Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«СИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ»
(ФГБОУ ВПО «СГГА»)

Институт оптики и оптических технологий

Кафедра специальных устройств и технологий

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Новосибирск
СГГА

Тема №1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

1.1. Электромагнитные явления, как основа для электротехники , электроники , энергетики

В основе современного учения об электромагнитных явлениях лежит представление о неразрывной связи между электрическими и магнитными явлениями. Однако к такому убеждению научная мысль пришла лишь в итоге длительного накопления опытных фактов, и в течение долгого времени явления электрические и магнитные рассматривались как самостоятельные, не имеющие между собой связи.

Количественные соотношения, характеризующие механические взаимодействия электрически заряженных тел и механические взаимодействия полюсов магнита, впервые опубликовал в 1785 г. Кулон. Но уже Кулон обратил внимание на существенное различие между магнитными массами и электрическими зарядами.

Различие вытекает из следующих простых опытов. Нам без труда удается отделить друг от друга положительный и отрицательный электрические заряды, но никогда и ни при каких условиях не удается произвести опыт, в результате которого оказались бы отделенными друг от друга положительная и отрицательная магнитная массы (заряды).

Раскрытие действительной природы магнитных явлений относится к началу прошлого столетия. Этот период знаменуется рядом замечательных открытий, установивших теснейшую связь между электрическими и магнитными явлениями.

В 1820 г. Эрстед произвел опыты, в которых обнаружил механическое воздействие электрического тока на магнитную стрелку. В этом же году Ампер показал, что соленоид с током по своим действиям аналогичен постоянному магниту.

Согласно современным представлениям, магнитное поле постоянного магнита обусловлено элементарными электрическими токами, существующими в веществе магнита и эквивалентными магнитным моментом элементарных частиц, образующих вещество. В частности, эти элементарные токи являются результатом вращения электронов вокруг своих осей, а также вращения электронов по орбитам в атомах.

Всеми упомянутыми исследованиями было установлено важнейшее положение, что движение электрически заряженных частиц и тел всегда сопровождается магнитными явлениями.

В 1831 г. Фарадей сообщил об открытии явления электромагнитной индукции. Он обнаружил возникновение электрического тока в контуре, движущемся по отношению к магниту или по отношению к другому контуру с током. Таким образом, было показано, что и электрические явления могут возникать как следствие процессов, относящихся к области магнитных явлений.

Согласно современным представлениям, взаимодействие заряженных тел, а также взаимодействие контуров с токами осуществляется через посредство окружающего их *электромагнитного поля*, являющегося особым видом материи.

Экспериментальное подтверждение и развитие максвелловой теории электромагнитного поля осуществлены Г.Герцем (1886-1889 гг.), изобретение радио А.С. Поповым (1895г.) создало основу для бурного развития практической и теоретической радиотехники. В общей совокупности проблем, относящихся к области электромагнитных явлений, значительное развитие получила теория электрических и магнитных цепей. В основе этой теории лежат законы, установленные Омом (1827 г.), Кирхгофом (1847 г.).

1.2. Основные понятия

Дальнейшее изложение будет основано на использовании Международной системы единиц СИ. Эта система содержит семь основных единиц:

- *Метр* (м);
- *Килограмм* (кг);
- *Секунда* (с);
- *Ампер* (А);
- *Кельвин* (К);
- *Моль* (моль);
- *Кандела* (кд).

Для определения электромагнитных величин и процессов с их участием необходимо и достаточно иметь первые четыре единицы, а также одну дополнительную: *Радиан* (рад).

Электрический заряд (*количество электричества*)- величина, равная произведению силы тока *I* на время *t*, в течение которого шел ток, т.е. [*q*]=1А· 1с = 1 *кулон* (Кл).

Диэлектрическая проницаемость (*относительная диэлектрическая проницаемость*) –ε_r среды показывает, во сколько раз сила взаимодействия *F* электрических зарядов в данной среде меньше, чем сила взаимодействия F_o зарядов в вакууме, т.е. $\varepsilon_r = F_o / F$ Отсюда следует, что ε_r - величина безразмерная.

Электрическая постоянная ε_o устанавливается как размерный коэффициент пропорциональности, входящий в закон Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\frac{q_1 q_2}{\varepsilon_r r^2},$$ связывающий силу взаимодействия электрических зарядов, выраженную в системе СИ в *ньютонах* (Н) с зарядом, выраженным в *кулонах* (Кл) и расстоянием между взаимодействующими зарядами (м).

Тогда ε_0=8.8541878$2 10^{-12}$ Кл/ (Вольт·м) или Фарада/ м.

Напряженностью *E* электрического поля в точке называют величину, равную отношению силы *F*, с которой поле действует на положительный заряд, помещенный в данную точку поля к этому заряду, т.е. $E=F/\varphi$ (Вольт/ м).

Потенциалом электрического поля φ в точке называют величину, равную *отношению потенциальной энергии*, которой обладает положительный заряд, помещенный в данную точку поля к этому заряду. *Потенциальная энергия заряда q в данной точке равна работе A, которую совершают силы электрического поля при перемещении этого заряда на бесконечность, т.е.* $\varphi=A/q$.

Размерность $[\varphi]$= 1 Дж/ 1 Кл= 1 В (Вольт). В вольтах выражается также падение напряжения на участках электрической цепи и электродвижущаяся сила (*Э.Д.С.*).

Между градиентом потенциала и напряженностью электрического поля существует соотношение

$$E= - grad\ \varphi$$

Электрическая емкость *C* – величина, равная отношению заряда *q*, внесенного на <u>*уединенный*</u> проводник, к изменению потенциала $\Delta\varphi$ этого проводника: $C= q/\Delta\varphi$ $[C]$=1Кл / В

Эта единица называется *фарада* (Ф). Так 1 *фарада* равна электрической емкости конденсатора, при которой заряд 1 Кл создает на конденсаторе разность потенциалов 1 В

Плотностью электрического тока $j_э$ называют векторную величину, численно равную отношению силы тока *dI* к элементу *dS* площади поперечного сечения проводника: $j_э= dI / dS$ По допустимой плотности тока $[j_э]= {}^{A}\!/\!_{мм^2}$ выбирается сечение проводников разнообразных электротехнических устройств, так для проводников, выполненных из меди и алюминия, работающих на частоте 50 Гц, $j_э$=***6-10*** ${}^{A}\!/\!_{мм^2}$.

Электродвижущей силой (*Э.Д.С.*) источника тока называют величину, равную отношению работы *A*, совершаемой сторонними силами при перемещении положительного заряда вдоль всей электрической цепи, включая источник тока с возвращением в исходную точку цепи, к заряду *q: Э.Д.С.= A/ q*

Магнитным моментом *pm* плоского контура с током называют величину, равную произведению силы тока *I* в контуре на площадь *S* охватываемую этим контуром, т.е. $pm= I\cdot S$.

Магнитная индукция есть величина, равная отношению максимального вращающего момента *Mmax,* действующего на контур с током в однородном магнитном поле к магнитному моменту этого контура: В= *Mmax / pm Также на основании закона Ампера единица магнитной индукции определяется так:* <u>*тесла*</u> *(Т) равен индукции однородного магнитного поля, в котором на отрезок 1 м прямого проводника с током силой 1 А действует максимальная сила 1 Н.* Если эти два определения адекватно отражают физическую сторону магнитных явлений, то для электротехнических приложений единицу магнитной индукции целесообразно определить как функцию **магнитного потока** *B*=***Ф***/ *S*, где ***Ф***- магнитный поток через поверхность *S*.

Тогда единицей магнитного потока является *вебер* (Вб), который равен магнитному потоку, при убывании которого до нуля в *сцепленной* с ним электрической цепи сопротивлением 1 *Ом* через поперечное сечение проводника проходит заряд 1 *кулон* т.е. [***Ф***]=1Кл·1Ом (Вб)

Потокосцепление по определению равно $\psi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$, где Φ_i- магнитный поток через *i*-виток, *N*- число витков соленоида или тороида. При условии, что геометрические размеры и форма всех витков одинакова $\psi = \Phi \cdot N$.

Индуктивность (***статическая индуктивность, коэффициент самоиндукции***) определяется следующим образом. Если по замкнутому контуру, например, соленоиду течет ток силой *I*, то с этим контуром сцеплен магнитный поток $\psi = L \cdot I$, где *L*- величина, характеризующая данный контур (систему контуров) и зависящую от его геометрических размеров Следовательно, $L = \psi / I$. [*L*]=1Вб/А (генри). Единицу индуктивности также можно определить из закона электромагнитной индукции Фарадея-Максвелла:

$$Э.Д.С. = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt},$$

тогда *генри* равен индуктивности такого соленоида, в котором возникает *Э.Д.С.* самоиндукции 1 В при изменении силы тока на 1А в 1 с.

Напряженность магнитного поля определим по формуле, выражающей напряженность этого поля в центре длинного соленоида: *H=N/* (*l I)* где *l*- длина соленоида а *N* и *I* количество витков и сила тока соответственно [*H*]=1А/м Между двумя характеристиками магнитного поля- индукцией *B* и напряженностью *H* существует пропорциональная зависимость

$$B = \mu_r \mu_0 H$$

где μ_0- коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц, а μ_r-безразмерный коэффициент характеризующий отличие данной среды от вакуума.

Относительная магнитная проницаемость μ_r -величина, показывающая, во сколько раз магнитная индукция *B* в данной среде больше, чем магнитная индукция *B0* в вакууме, т.е. μ_r *= B/ B0.*

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ *генри/метр* относится к числу физических постоянных (фундаментальных физических констант) наряду с электрической постоянной *εo*=8.854187821$10^{-12}$ *фарада/ метр*

Магнитодвижущая сила *F*- величина, характеризующая намагничивающее действие электрического тока и равная циркуляции напряженности магнитного поля *H* вдоль замкнутого контура:

$$F = \oint_l H_l dl = \sum_{i=l}^{n} I_i,$$

где Hl –проекция вектора напряженности на направление перемещения dl, n-число токов, охватываемых контуром. В случае
если замкнутый контур берется вдоль оси тороида, по обмотке которого течет постоянный ток силой I, то магнитодвижущая сила
$F=I \cdot N$ где N- число витков тороида. Единицей магнитодвижущей силы является *ампер*. Иногда в литературе встречается *ампер-виток*

1.3. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме

Объекты электротехники, электроники и техники связи, рассматриваемые в настоящей лекции состоят из конечных объемов вещества, обладающих изолирующими свойствами – диэлектрики, малым сопротивлением электрическому току – проводники, малым сопротивлением магнитному потоку и способностью концентрировать магнитный поток ферромагнетики-магнитодиэлектрики. Истинное электромагнитное поле в веществе (микрополе) меняется весьма резко как в пространстве так и во времени. Чтобы найти напряженности истинного поля в некоторой точке в данный момент времени, нужно сложить напряженности полей всех носителей заряда вещества – электронов, ионов и ядер.
Решение этой задачи для макроскопических объектов является совершенно не реальным, да и бесполезным. Следовательно, для решения задач анализа и синтеза конкретных электротехнических устройств достаточно иметь усредненные по *физически бесконечно малому объему*- объему, содержащему большое число атомов, но имеющему размеры во много раз меньше, чем те расстояния, на которых *макрополе* меняется заметно. Усреднение по таким объемам адекватно отражает плавные изменения *макрополя* на макроскопических расстояниях. Экспериментально измеренные, и приводимые в технических справочниках сведения о относительной диэлектрической проницаемости ε_r проводимости σ относительной магнитной проницаемости μ_r вещества собственно и являются такими *макропараметрами* вещества.

Система уравнений, описывающая электромагнитное поле в *макрообъемах* вещества имеет следующий вид:

$$\oint_l Edl = -\oiint_s \frac{dB}{dt} ds \,;$$

$$\oint_l Hdl = \oiint_s \left(j_э + \frac{dD}{dt} \right) ds \,;$$

$$\oint\!\!\!\oint_s Dds = \oint\!\!\!\oint\!\!\!\oint_v \rho_э dv \ ;$$

$$\oint\!\!\!\oint_s Bds = 0 \ ,$$

где $\rho_э$ – объемная плотность сторонних зарядов,

$j_э$ - плотность тока проводимости, $D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$ – вектор электрического смещения

Эти уравнения в сжатой форме выражают всю совокупность наших сведений об электромагнитном поле. Содержание этих уравнений заключается в следующем:

1. Циркуляция вектора *E* по любому замкнутому контуру равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через любую поверхность, ограниченную данным контуром и выражает в интегральной форме закон электромагнитной индукции Фарадея-Максвелла
2. Циркуляция вектора *H* по любому замкнутому контуру равна полному току (току проводимости и току смещения) через любую поверхность, ограниченную данным контуром
3. Поток вектора *D* сквозь любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.
4. Поток вектора *B* сквозь произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю (характеризует факт отсутствия магнитных зарядов).

Из уравнений Максвелла для циркуляции векторов *E* и *H* следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые: изменение одного из этих полей приводит к появлению другого.

Необходимо подчеркнуть, что эти уравнения нельзя «вывести» они являются основными постулатами макроскопической теории электромагнитного поля, полученными путем обобщения опытных фактов. Следует отметить, что на основе дискретизации этих уравнений построен один из популярных и эффективных методов трехмерного электродинамического анализа « GST Microwave Studio »

Переход от интегральных уравнений к дифференциальным – легко осуществить с помощью теорем Остроградского-Гаусса и Стокса Теорема Стокса связывает интеграл от вектора ***A*** по замкнутому контуру *l1* с интегралом от ротора этого вектора по поверхности *S1,* ограниченной замкнутым контуром *l1:*

$$\oint_{l_1} Adl = \oint\!\!\!\oint_{s1} rotAdS \ ,$$

Тогда

$$rot\,E = -\mu_o\mu_r \frac{d}{dt} H\ ;$$

$$rot\,H = j_э + \sigma E + \varepsilon_o\varepsilon_r \frac{d}{dt} E\ ,$$

также

$$div\,(\mu_o\mu_r H) = 0\ ;$$

$$div\,(j_э) = \frac{d}{dt}\rho_э\,.$$

В заключение этой темы отметим, что рассмотренная выше система физических единиц, а также интегральные и дифференциальные уравнения в частных производных связавшие между собой токи проводимости, токи смещения, токи переноса с напряженностями и индукциями электрического и магнитного поля, адекватно описывает процессы передачи, излучения и преобразования энергии электромагнитного поля и служит основой для постановки и решения разнообразных задач анализа и синтеза технически реализуемых устройств электротехники, электроники и техники связи.

Тема №2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Математическое описание электромагнитных полей, представленное выше, хотя и дает адекватную картину соответствующих процессов и явлений, оказывается весьма сложным и по этой причине будет использовано для приближенного аналитического рассмотрения ограниченного круга специальных вопросов распространения по направляющим системам, проникновения в проводящую среду и излучения электромагнитных волн в пространство.

В большинстве практических применений представляется возможным достаточно точно описать процессы в устройствах электротехники и радиоэлектроники, пользуясь только ограниченным набором следующих интегральных величин:

- электродвижущая сила $Э.Д.С. = \oint \left(E_{стороннее} + E_{индуцированное} \right) dl;$

- электрическое напряжение $u = \int\limits_A^B Edl$;

- электрический заряд $q = \oiint\limits_s Dds$;

- электрический ток $i = \oiint\limits_s j_э ds = \oint\limits_l Hdl$;

- магнитный поток $\Phi = \oiint\limits_s Bds$. Такая возможность является следствием того, что обычно стремятся создать определенные, достаточно узкие пути для тока проводимости, располагая вдоль этих путей проводники из материалов с высокой электрической проводимостью, окруженных хорошо изолирующей средой, например воздух в линиях электропередачи, эпоксидная смола в обмотках электрических машин, полиэтилен и фторопласт в коаксиальных и других многожильных кабелях.

Совокупность устройств и объектов, образующих пути для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе, токе и напряжении, называют электрической цепью.

Точно так же во многих случаях создается определенный путь для замыкания линий магнитной индукции с помощью магнитопровода из ферромагнитного материала с высокой магнитной проницаемостью, окруженного средой со значительно (несколько порядков) меньшей магнитной проницаемостью. В этом случае представляется возможным с достаточной точностью описать процесс с помощью таких интегральных понятий, как магнитодвижущая сила $iw = \oint\limits_l Hdl$ и магнитного потока $\boldsymbol{\Phi}$.

Совокупность устройств, содержащих ферромагнитные тела, *электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий о магнитном потоке, называют магнитной цепью.*

2.1. **Активные и пассивные элементы электрических цепей**

Основными элементами электрических цепей являются источники электромагнитной энергии, устройства для передачи и преобразования электромагнитной энергии и приемники этой энергии.

Источниками электромагнитной энергии являются различные генерирующие устройства, в которых энергия – тепловая, химическая, ядерная, энергия механического движения и т.д. – преобразуется в электромагнитную. Таковыми являются, например гидро- и турбогенераторы, гальванические элементы, аккумуляторы, термоэлементы и изотопные генераторы.

Передающими электромагнитную энергию элементами цепи являются, например линии электропередачи электрические цепи, открытые и закрытые фидерные линии радиопередающих устройств.

Преобразование электромагнитной энергии осуществляется с помощью трансформаторов, изменяющих напряжение и ток, преобразователей частоты, усилителей, полупроводниковых инверторов, преобразующих постоянный ток в переменный, выпрямителей, преобразующих переменный ток в постоянный.

Приемниками в электрической цепи являются устройства, в которых осуществляется преобразование электромагнитной энергии в энергию другого вида, например в электродвигателях – в механическую работу, в заряжаемых аккумуляторах – в химическую энергию, в устройствах радиоэлектроники в аудио- видео информацию.

Во всех перечисленных случаях, за исключением маломощных сигнальных цепей и устройств, на первое место выдвигается требование высокого коэффициента полезного действия. Наряду с упомянутыми требованиями элементы электрических цепей должны удовлетворять многим другим требованиям – надежности работы, долговечности, быстродействию, точности действия.

Наиболее простые явления имеют место в электрических цепях постоянного тока. Длительный постоянный ток в электрической цепи может быть либо током проводимости либо током переноса. Закон Ома, открытый экспериментально, гласит: *сила тока, протекающего по однородному проводнику, пропорциональна разности потенциалов на его концах* (*напряжению u)* : $I=U/R$ где R - электрическое сопротивление проводника. Сопротивление R зависит от формы и размеров проводника, от его материала и температуры, а также от распределения тока по проводнику.

В простейшем случае однородного цилиндрического проводника сопротивление $R=\rho\frac{l}{S}$, где l- длина проводника ; S- площадь его поперечного сечения ; *ρ – удельное характеристическое сопротивление.*[ρ]=Ом· м

Закон Ома в дифференциальной форме устанавливает связь между плотностью тока $j_э$ и полем E в той же точке проводящей среды. Для изотропного проводника, в котором направления векторов $j_э$ и E совпадают, выделим в окрестности некоторой точки проводящей среды элементарный цилиндрический объем с образующими параллельными вектору $j_э$, а значит и вектору E. Если поперечное сечение цилиндра dS а его длина dl, можно записать для такого

элементарного цилиндра $j_э ds = \frac{Edl}{\rho dl / ds}$, и после соответствующих сокращений получим, уже в векторной форме: $j_э = \frac{1}{\rho} E = \sigma E.$ Единицу, обратную Ому, называют *сименсом* (См).

Другим видом электрического тока является *ток переноса*, под которым понимают явление переноса электрических зарядов движущимися в свободном пространстве заряженными частицами и телами. Ток переноса отличается от тока проводимости тем, что его плотность не может быть представлена соотношением

$j_э = \sigma E$. Пример: движение электронов от катода к аноду в электровакуумных приборах – радиолампах, кинескопов, магнетронов

Третий вид электрического тока называется *током электрического смещения*. С этим видом тока необходимо считаться в тех случаях, когда диэлектрик находится под воздействием переменного электрического поля.

При всяком изменении электрического поля во времени изменяется поляризованность P диэлектрика. При этом в веществе диэлектрика перемещаются элементарные частицы с электрическими зарядами, входящие в состав атомов и молекул вещества. Так как в диэлектрике заряженные частицы не являются свободными и могут смещаться под воздействием, то ток поляризации составляет одну из двух составляющих *токов смещения*. Таким образом, вектор плотности *всего* тока смещения в диэлектрике будет равен

$$j_{см} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} E + \frac{dP}{dt}.$$

В отношении первой составляющей $\varepsilon_0 \frac{d}{dt} E$ вектора плотности тока смещения, т.е. плотности тока смещения в пустоте (физическом вакууме) наглядная интерпретация при современном состоянии науки не может быть дана, так как не имеется сколь-нибудь детального представления о внутреннем строении электромагнитного поля. Однако, даже не имея для первой составляющей плотности тока смещения представления, столь же наглядного, как для второй составляющей $\frac{d}{dt} P$, можно утверждать, что важнейшее проявление электрического тока – появление связанного с ними магнитного поля – будет одинаковым для обеих составляющих. Эксперимент полностью подтверждает такое предположение. Эти идеи впервые были высказаны Максвеллом и привели к созданию им теории электромагнитного поля.

Введение тока смещения позволяет сформулировать принцип непрерывности электрического тока, который гласит: *сумма токов всех родов* -

проводимости, переноса и смещения – сквозь любую замкнутую поверхность равна нулю.

2.2. Связи между напряжением и током в основных элементах цепи

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательного соединения сопротивления *r* конденсатора *C* и индуктивности *L*. Общим для всех этих элементов является ток *i*, тогда падение напряжения на участке цепи *ab* может быть определено на основании закона Ома как: $u_r = ri$

Второй участок цепи *bc* представляет собой конденсатор. Для известной емкости конденсатора *C* заряда накопленного в диэлектрике *q*, напряжение между обкладками $u_c = q/C$. Дифференцируя это выражение по времени получим: $i_c = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$. Обратная зависимость, связывающая напряжение на конденсаторе с током заряда его: $u_c = \frac{1}{C}\int_0^t idt + u_c(0)$,

где $u_c(0)$ - напряжение на конденсаторе в начальный момент времени *t=0*.

Третий участок цепи *cd* представляет собой индуктивную катушку. Зная индуктивность катушки *L*, можно при заданном токе определить потокосцепление самоиндукции $\psi_L = Li$ и при заданной скорости изменения тока di/dt найти возникающую в цепи *э.д.с.* самоиндукции $e_L = -L\frac{di}{dt}$, а также напряжение на зажимах катушки $u_L = -e_L = +L\frac{di}{dt}$. Обратная зависимость, характеризующая установление тока в катушке под воздействием приложенного напряжения: $i = \frac{1}{L}\int_0^t u_L dt + i(0)$, где $i(0)$ ток в начальный момент времени *t=0*.

Напряжение на любом участке цепи равно линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль этого участка. Так как на участках *ab* и *bc* для идеальных резистора и конденсатора можно пренебречь электродвижущими силами, индуцируемыми переменными магнитными потоками, то электрическое поле на этих участках является *потенциальным*. Следовательно в выражениях $u_r = \int_a^b Edl$ и $u_c = \int_b^c Edl$ пути интегрирования между точками *a* и *b* и между точками *b* и *c* могут быть заданы произвольно. Эти пути только не должны проходить через область магнитного поля катушки. В частности они могут проходить вдоль и внутри проводящего слоя резистора а также внутри диэлектрика конденсатора.

В выражении $u_L = \int_c^d Edl$ интеграл также должен быть взят вдоль пути, не проходящем в магнитном поле катушки, но не вдоль проводника катушки.

Рассмотрим один виток, совмещенный с плоскостью рисунка Магнитный поток ***Ф***, сцепляющийся с витком проходит через площадь, охватываемую витком Линейный интеграл от напряженности электрического поля, взятый по пути *cnd* внутри проводника витка, равен нулю, так как омическое сопротивление витка идеальной катушки индуктивности отсутствует, а следовательно, напряженность электрического поля внутри материала проводника равна нулю.

Согласно закону электромагнитной индукции, имеем $\oint\limits_{cndmc} Edl = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Так как $\int\limits_{cnd} Edl = 0$, то $\oint\limits_{dmc} Edl = -\frac{d\Phi}{dt}$ и $\oint\limits_{cmd} Edl = +\frac{d\Phi}{dt} = +\frac{dLi}{dt} = L\frac{di}{dt} = u_L$.

2. 3. Законы электрических цепей

При расчете электрических цепей используются два закона Кирхгофа. Применение их к цепям с сосредоточенными параметрами будет рассмотрено ниже. Граница применимости этой идеализации (сосредоточенные параметры) будет рассмотрена в разделе, посвященном устройствам и системам, геометрические размеры которых становятся соизмеримыми с длиной электромагнитной волны.

Первый закон Кирхгофа, или закон Кирхгофа для узлов, применительно к узлам электрической цепи вытекает из принципа непрерывности электрического тока. Охватим узел замкнутой поверхностью *S*. Электрическая емкость в цепи с сосредоточенными параметрами предполагается сосредоточенной в конденсаторах, включенных в цепь. Следовательно можно пренебречь токами смещения, отходящих от соединительных проводов к другим участкам цепи. В этом случае сквозь поверхность *S* проходят только токи проводимости в проводниках, пересекающих эту поверхность.

Согласно принципу непрерывности тока, в данном случае получим

$$\oiint\limits_{s} j_э ds = i_1 + i_2 - i_3 = 0.$$

При любом числе *n* ветвей, присоединенных к узлу цепи получим $\sum\limits_{k=1}^{n} i_k = 0$, т.е. *алгебраическая сумма токов сходящихся в узле электрической цепи равна нулю*, что и является формулировкой первого закона Кирхгофа.

Второй закон Кирхгофа, или закон Кирхгофа для контуров, применяется к замкнутым контурам электрических цепей, содержащих как источники *э.д.с.* так и *RLC* сосредоточенные элементы. Применим закон Ома к контуру *ABCFA*. Тогда для разности потенциалов точек *A* и *B* получим

$U_{AB} = U_A - U_B = i_1 r_1 - E_1$.

Аналогично для других участков: $U_B - U_C = i_2 r_2 - E_2$,

$$U_C - U_F = i_3 r_3 - E_3,$$

$$U_F - U_A = i_4 r_4 - E_4.$$

Складывая почленно эти равенства получим, что сумма левых частей равна нулю. Тогда $i_1 r_1 + i_2 r_2 + i_3 r_3 + i_4 r_4 = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$.

Подобное соотношение действительно для любого замкнутого контура, в том числе для мгновенных значений тока и напряжения и *э.д.с.* в цепях переменного тока $\sum_{k=1}^{n} ir_k + \sum_{l=1}^{m} L_l \frac{di}{dt} + \sum_{j=1}^{f} \frac{1}{C_j} \int_0^t idt = \sum_{q=1}^{p} e_q(t).$

Поэтому закон Кирхгофа для контуров может быть сформулирован следующим образом: *для любого замкнутого контура сумма всех падений напряжения на элементах цепи равна сумме всех электродвижущих сил в этом контуре*.

Тема №3

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКАХ

3.1. Синусоидальные э.д.с., напряжения и токи

В линейной электрической цепи при воздействии периодических э.д.с. с одинаковым периодом *T* спустя достаточно большой промежуток времени от начала действия этих э.д.с. *устанавливаются* во всех участках цепи периодические токи и напряжения с тем же периодом *T*. Величина *f=1/T* является *частотой* э.д.с., напряжения или тока. Частота численно равна числу периодов в единицу времени и измеряется в *герцах* (Гц).

Наибольшее распространение получили периодические э.д.с., напряжения и токи, представленные синусоидальными функциями времени:

$e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi_e)$; $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$;

$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$.

Величины *e, u, i* называют *мгновенными* э.д.с. напряжением и током. Их наибольшие значении E_m, U_m, I_m называются *амплитудами*. Величина $\omega = 2\pi / T$ или $\omega = 2\pi f$ называется *угловой частотой* и имеет размерность $(радиан \cdot c^{-1})$. Аргумент синуса, отсчитываемый от ближайшей предыдущей точки перехода синусоидальной величины через нуль от отрицательных значений к положительным называют *фазой*, а величины $\varphi_e, \varphi_u, \varphi_i$ - *начальной фазой* соответственно э.д.с., напряжения и тока.

В зависимости от частоты источниками синусоидальной э.д.с. являются генераторы того или иного типа. При промышленной частоте 50 Гц на электрических станциях применяются вращающиеся электрические машины. Для получения повышенной частоты, например, в установках высокочастотной закалки инструмента, аппаратах для сварки используются генераторы на электровакуумных приборах (радиолампы) или полупроводниковых приборах.

О значениях периодических процессов принято судить по их средним квадратичным значениям за период, обозначаемых соответственно через $\overline{E}, \overline{U}, \overline{I}$: $\overline{E} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2 dt}$; $\overline{U} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}$; $\overline{I} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$.

Эти величины называют *действующими* периодическими э.д.с., напряжением и током. Такой выбор определяется тем, что среднее за период значение мощности, характеризуется выделением теплоты в цепи с сопротивлением *r* и имеет выражение $\frac{1}{T}\int_0^T i^2 r dt = r\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = rI^2$.

Поэтому, вводя понятие о действующем периодическом токе как среднем квадратичном значении его за период колебания, получаем формулу для средней мощности, выраженной через этот ток, *такую же по виду*, как и при постоянном токе.

Определим связь действующего значения $\overline{E}$ синусоидальной э.д.с. *e (t)* с её амплитудой E_m. Так имеем

$$\overline{E} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T E_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_e)dt} = E_m \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t + 2\varphi_e)}{2}dt} = \frac{E_m}{\sqrt{2}},$$

так как $\int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi_e)dt = 0.$

Аналогично для синусоидальных напряжений и тока $\overline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \overline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$

Электроизмерительные приборы, предназначенные для измерений в цепях переменного тока, если это не оговорено особо, показывают действующее значение соответствующих величин.

3.2. **Установившийся синусоидальный ток в цепи с последовательным соединением *r, L* и *C***

Уравнение, согласно второму закону Кирхгофа для цепи с последовательно соединенными участками *r, L и C* имеет вид

$$u = u_r + u_L + u_C = ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt. \quad (4.2.1.)$$

Так как рассматривается установившийся периодический процесс, у интеграла опущены пределы интегрирования а $i_L(0)$ и $u_C(0)$ могут быть учтены введением фазового сдвига между током и напряжением на входных зажимах цепи.

Общим для всех участков цепи является ток, который представим в виде $i = I_m \sin\omega t$, тогда напряжение на входных зажимах $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$. Подставляя эти значения *i* и *u* в (4.2.1.) найдем $rI_m + \omega L I_m \cos\omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos\omega t = U_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Это уравнение должно быть справедливо для любого момента времени *t*. Полагая, $\omega t = \frac{\pi}{2}$ и $\omega t = 0$, получим $rI_m = U_m \cos\varphi$; $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m = U_m \sin\varphi$.

Возведём первое и второе равенство в квадрат и сложим почленно, получим $\left[r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right] I_m^2 = U_m^2$, а также поделив второе равенство на первое найдем фазовый сдвиг между током и напряжением $\varphi = arctg\frac{\omega L - 1/\omega C}{r}$.

В выражениях, связывающих амплитуды U_m и I_m или действующие значения $\overline{U}$ и $\overline{I}$ напряжения и тока появляется величина, имеющая размерность сопротивления. Для рассмотренной цепи

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$ называют *полным сопротивлением*.

В общем случае в цепи переменного тока полное сопротивление *Z* больше сопротивления r и может быть ему равно только в частном случае – резонанса в цепи. Тогда r называют *активным сопротивлением* цепи, так как только им определяются необратимые процессы преобразования энергии электрического и магнитного поля в тепловую. Величину $x = (\omega L - 1/\omega C)$ называют *реактивным сопротивлением* цепи. При этом член $x_L = \omega L$,учитывающий реакцию самоиндукции, называют *индуктивным сопротивлением* цепи, а член $x_C = 1/\omega C$, учитывающий реакцию емкости называют *емкостным сопротивлением* цепи.

Отметим, что возрастание x_L при увеличении частоты объясняется тем, что э.д.с. самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока, и следовательно, её амплитуда растет с увеличением частоты при неизменной амплитуде тока. Убывание величины x_C при увеличении частоты является результатом того, что ток смещения в конденсаторе пропорционален скорости изменения напряжения на зажимах конденсатора и, следовательно его амплитуда растет с увеличением частоты при неизменной амплитуде напряжения.

Для понимания структуры выражения для Z рассмотрим сдвиги фаз напряжений на отдельных участках цепи по отношению к току и построим векторную диаграмму для анализируемой цепи. Здесь и в последующем диаграмму будем строить для действующих величин.

Направим вектор тока $\bar{I}$ по вертикальной оси *Напряжение на участке с сопротивлением r*

$$u_r = ri = rI_m \sin \omega t$$

совпадает по фазе с током, и поэтому вектор этого напряжения $\overline{U_r}$ направлен вдоль вектора тока.

Напряжение на участке с индуктивностью L

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

опережает ток на угол $\frac{\pi}{2}$, и вектор этого напряжения $\overline{U}_L$ должен быть повернут относительно вектора тока на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении.

Напряжение на участке с емкостью C

$$u_C = \frac{1}{C}\int i dt = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

отстает от тока на угол $\frac{\pi}{2}$, и вектор этого напряжения $\overline{U}_C$должен быть повернут относительно вектора тока на угол $\frac{\pi}{2}$ в отрицательном направлении.

Положительным направлением считается вращение системы векторов $\overline{U_r}, \overline{U}_L, \overline{U}_C$ против часовой стрелки с угловой скоростью ω.

Складывая геометрически векторы напряжений на участках цепи $\overline{U_r}, \overline{U}_L,$и$\overline{U}_C$ получим вектор напряжения $\overline{U}$ на зажимах всей цепи, который сдвинут по отношению к вектору тока $\bar{I}$ на угол φ

3.3. **Установившийся синусоидальный ток в цепи с параллельным соединением *g, L* и *C***

Рассмотрим цепь, состоящую из трех параллельно соединенных участков. Первый участок обладает активной проводимостью g, второй – только емкостью C и третий – только индуктивностью L.

Применим первый закон Кирхгофа для узла $i_g + i_C + i_L = i$ (4.3.1.)

Токи в ветвях можно выразить через приложенное к узлу напряжение. Ток в первой ветви $i_g = gu$ где g – проводимость первого участка. Ток во второй ветви $i_C = C\dfrac{du}{dt}$ Ток в третьей ветви $i_L = \dfrac{1}{L}\int udt$. Пусть к цепи описываемой уравнением $gu + C\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{L}\int udt = i$ приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin\omega t$. При этом ток i также будет синусоидальным и может быть представлен в виде $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$.

Подставим эти выражения в уравнение (4.3.1.), получим

$$gU_m \sin\omega t + \omega C U_m \cos\omega t - \frac{1}{\omega L} U_m \cos\omega t = I_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (4.3.2.)$$

Аналогично анализу последовательного соединения r, L и C подставим в (4.3.2.) $\omega t = \dfrac{\pi}{2}$ и $\omega t = 0$, что даёт $gU_m = I_m \cos\varphi$ $\left(\dfrac{1}{\omega L} - \omega C\right) U_m = I_m \sin\varphi$. Сложив квадраты этих равенств, получим $I_m = U_m \sqrt{g^2 + \left(\dfrac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$

Величину $y = \dfrac{I_m}{U_m} = \dfrac{\bar{I}}{\bar{\bar{U}}} = \sqrt{g^2 + \left(\dfrac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$ называют *полной проводимостью* цепи.

При этом $b_L = 1/\omega L$ - *индуктивная проводимость*, а $b_C = \omega C$ - ёмкостная проводимость. Для построения векторной диаграммы необходимо учесть тот факт, что ток через активную проводимость g совпадает по фазе с приложенным к зажимам анализируемой цепи напряжением. Ток через емкостную проводимось опережает по фазе напряжение, так как $\omega C U_m \cos\omega t = \omega C U_m \sin(\omega t + \dfrac{\pi}{2})$.

Ток через индуктивную проводимость отстает по фазе от напряжения, так как $-\dfrac{1}{\omega L} U_m \cos\omega t = \dfrac{1}{\omega L} U_m \sin(\omega t - \dfrac{\pi}{2})$.

3.4. **Активная, реактивная и полная мощность**

Активной мощностью $\boldsymbol{P}$ в электрической цепи при периодических процессах называют среднее значение мощности за полный период:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T pdt = \frac{1}{T}\int_0^T uidt,$$

где $p = ui$ - *мгновенная мощность*.

Для синусоидальных тока $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ и напряжения $u = U_m \sin \omega t$ получим $P = \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T 2\sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt = \frac{\overline{UI}}{T} \int_0^T [\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] dt$ Учитывая, что

$\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt = 0$, получим выражение для активной мощности при синусоидальном процессе: $P = \bar{U}\,\bar{I} \cos\varphi$.

Множитель $\cos\varphi$ называют *коэффициентом мощности*. Так как $\cos\varphi \le 1$ то $P \le \bar{U}\,\bar{I}$. Только в предельном случае, когда полное сопротивление или проводимость имеют чисто активный характер, $\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 1$, имеем $P = \bar{U}\,\bar{I}$
В другом предельном случае, когда $\varphi = \pm\pi/2$ и $\cos\varphi = 0$, что соответствует чисто реактивному характеру полного сопротивления – проводимости, имеем P=0.

Подавляющее большинство промышленных потребителей электрической энергии переменного тока с частотой 50 Гц имеют активно – индуктивный характер входного сопротивления приемников энергии. Следовательно, $\varphi > 0$ и радикальной мерой повышения $\cos\varphi$ может быть установка параллельно таким потребителям конденсаторов соответствующей ёмкости. При $\cos\varphi = 1$ потребляется наибольшая активная мощность, определяемая в дальнейшем как полная мощность $S = \bar{U}\,\bar{I}$. При $\cos\varphi \ne 1$ полная мощность $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ где $P = S\cos\varphi$ - активная мощность, а $Q = S\sin\varphi$ - реактивная мощность.

3.5. **Комплексный метод расчета электрических цепей При установившихся синусоидальном и постоянном токах**

Составление интегро-дифференциальных уравнений по первому и второму законам Кирхгофа с последующим их решением для синусоидальных токов и напряжений, каждый из которых при заданной частоте ω определяется двумя величинами – *амплитудой и начальной фазой*, становится весьма громоздким и трудоёмким для цепей более разветвленных, чем простое последовательное или параллельное соединение *r, L, C* элементов.

Существенное упрощение достигается изображением синусоидальных функций времени комплексными числами $\dot{A}$, так как каждое комплексное число определяется *двумя* величинами – *модулем* $|A|$ и *аргументом* φ_A при показательной форме записи $\dot{A} = |A| e^{j\varphi_A}$ или *действительную* $a_1 = |A|\cos\varphi_A$ и *мнимую* $ja_2 = j|A|\sin\varphi_A$ составляющие при алгебраической и тригонометрической формах записи $\dot{A} = a_1 + ja_2 = |A|\cos\varphi_A + j|A|\sin\varphi_A$,
где $j = \sqrt{-1}$ и e – основание натуральных логарифмов. Этот метод, основанный на *символическом* изображении действительных синусоидальных функций времени комплексными числами получил широкое распространение для

анализа процессов в электрических цепях.

Для вещественной и мнимой частей комплексного числа употребляются также обозначения $a_1 = \mathrm{Re}(\dot{A})$, $a_2 = \mathrm{Im}(\dot{A})$. Это позволяет установить следующие связи: $a_1 = \mathrm{Re}(\dot{A}) = |A|\cos\varphi_A$; $a_2 = \mathrm{Im}(\dot{A}) = |A|\sin\varphi_A$; $|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$; $\varphi_A = arctg\,\dfrac{a_2}{a_1}$

Отметим также, что $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$; $\dfrac{1}{j} = -j = e^{-\frac{\pi}{2}}$; $j^2 = -1$

Тогда синусоидально изменяющийся ток $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ можно представить в форме

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2j}\left[I_m e^{j(\omega t+\varphi)} - I_m e^{-j(\omega t+\varphi)}\right] = \mathrm{Im}\left[I_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right],$$

что видно также из соотношения $I_m e^{j(\omega t+\varphi)} = I_m\cos(\omega t+\varphi) + jI_m \sin(\omega t+\varphi)$.

Комплексное число $I_m e^{j(\omega t+\varphi)} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t}$ можно рассматривать теперь как символическое изображение действительного синусоидального тока $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, оно, также как и величина i определяется при заданной частоте ω *двумя* величинами – амплитудой I_m и начальной фазой φ. Комплексное число $I_m e^{j\varphi}$ имеет смысл *комплексной амплитуды* тока.

Подставим символическое изображение действительного тока и напряжения в известные формулы, связывающие токи и напряжения в *r, L, C* элементах. Тогда $i_c = C\dfrac{du_c}{dt}$ может быть преобразовано к следующему виду: $\dot{I}_{mC}\, e^{j\omega t} = j\omega C \dot{U}_{mC}\, e^{j\omega t}$, сокращая $e^{j\omega t}$, получим ёмкостную проводимость $b_C = \dfrac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = j\omega C$. Аналогично $u_c = \dfrac{1}{C}\int i_C dt,$ может быть преобразовано к виду $X_C = \dfrac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = -j\dfrac{1}{\omega C}$. А также $u_L = L\dfrac{di_L}{dt}$ даст $X_L = \dfrac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = j\omega L$. Индуктивная проводимость запишется соответственно $b_L = \dfrac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = -j\dfrac{1}{\omega L}$ Следовательно полное сопротивление последовательного соединения *r,L,C* элементов может быть получено из выражения $\dot{I}_m\left(r + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C}\right) = \dot{U}_m$ или $\dot{I}_m = \dfrac{\dot{U}_m}{r + j\omega L + 1/(j\omega C)}$

Из последнего уравнения определяется комплексная амплитуда тока $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$, найдя которую, можно сразу написать выражение для мгновенного тока установившегося режима: $i = \mathrm{Im}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

При необходимости вместо комплексных амплитуд рассматривают *комплексные действующие величины*: $\dot{I} = \dfrac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \bar{I}\, e^{j\varphi_i}$; $\dot{U} = \dfrac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = \bar{U}\, e^{j\varphi_u}$.

Оперируя в дальнейшем только действующими токами и напряжениями и их начальными фазами будем для краткости именовать их *комплексным током, напряжением* или *э.д.с.* опуская множитель $e^{j\omega t}$

3.6. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Отношение комплексного напряжения $\dot{U}$ к комплексному току $\dot{I}$ называют *комплексным сопротивлением* цепи и обозначают Z

Тогда $Z = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = ze^{j\varphi} = z\cos\varphi + jz\sin\varphi = r + jx$, где r, x и z - активное, реактивное и полное сопротивление цепи, а z и φ - модуль и аргумент комплексного сопротивления.

Отношение комплексного напряжения $\dot{I}$ к комплексному току $\dot{U}$ называют *комплексной проводимостью* цепи и обозначают Y В этом случае имеем

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{ze^{j\varphi}} = ye^{-j\varphi} = y\cos\varphi - jy\sin\varphi = g - jb,$$

где g, b и y - активная, реактивная и полная проводимость цепи.

Следует отметить очевидную связь $ZY = 1$ или $(r + jx)(g - jb) = 1$.
Выражения *закона Ома* к комплексной форме имеют вид

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z};\ \dot{U} = \dot{I}Z;\ \dot{U} = \frac{\dot{I}}{Y};\ \dot{I} = \dot{U}Y.$$

Первый закон Кирхгофа в применении к узлу цепи, для мгновенных значений тока $\sum_{k=1}^{n} i_k = 0,$ в комплексной форме записывается в виде $\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$.

Второй закон Кирхгофа в применении к контуру цепи, для мгновенных *э.д.с.* и падений напряжений $\sum_{k=1}^{n} ir_k + \sum_{l=1}^{m} L_l \dfrac{di}{dt} + \sum_{j=1}^{f} \dfrac{1}{C_j}\int_0^t idt = \sum_{q=1}^{p} e_q(t)$, в комплексной форме запишется в виде $\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k Z_k = \sum_{q=1}^{p} \dot{E}_q$, где $\dot{E}_q, \dot{I}_k$ и Z_k - комплексные *э.д.с.*,ток и сопротивление k-й ветви, входящей в контур.

Для вычисления активной и реактивной мощности необходимо знать действующие напряжение $\bar{U}$ и ток $\bar{I}$ и разность фаз φ между ними. Величина φ равна разности начальных фаз напряжения и тока $(\varphi = \varphi_U - \varphi_I)$. Поэтому необходимо перемножить не комплексные величины $\dot{U}$ и $\dot{I}$, так как при этом аргумент произведения $\dot{U}\dot{I}$ будет равен сумме $\varphi_U + \varphi_I$, а взять произведение одной из этих величин на сопряженную комплексную другую величину. Получаем в результате такого перемножения *комплексную мощность*

$$\dot{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = \bar{U}e^{j\varphi_U}\,\bar{I}e^{-j\varphi_I} = \bar{U}\bar{I}e^{j\varphi} = \bar{U}\bar{I}\cos\varphi + j\bar{U}\bar{I}\sin\varphi = P + jQ.$$

3.7. Резонанс в случае последовательного соединения *r, L, C*

Комплексное сопротивление цепи, состоящей из последовательно соединенных *r,L,C* сосредоточенных элементов (рис.6.1), определяется как

$$Z = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + jx = ze^{j\varphi}; \qquad (*.**)$$

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C};\; z = \sqrt{r^2 + x^2};\; \varphi = arctg\frac{\omega L - 1/\omega C}{r}.$$

Резонанс имеет место, если $\varphi = 0$, что соответствует равенству индуктивного и емкостного сопротивления $\omega L = 1/\omega C$ или $\omega^2 LC = 1$. Резонанса можно достичь, изменяя или частоту приложенного к цепи напряжения, иди индуктивность катушки, или емкость конденсатора. При этом значение угловой частоты, индуктивности и емкости, при которых наступает резонанс определяются формулами: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$; $C = \frac{1}{\omega_0^2 L}$

Рассмотрим зависимость от частоты нормированного значения тока $\dot{I}/\dot{I}_0$ где $\dot{I}_0 = \dot{U}/r$ ток на резонансе, определенный при $\omega = \omega_0$. Имеем

$$\frac{\dot{I}}{\dot{I}_0} = \frac{r}{z} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\omega_0 L}{r}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^2}},$$

где $Q = \rho / r$ - добротность резонансного контура;

$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ - характеристическое (волновое) сопротивление ;

$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ - относительная расстройка, и $\xi = \nu Q$ - обобщенная расстройка.

Тогда зависимость нормированного значения тока $\dot{I}/\dot{I}_0$ от относительной частоты $\eta = \omega/\omega_0$ для различных значений добротности (резонансные кривые) приведены на рис. 6.1 Максимальное значение $\dot{I}/\dot{I}_0 = 1$ на резонансной частоте при расстройке $\xi = \pm 1$ уменьшается до $\dot{I}/\dot{I}_0 = 1/\sqrt{2} = 0.707$. Также при этой расстройке фазовый сдвиг между током и напряжением $\varphi = \pm 45^\circ$. Именно по уровню 0.707 от максимума принято определять полосу пропускания резонансного контура, состоящего как из последовательного так и параллельного соединения *r,L,C* сосредоточенных элементов. Для добротностей $Q >> 1$ действует приближенное соотношение $2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm 1$ откуда $|2\Delta\omega| = \frac{\omega_0}{Q}$ - полоса пропускания контура тем меньше чем выше добротность последнего.

3.8. Резонанс в случае параллельного соединения *r, L, C*

Для параллельного соединения катушки индуктивности с потерями и конденсатора с потерями (рис.6.2) определим резонансную частоту и входное сопротивление на этой частоте. Комплексная проводимость этой цепи имеет вид $Y = Y_1 + Y_2 = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} = \dfrac{1}{r_1 + j\omega L} + \dfrac{1}{r_2 - j1/(\omega C)} = g - jb$,

где $g = \dfrac{r_1}{r_1^2 + \omega^2 L^2} + \dfrac{r_2}{r_2^2 + 1/(\omega^2 C^2)}$ и $b = \dfrac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} - \dfrac{1/(\omega C)}{r_2^2 + 1/(\omega^2 C^2)}$.

Условием резонанса будет $b = 0$, и формула для резонансной частоты цепи имеет вид $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{(L/C - r_1^2)/(L/C - r_2^2)}$. В практически важных случаях r_2 можно пренебречь, тогда $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{r_1^2}{L^2}}$. Сопротивление этой цепи при условии $\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}} >> r_1$ оказывается равным $r = \dfrac{1}{g} = \dfrac{r_1^2 + \omega_0^2 L^2}{r_1} = \dfrac{1}{r_1}\dfrac{L}{C} = \dfrac{\rho^2}{r_1} = \rho Q$

Приложение: $\dfrac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} - \dfrac{1/(\omega C)}{r_2^2 + 1/(\omega^2 C^2)} = -\omega L(1 + r_2^2\omega^2 C^2) + \omega C(r_1^2 + \omega^2 L^2)$

$$-\frac{L}{C}(1 + r_2^2\omega^2 C^2) + (r_1^2 + \omega^2 L^2) = 0; \omega^2 LC(-r_2^2 + \frac{L^2}{LC}) = -r_1^2 + \frac{L}{C};$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{(L/C - r_1^2)/(L/C - r_2^2)}.$$

Важными для решения практических задач построения частотно-избирательных цепей являются следующие формулы:

- для последовательного колебательного контура

$\dfrac{d}{d\omega}\left(r + j(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})\right) = L + \dfrac{1}{\omega^2 C} = L(1 + \dfrac{1}{\omega^2}\dfrac{1}{LC}) = 2L$ на резонансной частоте;

- для параллельного колебательного контура

$\dfrac{d}{d\omega}\left(g + j(\omega C - \dfrac{1}{\omega L})\right) = C + \dfrac{1}{\omega^2 L} = C(1 + \dfrac{1}{\omega^2}\dfrac{1}{LC}) = 2C$ на резонансной частоте.

Эти формулы позволяют определить характеристическое сопротивление или проводимость резонансной цепи любого происхождения и конструкции, установив их соответствие соответствующим колебательным контурам на сосредоточенных реактивных элементах.

Лекция № 4

ЗАКОНЫ И ПАРАМЕТРЫ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

4.1. Законы Ома и Кирхгофа для магнитных цепей постоянного тока

Пути, по которым организуется протекание электрического тока и замыкание линий электромагнитной индукции, имеют существенно различающиеся от окружающей среды параметры. Так удельная проводимость меди составляет $\sigma_{Cu} = 5.8 \cdot 10^7 См$, а для распространенного изолирующего материала – кабельной бумаги $\sigma_{бумаги} = 10^{-13} См$. Тогда $\sigma_{Cu} / \sigma_{бумаги} = 5.8 \cdot 10^{20}$. Для магнитных цепей столь большого различия между относительными магнитными проницаемостями μ_r ферромагнитных материалов участков магнитной цепи, которые собственно и служат для замыкания и концентрации магнитных силовых линий, и μ_r окружающей среды, чаще всего воздуха, уже нет. Их отношение имеет обычно порядок $\mu_{ФЕРРО,} / \mu_{ВОЗДУХА} = 10^3 \div 10^4$, а при насыщении ферромагнитных материалов становится еще меньше. При этом значительная магнитного потока ответвляется от основной магнитной цепи и проходит через воздух в виде так называемого потока рассеяния.

В общем случае, даже короткие магнитные цепи, следует рассматривать как *магнитные цепи с распределенными параметрами* и для их анализа применять уравнения Максвелла. Однако пренебрегая потоками рассеяния, можно ограничиться рассмотрением магнитной цепи с сосредоточенными параметрами. Рассмотрим неразветвленную магнитную цепь (рис.*.**), магнитный поток $\boldsymbol{\Phi}$ которой одинаков во всех сечениях цепи. Тогда отношение магнитодвижущей силы (м.д.с.) $iw = \oint_l Hdl$, к магнитному потоку $\boldsymbol{\Phi}$ называют магнитным сопротивлением $R_m = \dfrac{iw}{\Phi}$. Соотношение $\Phi = \dfrac{iw}{R_m}$ *является законом магнитной цепи*. Оно по форме аналогично закону Ома для замкнутой электрической цепи при постоянном токе: *I=U/ R*.

Всю *м.д.с.* вдоль замкнутой магнитной цепи представим в виде суммы м.д.с. на отдельных разнородных участках магнитной цепи, так как интеграл $\oint_l Hdl$ вдоль замкнутого пути может быть представлен в виде суммы интегралов вдоль отдельных участков этого пути. Для устройства такими участками является ферромагнитный сердечник со средней длиной $l_{ФЕРРО,}$ и воз- душный промежуток длиной *δ*. Получим $\oint_l Hdl = \oint_{l_{ФЕРРО.}} Hdl + \oint_{\delta} Hdl = F_{m1} + F_{m2}$.

Тогда получим:

$$R_m = \frac{\oint_l Hdl}{\Phi} = \frac{F_{m1}}{\Phi} + \frac{F_{m2}}{\Phi} = R_{m1} + R_{m2},$$

где R_{m1} - магнитное сопротивление сердечника, а R_{m2} - магнитное сопротивление воздушного зазора. Если сечение *s* участка магнитопровода постоянно и напряженность магнитного поля, магнитная индукция и соответственно магнитная проницаемость μ_r в пределах сечения можно считать одинаковыми, это позволяет применить приближенные выражения:

$\Phi = \oiint\limits_S Bds \approx Bs = \mu_0 \mu_r Hs$ и $\oint\limits_l Hdl \approx H_{СРЕД.} l_{СРЕД.}$, где $l_{СРЕД.}$ - средняя длина вдоль участка.

Основываясь на этих допущениях для магнитопровода, получим:

$$R_{m1} \approx \frac{Hl_{ФЕРРО.}}{\mu_0 \mu_r Hs} = \frac{l_{ФЕРРО.}}{\mu_0 \mu_r s}. \qquad (3.1)$$

Определение по формуле (3.1) магнитного сопротивления R_{m2} воздушного зазора будет иметь еще более приближенный характер и требует расчета картины поля с помощью уравнений Максвелла в зависимости от величины зазора $\delta \approx \sqrt{s}$. В результате для замкнутого контура магнитной цепи получим

$$\oint\limits_l Hdl \approx iw = F_{m1} + F_{m2} = R_{m1}\Phi + R_{m2}\Phi = \sum_{k=1}^{2} R_{mk}\Phi.$$

В рассмотренном примере одноконтурной магнитной цепи поток ***Ф*** во всех участках цепи один и тот же.

Для разветвленной магнитной цепи $\oiint\limits_s Bds = \sum\limits_{k=1}^{n} \Phi_k = 0$, т.е. алгебраическая сумма магнитных потоков в узле равна нулю (аналог первого закона Кирхгофа для электрических цепей). Для любого контура разветвленной магнитной цепи $\sum\limits_{i=1}^{n} i_i w_i = \sum\limits_{k=1}^{f} R_{mk}\Phi_k$, т.е. *м.д.с.* вдоль замкнутого контура магнитной цепи равна сумме произведений R_m на магнитный поток во всех участках цепи, входящих в этот контур (аналог второго закона Кирхгофа для электрических цепей).

Следовательно, расчет магнитных цепей, если можно пренебречь потоками рассеяния, аналогичен расчету электрических цепей, линейных или нелинейных, с сосредоточенными параметрами, причем *м.д.с.* *iw* соответствует *э.д.с.*, потоку ***Ф*** соответствует ток *i* и магнитному сопротивлению R_m соответствует электрическое сопротивление *r*.

4.2. Свойства ферромагнитных материалов

Свойства ферромагнитных материалов характеризуются кривыми намагничивания, представляющими собой зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля *B(H)*. Если исследуемый магнитопровод был размагничен, то при увеличении *H* индукция *B* изменяется в соответствии с кривой *1* первоначального намагничивания (рис*.**). Последней соответствует на том же рисунке кривая *2* изменения магнитной проницаемости $\mu_r(H)$, построенная согласно формуле $\mu_r \mu_0 = B/H$.

При относительно небольших напряженностях, когда материал еще не насыщен (участок *0a*), увеличение *H* сопровождается значительным увеличением *B*. Именно на этом участке $\mu_r\mu_0 = B/H$ и $\mu_r >> 1$. Максимальному значению магнитной проницаемости соответствует точка *A*, которая может быть получена, если через начало координат провести касательную к кривой *B*.

С увеличением *H* на участке *ab* материал все более насыщается и темп роста *B* снижается. На участке *bc* увеличение напряженности приводит к весьма малым приращениям магнитной индукции.

При уменьшении напряженности магнитная индукция изменяется в соответствии с кривой *3*. Если напряженность уменьшить до нуля, материал окажется намагниченным. Магнитная индукция B_r при $H = 0$ называется индукцией остаточного намагничивания.

Различают магнитно-мягкие и магнитно-твердые ферромагнитные материалы. К первым относятся чистое железо, углеродистые электротехнические стали, сплавы железа и никеля, некоторые химические соединения железа. Магнитно-мягкие материалы характеризуются относительно малой величиной H_c и небольшой площадью циклов гистерезиса. Магнитно-мягкие материалы применяются для изготовления магнитных цепей электрических машин, трансформаторов и разнообразных электротехнических устройств.

К магнитно-твердым материалам относятся сплавы железа с алюминием, хромом и вольфрамом, содержащие различные присадки (самарий, кобальт, неодим). Магнитно-твердые материалы характеризуются относительно большими значениями B_r и H_c и применяются

для изготовления постоянных магнитов.

На рис.3.1 приведены магнитные характеристики магнитопровода с воздушным зазором. Соотношение между магнитным потоком и *м.д.с.* или током и, следовательно, формой магнитной характеристики существенно зависят от параметров магнитопровода, особенно от длины воздушного зазора.

Для получения того же магнитного потока при введении в магнитную цепь воздушного зазора требуются значительно большие значения *м.д.с* и тока, поскольку в данном случае $i = (H \cdot l + H_\delta \cdot l_\delta)/w$ и обычно $H_\delta >> H$. Как видно из графиков, при увеличении воздушного зазора магнитные характеристики все больше спрямляются.

Тема № 5

ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

5.1.Потокосцепления самоиндукции и взаимоиндукции

При рассмотрении цепей установившегося синусоидального тока до сих пор учитывалось явление *самоиндукции*, т.е. наведение э.д.с. в электрической цепи при изменении потокосцепления самоиндукции, обусловленного током в этой цепи. Отношение потокосцепления самоиндукции к току характеризовалось скалярной величиной – индуктивностью L.

Явление *взаимной индукции*, т.е. наведение э.д.с. в электрической цепи при изменении потокосцепления взаимной индукции, обусловленного током в другой электрической цепи лежит в основе функционирования *индуктивно связанных* (трансформирующих) *цепей*.

Связь потокосцепления взаимной индукции одной электрической цепи с током в другой цепи, равная отношению потокосцепления взаимной индукции в одной цепи к току в другой цепи, характеризуется *взаимной индуктивностью* M, которая как и индуктивность L, представляет собой скалярную величину.

Если потокосцепление $w_1\Phi_{M2}$ первой цепи обусловлено током i_2 второй цепи, то взаимная индуктивность определяется как $M_{12} = \dfrac{w_1\Phi_{M2}}{i_2}$

Соответственно если потокосцепление $w_2\Phi_{M1}$ первой цепи обусловлено током i_1 первой, то $M_{21} = \dfrac{w_2\Phi_{M1}}{i_1}$. Для линейных электрических цепей всегда выполняется равенство $M_{12} = M_{21}$, и поэтому индексы у параметра взаимной индуктивности могут быть опущены.

На рис. 5.1, *а* и *б* показаны индуктивно связанные катушки, намотанные на общий магнитопровод (каркас). Здесь в зависимости от направления намотки витков выбраны такие положительные направления для токов i_1 и i_2, при которых магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке совпадают.

При согласном направлении токов i_1 и i_2 в двух индуктивно связанных катушках выводы этих катушек, относительно которых токи i_1 и i_2 направлены одинаково, называются *одноименными* или *однополярными*. Эти выводы отмечены точками.

Таким образом, *одноименные выводы индуктивно связанных катушек характерны тем, что при одинаковом направлении токов* i_1 *и* i_2 *относительно этих выводов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке складываются.*

Рассмотрим последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек). При согласном направлении токов э.д.с. взаимной индукции $e_{1M} = -M\dfrac{di_2}{dt}$ и $e_{2M} = -M\dfrac{di_1}{dt}$, совпадающие по направлению с токами, могут быть при обходе контура в том же направлении заменены падениями напряжения от взаимной индукции $u_{1M} = -e_{1M}$ и $u_{2M} = -e_{2M}$. Поэтому суммарное напряжение на обеих катушках с учетом того, что $i_1 = i_2 = i$, равно:

$$u_{согл.} = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}.$$

Полученное выражение показывает, что две индуктивно связанные катушки, соединенные последовательно, при согласном направлении токов эквивалентны катушке, имеющей активное сопротивление $r_1 + r_2$ и индуктивность $L_1 + L_2 + 2M$.

Таким образом, *наличие взаимной индукции при согласном направлении токов в катушках, соединенных последовательно, увеличивает индуктивность цепи*.

При встречном направлении токов падение напряжения от взаимной индукции при обходе контура в направлении тока получается со знаком минус:

$$u_{встреч.} = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}.$$

Следовательно, *наличие взаимной индуктивности при встречном направлении токов в катушках, соединенных последовательно, уменьшает индуктивность цепи.*

5.2. Коэффициент индуктивной связи. Индуктивность рассеяния

Рассмотрим картину магнитного поля индуктивно связанных катушек, схематически представленную на рис.5.2 (для согласного направления токов).

Если первичную обмотку с числом витков w_1 включить в сеть переменного тока, то напряжение сети с комплексной амплитудой $\dot{U}_1$ вызовет в ней ток i_1 и *м.д.с.* $i_1 w_1$ создаст переменный магнитный поток *Ф*. Переменный магнитный поток *Ф* создаст в обмотке w_1 *э.д.с.* e_1, а в обмотке w_2 *э.д.с.* e_2. Когда вторичная цепь нагружена на приемник электрической энергии *э.д.с.* e_2 вызовет в ней ток i_2. Таким образом электрическая энергия первичной цепи с параметрами $\dot{I}_1 \dot{U}_1$ и частотой *f* преобразуется в энергию переменного тока вторичной цепи с параметрами $\dot{I}_2$ $\dot{U}_2$ и той же частотой *f* При условии, что магнитный поток охватывает целиком витки обеих катушек.

В общем случае, когда по обеим катушкам протекают токи i_1 и i_2, магнитные потоки могут быть представлены как результат наложения потоков, создаваемых каждым током в отдельности.

На рис.5.3 приняты следующие обозначения магнитных потоков:

Φ_1 - весь поток, созданный током i_1 первой катушки;

Φ_{M1} - поток взаимной индукции первой катушки, пронизывающий витки второй катушки;

Φ_{S1} - поток рассеяния первой катушки, пронизывающий витки только витки этой катушки;

$\Phi_2, \Phi_{м2}, \Phi_{S2}$ - аналогичные потоки, созданные током i_2 второй катушки;

Φ_M - общий поток взаимной индукции, пронизывающий витки обеих катушек.

Из этого следует, что $\Phi_1 = \Phi_{S1} + \Phi_{M1}$; $\Phi_2 = \Phi_{S2} + \Phi_{M2}$; $\Phi_M = \Phi_{M1} + \Phi_{M2}$.

Чем меньше потоки рассеяния Φ_{S1} и Φ_{S2}, тем больше приближается Φ_{M1} к Φ_1 и соответственно Φ_{M2} к Φ_2. Тогда индуктивности первичной и вторичной обмоток (индуктивно связанных катушек) могут быть представлены в виде:

$$L_1 = \frac{w_1\Phi_1}{i_1} = \frac{w_1\Phi_{S1}}{i_1} + \frac{w_1\Phi_{M1}}{i_1};$$

$$L_2 = \frac{w_2\Phi_2}{i_2} = \frac{w_2\Phi_{S2}}{i_2} + \frac{w_2\Phi_{M2}}{i_2}.$$

Первые слагаемые этих выражений $L_{S1} = \frac{w_1\Phi_{S1}}{i_1}$ и $L_{S2} = \frac{w_2\Phi_{S2}}{i_2}$ называются *индуктивностями рассеяния* трансформатора (индуктивно связанных катушек), которые можно выразить через L_1, L_2 и M следующими формулами:

$$L_{S1} = L_1 - \frac{w_1}{w_2}M\ ;\ L_{S2} = L_2 - \frac{w_2}{w_1}M\ .$$

Степень индуктивной связи двух катушек характеризуется *коэффициентом связи* k, определяемых как среднее геометрическое из отношений потока взаимной индукции ко всему потоку связанных катушек:

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{M1}}{\Phi_1}\frac{\Phi_{M2}}{\Phi_2}} \text{ или } k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}. \quad (5.1)$$

Из формулы (5.1) видно, что *коэффициент связи всегда меньше единицы*, но возрастает с уменьшением потоков рассеяния Φ_{S1} и Φ_{S2}.

Повышение коэффициента связи достигается бифилярным способом намотки катушек и применением магнитопровода с большим μ_r, что снижает потоки рассеяния. При перпендикулярном расположении осей катушек коэффициент связи обращается в нуль. Вращая одну катушку относительно другой можно плавно изменять коэффициент связи в широких пределах, а при последовательном соединении катушек их результирующую индуктивность. Такое устройство называется *вариометром*. При наличии магнитопровода цепь может утратить свойство линейности, если магнитная индукция выйдет за пределы прямолинейного участка кривой намагничивания.

5.3. Трансформатор с линейными характеристиками. Идеальный трансформатор

В настоящем параграфе рассматривается двухобмоточный трансформатор без магнитопровода или если кривая намагничивания магнитопровода линеаризована воздушным зазором оптимальной величины.

Если пренебречь распределенными емкостями, существующими как между витками каждой из обмоток трансформатора, так и между самими обмотками и обмотками и землей, то трансформатор может быть представлен схемой рис.5.2, в которой активные сопротивления обмоток условно вынесены и изображены отдельно. При заданной полярности выводов обмоток трансформатора (рис.5.2) токи направлены встречно.

Уравнения, согласно второму закону Кирхгофа, для синусоидальных токов установившегося режима для комплексных амплитуд запишутся следующим образом:

$$\dot{U}_1 = (r_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2;$$

$$-\dot{U}_2 = -j\omega M\dot{I}_1 + (r_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2.$$

Эти уравнения равносильны следующим:

$$\dot{U}_1 = [r_1 + j\omega(L_1 - M) + j\omega M]\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2;$$

$-\dot{U}_2 = -j\omega M\dot{I}_1 + [r_2 + j\omega(L_2 - M) + j\omega M]\dot{I}_2$, и являются уравнениями для контурных токов, которые соответствуют схеме рис.5.2.

Входящие в эту схему разности $L_1 - M$ и $L_2 - M$ имеют физический смысл только при одинаковом числе витков первичной и вторичной обмоток $(w_1 = w_2)$. В этом случае, согласно рис.*.**, они представляют собой индуктивности рассеяния L_{S1} и L_{S2} первичной и вторичной обмоток трансформатора.

При неодинаковых числах витков первичной и вторичной обмоток $(w_1 \neq w_2)$ на практике пользуются так называемой *приведенной* схемой замещения трансформатора (рис.5.3). Приведение заключается в том, что напряжение $\dot{U}_2$ и ток $\dot{I}_2$ заменяются величинами приведенными к первичной обмотке:

- напряжение $\dot{U}_2$ умножается на n;

- ток $\dot{I}_2$ делится на n.

Здесь $n = w_1 / w_2$- отношение чисел витков, которое называется *коэффициентом трансформации.*

Проделав необходимые преобразования получим:

$$\dot{U}_1 = (r_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 - j\omega M\frac{\dot{I}_2}{n};$$

$$-n\dot{U}_2 = -j\omega nM\dot{I}_1 + n^2(r_2 + j\omega L_2)\frac{\dot{I}_2}{n}, \text{ а также}$$

$$\dot{U}_1 = [r_1 + j\omega(L_1 - nM) +]\dot{I}_1 + j\omega nM\dot{I}_1 - j\omega M\frac{\dot{I}_2}{n};$$

$$-n\dot{U}_2 = -j\omega nM\dot{I}_1 + n^2[r_2 + j\omega(L_2 - M)]\frac{\dot{I}_2}{n} + j\omega nM\frac{\dot{I}_2}{n}.$$

Последние два уравнения позволяют построить схему замещения трансформатора, приведенную к первичной обмотке для контурных токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ рис.5.3.

Схема замещения содержит:

- сопротивление r_1 и индуктивность рассеяния L_{S1} первичной обмотки трансформатора;
- индуктивность $\frac{w_1}{w_2}M$ в поперечной ветви (эта ветвь называется *ветвью намагничивания*) ;
- сопротивление r_2 и индуктивность рассеяния L_{S2} вторичной обмотки, приведенные к первичной обмотке трансформатора, т.е. умноженные на $n^2 = (w_1 / w_2)^2$ (квадрат отношения витков).

Магнитодвижущая сила, определяющая общий магнитный поток, который пронизывает первичную и вторичную обмотки, при встречном направлении токов равна $i_1 w_1 - i_2 w_2 = \left(i_1 - \frac{w_2}{w_1} i_2\right) w_1 = \left(i_1 - \frac{i_2}{n}\right) w_1$. Ток $i_1 - \frac{i_2}{n}$ и соответствующий ему комплексный ток $\dot{I}_1 - \frac{\dot{I}_2}{n}$, который в схеме замещения трансформатора, приведенной к первичной обмотке, проходит через ветвь намагничивания, принять называть *намагничивающим током* трансформатора.

При $\dot{I}_2 = 0$ (режим холостого хода, когда разомкнута цепь вторичной обмотки трансформатора) эта обмотка не оказывает влияния на режим работы первичной обмотки. Тогда согласно схеме (рис.5.3) по цепи r_1, L_{S1} и $\frac{w_1}{w_2}M$ будет протекать ток намагничивания $\dot{I}_{10}$. Этот ток имеет малую, но конечную величину и определяет потери энергии, преобразуемой в тепло на r_1, потери вызванные вихревыми токами в магнитопроводе и магнитострикцию. Следует отметить, что в практических конструкциях разнообразных трансформаторов $\dot{I}_{10}$ стремятся сделать как можно меньше, но не ценой существенного увеличения объёма меди, алюминия и материала магнитопровода.

Трансформаторная э.д.с. $e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$, пропорциональная основному магнитно- му потоку, приблизительно равна напряжению на первичной обмотке $\dot{U}_1$. Действующее напряжение постоянно. Поэтому основной магнитный поток трансформатора остается неизменным при изменении сопротивления нагрузки от нуля до бесконечности.

Если $\Phi_M = const$, то сумма магнитодвижущих сил трансформатора

$$\dot{I}_1 w_1 - \dot{I}_2 w_2 = const = \dot{I}_{10} \cdot w_1$$

Далее получим: $\dot{I}_1 = \dot{I}_{10} + \dot{I}_2 \frac{w_2}{w_1} = \dot{I}_{10} + \dot{I}_2 \frac{1}{n}$ Тогда ток в первичной обмотке складывается из тока холостого хода (намагничивающего тока) и тока, компенсирующего размагничивающее действие вторичной обмотки.

При коротком замыкании вторичной обмотки $\dot{U}_2 = 0$ и ток $\dot{I}_1$ протекает по цепи содержащей r_1, L_{S1} и $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 L_{S2}$, $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 r_2^2$ так как $L_{S2} << M$. Следовательно опыты холостого хода и короткого замыкания позволяют определить для конкретного трансформатора следующие параметры:

- коэффициент трансформации по напряжению, без учета падения напряжения на r_1 и r_2, $n = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = w_1 / w_2$;
- индуктивность намагничивания трансформатора, приведенную в цепь первичной (вторичной) обмотки;
- индуктивность рассеяния трансформатора, приведенную в цепь первичной (вторичной) обмотки.

5.4. Специальные типы трансформаторов

Автотрансформатор – однообмоточный трансформатор. От двухобмоточного отличается тем, что вторичная обмотка является частью первичной и естественно, обмотки имеют не только магнитную, но и гальваническую связь.

Автотрансформатор целесообразно применять при малых коэффициентах трансформации $(n << 2)$. При малых коэффициентах трансформации на изготовление обмотки требуется значительно меньше по массе провода, чем на изготовление двухобмоточного трансформатора (при $n = 2$ примерно в два раза). При этом несколько снижается масса магнитопровода. По этой причине автотрансформатор значительно дешевле, меньше весит и имеет больший КПД, чем двухобмоточный. Однако автотрансформатор нельзя применять там, где по условиям техники безопасности или другим причинам недопустима гальваническая связь между первичными и вторичными обмотками. Электрическая схема однофазного автотрансформатора приведена на рис 5.5.

Режим холостого хода автотрансформатора, когда $\dot{I}_2 = 0$, ничем не отличается от режима холостого хода обычного трансформатора.

Подводимое к автотрансформатору напряжение $\dot{U}_1 = \dot{U}_{AB}$ равномерно распределяется между витками первичной обмотки.

Вторичное напряжение $\dot{U}_2 = \dot{U}_{AC} = \dot{U}_{AB} \frac{w_{AC}}{w_{AB}} = \frac{\dot{U}}{n_T}$, где $n_T = \frac{w_{AB}}{w_{AC}}$.

Импульсные трансформаторы предназначены для согласования источника и потребителя видеоимпульсов прямоугольной, треугольной или какой либо другой формы. Так как периодический импульсный сигнал может быть представлен в виде суммы гармоник ряда Фурье, и при прохождении этих гармоник через цепь состоящую из последовательно соединенных r_1, L_{S1} и $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 L_{S2}$, $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 r_2^2$ каждая из них изменит свою амплитуду и приобретет свой фазовый сдвиг. Также существенное влияние на прохождении импульсного сигнала окажет распределенная межвитковая, межобмоточная емкость. Эти три фактора приведут к искажению формы импульсного сигнала. Таким образом главным требованием к характеристикам импульсных трансформаторов является минимизация индуктивности рассеяния и паразитных емкостей

Тема №6

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

6.1. Классический метод расчета

Установившиеся режимы в линейных электрических цепях могут быть разделены на три вида:

- если в цепи действуют постоянные во времени э.д.с., то в установившемся режиме токи и напряжения во всех участках цепи должны быть также постоянными во времени;
- когда э.д.с. источников изменяются во времени по закону синуса с одной и той же частотой, то и токи и напряжения в цепи в установившемся режиме будут синусоидальными функциями времени той же частоты;
- если действующие в цепи э.д.с. несинусоидальны, но изменяются периодически во времени с одним и тем же периодом, то токи и напряжения должны быть периодическими функциями времени с тем же периодом.

Тогда *переходным* называется *процесс*, возникающий в электрической цепи при переходе от одного установившегося режима к другому. Отыскание токов и напряжений в установившемся режиме сводилось к нахождению частных решений интегро-дифференциальных уравнений цепи.

Для отыскания токов $i(t)$ и напряжений $u(t)$ в переходном процессе необходимо найти полные решения соответствующих уравнений цепи. Известно, что полное решение $i(t)$ линейного уравнения получается как сумма частного решения $i'(t)$ неоднородного уравнения, т.е. уравнения, содержащего заданные источники э.д.с. или тока, и решения $i''(t)$ однородного уравнения. Это уравнение получается из того же интегро-дифференциального уравнения цепи, если положить в нем возбуждающие э.д.с. и токи равными нулю.

При $t \to \infty$ ток $i''(t)$ стремится к нулю, так как процесс в цепи, обладающей конечным омическим сопротивлением должен затухать при отсутствии в цепи источников э.д.с. и тока. На этом основании ток $i''(t)$ называют *свободным током*, так как он определяется при отсутствии источников э.д.с. и тока.

Свободный ток возникает вследствие того, что при включении или выключении цепи или любом другом внезапном изменении в ней, возникает разница в количестве энергии электромагнитного поля, запасенного в реактивных элементах цепи. Так как свободный ток $i''(t)$ цепи с потерями стремится к нулю, то ток $i(t)$ стремится $i'(t)$. Поэтому частное решение $i'(t)$ является *током установившегося* режима, который устанавливается после произошедших изменений в цепи.

Назовём *коммутацией* любое изменение в цепи, приводящее к возникновению переходного процесса или изменению режима его работы, причем предположим, что это изменение происходит мгновенно, т.е. совершается за промежуток времени $\Delta t = 0$. Это может быть включение цепи под действие источника э.д.с. или отключение цепи от источника, замыкание цепи накоротко, скачкообразное изменение параметра цепи, изменение скачком частоты или фазы приложенного к цепи напряжения. Реальный процесс коммутации длится на самом деле конечное, хотя и малое время, однако не интересуясь процессом в течении этого времени Δt, и рассматривая процесс лишь после того, как коммутация закончилась, условимся далее начало отсчета времени $t = 0$ совмещать с моментом коммутации и обозначать через $t = (-0)$ момент времени, непосредственно прилегающий к *моменту коммутации* ***до коммутации***, и через $t = (+0)$ - момент времени, также непосредственно прилегающий к *моменту коммутации*, но ***после коммутации***.

В технически реализуемых электрических цепях не могут развиваться бесконечно большие напряжения или протекать бесконечно большие токи, мгновенная мощность p – величина всегда конечная, и поэтому в таких цепях не может быть мгновенного изменения накопленной в электрических и магнитных полях энергии. Обозначим изменение энергии во время коммутации за время $t \to 0$ $\Delta W = W(+0) - W(-0)$, тогда $\Delta W = p\Delta t \to 0$ и, следовательно, $W(+0) = W(-0)$.

Так как энергия электрического поля конденсатора и энергия магнитного поля катушки индуктивности равны: $W_э = C\frac{u_c^2}{2}$ и $W_м = L\frac{i_L^2}{2}$, то равенство $\Delta W = 0$ означает, что в момент коммутации выполняются условия: $u_C(+0) = u_C(-0)$ и $i_L(+0) = i_L(-0)$, т.е. *в момент коммутации остаются неизменными напряжения на обкладках конденсатора и токи в катушках индуктивности***.**

Следует отметить, что вышеизложенное справедливо только для идеальных элементов. Реальные катушки индуктивности содержат распределенную межвитковую емкость, а конденсаторы в зависимости от конструкции характеризуются частотой последовательного резонанса, определяемой индуктивностью обкладок.

Если до коммутации к моменту $t = (-0)$ протекали токи в катушках индуктивности и имелось напряжение на обкладках конденсаторов, определяемые процессом до коммутации, то имеют место *ненулевые начальные условия*, служащие для однозначного определения постоянных интегрирования уравнений цепи.

6.2. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками *r* и *L*

Практически распространенные случаи коммутации r L цепочки и источника э.д.с. относятся к операциям включения и отключения различных потребителей:

- статорные обмотки электрических машин постоянного и переменного тока;

- первичные и вторичные цепи трансформаторных источников питания;
- индуктивные накопители (дроссели) импульсных источников питания.

Тогда дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи (рис.7.1.) имеет согласно второму закону Кирхгофа вид $L\frac{di}{dt}+ri=u$,

где $u=u(t)$- напряжение на входных зажимах цепи. Соответствующее уравнение, определяющее свободный ток $i''(t)$ имеет вид $L\frac{di''}{dt}+ri''=0$ и его решение найдем в виде $i''(t)=Ae^{pt}$, где A постоянная интегрирования, а p корень характеристического уравнения $Lp+r=0$ равный $p=-r/L$. Поэтому $i''(t)=Ae^{-\frac{r}{L}t}$.

Выражение для установившегося тока $i'(t)$, является частным решением неоднородного уравнения (*.**) и определяется видом заданной функции $u(t)$

Ток в переходном процессе $i=i'+i''=i'+Ae^{-\frac{r}{L}t}$.

Постоянная интегрирования A определяется по начальному значению тока i

Определим процесс при включении рассматриваемой цепи под постоянное напряжение $u=U=const$ (рис.7.2.). Ток установившегося режима в данном случае равен $i'=U/r$. Следовательно $i=i'+i''=\frac{U}{r}+Ae^{-\frac{r}{L}t}$

Если до включения ток i был равен нулю $[i(-0)=0]$, то $i(+0)=i(-0)=0$, $U/r+A=0$ и $A=-U/r$. Таким образом $i=\frac{U}{r}\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right)=\frac{U}{r}\left(1-e^{\frac{t}{\tau}}\right)$, где $\tau=L/r$ имеет размерность времени и называется *постоянной времени цепи*. За промежуток времени τ ток убывает в e раз.

Напряжение на зажимах катушки при этом $u_L=L\frac{di}{dt}=L\frac{U}{r}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=Ue^{-\frac{t}{\tau}}$

Зависимости $i(t)$ и $u_L(t)$ представлены на рис. 7.3.

Определим процесс при выключении рассматриваемой цепи находящейся под постоянным напряжением (рис.7.4.) и параллельно соединенной с ней ветви с сопротивлением r_0. Постоянная времени цепи для свободного тока $i''(t)$ будет определена как $\tau=\frac{L}{r+r_0}$. Форма тока переходного процесса идентична (7.3.) До размыкания ключа в катушке протекал ток $i_L(-0)=U/r$. Следовательно постоянная интегрирования $A=i_L(+0)=i_L(-0)=U/r$. Так как ток установившегося режима в этом случае $i'(t)=0$ при $t\to\infty$, что практически достигается для $t=(3\div5)\tau$, то $i=\frac{U}{r}e^{-\frac{t}{\tau}}$

Напряжение на участке с сопротивлением r_0 до размыкания было равно U, а в первый момент после размыкания окажется равным $r_0 i(+0)=U\frac{r_0}{r}$. Когда энергия магнитного поля, запасенная в катушке, достаточно велика, а $r_0>>r$, повышение напряжения на размыкающемся ключе может привести к зажиганию дуги между механическими контактами, или электрическому пробою полупроводниковой структуры, выполняющей функцию ключа, если не предприняты специальные меры по её защите.

6.3. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками *r* и *L, C*

Процессы заряда и разряда конденсатора через цепочку *rL* и *r* характерны для процессов включения в сеть импульсных источников питания, заряда накопительных емкостей электрофизических установок, в частности, источников питания мощных газоразрядных лазеров. Так переходный процесс в цепи, состоящей из последовательно соединенных *r* и *C* может быть описан дифференциальным уравнением относительно напряжения на конденсаторе u_C

Тогда $i''_C r + u''_C = 0$. Так как $i''_C = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{d}{dt}u''_C$, то $rC\dfrac{du''_C}{dt} + u''_C = 0$

Характеристическое уравнение для решения $u''_C(t) = Ae^{pt}$ имеет вид $rCp + 1 = 0$ и имеет единственный корень $p = -1/(rC)$. Поэтому $u''_C = Ae^{-\frac{t}{rC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, где $\tau = rC$ - постоянная времени рассматриваемой цепи.

Для переходного процесса получим $u_C = u'_C + u''_C = u'_C + Ae^{-\frac{t}{rC}}$, причем уставившееся напряжение u'_C зависит от $u(t)$ на входных зажимах цепи, а постоянная интегрирования *A* определяется по начальным условиям.

Пусть цепь (*r,C*) замыкается накоротко, что соответствует равенству нулю напряжения *u*. Тогда для установившегося режима u'_C на обкладках конденсатора будем иметь $u'_C = 0$ и, следовательно $u_C = u''_C = Ae^{-\frac{t}{rC}}$ Если к моменту короткого замыкания напряжение на обкладках конденсатора было равно $u_C(-0) = U_0$, тогда из условия $u_C(+0) = u_C(-0)$, полагая в формуле для u''_C при $t = 0$ $u_C = U_0$ найдем $U_0 = A$.

Таким образом, $u_C = U_0 e^{-\frac{t}{rC}}$. Для тока разряда конденсатора получим

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{r}e^{-\frac{t}{rC}}$$

Согласно этому решению ток в начальный момент меняется скачком от нуля до $\dfrac{U_0}{r}$, это является следствием того, что свойства *r,C* элементов идеализированы, т.е. отсутствует присущая реальным элементам распределенная индуктивность.

Теперь рассмотрим процесс заряда конденсатора *C* от источника постоянного напряжения с внутренним сопротивлением *r* Пусть конденсатор до включения не был заряжен, т.е. $u_C(-0) = 0$.

Установившееся напряжение на обкладках конденсатора после завершения переходного процесса будет очевидно $u'_C = U$.

Таким образом $u_C = u'_C + u''_C = U + Ae^{-\frac{t}{rC}}$. Постоянную интегрирования A определим из условия $u_C(+0) = u_C(-0) = 0$ и, полагая в выражении для u_C $t = 0$, получим $0 = U + A$ или $A = -U$

Следовательно $u_C = U - Ue^{-\frac{t}{rC}} = U\left(1 - e^{-\frac{t}{rC}}\right)$.

Для тока в цепи получим $i_C = C\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{U_0}{r}e^{-\frac{t}{rC}}$

Из выражения для u_C следует, что напряжение на обкладках конденсатора и его заряд нарастают по тому же закону, что и ток в цепи (r,L) при включении ее под постоянное напряжение. Что же касается тока i то при включении цепи он сразу получает значение U/r, так как в момент $t = 0$ напряжение на обкладках равно нулю и ток в цепи определяется лишь напряжением U и сопротивлением r цепи. В дальнейшем напряжение на конденсаторе постепенно возрастает и ток в цепи убывает по тому же экспоненциальному закону, что и при разряде конденсатора.

Для исследования переходных процессов в цепи содержащей r,L,C сосредоточенные элементы при включении её под постоянное напряжение $U = const$ и нулевых начальных условиях, т.е. $i_L(-0) = 0$ и $u_C(-0) = 0$ необходимо преобразовать интегро-дифференциальное уравнение этой цепи

$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t idt + u_C(0) = u(t) \quad (7.1)$$

Дифференцируя обе части уравнения (7.1) получим уравнение второго порядка для свободного тока i'' в цепи $L\dfrac{d^2i''}{dt^2} + r\dfrac{di''}{dt} + \dfrac{i''}{C} = 0$. Разделив его на L имеем $\dfrac{d^2i''}{dt^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{di''}{dt} + \dfrac{i''}{LC} = 0$, где $\dfrac{r}{L} = 2\delta$ определяет скорость затухания переходного процесса, а $\dfrac{1}{LC} = \omega_0^2$ определяет резонансную частоту r,L,C цепи без потерь. Найдем решение для i'' в виде $i''(t) = Ae^{pt}$, тогда $\dfrac{di''}{dt} = Ape^{pt}$ и $\dfrac{d^2i''}{dt^2} = Ap^2e^{pt}$. После подстановки в уравнение для i'' и сокращения Ae^{pt} получим характеристическое уравнение в виде: $p^2 + \dfrac{r}{L}p + \dfrac{1}{LC} = 0$

Характеристическое уравнение имеет два корня

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\ .$$

Тогда ток переходного процесса имеет вид $i = i' + i'' = i' + A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}$. В данном случае ток установившегося режима $i' = 0$ при $t \to \infty$, так как цепь подключается к источнику постоянного напряжения $U = const$. Вид корней зависит от соотношения $\dfrac{\delta}{\omega_0} = \dfrac{r}{2\sqrt{L/C}} = \dfrac{r}{2\rho} = \dfrac{1}{2Q}$, где ρ и Q характеристическое сопротивление и добротность r,L,C цепи.

Для определения постоянных интегрирования получим систему алгебраических уравнений:

$$i = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\left(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}\right).$$

Так как $u_C(-0) = 0$ и $u(t) = U = const$, а все напряжение в момент коммутации приложено к индуктивности, получим $L(p_1 A_1 + p_2 A_2) = U$

Используя начальные условия для тока $i(-0) = 0$, также получим $A_1 + A_2 = 0$

Решая совместно, находим постоянные интегрирования A_1 и A_2:

$$A_1 = -A_2 = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} \quad .$$

Таким образом, $i = \dfrac{U}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$;

$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i dt + u_C(0) + U = \frac{U}{p_1 - p_2}\left(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}\right) + U \, .$$

Характер переходного процесса зависит от того, будут ли корни характеристического уравнения вещественными (при $\delta \geq \omega_0$) или комплексными (при $\delta < \omega_0$). В первом случае процесс заряда конденсатора апериодический а во втором случае – колебательный