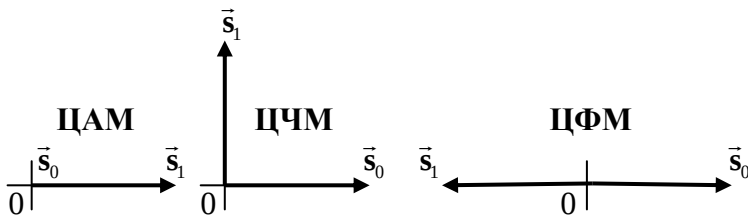


Рис. 3.47. Векторы $\vec{s}_0$ и $\vec{s}_1$ при цифровой модуляции

$$\begin{aligned}
d_{\text{ЦАМ}}(\vec{s}_0, \vec{s}_1) &= d, \\
d_{\text{ЦЧМ}}(\vec{s}_0, \vec{s}_1) &= d\sqrt{2}, \\
d_{\text{ЦФМ}}(\vec{s}_0, \vec{s}_1) &= 2d.
\end{aligned}$$

Очевидно, что чем больше расстояние между сигналами, тем они

надёжнее различаются при приёме на фоне помех. Следовательно, наибольшей помехоустойчивостью обладает ЦФМ, а наименьшей ЦАМ. На практике по причинам, которые будут понятны из материалов второй части курса ТЭС, вместо ФМ используют **ОФМ** (относительную фазовую модуляцию), отличающуюся тем, что модулирующий сигнал отображают не в абсолютной фазе гармонического переносчика, а в изменении его фазы по отношению к предыдущему сигналу.

Реализация модуляторов сигналов с ЦМ не вызывает сложностей и вытекает из аналитических выражений соответствующих сигналов (3.15) – (3.17). Так, в частности, для получения сигнала с ЦАМ можно использовать параметрический амплитудный модулятор (рис. 3.15). В качестве фазового модулятора для получения сигнала с ЦФМ (3.16) можно использовать перемножитель, а сам сигнал рассматривать как БМ сигнал. Для получения сигнала с ЦЧМ можно использовать коммутатор двух генераторов с частотами $\omega_{\text{н}} - \Delta\omega$ и $\omega_{\text{н}} + \Delta\omega$ (ЦЧМ с разрывом фаз) или коммутатор дополнительного реактивного элемента в колебательной системе единственного генератора для получения тех же самых частот (ЦЧМ с непрерывной фазой).

Общим недостатком рассмотренных простых видов ЦМ является низкая скорость передачи $V = \frac{1}{T} \left(\frac{\text{бит}}{\text{с}} \right)$. Для её повышения прибегают к увеличению объёма алфавита кода m , разделению первичного сигнала на части (например, чётные и нечётные импульсы в кодовых последовательностях) с одновремен-

ной передачей этих частей методом КАМ или применяют комбинацию этих способов.

Так, широко используется четырёхфазная ФМ-4 (ОФМ-4) (иное название – двукратная ФМ (ДФМ)), основанная на передаче четырёх сигналов, каждый из которых несёт информацию о двух битах (**дибите**) исходной двоичной последовательности. (00, 01, 10, 11). Соответственно фаза сигнала может принимать значения 0° , 90° , 180° , 270° (возможный вариант 45° , 135° , 225° , 315°). В результате при сохранении длительности сигнала T на выходе модулятора достигается двукратное увеличение скорости передачи. Обычно такой сигнал формируют с помощью квадратурного модулятора (рис. 3.48). На его входы подают нечётные $x(t)$ и чётные $y(t)$ импульсы, получаемые из исходной двоичной последовательности с помощью регистра сдвига.

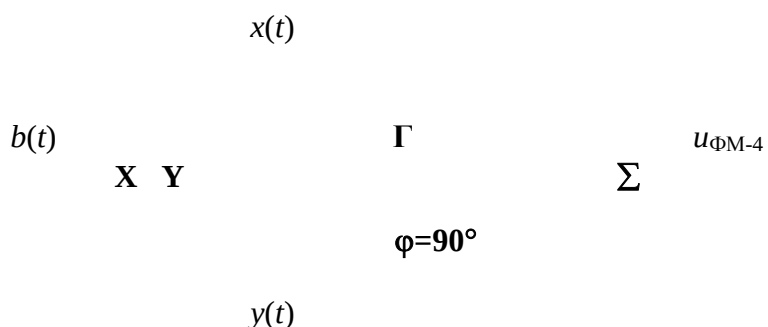


Рис. 3.48. Формирователь сигнала ФМ-4

Дополнительное увеличение скорости передачи можно достичь комбинируя ФМ и АМ. Примерами такого решения могут служить шестнадцатипозиционная система КАМ-16, при которой используются 4 относительных уровня (± 1 , ± 3) сигналов $x(t)$ и $y(t)$, в результате

чего формируются 16 сигналов, каждый из которых несёт информацию о четырёх битах (**квадбите**) исходной двоичной последовательности, 64-позиционная КАМ-64 с 8-ю относительными уровнями (± 1 , ± 3 , ± 5 , ± 7) сигналов $x(t)$ и $y(t)$.

Графические интерпретации сигналов ФМ-4, ФМ-16 и КАМ-16 приведены на рис. 3.49. На комплексной плоскости сигналы отображены сигнальными точками (концами векторов их комплексных амплитуд), образующими сигнальное созвездие (signal constellation).

	Im		Im		Im
ФМ-4	1	КАМ-16	1	ФМ-16	1



Рис. 3.49. Сигнальные созвездия ФМ-4, КАМ-16, ФМ-16

уровней системы сигналов КАМ,

M – число различных фаз системы сигналов ФМ.

Видно, что при увеличении значения M и одинаковой максимальной мощности сигналов системы КАМ предпочтительнее систем с ФМ. В частности, при

$M = 16$ ($L = 4$) $d_{\text{КАМ}} = 0,47$ и $d_{\text{ФМ}} = 0,39$, при $M = 36$ ($L = 6$) $d_{\text{КАМ}} = 0,282$ и $d_{\text{ФМ}} = 0,174$, а при $M = 64$ ($L = 8$) $d_{\text{КАМ}} = 0,2$ и $d_{\text{ФМ}} = 0,098$.

Выводы

1. В системах передачи дискретных сообщений используются как простые виды цифровой модуляции ЦАМ, ЦЧМ, ЦФМ (ОФМ) при низких скоростях передачи, так и многопозиционные ФМ (ОФМ) и комбинированные КАМ при повышенных скоростях передачи.

2. Определяющим моментом при выборе системы ЦМ модуляции является число сигналов и минимальное расстояние между ними.

3. Чем больше сигналов используется в системе ЦМ, тем выше скорость передачи. Однако, выигрыш в скорости передачи сопровождается ухудшением различимости сигналов за счёт уменьшения расстояния между ними.

4. Многоуровневые системы КАМ предпочтительнее многофазных систем ФМ (ОФМ).

Контрольные вопросы

1. Перечислите известные Вам виды цифровой модуляции гармонического переносчика.
2. В чём принципиальное отличие цифровой модуляции и демодуляции от аналоговой?
3. Напишите аналитические выражения сигналов с ЦАМ, ЦФМ, ЦЧМ.
4. Что общего и различного в системах цифровой модуляции ФМ и ОФМ?
5. Изобразите сигналы с разными видами цифровой модуляции в виде векторов в пространстве сигналов и оцените их сравнительную различимость.
6. Какими способами повышают скорость передачи сигналов с цифровой модуляцией?
7. Нарисуйте схему формирования сигналов ФМ-4 и объясните принцип её работы.
8. Что представляют собой сигнальные созвездия?
9. Почему многопозиционные системы КАМ предпочтительнее систем ФМ (ОФМ).

Рекомендации по проведению экспериментальных исследований формирования сигналов с разными видами цифровой модуляции

Для закрепления полученных в разделе 3.9 знаний полезно выполнить лабораторные работы № 23 ÷ №28, связанные с исследованиями процессов формирования сигналов с разными видами цифровой модуляции:

- ФМ и ОФМ (рис. 3.50),
- ФМ-4 (QPSK) (рис. 3.51),
- ФМ-4 со сдвигом (OQPSK) (рис. 3.52),

- (рис.

Сравните расстояния



Рис. 3.50. Исследование сигналов с ФМ и ОФМ

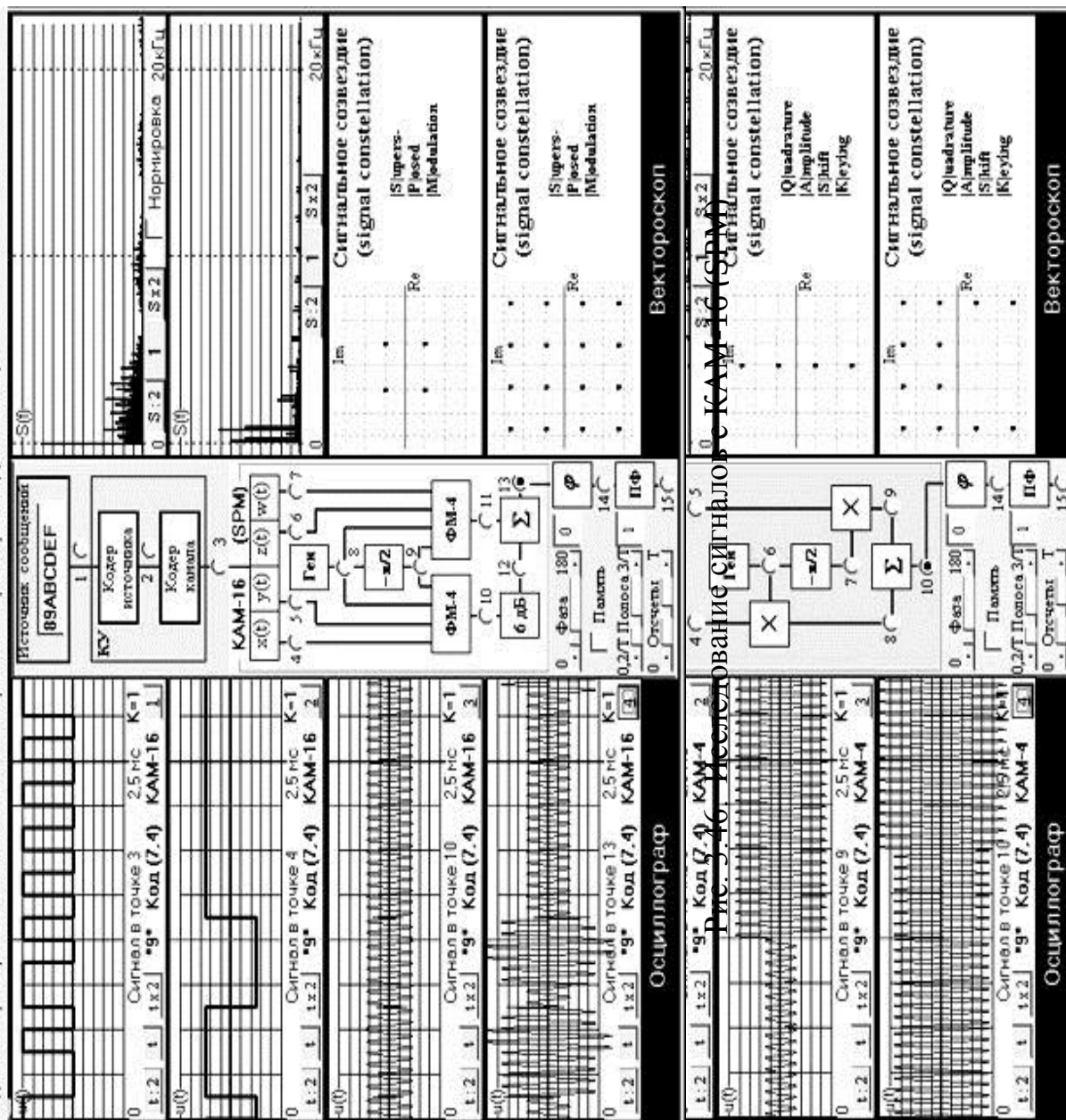


Рис. 3Р4б. Идентификация сигнала КАМ-16 (SPM)

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Теория электрической связи: Учебник для вузов / А.Г.Зюко, Д.Д.Кловский, В.И.Коржик, М.В.Назаров; Под ред. Д.Д.Кловского.— М.:Радио и связь, 1998.—432 с.: ил.
2. Радиотехнические системы передачи информации: Учеб. пособие для вузов / В.А.Борисов, В.В.Калмыков, Я.М.Ковальчук и др.; Под ред. В.В.Калмыкова. —М.: Радио и связь, 1990. —304 с.: ил.
3. Григоровский Л.Ф., Коржик В.И., Красов В.Г., Кушнир В.Ф. Теория электрической связи. Модели сигналов и методы их преобразования в системах связи: Учеб. пособие / ЛЭИС, —Л., 1990. —88 с.: ил.
4. Григоровский Л.Ф., Коржик В.И., Красов В.Г., Кушнир В.Ф. Теория электрической связи. Ч. 2. Прохождение детерминированных сигналов через каналы связи: Учеб. пособие / ЛЭИС, —Л., 1991. —95 с.: ил.
5. Сальников А.П. Виртуальная учебная лаборатория по курсам кафедры теоретических основ связи и радиотехники / СПбГУТ.-СПб,2001.-100 с.: ил.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ СВЯЗИ	3
1.1. Информация, сообщения, сигналы	—
1.2. Обобщённая структурная схема системы связи	7
Контрольные вопросы	12
Рекомендации по проведению экспериментальных исследований сигналов в системах связи	13
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ	16
2.1. Сигналы как элементы функциональных пространств	—
2.2. Разложение сигналов в обобщённый ряд Фурье	23
Контрольные вопросы	24
2.3. Спектральное представление сигналов	25
Контрольные вопросы	34
Рекомендации по проведению экспериментальных исследований ортогональности и спектров сигналов	35

2.4. Дискретизация и восстановление сигналов	39
Контрольные вопросы	44
Рекомендации по проведению экспериментальных исследований дискретизации и восстановления сигналов	45
2.5. Квазигармоническое представление сигналов	47
Контрольные вопросы	52
Рекомендации по проведению экспериментальных исследований компонентов аналитического сигнала	54
3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В ТИПОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УЗЛАХ СИСТЕМ СВЯЗИ	—
3.1. Особенности преобразования сигналов в линейных, параметрических и нелинейных ФУ	56
Контрольные вопросы	62
Рекомендации по проведению экспериментальных исследований преобразований сигналов в линейных, нелинейных и параметрических ФУ	63
3.2. Перемножение сигналов	68
3.3. Амплитудная модуляция	71
3.4. Другие виды линейной модуляции (БМ, ОМ, КАМ)	78
Контрольные вопросы	81
Рекомендации по проведению экспериментальных исследований получения АМ, БМ, ОМ и КАМ сигналов	82
3.5. Детектирование сигналов с линейными видами модуляции	85
Контрольные вопросы	93
Рекомендации по проведению экспериментальных исследований детектирования АМ, БМ, ОМ и КАМ сигналов	94
3.6. Преобразование частоты сигналов	98
Контрольные вопросы	99
Рекомендации по проведению экспериментальных исследований преобразования частоты сигналов	—
3.7. Угловая (ЧМ и ФМ) модуляция	101
3.8. Детектирование сигналов с угловой модуляцией ...	106
Контрольные вопросы	111
Рекомендации по проведению экспериментальных исследований ФМ и ЧМ сигналов и фазового детектора	112
3.9. Виды модуляции, используемые при передаче дискретных сообщений	115
Контрольные вопросы	120

Рекомендации по проведению экспериментальных исследований сигналов с разными видами цифровой модуляции	121
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	128